

Méthode de type Galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki, Serge Piperno

▶ **To cite this version:**

Marc Bernacki, Serge Piperno. Méthode de type Galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique. RR-4932, INRIA. 2003. inria-00071647

HAL Id: inria-00071647
https://inria.hal.science/inria-00071647

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Méthode de type Galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki — Serge Piperno

N° 4932

Septembre 2003

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4932--FR

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Méthode de type Galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki , Serge Piperno

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 4932 — Septembre 2003 — 31 pages

Résumé : Nous présentons une nouvelle méthode de type Galerkin-discontinu appliquée à la résolution numérique des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme ou non. Nous utilisons une formulation centrée pour approcher les intégrales en surface et un schéma de type saute-mouton en temps. Nous construisons une condition aux limites de type absorbante et une condition aux limites de type réfléchissante. Nous démontrons dans le cadre d'un écoulement uniforme une condition de stabilité L^2 de type CFL. Nous illustrons les capacités de notre schéma sur plusieurs cas tests.

Mots-clés : linéarisation des équations d'Euler, écoulement uniforme ou non, méthode de type Galerkin-discontinu $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$, condition limite absorbante, condition limite réfléchissante, schéma saute-mouton en temps, stabilité L^2, maillage non structuré

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

discontinous Galerkin method for the wave propagation in aeroacoustics

Abstract: A discontinous Galerkin method is applied here to the numerical solution of the time-domain Euler's equations around an uniform or a non uniform flow. We use a centered mean approximation for the surface integrals and a leap-frog scheme for advancing in time. We construct an absorbing boundary condition and a reflecting boundary condition. We prove within the framework of an uniform flow a sufficient CFL- L^2 stability condition. Some tests cases illustrate the potential of our scheme.

Key-words: linearisation of the Euler equations, uniform and non uniform flow, $\mathbb{P}_0$ and $\mathbb{P}_1$ discontinous Galerkin method, absorbing boundary condition, reflecting boundary condition, leap-frog time scheme, L^2 stability, unstructured meshes

Table des matières

Introduction **5**

1 Méthode Galerkin discontinue **6**
1.1 Introduction 6
1.2 La discrétisation spatiale 6
1.3 Condition aux limites réfléchissante 7
1.4 Discrétisation temporelle 7

2 Une condition suffisante de stabilité **8**
2.1 Une énergie discrète 8
2.2 Conservation de l'énergie discrète 8
2.3 Le caractère défini positif de l'énergie discrète 10

3 Un schéma stable avec des conditions limites absorbantes **12**
3.1 La condition absorbante 13
3.2 Construction d'une nouvelle énergie 13
3.3 Le caractère défini positif de l'énergie $\mathbb{F}^n$ 14

4 Utilisation d'une méthode PML **16**
4.1 Méthode PML 17
4.2 Expression du schéma 19

5 Cas test en 2D sur maillage triangulaire **19**
5.1 Schémas volumes finis 20
5.2 Méthode $\mathbb{P}_1$ sur maillage triangulaire 20
5.3 Résultats numériques 21
5.3.1 Cas test 1 22
5.3.2 Cas test 2 24
5.3.3 Cas test 3 26

6 Introduction au cadre non uniforme **26**
6.1 Les équations physiques 26
6.2 Discrétisations spatiale et temporelle 27
6.3 Les conditions aux limites 27
6.4 Remarques 28
6.5 Cas test avec écoulement cisaillé 28

Conclusion **30**

Références **31**

Introduction

L'aéroacoustique est un domaine en pleine expansion, de nombreuses approches numériques sont apparues ces dernières années [2] or la plupart de ces méthodes appartiennent à la famille des computational fluid dynamics (CFD), leur principe réside dans l'utilisation de schémas en différences finies très précis, leur robustesse n'est plus à démontrer [19]. D'autres méthodes tenant compte des particularités physiques des perturbations étudiées ont permis à ce jour d'obtenir des résultats encore plus précis [25], [8], [4]. De plus d'énormes améliorations au niveau du traitement des conditions aux limites ont été prposées ces dernières années [25],[16].

Malheureusement, il existe encore peu de méthodes permettant d'étudier la propagation de perturbations acoustiques dans le cadre de géométries complexes nécessitant l'utilisation de maillages irréguliers. De plus nous possédons peu de résultats quant à l'évolution de petites perturbations d'un écoulement non uniforme [24].

Les résultats présentés dans ce rapport sont orientés dans ce sens. Le but de notre travail est la construction d'un opérateur de propagation précis et robuste utilisable en géométrie complexe et ce pour un écoulement uniforme ou non. Nos précédents travaux développés dans [6] et [7] ont mis en évidence les propriétés théoriques et numériques de l'utilisation d'un schéma de type volumes finis avec flux centrés en espace et saute-mouton en temps pour les équations d'Euler linéarisées (schéma qui avait déjà été étudié pour les équations de Maxwell [21]). Ce nouveau rapport constitue un approfondissement de cette méthode puisque nous avons réussi à étendre tous les résultats théoriques au cas d'une approximation en espace de type Galerkin-discontinu d'ordre $\mathbb{P}_1$. Plus précisément nous avons réussi à démontrer dans ce nouveau cadre l'existence d'une condition suffisante de stabilité sur maillage quelconque en deux et trois dimensions d'espace, pour cela nous avons montré l'existence d'une énergie ayant la propriété sur maillage non structuré sous une condition de type CFL de se conserver si le domaine ne comporte pas de parois absorbantes et de décroître à chaque itération temporelle (des résultats similaires ont déjà été démontrés pour l'utilisation d'un tel schéma sur les équations de Maxwell [22]). Les intérêts principaux de cette démarche résident dans l'amélioration de la précision qu'elles nous a apportée et dans sa souplesse [17].

Nous commencerons par démontrer ces différents résultats théoriques en introduisant une condition aux limites de type réfléchissante puis une condition aux limites de type absorbante. Sur trois cas test académiques en écoulement uniforme, nous comparerons la précision de l'approximation $\mathbb{P}_0$ (volumes finis) avec celle de l'approximation $\mathbb{P}_1$. Nous comparerons également la qualité de notre condition absorbante par rapport à une méthode PML développée par H.L. Atkins [3] et nous vérifierons le bon comportement de notre condition aux limites réfléchissante. Enfin dans une dernière partie, nous illustrerons l'utilisation de notre méthode dans le cas de la propagation d'une perturbation acoustique au sein d'un écoulement cisaillé.

1 Méthode Galerkin discontinue

1.1 Introduction

Pour fixer le cadre des équations qui nous intéressent nous pouvons rappeler que dans le contexte de petites perturbations $(\delta\rho,\delta u,\delta v,\delta w,\delta p)$ d'un écoulement uniforme caractérisé par (ρ_0,u_0,v_0,w_0,p_0), les équations d'Euler linéarisées s'écrivent pour $\overrightarrow{W} = {}^t(\rho_0 c_0\delta u,\rho_0 c_0\delta v,\rho_0 c_0\delta w,\delta p)$:

$$\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial t} + div\left(\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{W}\right)\right) = 0, \quad \text{avec } \vec{F}\left(\overrightarrow{W}\right) = {}^t\left(\mathbb{A}_x\overrightarrow{W},\mathbb{A}_y\overrightarrow{W},\mathbb{A}_z\overrightarrow{W}\right), \tag{1}$$

où encore

$$\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_x}\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_y}\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial y} + \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}_z}\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

L'équation portant sur $\delta\rho$ n'étant pas très intéressante, en fait le calcul de δp nous fournit $\delta\rho$, car dans le cadre isentropique $\delta p = c_0^2\delta\rho$, et dans un cadre quelconque

$$\delta\rho\,(t,x,y,z) - \delta\rho\,(0,x-u_0t,y-v_0t,z-w_0t) = \frac{1}{c_0^2}\left(\delta p\,(t,x,y,z) - \delta p\,(0,x-u_0t,y-v_0t,z-w_0t)\right). \tag{3}$$

Pour ne pas alourdir le présent rapport, bien que les résultats théoriques que nous démontrerons soient exacts pour une dimension d'espace quelconque, ils seront appliqués aux équations d'Euler linéarisées en 2D.

1.2 La discrétisation spatiale

Dans chaque volume fini indexé par i, les inconnues numériques correspondent aux projections orthogonales de $\overrightarrow{W}$ sur une famille de fonctions de base préalablement choisie dans le volume que l'on notera $(\overrightarrow{\varphi}_{ij})_{1\leq j\leq d_i}$, avec d_i le nombre local de degrés de liberté à l'intérieur de la cellule τ_i. Nous tolérons le fait que l'approximation puisse être discontinue au niveau d'une interface entre deux cellules.
En multipliant l'équation (1) par une des fonctions de base $\overrightarrow{\varphi}_{ij}$ et en intégrant sur la cellule τ_i, on obtient:

$$\int_{\tau_i}\overrightarrow{\varphi}_{ij}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial t} = -\int_{\tau_i}{}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij}\cdot\sum_{s=1}^{q}\mathbb{A}_s\partial_{x_s}\left(\overrightarrow{W}\right), \tag{4}$$

soit

$$\int_{\tau_i}\overrightarrow{\varphi}_{ij}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial t} = \int_{\tau_i}\left(\sum_{s=1}^{q}{}^t\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{ij}\mathbb{A}_s\right)\overrightarrow{W} - \int_{\partial\tau_i}{}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij}\left(\sum_{s=1}^{q}\tilde{n}_s\mathbb{A}_s\right)\overrightarrow{W}, \quad \forall j\in\{1,..,d_i\}, \tag{5}$$

avec q la dimension d'espace et $\vec{\tilde{n}}$ le vecteur normal unitaire.
Si nous notons $\overrightarrow{\mathbf{W}}_i$ la projection orthogonale canonique de $\overrightarrow{W}$ sur $Vect(\overrightarrow{\varphi}_{ij},1\leq j\leq d_i)$ dans la cellule τ_i, nous pouvons dans l'équation (5) remplacer $\overrightarrow{W}$ par $\overrightarrow{\mathbf{W}}_i$. Pour les intégrales de bords, comme aucune continuité n'est imposée, de nombreuses approximations peuvent être utilisées pour construire les valeurs aux bords. Nous choisissons des flux centrés, soit

$$k\in\vartheta_i,\ \forall x\in\tau_{ik},\ \overrightarrow{W}\to\frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}_i+\overrightarrow{\mathbf{W}}_k}{2}, \tag{6}$$

avec ϑ_i l'ensemble des indices des cellules appartenant à la partition $\mathcal{G}$ de notre domaine Ω voisines par une surface de mesure non-nulle de la cellule τ_i et $\tau_{ik}=\tau_i\cap\tau_k$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{W}}_i$ peut être décomposé sur la base des fonctions propres de la cellule τ_i, ce que l'on écrira sous la forme:

$$\forall x\in\tau_i,\quad \overrightarrow{\mathbf{W}}_i\,(x,t) = \sum_{1\leq j\leq d_i}W_{ij}\,(t)\,\overrightarrow{\varphi}_{ij}\,(x). \tag{7}$$

Dans chaque cellule, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{W}}_i$ peut être représenté par la famille de scalaires $(W_{ij},\ 1 \leq j \leq d_i)$. Nous noterons $\mathbf{W}_i = (W_{il})_{1 \leq l \leq d_i}$. Finalement, on peut récrire (5) sous la forme

$$\forall j \in \{1,..,d_i\}\,,$$

$$\sum_{l=1}^{d_i} \frac{\partial W_{il}}{\partial t} \int_{\tau_i} \overrightarrow{\varphi}_{ij} \cdot \overrightarrow{\varphi}_{il} = \int_{\tau_i} \left(\sum_{s=1}^{q} {}^t\partial_{x_s} \overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s \right) \overrightarrow{\mathbf{W}}_i - \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij} \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{q} \tilde{n}_{ik_s} \mathbb{A}_s \right)}_{\mathbb{P}_{ik}} \frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}_i + \overrightarrow{\mathbf{W}}_k}{2}, \tag{8}$$

avec $\vec{\tilde{n}}_{ik} = \vec{n}_{ik}/\|\vec{n}_{ik}\|$ où $\vec{n}_{ik}$ correspond à l'intégrale de la normale unitaire de l'interface τ_{ik} orientée de τ_i vers τ_k. Ou encore sous une forme plus condensée

$$\mathbb{M}^i \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial t} = \left(\int_{\tau_i} \left(\sum_{s=1}^{q} {}^t\partial_{x_s} \overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s \right) \overrightarrow{\mathbf{W}}_i - \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{ik} \frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}_i + \overrightarrow{\mathbf{W}}_k}{2} \right)_{1 \leq j \leq d_i}, \tag{9}$$

avec

$$\mathbb{M}^i = \left[m^i_{uv} \right]_{\substack{1 \leq u \leq d_i \\ 1 \leq v \leq d_i}} = \left[\int_{\tau_i} \overrightarrow{\varphi}_{iu} \cdot \overrightarrow{\varphi}_{iv} \right]_{\substack{1 \leq u \leq d_i \\ 1 \leq v \leq d_i}}. \tag{10}$$

La matrice $\mathbb{M}^i$ est une matrice de produit scalaire, elle est donc symétrique définie positive.

