



# Construction d'un maillage 3-D anisotrope localement structuré

Jens Krause, Paul-Louis George

► **To cite this version:**

Jens Krause, Paul-Louis George. Construction d'un maillage 3-D anisotrope localement structuré. [Rapport de recherche] RR-4834, INRIA. 2003. inria-00071751

**HAL Id: inria-00071751**

**<https://hal.inria.fr/inria-00071751>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Construction d'un maillage 3-D anisotrope  
localement structuré*

Jens Krause et Paul-Louis George

**No 4834**

27 mai 2003

THÈME 4



*R* *apport  
de recherche*





## Construction d'un maillage 3-D anisotrope localement structuré

Jens Krause et Paul-Louis George

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4834 — 27 mai 2003 — 17 pages

### Résumé :

Nous présentons ici une méthode permettant de placer les points internes d'un maillage anisotrope. Au lieu de les insérer sur les arêtes existantes, les points sont créés d'après les vecteurs propres de la métrique anisotrope donnée. Ensuite, un maillage est construit qui est localement structuré par rapport à la métrique. Pour certaines applications ce type de maillage anisotrope peut être avantageux par comparaison à un maillage créé par découpe d'arête.

**Mots-clé :** maillage anisotrope, Delaunay, adaptation, métrique, couches limites

*(Abstract: pto)*

## Construction of a locally structured 3-D anisotropic mesh

**Abstract:**

We present here a method for placing internal points of an anisotropic mesh. In spite of inserting them on existing edges, the points are created following the directions of the eigenvectors of the given anisotropic metric. A mesh is constructed in consequence that is locally structured. For certain applications this type of mesh might be advantageous compared with a mesh created by cutting edges.

**Key-words:** anisotropic mesh generation, Delaunay, adaptation, metric, boundary layers

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et motivation</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Métrieque anisotrope</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Opérateurs d'un mailleur 3-D</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Placement – méthode classique</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Placement selon la direction des vecteurs propres</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Premiers exemples</b>	<b>11</b>
6.1	Métrieque analytique . . . . .	11
6.2	Métrieque constante . . . . .	12
6.3	Couches limites . . . . .	12
6.4	Métrieque de calcul . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>

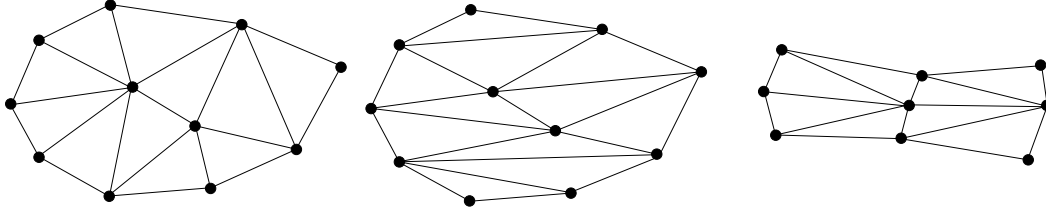


FIG. 1 – Un maillage anisotrope peut être construit à partir d’un ensemble de points irréguliers ou structurés. Un ensemble de points irréguliers donne un maillage isotrope (à gauche) ou anisotrope (au milieu) si connecté d’une manière isotrope ou anisotrope. Par contre un ensemble structuré donne toujours un maillage anisotrope (à droite).

## 1 Introduction et motivation

Les maillages anisotropes sont recherchés dans certaines applications basées sur la méthode d’éléments finis. On espère, en alignant les éléments du maillage sur la solution, résoudre le problème avec moins de nœuds, sans détériorer l’erreur de calcul, et en conséquence réduire le coût du calcul.

L’adaptation d’un maillage isotrope à une carte de taille est une méthode établie. Par contre dans le contexte du maillage anisotrope nous avons peu d’expérience. Mais la voie vers un mailleur anisotrope a été préparée par la référence [2] du moins en dimension trois en créant certains opérateurs, comme le noyau de Delaunay anisotrope et le filtrage anisotrope, qui sont indispensable pour un mailleur complet.

Il reste néanmoins à affiner les algorithmes pour placer les points internes qui sont, dans nos premiers essais, localisés au milieu des arêtes trop longues (dans la métrique anisotrope) ou à distance unité d’un sommet (mais toujours sur l’arête). Nous présentons dans ce rapport une méthode qui utilise les vecteurs propres de la métrique pour placer les nœuds. Dans le cas anisotrope, la métrique est un tenseur qui remplace la carte de taille du mailleur isotrope. Elle définit les longueurs d’arête à construire en trois directions orthogonales dans l’espace. La métrique porte ainsi l’information sur la taille souhaitée des éléments et leur forme (équilatérale ou étirée).

La nouvelle méthode construit un maillage qui est *localement structuré*, c’est-à-dire qui forme des mailles qui sont alignées avec les vecteurs propres de la métrique. Ce principe est visualisé dans la Figure 1 en 2-D et évalué dans ce rapport en 3-D.

*A priori* ni la méthode *découpe de l’arête* ni celle du vecteur propre est supérieure à l’autre, sauf peut-être que la première est moins coûteuse en temps CPU. En fait, il est indispensable de considérer aussi la discrétisation utilisée dans le solveur de l’application envisagée.

