

Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires : I. Analyse mathématique

Eliane Bécache, Abdelaâziz Ezziani, Patrick Joly

▶ **To cite this version:**

Eliane Bécache, Abdelaâziz Ezziani, Patrick Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires : I. Analyse mathématique. [Rapport de recherche] RR-4785, INRIA. 2003. inria-00071801

HAL Id: inria-00071801

https://inria.hal.science/inria-00071801

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires I. Analyse mathématique

Eliane Bécache — Abdelaâziz Ezziani — Patrick Joly

N° 4785

Mars 2003

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4785--FR

INRIA
ROCQUENCOURT

Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires I. Analyse mathématique

Eliane Bécache , Abdelaâziz Ezziani , Patrick Joly*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 4785 — Mars 2003 — 33 pages

Résumé : Nous nous intéressons à la modélisation de la propagation d'ondes dans des milieux viscoélastiques. Ce premier rapport est consacré à la présentation d'une classe de modèles généralisant le modèle de Zener et à son analyse mathématique : résultats d'existence et d'unicité, régularité des solutions, décroissance de l'énergie, propagation à vitesse finie. Un deuxième rapport sera consacré à la présentation et à l'analyse numérique d'une méthode d'approximation par éléments finis mixtes.

Mots-clés : Dissipation d'énergie, modèle de Zener, analyse de Fourier, ondes viscoélastiques, propagation à vitesse finie.

* INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay Cedex, France

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Téléphone : +33 1 39 63 55 11 —Télécopie : +33 1 39 63 53 30

Modeling of waves propagation in linear viscoelastic media I. Mathematical analysis

Abstract: We are interested in the modeling of wave propagation in viscoelastic media. This first report is devoted to the presentation of family of models which generalize the Zener's model and to its mathematical analysis : existence and uniqueness result, regularity of the solutions, energy decay result, wave propagation at a finite velocity. A second report will be devoted to to the presentation and numerical analysis of an approximation method based on mixed finite element.

Key-words: Energy dissipation, finite velocity propagation, Fourier analysis, relaxation, viscoelastic waves, Zener's model.

Table des matières

Introduction **3**

1 Présentation des modèles **4**
1.1 Écriture sous forme intégrale 4
1.2 Écriture sous forme différentielle 5
1.3 Le modèle de Zener 6
1.4 Généralisation du modèle de Zener 7

2 Analyse mathématique **7**
2.1 Problème modèle 8
2.2 Existence et unicité de solutions fortes 9
2.3 Résultats de régularité 12
2.4 Existence et unicité de solutions faibles 14
2.5 Décroissance d'énergie 16
2.6 Propagation à vitesse finie 18

3 Études des milieux homogènes **21**
3.1 Analyse par ondes planes en 1D 22
3.2 Analyse par ondes planes en 3D 28

4 Du viscoélastique à l'élastique **29**
4.1 Estimations a priori 29
4.2 Convergence et estimation de l'écart 30

Introduction

Pour modéliser la propagation d'ondes dans des milieux solides, il est courant de supposer que le milieu suit une loi de comportement élastique, qui relie, en chaque point du milieu, la déformation à un temps donné à la contrainte au même instant. Ces milieux ont la propriété de conserver l'énergie et les seuls facteurs de diminution de l'amplitude des ondes est la divergence géométrique. Cependant, pour certains matériaux dits à mémoire, il est important de prendre en compte des effets dûs aux déformations différées, ce qui est réalisé en supposant que le milieu suit une loi de comportement viscoélastique. Ces milieux sont absorbants. Ils sont le siège de phénomènes de dissipation intrinsèque qui provoquent une décroissance de l'énergie et une atténuation exponentielle de l'amplitude des ondes au cours de leur propagation.