1.3 Condition aux limites réfléchissante

Il est évidemment nécessaire de définir le sens de l'approximation (6) lorsque l'interface τ_{ik} est au bord du domaine et que l'indice k correspond à une cellule fictive. Nous allons définir deux sortes de conditions aux limites. La première, qui est la plus évidente, correspond à une condition de type réfléchissante que nous définissons comme suit

$$\tau_i \subset \Omega,\ \tau_{ik} \subset \partial\Omega,\ \forall x \in \tau_{ik},\ \overrightarrow{\mathbf{W}}_k(x) = \mathbb{H}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i(x)\,,\ \overrightarrow{W}(x) \to \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbb{H}_{ik})\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i, \tag{11}$$

avec dans le cas du système (2),

$$\mathbb{H}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 - 2\tilde{n}^2_{ik_x} & -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_y} & -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_z} & 0 \\ -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_y} & 1 - 2\tilde{n}^2_{ik_y} & -2\tilde{n}_{ik_y}\tilde{n}_{ik_z} & 0 \\ -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_z} & -2\tilde{n}_{ik_y}\tilde{n}_{ik_z} & 1 - 2\tilde{n}^2_{ik_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

cette condition consiste simplement à traiter le bord du domaine comme un miroir pour les petites perturbations, ce qui physiquement à un sens si et seulement si l'écoulement porteur est tangent à la paroi.

1.4 Discrétisation temporelle

Nous utilisons un schéma de type saute-mouton. Nous définissons par Δt le pas en temps qui est supposé constant. Les inconnues numériques sont évaluées aux instants $t^n = n\Delta t$ et notées W^n_{ij}. L'expression du schéma se déduit directement de l'équation (9):

$$\mathbb{M}^i \frac{\mathbf{W}^{n+1}_i - \mathbf{W}^{n-1}_i}{2\Delta t} = \left(\int_{\tau_i} \left(\sum_{s} {}^t\partial_{x_s} \overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s \right) \overrightarrow{\mathbf{W}}^n_i - \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{ik} \frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}^n_i + \overrightarrow{\mathbf{W}}^n_k}{2} \right)_{1 \leq j \leq d_i}. \tag{13}$$

Pour le traitement des conditions aux limites réfléchissantes, d'après la section précédente, nous posons au niveau d'une interface réfléchissante τ_{ik} entre une cellule interne τ_i et une cellule fictive τ_k:

$$\forall x \in \tau_{ik},\ \overrightarrow{\mathbf{W}}^n_k(x) = \mathbb{H}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}^n_i(x)\,. \tag{14}$$

Nous verrons également dans la section 3, la construction de conditions aux limites absorbantes.

2 Une condition suffisante de stabilité

Nous allons à présent démontrer une condition suffisante pour la stabilité L^2 de notre nouveau schéma défini par (13), en considérant uniquement des conditions aux limites réfléchissantes. Nous utilisons pour cela la même approche que dans [7], où une forme quadratique joue le rôle d'une fonction de Lyapunov de toutes les inconnues numériques.

2.1 Une énergie discrète

En utilisant toujours l'approche que nous avions adaptée dans [7], nous définissons l'énergie discrète sous la forme

Définition 2.1 *Pour une partition $\mathcal{G}$ en volumes finis du domaine Ω avec seulement des conditions réfléchissantes aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante:*

$$\forall i,\ \mathbb{E}_i^n = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}\left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\cdot\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n+1}\cdot\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left({}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n+1}\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^{n-1}\right), \tag{15}$$

$$\mathbb{E}^n = \sum_{\tau_i\in\mathcal{G}}\mathbb{E}_i^n.$$

Il est loin d'être trivial que cette énergie puisse s'identifier à une fonction de Lyapunov, car elle dépend explicitement du schéma utilisé. Dans la suite, nous allons démontrer que cette énergie se conserve à chaque pas de temps et qu'il s'agit d'une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues numériques sous une condition de type CFL.

2.2 Conservation de l'énergie discrète

Lemme 2.1 *En considérant le schéma défini par (13-14), l'énergie discrète définie par (15)est exactement conservée. C'est-à-dire*

$$\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1}. \tag{16}$$

Démonstration 2.1 Nous avons grâce à la symétrie de $\mathbb{M}^i$

$$\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_i {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{M}^i\left(\mathbf{W}_i^{n+1}-\mathbf{W}_i^{n-1}\right) + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{M}^i\left(\mathbf{W}_i^n-\mathbf{W}_i^{n-2}\right),$$

de plus nous pouvons récrire (13) uniquement en fonction des $\mathbf{W}$:

$$\mathbb{M}^i\frac{\mathbf{W}_i^{n+1}-\mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^n - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\left(\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + \mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n\right),$$

avec

$$\mathbb{N}^i = \left[\sum_s\int_{\tau_i}{}^t\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{iu}\right)\mathbb{A}_s\overrightarrow{\varphi}_{iv}\right]_{\substack{1\le u\le d_i\\ 1\le v\le d_i}},\quad \mathbb{O}_c^{ab} = \left[\int_{\tau_{ac}}{}^t\overrightarrow{\varphi}_{au}\mathbb{P}_{ac}\overrightarrow{\varphi}_{bv}\right]_{\substack{1\le u\le d_i\\ 1\le v\le d_i}},$$

donc

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}^n-\mathbb{E}^{n-1}\right) = \sum_i {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^{n-1} + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^{n-1}\right),$$

En sommant suivant le type d'interfaces, nous obtenons

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}^n-\mathbb{E}^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_i \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^{n-1}\right) \qquad (i)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{internes}^{interfaces} \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_k^{n-1}\mathbb{O}_i^{kk}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_k^{n-1}\mathbb{O}_i^{ki}\mathbf{W}_i^n\right) \quad (ii)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{internes}^{interfaces} \left({}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^{n-1} + {}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^{n-1} + {}^t\mathbf{W}_k^{n}\mathbb{O}_i^{kk}\mathbf{W}_k^{n-1} + {}^t\mathbf{W}_k^{n}\mathbb{O}_i^{ki}\mathbf{W}_i^{n-1}\right) \quad (iii)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{reflechissantes}^{interfaces} \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^{n-1} + {}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^{n-1}\right) \qquad (iiii).$$

Or, comme $\mathbb{P}_{ki} = -\mathbb{P}_{ik}$ et ${}^t\mathbb{P}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}$, nous avons

$$\mathbb{O}_k^{ik} = -{}^t\mathbb{O}_i^{ki},\ {}^t\mathbb{O}_k^{ii} = \mathbb{O}_k^{ii},$$

d'où

$$(ii) + (iii) = -\sum_{internes}^{interfaces} \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_k^{n-1}\mathbb{O}_i^{kk}\mathbf{W}_k^n\right),$$

$$(ii) + (iii) + (iiii) = -\sum_i\sum_{k\in\vartheta_i} {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{reflechissantes}^{interfaces} \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^{n-1}\right)}_{(iv)}.$$

De plus

$$(iv) = -\frac{1}{2}\sum_{reflechissantes}^{interfaces}\int_{\tau_{ik}} \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{P}_{ik}\mathbb{H}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\mathbb{P}_{ik}\mathbb{H}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right).$$

Or grâce aux expressions (2) et (12), nous savons que la matrice $\mathbb{P}_{ik}\mathbb{H}_{ik}$ est une matrice antisymétrique sous la condition d'orthogonalité locale suivante:

$${}^t(u_0,v_0,w_0)\cdot\overrightarrow{\tilde{n}}_{ik} = 0,$$

sous cette hypothèse, d'un sens physique évident, nous avons

$$(iv) = 0.$$

Finalement

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}\right) = \sum_i \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{N}^i\mathbf{W}_i^{n-1}\right) - \sum_i\sum_{k\in\vartheta_i} {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n,$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}\right) = \sum_i \left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{R}^{ik}\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{R}^{ik}\mathbf{W}_i^{n-1}\right), \quad \text{avec } \mathbb{R}^{ik} = \left[r_{uv}^{ik}\right]_{\substack{1\le u\le d_i\\ 1\le v\le d_i}} = \mathbb{N}^i - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\mathbb{O}_k^{ii},$$

or

$$r_{uv}^{ik} = \sum_s\int_{\tau_i} {}^t\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{iu}\right)\mathbb{A}_s\overrightarrow{\varphi}_{iv} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{iu}\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\varphi}_{iv},$$

$$= -\sum_s\int_{\tau_i} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{iu}\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{iv}\right) + \int_{\partial\tau_i} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{iu}\left(\sum_s\mathbb{A}_s\tilde{n}_s\right)\overrightarrow{\varphi}_{iv} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{iu}\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\varphi}_{iv},$$

puis par symétrie de $\mathbb{A}_s$, $\forall s\in\{1,..,q\}$,

$$= -\sum_s\int_{\tau_i} {}^t\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{iv}\right)\mathbb{A}_s\overrightarrow{\varphi}_{iu} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{iv}\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\varphi}_{iu} = -r_{vu}^{ik}.$$

Donc la matrice $\mathbb{R}^{ik}$ est antisymétrique, et nous obtenons le résultat du lemme

$$\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1} = 0.$$

■

2.3 Le caractère défini positif de l'énergie discrète

Dans l'optique d'obtenir une condition de stabilité pour notre schéma, nous allons démontrer que notre énergie discrète $\mathbb{E}^n$, sous une condition de stabilité portant sur Δt, est une forme quadratique définie positive des inconnues numériques $\mathbf{W}_i^n$. Commençons par donner certaines définitions.

Définition 2.2 *$\forall \overrightarrow{\mathbf{X}} \in Vect(\overrightarrow{\varphi}_{ij},\ 1 \leq j \leq d_i)$, nous notons $\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}$ la norme L^2 du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{X}}$ sur τ_i, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2 = \int_{\tau_i} \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2$. La même notation sera utilisée pour la norme L^2 d'un vecteur sur une interface τ_{ik}.*

Définition 2.3 *Nous supposerons une certaine régularité des fonctions de base $\overrightarrow{\varphi}_{ij}$, $1 \leq j \leq d_i$. Plus précisément, nous supposerons que sur chaque volume τ_i, il existe des constantes α_i et β_{ik} $(k \in \vartheta_i)$ telles que*

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{X}} \in Vect(\overrightarrow{\varphi}_{ij},\ 1 \leq j \leq d_i),\ \forall s \in \{1,..,q\},\quad \|\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i} \leq \frac{\alpha_i P_i}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}, \tag{17}$$

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{X}} \in Vect(\overrightarrow{\varphi}_{ij},\ 1 \leq j \leq d_i),\ \forall k \in \vartheta_i,\quad \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_{ik}}^2 \leq \frac{\beta_{ik} \|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2, \tag{18}$$

avec V_i le volume de la cellule τ_i et $P_i = \sum_{k \in \vartheta_i} \|\vec{n}_{ik}\|$ son périmètre.