Les premières expériences dans le domaine des semi-conducteurs ont montré que les maillages type *découpe de l’arête* ne peuvent pas être traités par une discrétisation de type

volumes finis qui utilise les cellules de Voronoï [8, 9]. Dans son principe cette méthode de discrétisation s'applique uniquement à un maillage conforme au critère de Delaunay, mais certaines corrections sont employées pour traiter un maillage non-Delaunay. En fait les corrections sont trop importantes pour un calcul fiable si elles sont appliquées à un maillage anisotrope qui est construit de façon *découpe de l'arête*. On espère que les corrections sont plus faibles pour un maillage localement structuré parce que ce maillage est plus *proche* d'un maillage Delaunay.

## 2 Métrique anisotrope

Dans le cadre du maillage anisotrope, la notion de métrique a pour but de définir une mesure de distance entre deux points et, en conséquence, de longueur d'une arête. Cette mesure dépend de l'endroit où on se trouve dans l'espace et de la direction de l'arête. L'idée de base est de changer le produit scalaire, qui joue un rôle important dans la mesure Euclidienne [13].

**Définition de la métrique.** Soit  $\Omega$  un domaine en 3-D, le tenseur

$$\mathcal{M} : \Omega \rightarrow (R^3 \times R^3)_{sym-pos}$$

est une *métrique*. On se donne à chaque endroit de l'espace une matrice symétrique et définie positive.

Le produit scalaire usuel est dans la métrique, remplacé par :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathcal{M}} = \mathbf{a}^t \mathcal{M} \mathbf{b} ,$$

et la longueur de l'arête  $AB$  est ainsi définie par :

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = \int_0^1 \sqrt{\langle AB, AB \rangle_{\mathcal{M}((1-t)A+tB)}} dt .$$

Le fait que la matrice est symétrique et définie positive garantie que les distances ainsi construites sont valides.

Le problème de générer un maillage adaptatif peut être re-formulé à l'aide de cette mesure de distance: un maillage est appelé maillage unité dans la métrique si toutes ses arêtes sont de longueur voisine de 1.

En pratique l'intégration est jugée trop coûteuse et on s'aide d'une approximation en supposant une interpolation linéaire  $\mathcal{M}((1-t)A+tB) = (1-t)\mathcal{M}(A) + t\mathcal{M}(B)$ . L'intégrale peut alors être évaluée par

$$d(A, \mathcal{M}(A), B, \mathcal{M}(B)) = \frac{2a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$$

$$a^2 = \langle AB, AB \rangle_{\mathcal{M}(A)} \quad , \quad b^2 = \langle AB, AB \rangle_{\mathcal{M}(B)} .$$



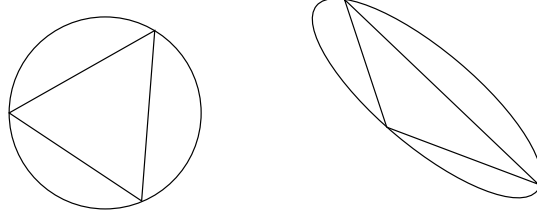


FIG. 2 – En remplaçant le cercle circonscrit par un ellipse circonscrite, on remplace le triangle équilatéral par un triangle étiré

Seule la connaissance de la métrique aux sommets est nécessaire. Une deuxième méthode consiste à approcher l'intégrale pas la formule de Simpson [2] :

$$d(A, \mathcal{M}(A), B, \mathcal{M}(B)) = \frac{1}{6}(a + b + 4c), \quad c^2 = \langle AB, AB \rangle_{\mathcal{M}((A+B)/2)} .$$

La matrice  $\mathcal{M}((A+B)/2)$  est l'interpolée au milieu de l'arête. Plusieurs manières d'interpolation sont décrites dans [5], par exemple  $\mathcal{M}((A+B)/2) = \frac{1}{2}(\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B))$ .

La métrique a une interprétation géométrique très pertinente si on cherche l'ensemble de points  $X$  à distance  $\epsilon$  de  $P$ . Pour un  $\epsilon$  suffisamment petit la métrique est en général pratiquement constante et on peut écrire

$$XP^t \mathcal{M} XP = \epsilon ,$$

qui est l'équation d'une sphère pour une matrice unité et l'équation d'un ellipsoïde dans le cas général. En conséquence, toutes les sphères qui apparaissent dans les algorithmes de maillage doivent être remplacées par des ellipsoïdes, comme par exemple les sphères circonscrites dans une méthode de type Delaunay. On voit dans la Figure 2 que les ellipses circonscrites induisent naturellement des éléments étirés dans les directions principales de la matrice. Dans une simple configuration (Fig. 3) avec quatre points le critère de Delaunay

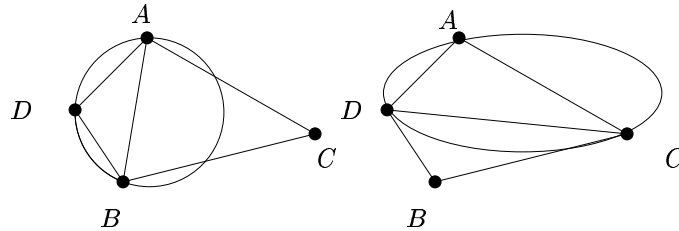


FIG. 3 – Selon le critère de Delaunay isotrope les points  $A$  et  $B$  sont connecté, mais une métrique anisotrope peut rapprocher  $C$  et  $D$  et les connecter.

préfère la diagonale  $AB$ . Par contre une métrique anisotrope bien choisie peut favoriser la diagonale  $CD$ , ce qui induit des triangles étirés.