Définition 2.4 *Grâce à la symétrie des matrices $\mathbb{A}_s$, nous rappelons le résultat suivant*

$$\forall \overrightarrow{\mathbf{X}} \in Vect(\overrightarrow{\varphi}_{ij},\ 1 \leq j \leq d_i),\ \forall s \in \{1,..q\},$$

$$\|\mathbb{A}_s \overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2 = \int_{\tau_i} \|\mathbb{A}_s \overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2 \leq \rho(\mathbb{A}_s)^2 \int_{\tau_i} \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2 = \rho(\mathbb{A}_s)^2 \|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2,$$

avec ρ le rayon spectral. Nous noterons

$$\lambda = \sum_s \rho(\mathbb{A}_s),\quad \rho_{ik} = \rho(\mathbb{P}_{ik})$$

Lemme 2.2 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète $\mathbb{E}_i^n$ définie par (15) vérifie,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i^n \geq\ & \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i} \\ & - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2 \right). \end{aligned} \tag{19}$$

En considérant dans cette expression que si τ_{ik} est une interface réfléchissante, alors par convention

$$\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k} = \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i},\ \beta_{ki} = \beta_{ik},\ V_k = V_i.$$

Démonstration 2.2 Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i^n &= \frac{1}{2}\left({}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n+1}\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left({}^t\mathbf{W}_i^n\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{M}^i\mathbf{W}_i^{n-1}\right) + \Delta t\mathbb{X}_i^n, \text{ avec}\\
\mathbb{X}_i^n &= \frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{M}^i\left(\mathbf{W}_i^{n+1}-\mathbf{W}_i^{n-1}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{d_i} {}^tW_{ij}^{n-1}\left(\int_{\tau_i}\sum_s {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{ij}\right) - \sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij}\mathbb{P}_{ik}\frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n+\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n}{2}\right)\\
&= \int_{\tau_i}\sum_s {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) - \sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{P}_{ik}\frac{\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n+\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n}{2}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau_i}\sum_s\left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\mathbb{X}_i^n| &\le \frac{1}{2}\left(\sum_s\left|\int_{\tau_i} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right)\right| + \sum_s\left|\int_{\tau_i} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\right| + \sum_{k\in\vartheta_i}\left|\int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\right|\right)\\
&\le \frac{1}{2}\left(\sum_s\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}\|\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right)\|_{\tau_i} + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}\|\mathbb{A}_s\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\|_{\tau_i}\right) + \sum_{k\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_{ik}}\|\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_{ik}}\right)\\
&\le \frac{\alpha_i P_i\lambda}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i} + \frac{1}{4}\sum_{k\in\vartheta_i}\rho_{ik}\left(\frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2\right),
\end{aligned}$$

ces expressions restant valides lorsque le volume considéré admet une où plusieurs faces métalliques grâce aux conventions fixées dans l'énoncé du lemme. Car en effet si $k\in\vartheta_i$ et τ_{ik} est une interface réfléchissante

$$\|\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_{ik}} \le \rho_{ik}\|\mathbb{H}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}} \underbrace{=}_{{}^t\mathbb{H}_{ik}\mathbb{H}_{ik}=id} \rho_{ik}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}} \le \frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i},$$

$$\|\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_{ik}} \le \frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i} \underbrace{=}_{par\ convention} \frac{\rho_{ik}\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}.$$

Finalement,

$|\mathbb{E}_i^n| \ge \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 - \Delta t\,|\mathbb{X}_i^n|$ et le fait que $\rho_{ik}=\rho_{ki}$ donnent le résultat du lemme.

■

Lemme 2.3 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète totale $\mathbb{E}^n$ définie par (15) est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si*

$$\forall i,\ \forall k\in\vartheta_i,\quad \Delta t\,(2\lambda\alpha_i+\beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \tag{20}$$

Démonstration 2.3 D'après le lemme précédent, nous avons

$$\mathbb{E}_i^n \geq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}$$

$$- \frac{\Delta t}{4}\sum_{k\in\vartheta_i}\left(\frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\rho_{ki}\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2\right).$$

Ce que l'on peut récrire sous la forme

$$\mathbb{E}_i^n \geq \sum_{k\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|\left(\frac{1}{2P_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i}\right)\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i} - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2\right).$$

D'où

$$\mathbb{E}_i^n \geq$$

$$\sum_{k\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|\left(\left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i}\right)\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i}\right)\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 - \frac{\beta_{ki}\rho_{ik}\Delta t}{4V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2\right).$$

En sommant suivant les interfaces et en utilisant les notations du lemme, nous obtenons

$$\mathbb{E}_i^n \geq \sum_{faces\ \tau_{ik}}^{internes}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|Y_{ik} + \sum_{faces\ \tau_{ik}}^{reflechissantes}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|Z_{ik}, \text{ avec,}$$

$$Y_{ik} = \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i}\right)\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right) +$$

$$\left(\frac{1}{2P_k} - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k} - \frac{\alpha_k\lambda\Delta t}{2V_k}\right)\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^{n-1}\|_{\tau_k}^2\right)$$

$$Z_{ik} = \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i}\right)\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right).$$

Finalement, l'énergie $\mathbb{E}^n$ est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si

$$\forall i,\ \forall k\in\vartheta_i,\quad \frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i} > 0,$$

ce qui donne le résultat du lemme.

■

Nous en déduisons le résultat principal de cette partie:

Théorème 2.1 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14) sur un maillage arbitraire (comportant uniquement aux bords des interfaces réfléchissantes) et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète $\mathbb{E}^n$ définie par (15) est conservée au cours des itérations. De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_i^{n-1})$, assurant ainsi la stabilité L^2 du schéma, si le pas de temps vérifie la condition*

$$\forall i,\ \forall k\in\vartheta_i,\quad \Delta t\,(2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

3 Un schéma stable avec des conditions limites absorbantes

Dans cette section, nous traitons de conditions aux limites absorbantes. Nous allons proposer un modèle pour leurs traitements et mettre en évidence la stabilité L^2 de notre schéma de type Galerkin-discontinu associé à des conditions aux limites réfléchissantes et absorbantes. Nous utiliserons la même approche que dans la partie précédente.

3.1 La condition absorbante

Rappelons déjà que le problème présenté par (2) est un problème strictement hyperbolique tandis que si nous tenions compte de l'équation portant sur $\delta\rho$ il s'agirait d'un problème fortement hyperbolique. Dans les deux cas, nous pouvons donc affirmer que

$$\forall \vec{\tilde{n}},\quad \mathbb{P} = \sum_s \tilde{n}_s \mathbb{A}_s \quad \text{est une matrice diagonalisable,}$$

de ce fait, il existe une matrice diagonale $\mathbb{D} = diag\,(\lambda_l)$ et une matrice inversible $\mathbb{S}$ telles que $\mathbb{P} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{S}$, nous noterons alors

$$|\mathbb{P}| = \mathbb{S}^{-1}\,|\mathbb{D}|\,\mathbb{S},\ \text{avec}\ \ |\mathbb{D}| = diag\,(|\lambda_l|)\,.$$

Nous pouvons également remarquer que dans le cas du système (2), la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique, donc il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour laquelle $\mathbb{S}^{-1} = {}^t\mathbb{S}$. Dans le but de construire une condition absorbante, nous proposons pour traiter une interface τ_{ik} entre une cellule au bord τ_i et une cellule fictive τ_k:

$$\mathbb{P}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n = |\mathbb{P}_{ik}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}. \tag{21}$$

Lemme 3.1 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14)-(21), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète totale $\mathbb{E}^n$ définie par (15) vérifie*

$$\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1} - \frac{\Delta t}{2}\sum_{absorbantes}^{interfaces}\int_{\tau_{ik}}\left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\,|\mathbb{P}_{ik}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} + {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\,|\mathbb{P}_{ik}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right). \tag{22}$$

Démonstration 3.1 Le résultat se déduit directement de la démonstration du lemme 2.1, en effet, en reprenant le même cheminement, nous obtenons

$$\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1} - \frac{\Delta t}{2}\sum_{externes}^{interfaces}\left({}^t\mathbf{W}_i^{n-1}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n}\mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^{n-1}\right),$$

et d'après (14)-(21)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1} &- \frac{\Delta t}{2}\sum_{absorbantes}^{interfaces}\int_{\tau_{ik}}\left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\,|\mathbb{P}_{ik}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} + {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\,|\mathbb{P}_{ik}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right)\\ &\underbrace{-\frac{\Delta t}{2}\sum_{reflechissantes}^{interfaces}\int_{\tau_{ik}}\left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\mathbb{P}_{ik}\mathbb{H}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n} + {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\mathbb{P}_{ik}\mathbb{H}_{ik}\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right)}_{0},\end{aligned}$$

d'où le résultat du lemme.

■

Nous pouvons remarquer que l'énergie ne se conserve plus, ce qui est évidemment nécessaire puisque notre but est de construire une condition absorbante. Cependant, rien ne prouve que pour des pas de temps quelconques, notre énergie soit une suite décroissante. Pour cela nous allons construire une nouvelle énergie en rajoutant des termes correctifs à $\mathbb{E}^n$.

3.2 Construction d'une nouvelle énergie

Définition 3.1 *Dans le cas d'un domaine comportant des conditions aux limites absorbantes et réfléchissantes, nous considérons l'énergie discrète suivante*

$$\forall i,\ \mathbb{F}_i^n = \mathbb{E}_i^n - \frac{\Delta t}{4}\sum_{interfaces}^{absorbantes}\int_{\tau_{ik}}\left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\,|\mathbb{P}_{ij}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n} - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\,|\mathbb{P}_{ij}|\,\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right), \tag{23}$$

$$\mathbb{F}^n = \sum_{\tau_i \in \mathcal{G}} \mathbb{F}_i^n .$$

Les termes correctifs apportées à $\mathbb{E}^n$ ne portent donc que sur les parois absorbantes. Nous allons à présent montrer que l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ est décroissante à chaque pas de temps.

Lemme 3.2 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14)-(21), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète totale $\mathbb{F}^n$ définie par (23) est décroissante à chaque itération. Plus précisément*

$$\Delta\mathbb{F} = \mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right) \leq 0 \tag{24}$$

Démonstration 3.2 Nous avons

$$\Delta\mathbb{F} = \Delta\mathbb{E} - \frac{\Delta t}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n |\mathbb{P}_{ij}| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n - 2{}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} + {}^t \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2} |\mathbb{P}_{ij}| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right),$$

et grâce au résultat (22) et à la symétrie de la matrice $|\mathbb{P}_{ij}|$, nous obtenons

$$\Delta\mathbb{F} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-2}\right),$$

le caractère négatif de cette expression découle directement du caractère positif de la matrice $|\mathbb{P}_{ij}|$, ce qui achève la démonstration du lemme.

■

3.3 Le caractère défini positif de l'énergie $\mathbb{F}^n$

Toujours dans l'optique d'obtenir une condition de stabilité pour notre schéma lorsque nous utilisons des conditions absorbantes en sortie de domaine, nous allons démontrer que sous une condition portant sur Δt, $\mathbb{F}^n$est une forme quadratique définie positive des variables $\left(\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n, \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right)$.

Lemme 3.3 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14)-(21), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète $\mathbb{F}_i^n$ définie par (23) vérifie,*

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n \geq{}& \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2\right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i} \\ &- \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\rho_{ki}\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k}^2\right). \end{aligned} \tag{25}$$

En considérant dans cette expression que si τ_{ik} est une interface réfléchissante ou absorbante, alors par convention

$$\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_k} = \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i},\ \beta_{ki} = \beta_{ik},\ V_k = V_i.$$

Démonstration 3.3 La démonstration est analogue à la démonstration 2.2 nous avons

$$\mathbb{F}_i^n = \frac{1}{2}\left({}^t\mathbf{W}_i^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^{n-1}\right) + \Delta t \mathbb{X}_i^n - \Delta t \mathbb{Y}_i^n, \text{ avec}$$

$$\mathbb{Y}_i^n = \frac{1}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n \left|\mathbb{P}_{ij}\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \left|\mathbb{P}_{ij}\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right),$$

$$\mathbb{X}_i^n = \frac{1}{2} \int_{\tau_i} \sum_s \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{P}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\tau_i} \sum_s \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_{interfaces}^{internes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{P}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{interfaces}^{reflechissantes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{P}_{ik} \mathbb{H}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n - \frac{1}{2} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \left|\mathbb{P}_{ik}\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}.$$

Donc

$$\mathbb{F}_i^n = \frac{1}{2}\left({}^t\mathbf{W}_i^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^n + {}^t\mathbf{W}_i^{n-1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^{n-1}\right) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\tau_i} \sum_s \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\right) - {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{A}_s \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right)\right)$$

$$- \frac{\Delta t}{2} \sum_{interfaces}^{internes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{P}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_{interfaces}^{reflechissantes} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{P}_{ik} \mathbb{H}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n$$

$$- \frac{\Delta t}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \int_{\tau_{ik}} \left({}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} \left|\mathbb{P}_{ik}\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1} + {}^t\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n \left|\mathbb{P}_{ik}\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\right),$$

$$\mathbb{F}_i^n \geq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{interfaces}^{internes} \rho_{ik} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_{ik}} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\|_{\tau_{ik}}$$

$$- \frac{\Delta t}{2} \sum_{interfaces}^{reflechissantes} \rho_{ik} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_{ik}} \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}} - \frac{\Delta t}{4} \sum_{interfaces}^{absorbantes} \rho_{ik} \left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_{ik}}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}}^2 \right),$$

car $\rho\left(\left|\mathbb{P}_{ik}\right|\right) = \rho\left(\mathbb{P}_{ik}\right) = \rho_{ik}$ et $\|\mathbb{H}_{ik} \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}} = \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n\|_{\tau_{ik}}$.

D'où

$$\mathbb{F}_i^n \geq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}^2\right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}$$

$$- \frac{\Delta t}{4}\sum_{interfaces}^{internes} \rho_{ik}\left(\frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^{n}\|_{\tau_k}^2\right)$$

$$- \frac{\Delta t}{4}\sum_{interfaces}^{reflechissantes} \rho_{ik}\left(\frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}^2\right)$$

$$- \frac{\Delta t}{4}\sum_{interfaces}^{absorbantes} \rho_{ik}\left(\frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}^2\right),$$

et en utilisant les conventions données dans le lemme, on obtient

$$\mathbb{F}_i^n \geq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}^2\right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n}\|_{\tau_i}$$

$$- \frac{\Delta t}{4}\sum_{k\in\vartheta_i} \rho_{ik}\left(\frac{\beta_{ik}\|\overrightarrow{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki}\|\overrightarrow{n}_{ki}\|}{V_k}\|\overrightarrow{\mathbf{W}}_k^{n}\|_{\tau_k}^2\right),$$

le fait que $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ nous donne le résultat du lemme.

■

Lemme 3.4 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14)-(21), et les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète totale $\mathbb{F}^n$ définie par (23) est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si*

$$\forall i,\ \forall k \in \vartheta_i, \quad \Delta t\,(2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \tag{26}$$

Démonstration 3.4 La démonstration est identique à celle du lemme 2.3 en utilisant les notations du lemme 3.3.

■

Nous en déduisons le théorème suivant

Théorème 3.1 *En utilisant le schéma défini par (12)-(13)-(14)-(21) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 2.2 à 2.4, l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ définie par (23) est une suite décroissante. De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $\left(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_i^{n-1}\right)$, assurant ainsi la stabilité L^2 du schéma, si le pas de temps vérifie la condition*

$$\forall i,\ \forall k \in \vartheta_i, \quad \Delta t\,(2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

4 Utilisation d'une méthode PML

Bien que les résultats démontrés dans les parties précédentes rendent notre condition absorbante très attractive, nous avons développé en parallèle un code $\mathbb{P}_1$ associé à une méthode PML. L'intérêt, comme nous le verrons grâce aux cas tests, a été de pouvoir juger de la qualité du caractère non réflechissant de notre condition absorbante. Récemment les travaux de Bérenger [5] ont remis au goût du jour l'utilisation des méthodes dites de couches en les améliorant pour les équations de Maxwell. De plus l'approche faite par Bérenger s'est révélée être applicable sous des formes diverses à des configurations plus complexes où

même à d'autres problèmes physiques [12], [16], [9], [11]. De nombreuses variantes du modèle de Bérenger ont été construites en aéroacoustique. On peut citer F.Q. Hu [16], dont le modèle s'est révélé performant mais malheureusement soumis à des problèmes de stabilité peu prévisibles dûs au caractère faiblement hyperbolique du nouveau système obtenu lorsque la vitesse de l'écoulement n'est pas nulle. Dans leur article Tam, Auriault et Cambulli [23] ont mis en évidence ce problème et proposé une solution au cas par cas efficace mais peu propice aux caractéristiques des maillages que nous voulons utiliser. D'autres approches ont été développées pour pallier le caractère mal posé du modèle PML traditionnel en aéroacoustique, elles consistent non plus à splitter les équations mais à rajouter des termes aux équations existantes [20], [12], [15]. Bien que ces nouveaux modèles permettent de résoudre théoriquement les imperfections de la méthode PML, ils compliquent de manière substantielle les équations. Enfin, dans le cadre de l'utilisation d'une méthode de type Galerkin-discontinue, H.L Atkins [3] a mis en évidence certaines simplifications que nous pouvions apporter au modèle PML traditionnel. Par rapport à ces différents critères nous avons était obligés de faire un choix sur le modèle PML que nous voulions utiliser. Comme le but de cet article n'est absolument pas de construire une méthode PML parfaite pour l'aéroacoustique, nous avons décidé d'utiliser la méthode PML développée par H.L Atkins en imposant un filtre dans la zone PML pour éviter l'apparition de problèmes de stabilité dans cette zone.

4.1 Méthode PML

Revenons à l'équation (2) exprimée en deux dimensions d'espace:

$$\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t} + \mathbb{A}_x \frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial x} + \mathbb{A}_y \frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial y} = 0. \tag{27}$$

Le principe de la méthode PML consiste à splitter les équations dans le sens où chaque variable physique est séparée en deux variables, la première étant associée aux dérivées en x et la deuxième aux dérivées en y, et en ajoutant de plus à chaque équation un terme d'amortissement anisotropique. Plus précisément, nous récrivons (27) sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{W}_1}{\partial t} + \sigma_x \overrightarrow{W}_1 + \mathbb{A}_x \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{W}_2}{\partial t} + \sigma_y \overrightarrow{W}_2 + \mathbb{A}_y \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial y} = 0 \\ \overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_1 + \overrightarrow{W}_2 \end{cases} \tag{28}$$

Nous pouvons vérifier que lorsque les coefficients d'amortissement sont nuls les équations d'Euler linéarisées sont un cas particulier de notre nouveau système. Ces coefficients sont introduits dans le but d'absorber les différentes ondes et ce dans une zone en bordure de domaine. De plus leur choix s'avère délicat, en fait il n'existe pas vraiment de lois précises mais plutôt des remarques empiriques issues de la mise en pratique de ces méthodes (voir [12], [16]). Le dessin suivant illustre le type de domaine utilisé.

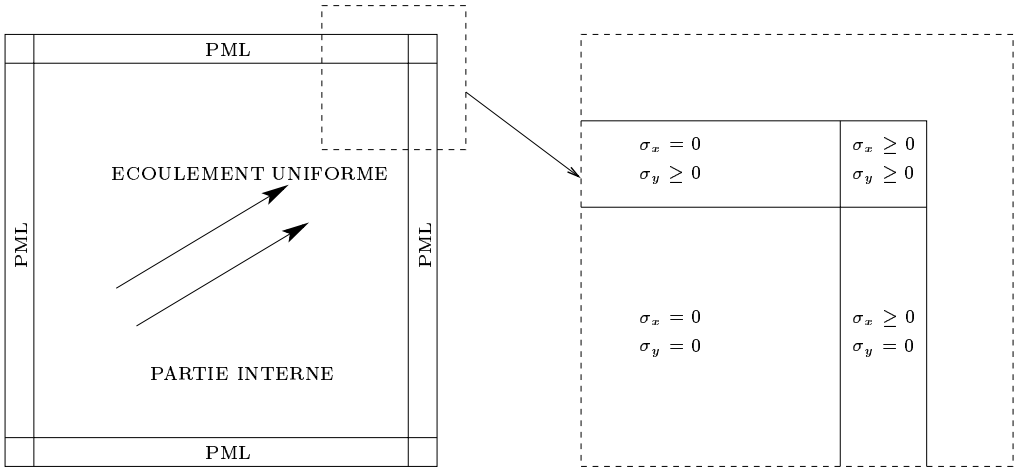


FIG. 1 – *Schéma du domaine de calcul*

La figure illustre les deux types d'interfaces générés par le domaine PML, un premier type d'interfaces entre zone non PML et zone PML et un deuxième type d'interfaces entre zones PML distinctes. Les propriétés remarquables de la méthode PML sont multiples, tout d'abord nous pouvons affirmer qu'à une interface, entre une zone non PML et une zone PML où entre deux zones PML, normal à l'axe des abscisses avec les coefficients d'absorptions respectifs (σ_{x1},σ_y) et (σ_{x2},σ_y), la réflexion est nulle et l'onde transmise conserve la même direction et la même amplitude que l'onde incidente et ce indépendamment de l'angle d'incidence et de la fréquence de l'onde. Cette propriété reste évidemment exacte dans le cas d'une interface normale à l'axe des ordonnées séparant deux milieux dont les coefficients d'absorptions respectifs seraient (σ_x,σ_{y1}) et (σ_x,σ_{y2}). De plus lorsque σ_x (resp. σ_y) est non nul, l'amplitude des différentes ondes qu'elles soient de nature acoustique, de vorticité ou entropique décroît exponentiellement dans la direction x (resp. dans la direction y). De nombreuses démonstrations de ces résultats existent dans la littérature, voir [16], [12]. Les simplifications apportées par H.L. Atkins [3] consistent à supposer que σ_x et σ_y sont des constantes de mêmes valeurs dans leurs zones respectives, plus précisément il utilise le modèle suivant:

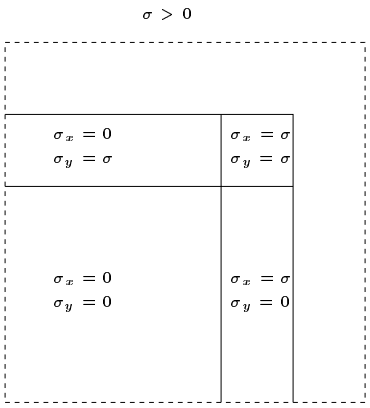


FIG. 2 – *Schéma du domaine de calcul*

Ce modèle à la propriété de très bien s'adapter à l'utilisation d'une méthode de type Galerkin discontinue et de simplifier le système (28) comme suit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t} + \mathbb{A}_x \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial x} + \mathbb{A}_y \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial y} = -\sigma_x \overrightarrow{W} + (\sigma_x - \sigma_y)\, \overrightarrow{W}_2 \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{W}_2}{\partial t} + \mathbb{A}_y \dfrac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial y} = -\sigma_y \overrightarrow{W}_2 \end{cases} \tag{29}$$

L'utilisation de cette méthode permet également de diminuer la complexité par rapport à la méthode PML traditionnelle puisque nous n'avons plus à introduire qu'une seule nouvelles variable: $\overrightarrow{W}_2$. Nous pouvons aussi remarquer que l'absence de réflexions parasites au niveau de la zone PML sous-entend l'utilisation d'un maillage régulier dans cette zone lorsque les coefficients d'absorptions ne sont pas constants, le fait d'avoir opté pour des coefficients constants nous permet donc de conserver un maillage quelconque dans la zone PML. Cependant la discontinuité brutale du coefficient d'absorption entre la zone interne et la zone PML sera inévitablement responsable de légères réflexions parasites. Finalement, nous chercherons à comparer grâce aux cas tests notre flux absorbant à une méthode PML non optimale.

4.2 Expression du schéma

Par souci de stabilité, nous utiliserons dans les zones PML un schéma exponentiel. La forme des équations de (29) permet d'obtenir un schéma facile à mettre en oeuvre par rapport à celui que nous avions déjà construit car le traitement du schéma dans la zone non PML reste le même et il est suffisant de connaître l'évolution de la nouvelle variable uniquement dans la zone PML. Nous pouvons le résumer sous la forme suivante:

$$\text{Zone non PML,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}^i \dfrac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{N}^i \mathbf{W}_i^n - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k \in \vartheta_i} \left(\mathbb{O}_k^{ii} \mathbf{W}_i^n + \mathbb{O}_k^{ik} \mathbf{W}_k^n \right), \\ \mathbb{N}^i = \left[\displaystyle\sum_s \int_{\tau_i} {}^t \left(\partial_{x_s} \overrightarrow{\varphi}_{iu} \right) \mathbb{A}_s \overrightarrow{\varphi}_{iv} \right]_{\substack{1 \le u \le d_i \\ 1 \le v \le d_i}}, \ \mathbb{O}_c^{ab} = \left[\displaystyle\int_{\tau_{ac}} {}^t \overrightarrow{\varphi}_{au} \mathbb{P}_{ac} \overrightarrow{\varphi}_{bv} \right]_{\substack{1 \le u \le d_i \\ 1 \le v \le d_i}} \end{array} \right. \tag{30}$$

$$\sigma_x = \sigma,\ \sigma_y = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n-1} e^{-2\sigma \Delta t} + \dfrac{1 - e^{-2\sigma_\Delta t}}{\sigma} \left(\mathbb{K}_i + \sigma \mathbf{W}_{2_i}^n \right) \\ \mathbb{K}_i = \mathbb{M}_i^{-1} \left(\mathbb{N}_i \mathbf{W}_i^n - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k \in \vartheta_i} \left(\mathbb{O}_k^{ii} \mathbf{W}_i^n + \mathbb{O}_k^{ik} \mathbf{W}_k^n \right) \right) \\ \mathbf{W}_{2_i}^{n+1} = \mathbf{W}_{2_i}^{n-1} + 2\Delta t \tilde{\mathbb{K}}_i \\ \tilde{\mathbb{K}}_i = \mathbb{M}_i^{-1} \left(\tilde{\mathbb{N}}_i \mathbf{W}_i^n - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k \in \vartheta_i} \left(\tilde{\mathbb{O}}_k^{ii} \mathbf{W}_i^n + \tilde{\mathbb{O}}_k^{ik} \mathbf{W}_k^n \right) \right) \\ \tilde{\mathbb{N}}^i = \left[\displaystyle\int_{\tau_i} {}^t \left(\partial_y \overrightarrow{\varphi}_{iu} \right) \mathbb{A}_y \overrightarrow{\varphi}_{iv} \right]_{\substack{1 \le u \le d_i \\ 1 \le v \le d_i}}, \ \tilde{\mathbb{O}}_c^{ab} = \left[\displaystyle\int_{\tau_{ac}} {}^t \overrightarrow{\varphi}_{au} \left(\tilde{n}_{ac_y} \mathbb{A}_y \right) \overrightarrow{\varphi}_{bv} \right]_{\substack{1 \le u \le d_i \\ 1 \le v \le d_i}} \end{array} \right. \tag{31}$$

$$\sigma_x = 0,\ \sigma_y = \sigma, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n-1} e^{-2\sigma \Delta t} + \dfrac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{\sigma} \left(\mathbb{K}_i + \sigma \left(\mathbf{W}_i^n - \mathbf{W}_{2_i}^n \right) \right) \\ \mathbf{W}_{2_i}^{n+1} = \mathbf{W}_{2_i}^{n-1} e^{-2\sigma \Delta t} + \dfrac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{\sigma} \tilde{\mathbb{K}}_i, \end{array} \right. \tag{32}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \quad \left\{ \ \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^{n-1} e^{-2\sigma \Delta t} + \frac{1 - e^{-2\sigma_\Delta t}}{\sigma} \mathbb{K}_i . \right. \tag{33}$$

5 Cas test en 2D sur maillage triangulaire

Nous allons dans cette partie tester l'efficacité des différentes méthodes abordées. Il s'agit de quantifier l'apport en précision du passage d'une discrétisation en espace de type $\mathbb{P}_0$ à une discrétisation en espace de type $\mathbb{P}_1$ et de comparer l'utilisation de notre flux absorbant à une condition de type PML.