### 3 Opérateurs d'un mailleur 3-D

On rappelle dans cette section les principales étapes nécessaires pour construire un maillage 3-D isotrope ou anisotrope. Les données sont pour notre application :

- Un maillage volumique vide (i.e. sans points internes) de l'objet.
- Un premier maillage de volume obtenu auparavant. Ce maillage de fond sert à définir la métrique.
- Un champs attaché aux nœuds du maillage de fond. Comme la métrique est représentée par une matrice symétrique, six valeurs sont suffisantes pour définir cette donnée.

Nous ne traitons pas, dans ce rapport, la génération du maillage surfacique, mais nous supposons que ce maillage est en accord avec la métrique définie sur le maillage (voir par exemple [3]). De même, le maillage vide et comment on le construit ne fait pas l'objet de ce rapport. Ce maillage volumique représente l'objet mais contient seulement les points internes qui sont nécessaires pour forcer les arêtes et les faces du maillage surfacique [4]. *A priori* vide ce maillage peut contenir, en effet, quelques points de Steiner. A propos du maillage de fond on suppose qu'il capture bien les variations de la métrique.

**Connecteur de Delaunay [11]** : Pour la méthode de construction de maillage, l'opérateur central est l'insertion d'un point nouveau dans un maillage existant qui est employé afin d'ajouter itérativement - à partir du maillage vide - les nœuds internes.

L'algorithme pour insérer un point  $P$  est le suivant :

- localisation : trouver un des éléments qui contient  $P$  et qui sert de germe pour l'algorithme.
- former une cavité  $C$  en voisinage du germe et en conséquence en voisinage de  $P$ .
- corriger cette cavité afin de la rendre étoilée.
- détruire les éléments de la cavité.
- remplir la cavité avec les tétraèdres formés par les triangles de la surface de la cavité avec  $P$  comme quatrième point.

Il est essentiel que la cavité soit étoilée pour former des éléments de volume positif.

Le choix de la cavité détermine le type de maillage qui sera formé par l'algorithme. La méthode classique (et isotrope) utilise le critère (de Delaunay) de la sphère vide : la cavité est l'ensemble des éléments dont les sphères circonscrites contiennent  $P$ . Dans le cadre du maillage anisotrope la sphère est remplacée par un ellipsoïde, qui est conforme à la métrique. En pratique la métrique varie dans l'élément et il faut trouver une matrice moyenne. Ici on

emploie la somme des métriques  $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{M}_i$  où les  $\mathcal{M}_i$  sont les métriques liées aux sommets du tétraèdre.

On note aussi que la correction, qui est dans le cadre d'un maillage isotrope nécessaire pour des raisons numériques [12], est fondamentale dans le cas anisotrope avec une métrique variable.

## 4 Placement – méthode classique

Une première méthode pour trouver les points internes est de les placer sur les arêtes existantes. En fait c'est la méthode retenue dans le maillage isotrope dont nous disposons.

Soit  $AB$  les sommets d'une arête et  $\mathcal{M}(A)$ ,  $\mathcal{M}(B)$  les métriques associées aux sommets  $A$  et  $B$ . On suppose que la longueur  $d(A, \mathcal{M}(A), B, \mathcal{M}(B))$  est supérieure à  $\sqrt{2}$ . Pour construire un maillage unité on cherche à couper l'arête en

$$n = \lceil d(A, \mathcal{M}(A), B, \mathcal{M}(B)) \rceil$$

morceaux.

Dans le cas d'une métrique variable, on trouve la position finale en peu d'itérations pour que la longueur de l'arête soit proche de un. On commence la première itération avec  $P = (1 - \frac{1}{n})A + \frac{1}{n}B$ . Enfin le point est inséré dans le maillage par le noyau de Delaunay.

Dans le nouveau maillage cette méthode est aussi employée si l'insertion d'un point n'est pas possible selon les directions des vecteurs propres quand la métrique est isotrope.

## 5 Placement selon la direction des vecteurs propres

Avant de décrire l'algorithme en détail nous rappelons quelques propriétés des matrices symétriques, dont nous avons besoin pour la construction du maillage.

Les matrices symétriques  $3 \times 3$  ont trois valeurs propres réelles (si on considère les valeurs propres de multiplicité deux ou trois comme distinctes). En fait, une matrice de métrique est aussi définie positive et les valeurs propres sont positives. Comme déjà évoqué, une valeur propre  $\lambda_i$  a pour conséquence une longueur d'arête  $h_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ .

Chaque valeur propre  $\lambda_i$  définit un vecteur propre  $\mathbf{v}_i$  par l'équation  $\mathcal{M}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$  et pour deux valeurs propres différentes les vecteurs propres associés sont orthogonaux. Notre méthode de construction de maillage repose sur cette orthogonalité, qui est valide pour les matrices symétriques.

Pour les valeurs propres multiples, la représentation des vecteurs propres n'est pas unique et on parle d'un sous-espace propre. Autrement dit, soit  $\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2$  deux vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$ , toutes les combinaisons  $\alpha\mathbf{v}_i^1 + \beta\mathbf{v}_i^2$  sont des vecteurs propres.

Les matrices de métrique peuvent être classés selon l'égalité des valeurs propres. Il y a quatre cas à considérer:

- (1) **cas isotrope** Les trois valeurs propres sont égales. La matrice est donc diagonale et la métrique isotrope.
- (2) **cas cigare** Les deux grandes valeurs propres sont égales. L'ellipsoïde qui représente la métrique a la forme d'un cigare.
- (3) **cas disque** Les deux petites valeurs propres sont égales. L'ellipsoïde qui représente la métrique a la forme d'un disque.
- (4) **cas général** Les trois valeurs propres sont différentes.

Les cas *cigare* et *disque* bénéficient d'un traitement particulier parce que la direction des vecteurs propres n'est pas bien définie. En pratique on étend la notion d'égalité pour considérer deux valeurs égales si  $\lambda_i/\lambda_j < \alpha$  ( $\lambda_i > \lambda_j$  et  $\alpha \approx 1.4$ ). Pour des raisons de stabilité il est important dans la construction d'un maillage localement structuré, que la direction avec laquelle on cherche à aligner les arêtes ne varie pas trop. Si on diminue encore  $\alpha$ , cette direction n'est plus numériquement stable. Autrement dit, cette méthode de placement des points ne peut pas maintenir un rapport d'anisotropie trop faible. Dans ce cas on suppose que la méthode par découpe d'arête suffit.

**L'algorithme:** La construction du maillage localement structuré, qui est détaillée dans la suite, ajoute les points internes du maillage un par un autant qu'il y existe une arête jugée trop longue dans la métrique. Dans cette procédure il est préférable d'attaquer les arêtes très longues avant celles de longueur moyenne.

Soit  $e$  une arête de longueur  $l$  avec les sommets  $AB$ . D'abord on analyse les métriques aux sommets selon le classement ci-dessus.

### Cas (3) et (4)

Si on trouve un des cas (3) ou (4) au sommet  $A$ , le vecteur propre  $\mathbf{v}_3$  de la valeur propre la plus grande ( $\lambda_3$ ) est calculé, qui donne deux directions de marche parce que l'orientation de vecteurs propres n'est pas donnée. Entre les deux candidats à l'insertion  $P = A + \mathbf{v}_3/\lambda_3$  et  $P = A - \mathbf{v}_3/\lambda_3$  celui pour qui  $\langle BA, PA \rangle$  est positive sera choisi.

La position du point  $P$  est encore ajustée pour bien prendre en compte la variation de la métrique. À cette fin on évalue alors la métrique en  $P$  et la distance  $d$  entre  $A$  et  $P$  en prenant en compte les métriques aux points  $A$  et  $P$ ; ensuite le point  $P$  est poussé en direction des  $\mathbf{v}_3$  selon le résultat obtenu pour  $d$ . En pratique une ou deux itérations suffisent pour borner la distance entre 0,9 et 1,1.

En employant l'information de voisinage des tétraèdres on vérifie que  $P$  n'est pas proche d'un point existant dans le maillage pour éviter de créer des éléments d'une mauvaise qualité. Pour le point  $P$ , la cavité est construite dans la mesure de Delaunay anisotrope et corrigée pour supprimer des éléments négatifs. On analyse maintenant la cavité afin de vérifier si  $P$