5.1 Schémas volumes finis

Le schéma utilisé dans [6] et [7] correspond à un cas particulier du schéma que nous venons de présenter et dont les caractéristiques sont les suivantes:

- Les volumes finis sont identifiés aux triangles du maillage.
- Pour chaque cellule, nous utilisons une approximation $\mathbb{P}_0$ des variables physiques, nous utiliserons trois fonctions de base identifiées aux vecteurs constants $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. De ce fait $\forall i,\ d_i = 3$.
- Les flux absorbants et réfléchissants utilisés se déduisant de ceux déjà présentés.

Ces différents choix nous permettent de préciser les différents grandeurs introduites dans (17) et (18):

- $\forall i,\quad \alpha_i = 0$
- $\forall i,\ \forall k \in \vartheta_i,\quad \beta_{ik} = 1$

Finalement, la condition de stabilité donnée par (26) s'écrit

$$\forall i,\ \forall k \in \vartheta_i,\quad \Delta t < \frac{2V_i}{\rho_{ik} P_i}, \tag{34}$$

Nous retrouvons la condition suffisante de stabilité démontrée dans [7].

5.2 Méthode $\mathbb{P}_1$ sur maillage triangulaire

Dans chaque triangle, nous supposerons que les fonctions de base sont $\mathbb{P}_1$, ce qui donne $d_i = 9$, $\forall i$. Quant au choix des fonctions $\mathbb{P}_1$ dans chaque triangle, nous utiliserons les fonctions $\vec{\phi}_{ij}(x) = \phi_{ij}\vec{e}_u$ avec $\vec{e}_u \in \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ et ϕ_{ij} la fonction $\mathbb{P}_1$ valant 1 au sommet a_{ij} du triangle i et 0 sur les deux autres sommets du triangle. Ce choix permet entre autre de connaître de manière exacte les différentes intégrales portant sur chaque cellule ou sur leur contour dont nous avons besoin.

Lemme 5.1 *Grâce à ce choix, les hypothèses de la définition 2.3 sont vérifiées et plus précisément nous pouvons affirmer qu'elles le sont pour*

$$\forall i,\quad \alpha_i^2 = \frac{3max_{j\in\vartheta_i}\left(\|\vec{n}_{ij}\|\right)}{P_i}. \tag{35}$$

$$\forall i,\quad \forall k \in \vartheta_i,\quad \beta_{ik} = 2. \tag{36}$$

Démonstration 5.1 D'après les données géométriques et les fonctions de base utilisées, nous avons

$$\int_{\tau_i} \varphi_{ij}\varphi_{ik} = (1+\delta_{ik})\,\frac{V_i}{12}, \tag{37}$$

$$\int_{\tau_{ik}} \varphi_{ij}\varphi_{il} = (1-\delta_{kj})\,(1-\delta_{kl})\,(1+\delta_{jl})\,\frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}. \tag{38}$$

Pour le résultat (35), considérons un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{X}} \in Vect\left(\vec{\varphi}_{ij},\ 1 \le j \le d_i\right)$, que l'on peut également mettre sous la forme $\overrightarrow{\mathbf{X}} = \sum_{j\in\vartheta_i} \overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\varphi_{ij}$. Nous avons grâce à (37)

$$\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2 = \int_{\tau_i} \overrightarrow{\mathbf{X}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{X}} = \frac{V_i}{12}\sum_{j\in\vartheta_i}\sum_{k\in\vartheta_i}(1+\delta_{jk})\,\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\cdot\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ik}$$

$$= \frac{V_i}{12}\left(\sum_{j\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \|\sum_{j\in\vartheta_i}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2\right) \ge \frac{V_i}{12}\sum_{j\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2, \tag{39}$$

de plus

$$\|\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2 = \frac{1}{4V_i}\sum_{j\in\vartheta_i}\sum_{k\in\vartheta_i}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\cdot\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ik}\|\vec{n}_{ij}\|\|\vec{n}_{ik}\|\tilde{n}_{ij_{x_s}}\tilde{n}_{ik_{x_s}}$$

$$= \frac{1}{4V_i}\left(\sum_{j\in\vartheta_i}\|\vec{n}_{ij}\|\tilde{n}_{ij_{x_s}}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\right)^2 = \frac{P_i^2}{4V_i}\left(\sum_{j\in\vartheta_i}\frac{\|\vec{n}_{ij}\|}{P_i}\tilde{n}_{ij_{x_s}}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\right)^2,$$

et grâce à la convexité de la fonction carrée,

$$\|\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_i} \leq \frac{P_i^2}{4V_i}\sum_{j\in\vartheta_i}\frac{\|\vec{n}_{ij}\|}{P_i}\left(\tilde{n}_{ij_{x_s}}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\right)^2 \leq \frac{P_i}{4V_i}max_{j\in\vartheta_i}\left(\|\vec{n}_{ij}\|\right)\sum_{j\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2, \tag{40}$$

finalement d'après (39) et (40),

$$\|\partial_{x_s}\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_i} \leq \frac{3P_i max_{j\in\vartheta_i}\left(\|\vec{n}_{ij}\|\right)}{V_i^2}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_i},$$

ce qui donne le résultat (35). En utilisant (38), nous avons

$$\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_{ik}} = \sum_{j\in\vartheta_i}\sum_{l\in\vartheta_i}(1-\delta_{kj})(1-\delta_{kl})(1+\delta_{jl})\frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\cdot\overrightarrow{\mathbf{X}}_{il}$$

$$= \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}\left(\sum_{\substack{j\in\vartheta_i\\ j\neq k}}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \|\sum_{\substack{j\in\vartheta_i\\ j\neq k}}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2\right)$$

$$\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_{ik}} \leq \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}\left(\sum_{j\in\vartheta_i}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \|\sum_{j\in\vartheta_i}\overrightarrow{\mathbf{X}}_{ij}\|^2\right), \tag{41}$$

finalement grâce à (39) et (41), on obtient

$$\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_{ik}} \leq \frac{2\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i}\|\overrightarrow{\mathbf{X}}\|^2_{\tau_i}, \tag{42}$$

d'où (36).

■

Ainsi, dans ce cadre, la condition de stabilité du théorème 3.1 peut s'écrire

$$\forall i,\ \forall j\in\vartheta_i,\quad \Delta t\left(\lambda\sqrt{\frac{3max_{j\in\vartheta_i}\left(\|\vec{n}_{ij}\|\right)}{P_i}}+\rho_{ij}\right) < \frac{V_i}{P_i}. \tag{43}$$

Remarque 5.1 *Nous pouvons simplifier l'expression précédente en remarquant que si l'on note* $\|\vec{n}_{ij_0}\| = max_{j\in\vartheta_i}\|\vec{n}_{ij}\|$,

$$P_i - \|\vec{n}_{ij_0}\| = \sum_{\substack{j\in\vartheta_i\\ j\neq j_0}}\|\vec{n}_{ij}\| \geq \|\sum_{\substack{j\in\vartheta_i\\ j\neq j_0}}\vec{n}_{ij}\| = \|-\vec{n_{ij_0}}\| = \|\vec{n_{ij_0}}\|,$$

d'où

$$max_{j\in\vartheta_i}\|\vec{n}_{ij}\| \leq \frac{P_i}{2},$$

et une condition de stabilité moins fine mais plus simple peut s'écrire

$$\forall i,\ \forall j\in\vartheta_i,\quad \Delta t\left(\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}+\rho_{ij}\right) < \frac{V_i}{P_i}.$$

5.3 Résultats numériques

Pour vérifier l'efficacité de notre schéma ainsi que notre condition de type absorbante, nous allons commencer par tester notre méthode sur deux cas tests académiques. En effet les cas tests caractérisant la sortie non réfléchissante de perturbations acoustiques ou tourbillonnaires en présence d'un écoulement uniforme ne sont pas nouveaux dans la littérature en 2D: voir [13], [14],[1] et [10].

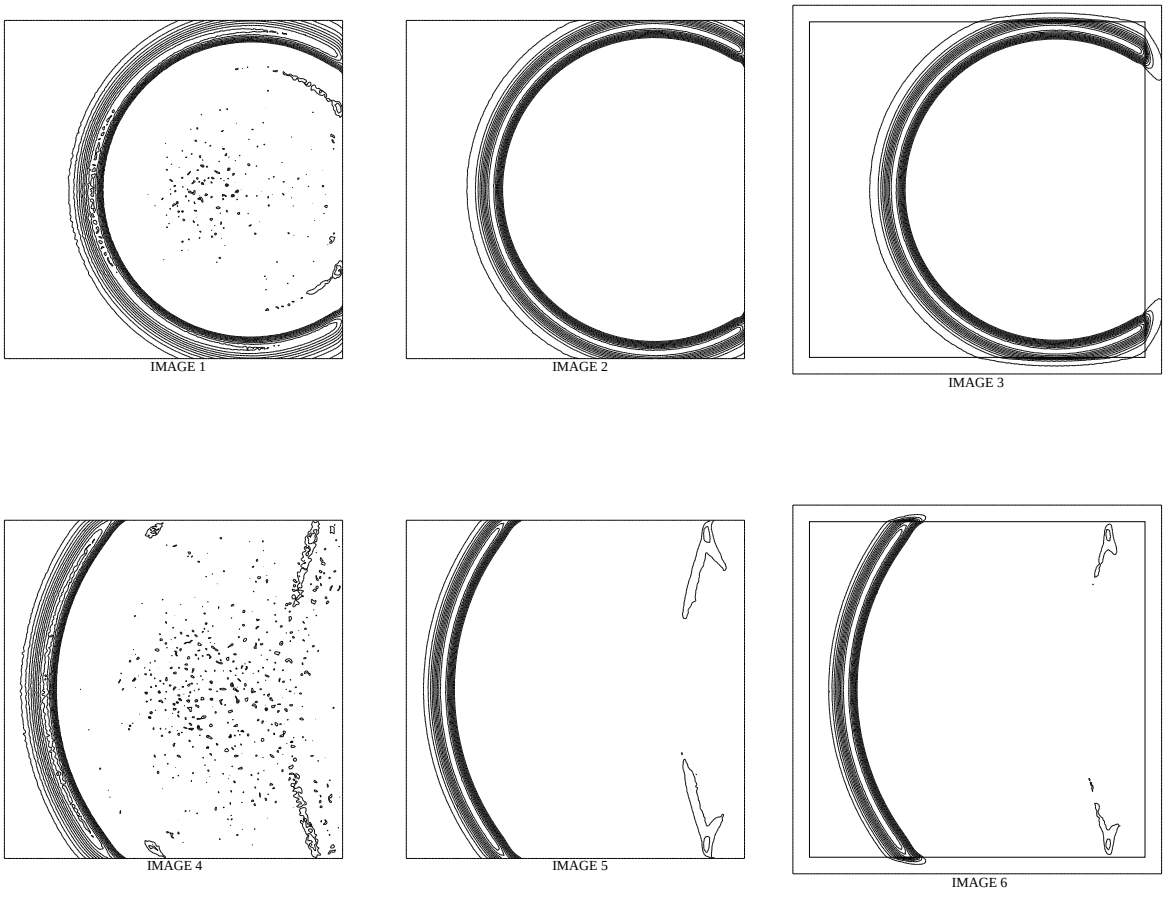
5.3.1 Cas test 1

Notre cas test, traditionnel, a l'avantage que nous connaissons la solution exacte de manière analytique, en fait la perturbation initiale est un pulse en pression placé au centre du maillage et l'écoulement est uniforme horizontal de mach 0.5. Nous comparons la méthode $\mathbb{P}_0$ avec condition absorbante, $\mathbb{P}_1$ avec condition absorbante et $\mathbb{P}_1$ avec zone PML par rapport à la solution exacte grâce à une coupe en y=0. Dans le cas où nous imposons une paroi absorbante en sortie de domaine, le domaine est un carré de côté 100 et le maillage de type non structuré est composé de 35346 triangles (17914 noeuds). Lors de l'utilisation de la méthode PML, le domaine est un carré de côté 110, le maillage de type non structuré est composé de 43140 triangles (21835 noeuds) et la zone PML est de largeur 5 en taille (ce qui correspond a une moyenne de 9-10 triangles dans l'epaisseur de la couche PML) dans les deux directions.