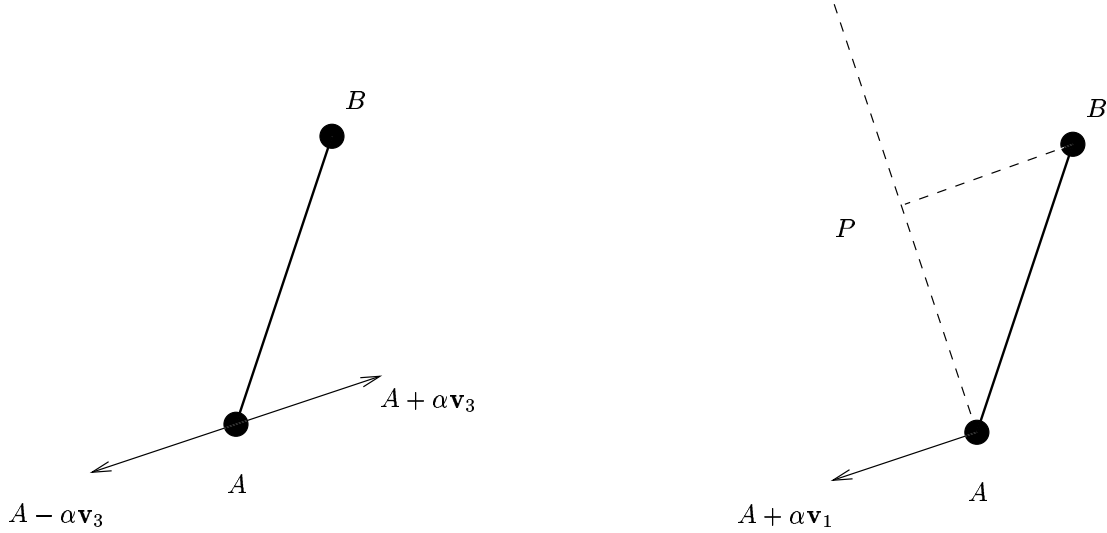


FIG. 4 – Trouver un point d’insertion : à gauche dans le cas général et à droite dans le cas d’un ellipsoïde en forme de cigare.

n’est pas proche d’une face de la frontière et en cas de proximité, le point est rejeté comme candidat à l’insertion.

Dans le cas (3) on utilise la méthode par découpe d’arête si le point  $P$  ne peut pas être inséré, ce qui résulte en un maillage non-structuré orthogonal à  $\mathbf{v}_3$ . Par contre, en cas (4), on relance la même procédure avec les valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$  (dans cet ordre). Seulement si tous ces essais échouent on coupe l’arête directement.

## Cas (2)

Ce cas – dit cigare – est particulier parce qu’on préfère insérer les points d’abord en direction de la grande valeur propre, qui n’est pas bien définie dans ce cas. Par contre, seul le vecteur propre  $\mathbf{v}_1$  est fiable et en conséquence le plan orthogonal à ce vecteur est fiable. Pour trouver le candidat on projette le point  $B$  dans ce plan :

$$P = B + \frac{\langle \mathbf{v}_1, AB \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 .$$

Cette méthode construit un maillage irrégulier selon la direction orthogonale à  $\mathbf{v}_1$  mais la directionnalité vers  $\mathbf{v}_1$  est maintenue.

Le point subira les mêmes procédures d’ajustement, construction de cavité et test de proximité. Comme pour les autres cas on découpe par arête en cas d’échec.

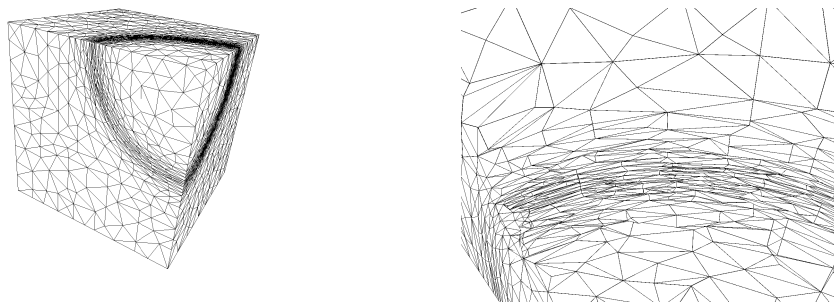


FIG. 5 – Maillage surfacique, et coupe du maillage de volume pour une métrique anisotrope (Ex. 1).

### Cas (1)

Dans le cas d'une métrique isotrope on applique toujours la méthode classique.

## 6 Premiers exemples

Les premiers résultats que nous avons obtenus ont été réalisés avec des exemples construits pour tester certains aspects du mailleur. Premièrement, il est à démontrer que les maillages obtenus sont localement structurés. Deuxièmement, nous avons mesuré l'efficacité du mailleur à créer un maillage conforme à la métrique données. Le temps CPU reste pour l'instant supérieur à la méthode classique (et plus simple). Les tests ont été réalisés sur un PC sous Linux à 1,4 GHz.

Afin de mesurer la capacité du mailleur de créer des arêtes de longueur unité un indice d'efficacité est calculé par la formule suivante (voir [2]) :

$$\tau = 1 - \frac{1}{na} \sum_{i=1}^{na} (\max(1 - d_i, 1 - 1/d_i))^2 ,$$

où  $na$  est le nombre d'arêtes et  $d_i$  la longueur de l'arête  $i$  dans la métrique.

### 6.1 Métrique analytique

Un premier exemple est un cube avec une métrique analytique. Cette métrique est anisotrope aux environs d'une sphère fictive centrée à un sommet du cube. La taille de maille souhaitée est petite dans la direction normale et plus grande en direction tangentielle de la sphère. Mais à une certaine distance de la sphère la métrique est constante et isotrope.

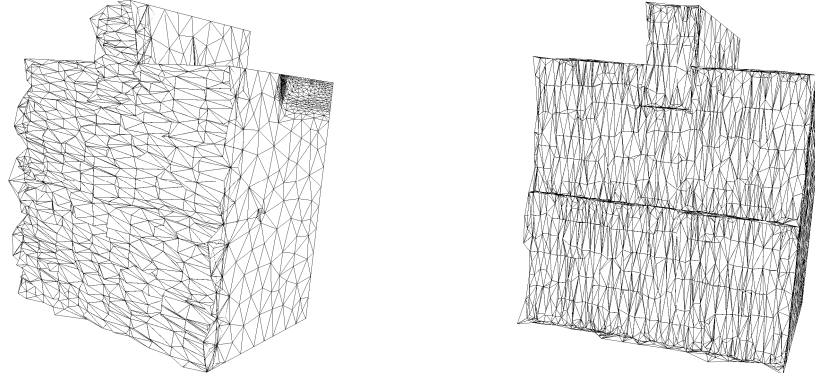


FIG. 6 – Cas d’une métrique constante (Ex. 2) : à gauche cas général et cas cigare à droite.