Les différentes grandeurs sont les suivantes:

$$\begin{cases} \rho_0 = 1.2kg/m^3, \quad u_0 = 0.5c_0, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = 10^5 Pa \\ \text{On impose, } \delta u\,(0,x,y) = \delta v\,(0,x,y) = 0, \quad \delta p\,(0,x,y) = 10^3 e^{-\frac{\ln(2)}{9}\left(x^2+y^2\right)} \\ \sigma = 400 \text{ (valeur optimale obtenue après différents essais)} \end{cases} \tag{44}$$

La figure 3 présente δp à trois instants différents. Pour pouvoir apprécier, selon la méthode, l'amplitude des perturbations créees par la méthode et par les conditions aux limites, nous n'avons représenté que des isovaleurs positives et la plus petite des isovaleurs correspond à la valeur pour laquelle nous commençons à visualiser les perturbations; en comparant avec la valeur maximale, cela nous fournit un ordre approximatif de l'erreur commise pour chaque méthode. Les légendes et les résultats sont résumés dans le Tableau 1.



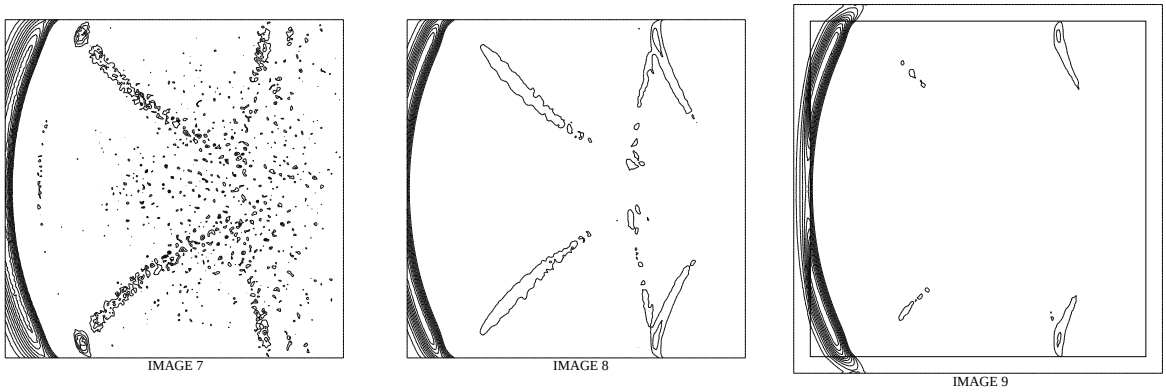


FIG. 3 –

TAB. 1 –

Méthode	Instant	Image	Isovaleurs	Erreur
$\mathbb{P}_0$ avec flux absorbant	t=0.137s	IMAGE 1	10 isovaleurs de δp de 4.5 à 89	5% d'erreur
	t=0.22s	IMAGE 4	10 isovaleurs de δp de 4.3 à 72	6% d'erreur
	t=0.3s	IMAGE 7	10 isovaleurs de δp de 3.6 à 60	6% d'erreur
$\mathbb{P}_1$ avec flux absorbant	t=0.137s	IMAGE 2	10 isovaleurs de δp de 0.45 à 89	- de 0.5% d'erreur
	t=0.22s	IMAGE 5	10 isovaleurs de δp de 1.45 à 72	2% d'erreur
	t=0.3s	IMAGE 8	10 isovaleurs de δp de 1.2 à 60	2% d'erreur
$\mathbb{P}_1$ avec zone PML	t=0.137s	IMAGE 3	10 isovaleurs de δp de 0.45 à 89	- de 0.5% d'erreur
	t=0.22s	IMAGE 6	10 isovaleurs de δp de 0.72 à 72	1% d'erreur
	t=0.3s	IMAGE 9	10 isovaleurs de δp de 0.6 à 60	1% d'erreur

Ces résultats illustrent le gain en précision de la méthode $\mathbb{P}_1$ par rapport à la méthode $\mathbb{P}_0$. Nous pouvons vérifier que la sortie de l'onde acoustique sur les différentes parois du domaine engendre des réflexions dans tous les cas (il apparaît même que pour la méthode $\mathbb{P}_1$, l'erreur numérique est totalement engendrée par les conditions aux limites). Dans le cas de l'utilisation d'une zone PML, nous pouvons interpréter ces réflexions comme des réflexions parasites dues à la variation brutale du coefficient d'absorption lorsque nous passons de la zone interne à la zone PML. Les réflexions obtenues dans le cas de l'utilisation de notre flux absorbant sont plus gênantes car elles mettent en évidence les limites de notre condition, en effet bien qu'offrant des résultats très appréciables pour la stabilité de notre schéma cette condition n'est que d'ordre un en terme de précision. Plus précisément, nous pouvons quantifier les différents taux de réflexion: 5 % dans le cas $\mathbb{P}_0$ avec flux absorbant, 2% dans le cas $\mathbb{P}_1$ avec flux absorbant et 1% dans le cas $\mathbb{P}_1$ avec zone PML. Il apparaît donc clairement grâce à ce cas test que notre schéma permet d'obtenir des résultats précis et encourageants, cependant l'amélioration de la précision de notre flux absorbant sera un objectif crucial de nos futures recherches.
Le graphique suivant correspond à la comparaison de nos résultats avec la solution exacte selon la coupe y=0 pour t=0.137s. Il conforte les résultats présentés dans le tableau.

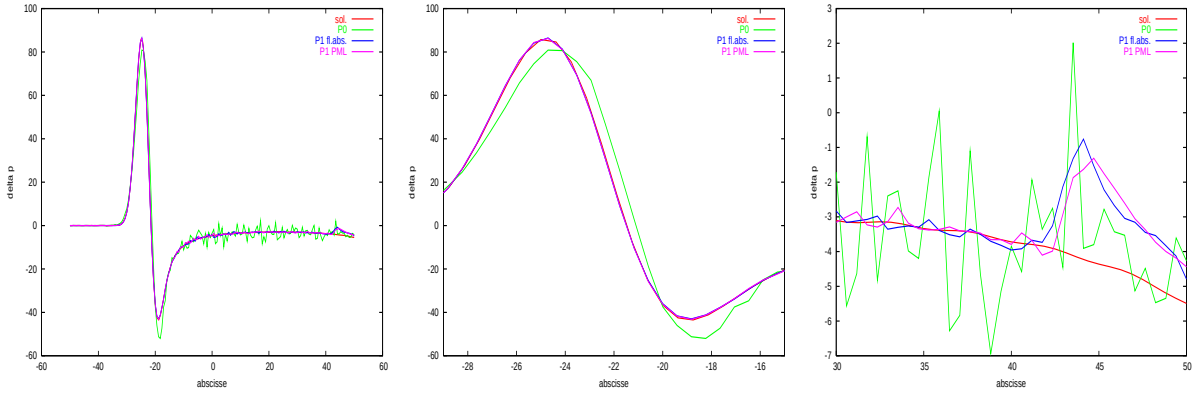


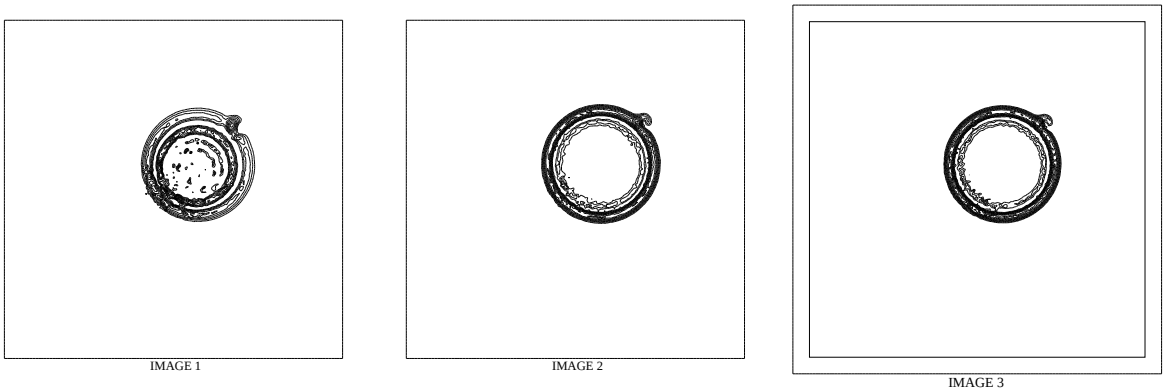
FIG. 4 –

5.3.2 Cas test 2

Ce nouveau cas test nous permet cette fois de tester notre méthode sur la combinaison d'un tourbillon et d'une onde acoustique. Comme pour le cas test précédent nous connaissons la solution exacte de manière analytique. Le domaine est un carré de côté 200 et le maillage est un maillage non structuré composé de 35474 triangles (17978 noeuds) lors de l'utilisation de notre condition absorbante tandis que dans le cas de l'utilisation d'une zone PML, le domaine est un carré de côté 220 et le maillage est un maillage non structuré composé de 43078 triangles (21804 noeuds).La largeur de la zone PML étant égale à 10 en taille (ce qui correspond a une moyenne de 9-10 triangles dans l'epaisseur de la couche PML). Les différentes grandeurs sont les suivantes:

$$\begin{cases} \rho_0 = 1.kg/m^3, \quad u_0 = 0.5, \quad v_0 = 0.5, \quad p_0 = 1/\gamma Pa \\ \\ \delta u\,(0,x,y) = 0.04\,(y-25)\,e^{-\frac{\ln(2)}{9}\left((x-25)^2+(y-25)^2\right)} \\ \delta v\,(0,x,y) = -0.04\,(x-25)\,e^{-\frac{\ln(2)}{9}\left((x-25)^2+(y-25)^2\right)} \\ \delta p\,(0,x,y) = e^{-\frac{\ln(2)}{9}\left(x^2+y^2\right)} \\ \\ \sigma = 0.5 \text{ (valeur optimale obtenue après différents essais)} \end{cases} \tag{45}$$

La figure 5 présente le champ de vitesse à trois instants différents. Pour déterminer l'ordre approximatif de l'erreur pour chaque méthode, nous procédons comme pour le cas test précédent.