Construite de cette façon la métrique essaie de capturer un choc en forme de sphère et elle est définie à l’aide d’un maillage de fond qui est suffisamment fin. Le maillage de surface est crée par YAMS [3] et respecte la même métrique. Il faut noter, que nous n’avons pas, en ce moment, un maillage de surface qui crée des éléments *localement structurés* dans la même manière que l’on cherche à fabriquer le maillage volumique. Il reste une région de transition entre surface et volume qui ne suit pas les critères souhaités.

Les 53 284 éléments (8 563 points) sont créés en 3,4 secondes. L’efficacité de 0,87 est très faible. La Figure 5 montre le maillage surfacique et une coupe du maillage de volume dans le voisinage de la sphère fictive.

## 6.2 Métrique constante

Pour une géométrie plus complexe et ayant plusieurs sous-domaines (qui vient de la micro-électronique) nous montrons dans la Figure 6 deux maillages avec une métrique anisotrope et constante. Les deux matrices appartiennent au cas général (4) et au cas *cigare* (2).

## 6.3 Couches limites

Dans le troisième exemple – également issu de la micro-électronique – nous avons prescrit une métrique qui vise à simuler un maillage de type couches limites. En fait la construction des couches limites était notre première motivation de créer des maillages anisotropes. Cette manière de construire des éléments anisotropes n’utilise pas la notion de la métrique mais le support de la surface pour obtenir l’anisotropie [10, 6, 7]. En conséquence l’anisotropie est limitée à la proximité d’une surface et aussi à la direction normale de cette surface.

La Figure 7 montre bien que la méthode développée (qui est plus générale) peut générer un maillage avec les mêmes propriétés.

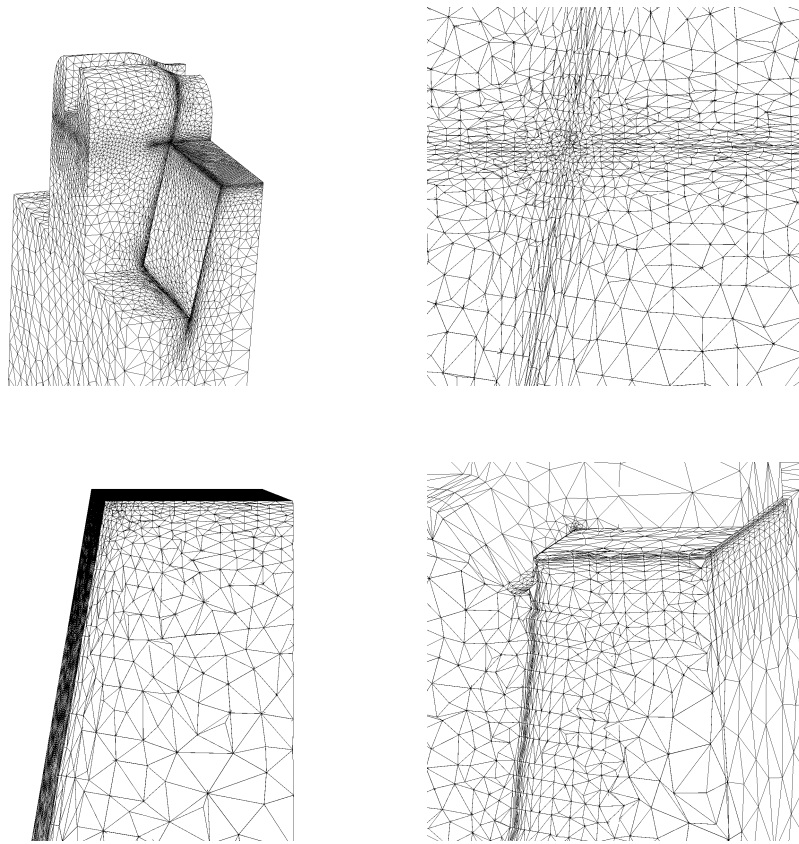


FIG. 7 – Maillage localement structuré imitant les couches limites (Ex. 3) : surface, interface, surface et construction des couches limites (par noffset3d)



TAB. 1 – Comparaison de différentes méthodes de maillage anisotrope (ex. 4), qui sont expliquées dans le texte.

méthode	nb d'éléments	nb de points	temps CPU [sec]	efficacité
M0	14 684	4 026	4,2	(prétraitement)
M1	240 862	38 015	22,8+4,2=25,0	0,93
M2	182 792	29 835	18,8+4,2=23,0	0,95
M3	1 077 861	169 147	82,9+4,2=87,1	0,94
M4	164 118	28 680	18,5	0,97

En comparant avec un maillage créé par découpe d'arête on voit que les points sont dans la nouvelle méthode placés en direction normale à la surface. Les expériences ont montré que cette propriété est préférée pas le simulateur dans la micro-électronique.