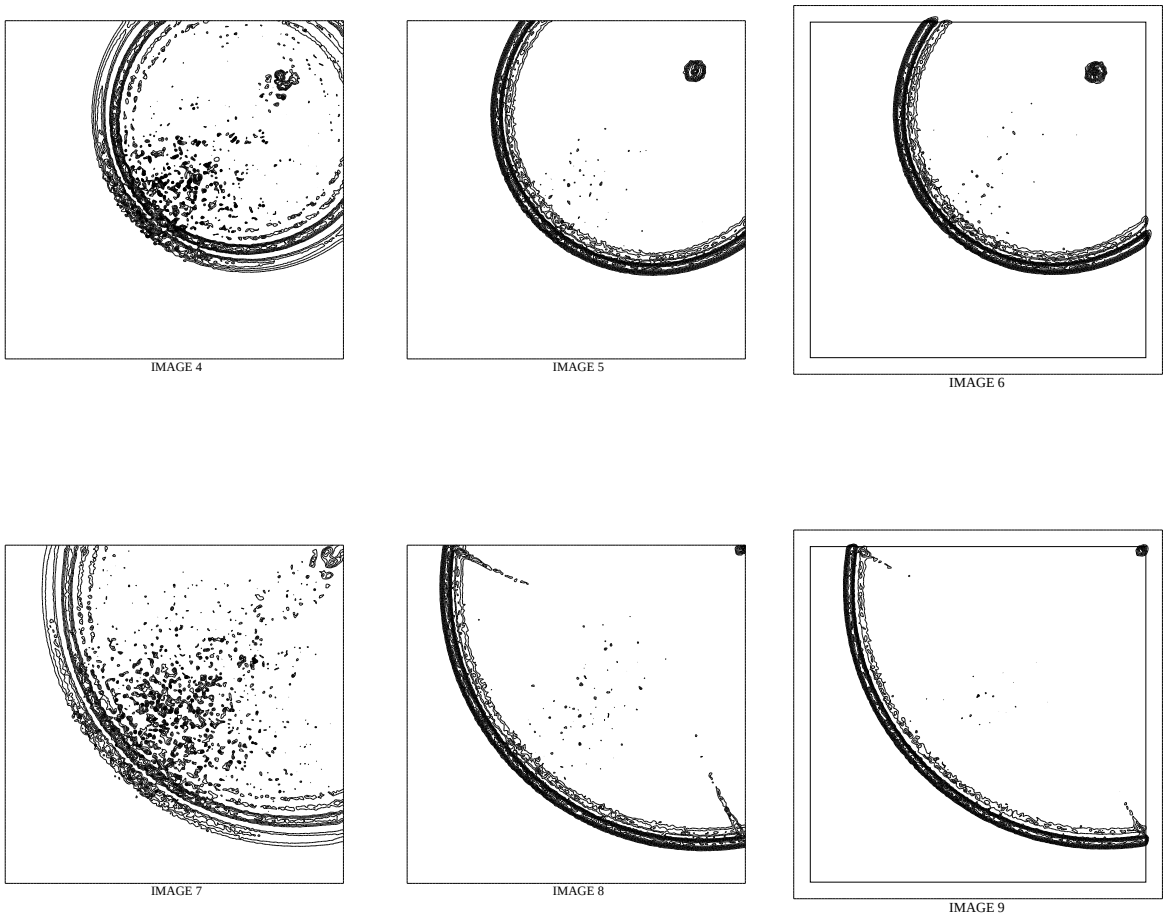


FIG. 5 –

TAB. 2 –

Méthode	Instant	Image	Isovaleurs	Erreur
$\mathbb{P}_0$ avec flux absorbant	t=30s	IMAGE 1	10 iso de δU de $9{,}45.10^{-3}$ à 0.135	7%
	t=90s	IMAGE 4	10 iso de δU de $5.5.10^{-3}$ à $6{,}9.10^{-2}$	8%
	t=150s	IMAGE 7	10 iso de δU de $4{,}24.10^{-3}$ à $5{,}3.10^{-2}$	8%
$\mathbb{P}_1$ avec flux absorbant	t=30s	IMAGE 2	10 iso de δU de $2{,}7.10^{-3}$ à 0.135	2%
	t=90s	IMAGE 5	10 iso de δU de $1.38.10^{-3}$ à $6{,}9.10^{-2}$	2%
	t=150s	IMAGE 8	10 iso de δU de $2{,}12.10^{-3}$ à $5{,}3.10^{-2}$	4%
$\mathbb{P}_1$ avec zone PML	t=30s	IMAGE 3	10 iso de δU de $2{,}7.10^{-3}$ à 0.135	2%
	t=90s	IMAGE 6	10 iso de δU de $1.38.10^{-3}$ à $6{,}9.10^{-2}$	2%
	t=150s	IMAGE 9	10 iso de δU de $3{,}18.10^{-3}$ à $5{,}3.10^{-2}$	3%

Ces résultats corroborent ce que nous avions déduit du premier cas test. Le traitement global des perturbations acoustiques et tourbillonnaires est satisfaisant. Cependant nous remarquons, par rapport au cas test précédent, que les perturbations numériques apparaissant avant d'atteindre les parois sont plus importantes. Les erreurs globales pour $t = 150s$ sont ainsi de l'ordre de 8% dans le cas $\mathbb{P}_0$ avec flux absorbant, 4% dans le cas $\mathbb{P}_1$ avec flux absorbant et 3% dans le cas $\mathbb{P}_1$ avec zone PML.

5.3.3 Cas test 3

Ce nouveau cas test a pour but de tester notre condition de type réfléchissante. Les données pour l'écoulement et la perturbation initiale sont les mêmes que pour le premier cas test, mais cette fois le domaine est rectangulaire, le maillage est un maillage non régulier composé de 12000 triangles et nous imposons conformément au résultat de la partie 2 une condition réfléchissante sur les parties horizontales du domaine tandis que nous imposons une condition absorbante sur les parois verticales. Nous ne donnerons pas de détails sur les isovaleurs et les erreurs commises, il s'agit juste de visualiser "grossièrement" le comportement au niveau des parois.

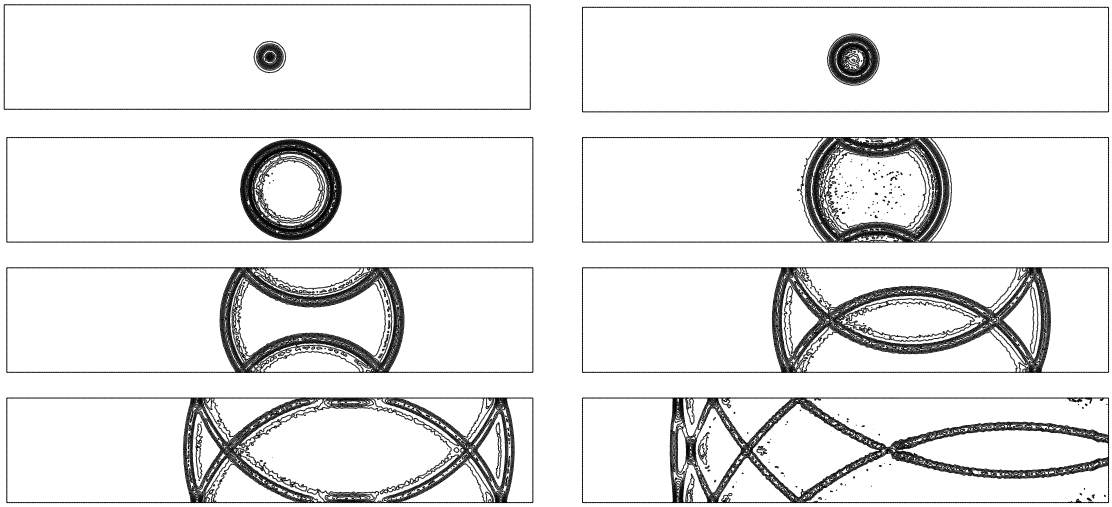


FIG. 6 – *Evolution de δU au cours du temps dans le cas $\mathbb{P}_1$ (représentation de 10 isovaleurs).*

Les résultats de la figure 6 montrent le bon comportement de notre condition réfléchissante. Finalement, nous constatons que dans le cas de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme, notre méthode est vraiment efficace. De plus les résultats théoriques nous fournissent des critères de stabilité précis. Seules les conditions aux limites absorbantes doivent être améliorées. Il apparaît donc naturel de vouloir étendre notre méthode au cas de petites perturbations autour d'un écoulement non uniforme.

6 Introduction au cadre non uniforme

Le but principal de nos recherches est de pouvoir étendre notre méthode au domaine beaucoup plus complexe de petites perturbations autour d'un écoulement non uniforme. Dans le rapport de recherche [7], nous avions testé une méthode $\mathbb{P}_0$ pour la propagation d'un pulse en pression au sein d'un écoulement cisaillé. L'absence de solutions de référence pour ce type de problèmes nous a empêchés de valider autrement que physiquement les résultats obtenus. Le but de cette partie est de proposer un schéma de type $\mathbb{P}_1$ ainsi que des conditions aux limites réfléchissantes et absorbantes dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement quelconque.

6.1 Les équations physiques

Les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement non uniforme sont malheureusement plus complexes que celles données par (2). Par souci de présentation, nous considérons les équations dans le

cas de deux dimensions d'espace.

$$\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}_x \overrightarrow{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbb{A}_y \overrightarrow{W}\right) = 0, \text{ avec } \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbb{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left((\gamma-1)v_0^2 + (\gamma-3)u_0^2\right) & u_0(3-\gamma) & v_0(1-\gamma) & \gamma-1 \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ u_0\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(u_0^2+v_0^2\right) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}\right) & \frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u_0^2 & (1-\gamma)u_0v_0 & \gamma u_0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbb{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left((\gamma-1)u_0^2 + (\gamma-3)v_0^2\right) & u_0(1-\gamma) & v_0(3-\gamma) & \gamma-1 \\ v_0\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(u_0^2+v_0^2\right) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}\right) & (1-\gamma)u_0v_0 & \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)v_0^2 & \gamma v_0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Remarque 6.1

- *Contrairement à ce que nous avions fait pour le système (2), nous ne pouvons plus négliger l'équation portant sur $\delta\rho$.*
- *Nous pouvons également remarquer, que dans ce nouveau cadre, les matrices $\mathbb{A}_x$ et $\mathbb{A}_y$ ne sont plus symétriques. De plus si dans les parties précédentes, nous avions affaire à un système strictement hyperbolique, le nouveau système est quant à lui uniquement fortement hyperbolique.*

6.2 Discrétisations spatiale et temporelle

Une première approche que nous pouvons adopter est celle d'une approximation $\mathbb{P}_0$ de l'écoulement. Cette démarche, consistant à supposer les grandeurs physiques de l'écoulement constantes sur chaque cellule, permet de peu compliquer le schéma donné par (13). En effet, en considérant les nouvelles variables, les nouvelles matrices de flux et les mêmes notations concernant les fonctions de base, le schéma choisi s'écrit

$$\mathbb{M}^i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} = \left(\int_{\tau_i} \left(\sum_s {}^t\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \right) \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n - \sum_{k\in\vartheta_i} \int_{\tau_{ik}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{ij} \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{ik}^i \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n\right) \right)_{1\le j\le d_i}, \quad (49)$$

avec $\mathbb{A}_s^i$ l'expression de la matrice $\mathbb{A}_s$ dans la cellule τ_i et $\mathbb{P}_{ik}^l = \sum_s \tilde{n}_{ik_s}\mathbb{A}_s^l$. En reprenant les notations de la partie 2.2, nous pouvons récrire notre schéma sous la forme

$$\mathbb{M}^i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{N}^i \mathbf{W}_i^n - \frac{1}{2}\sum_{k\in\vartheta_i}\left(\mathbb{O}_k^{ii}\mathbf{W}_i^n + \mathbb{O}_k^{ik}\mathbf{W}_k^n\right), \quad (50)$$

avec

$$\mathbb{N}^i = \left[\sum_s \int_{\tau_i} {}^t\left(\partial_{x_s}\overrightarrow{\varphi}_{iu}\right)\mathbb{A}_s^i\overrightarrow{\varphi}_{iv}\right]_{\substack{1\le u\le d_i \\ 1\le v\le d_i}}, \quad \mathbb{O}_c^{ab} = \left[\int_{\tau_{ac}} {}^t\overrightarrow{\varphi}_{au}\mathbb{P}_{ac}^b\overrightarrow{\varphi}_{bv}\right]_{\substack{1\le u\le d_i \\ 1\le v\le d_i}}. \quad (51)$$

L'intérêt évident d'avoir choisi un modèle $\mathbb{P}_0$ pour l'écoulement réside dans le fait que $\mathbb{A}_s^i$ et $\mathbb{P}_{ik}^l$ sont constants. Les calculs des matrices $\mathbb{N}^i$ et $\mathbb{O}_c^{ab}$ restent donc aussi simple que pour les parties précédentes.