Dans cet exemple la génération des 83 834 points et des 500 935 éléments a duré 28,5 secondes. L'efficacité de 0,94 est meilleur que pour le premier exemple. On voit dans la Figure 7 le maillage de la surface et dans deux coupes différentes. Nous montrons également le maillage de *noffset3d* [7, 6], un logiciel qui construit les couches limite explicitement.

## 6.4 Métrique de calcul

Pour le dernier exemple une métrique a été calculée pour bien capturer les variations d'une (pseudo-)solution qui est donnée dans les nœuds du maillage de fond. La référence [5] décrit une méthode pour équi-répartir l'erreur d'interpolation dans le domaine. De fait, cette méthode est un estimateur d'erreur sans connaissance des équations qui travaille par estimation du Hessien de la solution et en déduit une métrique. Dans l'exemple, la *solution* est la concentration du dopage d'un semi-conducteur. Cette démarche est réaliste parce qu'on sait d'avance qu'il faut capter les variations de cette fonction.

Voir le Tableau 1 pour une comparaison du temps CPU et de l'efficacité de différentes méthodes appliquées sur cet exemple et la Figure 8 pour la vue des maillages. Le tableau donne également le nombre de points et le nombre d'éléments des maillages créés avec les quatre méthodes **M1** à **M4**.

- M0** Parce que le nouveau code, qui est l'objet de ce rapport, ne peut pas forcer la frontière lui-même et le maillage vide est une donnée, ce prétraitement est nécessaire. Le temps CPU de *GHS3D* est ajouté à celui de la méthode.
- M1** La nouvelle méthode, qui aligne le maillage avec les vecteurs propres de la métrique, est appliqué au résultat de **M0**.
- M2** Une méthode par *découpe d'arête*, qui est implementée avec le même code que **M1**. Le résultat de **M0** est donné.
- M3** Pour cet exemple la métrique est rendue isotrope en choisissant la plus grande valeur propre. La méthode **M0** est utilisé pour créer le maillage vide et la méthode **M2** crée les points internes.
- M4** Comme maillage de référence, le prototype de *GAMANIC3D* est appliqué sur la même géométrie avec la même métrique. Cette méthode est comparable avec **M2**.