6.3 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites que nous choisissons sont très proches de celles vues dans les parties précédentes. En effet, pour le traitement des conditions aux limites réfléchissantes, nous posons au niveau

d'une interface réfléchissante τ_{ik} entre une cellule interne τ_i et une cellule fictive τ_k:

$$\forall x \in \tau_{ik}, \begin{pmatrix} \delta\rho_k^n(x) \\ \delta u_k^n(x) \\ \delta v_k^n(x) \\ \delta p_k^n(x) \end{pmatrix} = \mathbb{H}_{ik} \begin{pmatrix} \delta\rho_i^n(x) \\ \delta u_i^n(x) \\ \delta v_i^n(x) \\ \delta p_i^n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\tilde{n}_{ik_x}^2 & -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_y} & 0 \\ 0 & -2\tilde{n}_{ik_x}\tilde{n}_{ik_y} & 1-2\tilde{n}_{ik_x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho_i^n(x) \\ \delta u_i^n(x) \\ \delta v_i^n(x) \\ \delta p_i^n(x) \end{pmatrix} \quad (52)$$

Pour le traitement des conditions aux limites absorbantes, nous jouons sur le fait que le système est fortement hyperbolique, c'est-à-dire que la matrice $\mathbb{P}_{ik}^l$ est diagonalisable $\forall i,\ k,\ l$. Ainsi nous proposons pour traiter une interface τ_{ik} entre une cellule au bord τ_i et une cellule fictive τ_k:

$$\mathbb{P}_{ik}^k \overrightarrow{\mathbf{W}}_k^n = \left|\mathbb{P}_{ik}^i\right| \overrightarrow{\mathbf{W}}_i^{n-1}. \quad (53)$$

6.4 Remarques

- Nous pouvons déjà remarquer que si l'écoulement choisi est uniforme, nous retrouvons exactement le schéma développé dans les parties précédentes et même plus précisément que notre nouveau schéma est construit de telle manière que localement il s'identifie à notre ancien schéma.
- La complexité des nouvelles équations ne nous permet plus d'utiliser les résultats de stabilité obtenus dans les parties précédentes. Arriver dans ce nouveau cadre à déterminer une condition explicite de stabilité reste pour nous un problème ouvert. Ainsi de manière purement logique, nous avons utilisé, pour les cas tests de la partie suivante, la condition de stabilité donnée par (26) en tenant compte du caractère non constant des variables physiques de l'écoulement.
- La condition de conservation de l'énergie , $\vec{U}\cdot\vec{n} = 0$, que nous avons vue pour les parois réfléchissantes dans le cas d'un écoulement uniforme sera une condition imposée de manière discrète à l'écoulement non uniforme.

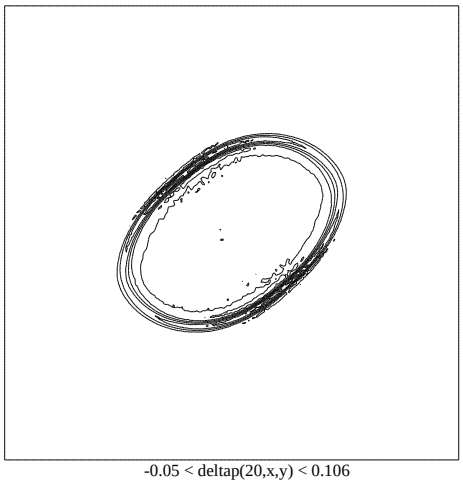
6.5 Cas test avec écoulement cisaillé

Le but de ce cas test est de comparer le comportement de la méthode $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ pour l'évolution d'un pulse en pression au sein d'un écoulement cisaillé horizontal. Le domaine est un carré où nous imposons des conditions aux limites absorbantes sur toutes les parois. Pour évaluer le gain en précision de notre nouvelle méthode, nous utilisons dans le cas de la méthode $\mathbb{P}_0$ un maillage non uniforme composé de 50000 triangles tandis que dans le cas de la méthode $\mathbb{P}_1$ nous utilisons un maillage non uniforme composé de 20000 triangles. Les données précises du cas test sont les suivantes

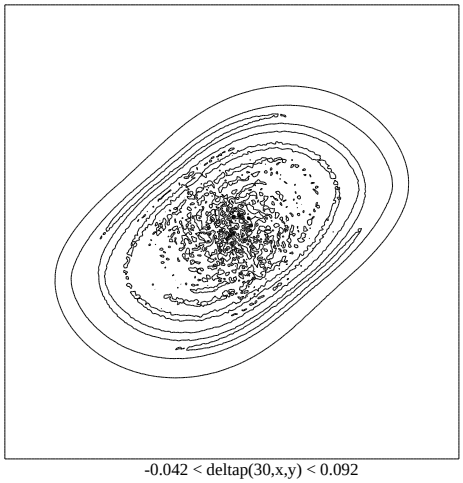
$$\begin{cases} \text{Le domaine de calcul est définit par } -50 \leq x,y \leq 50, \\ \\ \rho_0 = 1, \quad u_0 = \begin{cases} 0.5 \text{ si } y \geq 10 \\ 0.5y \text{ si } |y| \leq 10 \\ -0.5 \text{ si } y \leq -10 \end{cases}, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = 1/\gamma, \\ \\ \text{On impose, } \delta\rho(0,x,y) = \delta u(0,x,y) = \delta v(0,x,y) = 0, \quad \delta p(0,x,y) = exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right). \end{cases} \quad (54)$$



-0.05 < deltap(20,x,y) < 0.106



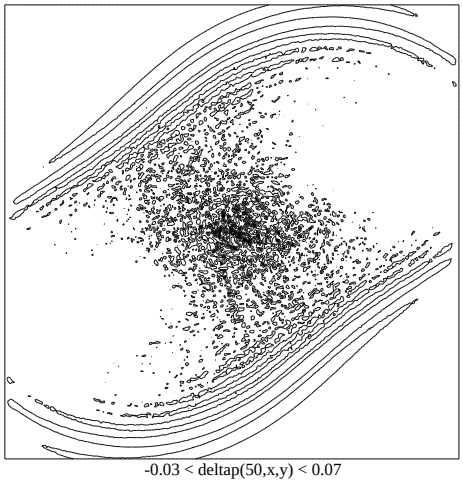
-0.05 < deltap(20,x,y) < 0.106



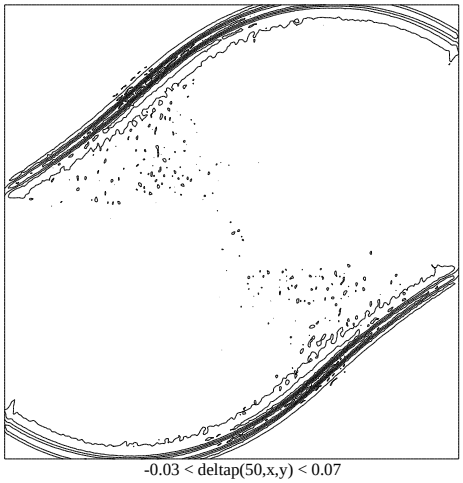
-0.042 < deltap(30,x,y) < 0.092



-0.042 < deltap(30,x,y) < 0.092



-0.03 < deltap(50,x,y) < 0.07



-0.03 < deltap(50,x,y) < 0.07

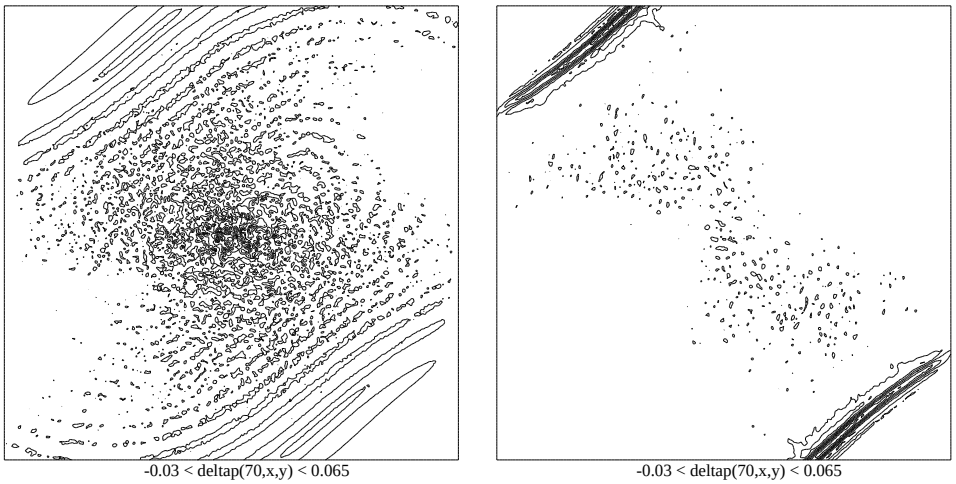


FIG. 7 – *Représentation de 10 isovaleurs de δp pour t=20s, 30s, 50s, 70s dans le cas $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ avec condition absorbante*

Nous pouvons encore une fois vérifier le gain en précision obtenu grâce à l'utilisation du schéma $\mathbb{P}_1$. Nous pouvons également constater l'accord purement physique entre l'allure des résultats et la forme de l'écoulement. Malheureusement à ce jour nous disposons de peu de résultats théoriques et numériques pour valider les résultats obtenus.

Conclusion

Dans cet article, nous avons prolongé les résultats obtenus dans le rapport de recherche [7], plus précisément dans cet article nous avions démontré l'existence d'une condition suffisante de stabilité sur maillage quelconque dans le cadre d'un schéma en volumes finis avec flux centrés appliqué aux équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme en deux et trois dimensions d'espace. Nous avions montré l'existence d'une énergie ayant la propriété sur maillage non structuré, sous une condition de type CFL, soit de se conserver si le domaine ne comporte pas de parois absorbantes, sinon de décroître à chaque itération temporelle (grâce à l'élaboration de flux absorbants). A présent, nous avons étendu tous ces résultats au cadre beaucoup plus précis d'une formulation de type Galerkin discontinu $\mathbb{P}_1$ des équations d'Euler linéarisées. Les cas tests présentés ont mis en évidence le gain en précision important que nous avons obtenu et sont très encourageants. Ils ont aussi mis en évidence le point principal de notre schéma à améliorer: la précision de notre condition absorbante. Pour cela, de nombreux choix s'offrent à nous, nous pourrions par exemple imaginer de travailler en $\mathbb{P}_2$ ou d'augmenter le nombre de degrés de liberté dans des zones proches du bord de notre domaine. Nous pourrions également chercher à améliorer directement l'expression de notre flux absorbant tout en cherchant à conserver les propriétés très intéressantes de stabilité que nous avons obtenues. Ces différents points sont aujourd'hui à l'étude.

Références

[1] Third computational aeroacoustics workshop on benchmark problems. Nasa cp-2000-209790, NASA, 1999.

[2] Acoustique dans les écoulements. Ecoles cea-edf-inria, INRIA, septembre 2000. support de cours.

[3] H.L. ATKINS. Continued development of the discontinous galerkin method for computational aeroacoustic applications. Va 23681-0001, NASA, Langley Research Center Hampton, 1997.

[4] C. Bailly and D. Juvé. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized euler equations. *AIAA journal*, (38(1)):22–29, 2000.

[5] J.-P. Berenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physcics*, 1994.

[6] M. Bernacki. Schémas en volumes finis avec flux centrés: application à l'aéroacoustique. Rapport de recherche numéro 4506, INRIA, juillet 2002.

[7] M. Bernacki and S. Piperno. Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique. Rapport de recherche numéro 4699, INRIA, janvier 2003.

[8] C. Bogey. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides.* PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2000.

[9] F. Bonnet and F. Poupaud. Berenger absorbing boundary condition with time finite-volume scheme for triangular meshes. *Applied numerical mathematics*, (25):333–354, 1997.

[10] C.Bailly et J.-M.Clarisse C.Bogey. Workshop conditions aux limites numériques: conditions non réfléchissantes en aéroacoustique. 2002.

[11] E.Becache, S.dFauqueux, and P.Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. Rapport de recherche numéro 4304, INRIA, November 2001.

[12] T. Gonzalez. *Contributions aux conditions d'interface et conditions aux limites pour le système d'équations Euler compressible.* PhD thesis, Université Paris 6, 2000.

[13] J.C. Hardin, J.R. Ristorcelli, and C.K.W. Tam. Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics. Nasa cp-3300, NASA, ICASE, 1995.

[14] J.C. Hardin and C.K.W. Tam. Second computational aeroacoustics workshop on benchmark problems. Nasa cp-3352, NASA, ICASE, 1997.

[15] J.S. Hestaven. The analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized euler equations. Icase report no.97-49, NASA, september 1997.

[16] F.Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer. *Journal of computational physics*, (129):201–219, 1996.

[17] M. A. Hulsen. The discontinuous galerkin method with explicit runge-kutta time integration for hyperbolic and parabolic systems with source terms. Delft University of Technology, Laboratory for Aero and Hydrodynamics, November 1991. MEMT 19.

[18] D. Kröner. Absorbing boundary conditions for the linearized euler equations in 2-d. Technical Report 195, Mathematics of computation, july 1991. volume 57.

[19] R.W. MacCormarck. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. *AIAA journal*, (20(9)):1275–1281, 1982.

[20] N. Rahmouni. An algebraic way to design well posed pml models. Université Paris 13, April 2002. laboratoire LAGA, prépublication numéro 2002-14.

[21] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène.* PhD thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées, 1999.

[22] S.Piperno, M.Remaki, and L.Fezoui. A centered second-order finite volume scheme for the heterogeneous maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes. Rapport de recherche numéro 4161, INRIA, avril 2001.

[23] C.K.W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized euler equations in open and ducted domains. *J. Comput. Physics*, (144):213–234, 1998.

[24] C.K.W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbancies in a non uniform mean flow. *Journal of computational acoustics*, (2):175–201, 1996. Vol. 4.

[25] C.K.W. Tam and J.C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of computational physics*, (107):262–281, 1993.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399