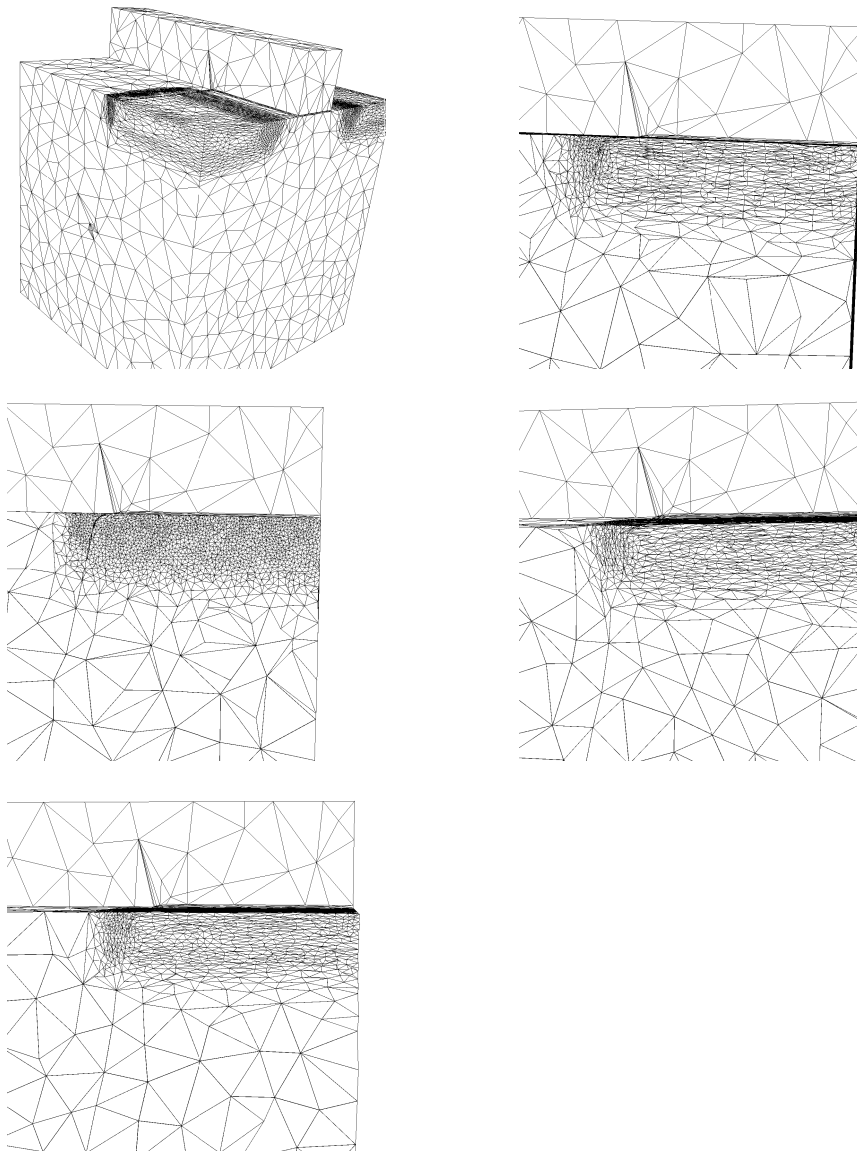


FIG. 8 – Métrique construite pour bien capturer une (pseudo) solution (Ex. 4) ; maillage surfacique, maillage localement structuré, maillage isotrope (en prenant la valeur propre la plus grande), maillage anisotrope par découpe d'arête, maillage anisotrope GHS3D

On peut constater plusieurs faits à partir de cet exemple.

- La nouvelle méthode est (seulement) 20% plus coûteuse.
- Elle construit plus d'éléments (environ 20%) pour une efficacité plus faible.
- Le rapport d'anisotropie ( $\approx 2$ ) est faible dans tous les cas.
- Un maillage isotrope, qui respecte la petite taille de la métrique, est trop grand, donc inutilisable en pratique pour des problèmes de grande taille.

## 7 Conclusion

D'après les expériences que nous avons faite avec la méthode de construction d'un maillage localement structuré, nous pouvons tirer des premières conclusions. L'idée principale de cette méthode consiste à ajouter les points internes selon les vecteurs propres de la métrique locale. Le maillage qui est ainsi construit est en fait anisotrope dans la métrique et localement structuré, c'est-à-dire les arêtes sont alignées avec les vecteurs propres de la matrice.

L'efficacité de cette méthode à construire un maillage unité est inférieure à une méthode qui découpe les arêtes. Mais cette dégradation est attendue parce que on a ajouté une condition supplémentaire au maillage qui doit être respectée. De toute façon on peut dire que l'efficacité reste raisonnable.

Il est aussi démontré que la nouvelle méthode doit être complétée par la méthode par découpe d'arête pour traiter les cas isotropes et les cas d'une faible anisotropie.

Les prochaines étapes vers une application sont à notre avis les suivantes. Pour le moment la méthode est très strict en créant les points dans la direction exacte de vecteurs propres. Il reste à discuter si on peut dévier de cette direction pour avoir plus de liberté à placer les points. On peut imaginer à donner cette liberté à deux endroits : soit à la construction des points ou à une étape d'optimisation qui bouge les points après l'insertion de tous les points internes.

Il reste néanmoins à valider les maillages localement structurés dans le solveur. Cette validation sera le dernier juge pour dire si le surcoût en temps CPU et l'efficacité moins élevée sont tolérables.

## Références

- [1] S. YAMAKAWA AND K. SHIMADA High quality anisotropic tetrahedral mesh generation via ellipsoidal bubble packing, in *proc. 9<sup>th</sup> International Meshing Roundtable*, 263-273, 2000.
- [2] P.L. GEORGE ET H. BOROCHAKI, Premières expériences de maillage automatique par une méthode de Delaunay anisotrope en trois dimensions, *Rapport Technique*, n° 0272, INRIA, Nov. 2002.
- [3] P.J. FREY YAMS A fully Automatic Adaptive Isotropic Surface Remeshing Procedure, *Rapport Technique*, n° 0252, INRIA, Nov. 2001.

- 
- [4] P.-L. GEORGE, F. HECHT, AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:269–288, 1991
  - [5] F. ALAUZET ET P.J. FREY, Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I: aspects théoriques, *Rapport de Recherche*, n° 4759, INRIA, Mars 2003.
  - [6] J. KRAUSE, On boundary conforming anisotropic Delaunay meshes PhD thesis, ETH Zürich, Integrated Systems Laboratory, Suisse, 2001.
  - [7] J. KRAUSE, N. STRECKER, L. VILLABLANCA, AND W. FICHTNER, Robust anisotropic 3D grid generation using a normal offsetting approach, in B. Soni et al., editor, *7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pages 305–314. ISGG, 2000.
  - [8] R. E. BANKS, D. J. ROSE, AND W. FICHTNER, Numerical methods for semiconductor device simulations. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 30(9):1031–1041, 1983.
  - [9] S. MÜLLER, An object-oriented approach to multidimensional semiconductor device simulation, PhD thesis, ETH Zürich, Integrated Systems Laboratory, Suisse, 1994.
  - [10] Y. KALLINDERIS, A. KHAWAJA, AND H. MCMORRIS Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries, Technical Report 95-0211, AIAA, 1995.
  - [11] A. BOWYER, Computing Dirichlet tessellations, *The Computer Journal*, 24(2):162–166, 1981.
  - [12] P.L. GEORGE AND F. HERMELINE, Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:975–995
  - [13] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages, application aux éléments finis, Hermes, 1999



---

Unit e de recherche INRIA Lorraine, Technop le de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS L ES NANCY  
Unit e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unit e de recherche INRIA Rh ne-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unit e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unit e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399