Il y a de nombreuses applications à l'utilisation de modèles de viscoélasticité. Deux d'entre elles ont motivé nos travaux sur l'analyse tant mathématique que numérique de ces modèles:

- La propagation d'ondes hautes fréquences dans les premières couches de sédiments marins (c'est en effet pour les hautes fréquences qu'il devient essentiel de prendre en compte les phénomènes d'absorption). Cette application a été motivée par une collaboration avec l'IFREMER pour des problèmes de sismique sous-marine.

- La propagation d'ondes dans les tissus osseux. Cette application s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le LIP (Laboratoire d'Imagerie Paramétrique) qui développe une méthode de diagnostic par ultrasons de l'ostéoporose et il semble que la présence d'ostéoporose soit directement corrélée à l'atténuation des ondes ultrasonores.

Ce rapport présente la première partie des travaux que nous avons menés sur l'étude d'une classe de modèles de viscoélasticité. Il est essentiellement consacré à la présentation des modèles considérés et à leur analyse mathématique. Dans un second rapport, nous présenterons une approximation de tels modèles par une méthode d'éléments finis mixtes et en ferons l'analyse numérique.

Le premier chapitre présente les modèles qui feront l'objet de notre analyse. Il s'agit de modèles de type différentiels qui apparaissent comme des généralisations naturelles du modèle de Zener. Le chapitre 2 est le chapitre central de ce rapport et concerne l'analyse mathématique complète de ces modèles. Les modèles de viscoélasticité linéaires ont déjà été largement étudiés du point de vue mathématique [9] dans un cadre assez général. Les résultats que nous présentons ici concernent plus spécifiquement le modèle de Zener généralisé et peuvent être obtenus par le biais de la théorie des semi-groupes. Ils ne semblent pas pouvoir être considérés comme des cas particuliers de résultats plus généraux. Par ailleurs les théorèmes sur la dissipation d'énergie et la propagation à vitesse finie semblent originaux. Enfin, l'intérêt de cette analyse est aussi (et peut-être surtout) de préparer l'analyse numérique que nous mènerons dans [2] qui s'appuiera largement sur les techniques développées dans ce chapitre. Au chapitre 3, nous rappelons des résultats classiques sur l'analyse de la propagation d'ondes planes dans des milieux homogènes. Nous mettons l'accent sur les phénomènes de dispersion et la dépendance de l'atténuation vis à vis de la fréquence. Ces résultats nous seront en particulier utiles pour l'analyse de stabilité par Fourier des schémas numériques présentés dans [2] mais aussi pour interpréter nos résultats numériques. Dans un court dernier chapitre, nous démontrons mathématiquement en quel sens un milieu purement élastique peut être considéré comme la limite d'un milieu visco-élastique quand l'absorption tend vers 0.

1 Présentation des modèles

1.1 Écriture sous forme intégrale

Les modèles de viscoélastique linéaire [10] permettent de prendre en compte le phénomène de dissipation d'un milieu. Dans un tel modèle, si on considère le tenseur des déformations à l'instant t :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

associé à un champ de déplacement $u(x,t)$ $(x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n = 1,2,3)$, la relation liant la contrainte σ à ε [7, 16, 10] est

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} G_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau \tag{2}$$

où G est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur de **relaxation**, qui vérifie les symétries suivantes :

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{klij}. \tag{3}$$

La formule (2) exprime que l'état de la contrainte à l'instant t dépend de l'histoire des déformations, c'est pourquoi on qualifie ces modèles de modèles à mémoire. De plus $\sigma(t)$ n'est pas influencé par le futur de la déformation (par $\varepsilon(\tau)$ pour $\tau > t$). Il existe, dans la littérature, plusieurs façons équivalentes d'exprimer la relation (2). Par exemple, une simple intégration par parties conduit à :

$$\sigma_{ij}(x,t) = G_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(t-\tau)\frac{\partial G_{ijkl}(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau. \tag{4}$$

Nous supposerons par la suite que toutes les quantités sont causales, c'est à dire nulles pour $t < 0$. L'expression (2) peut alors s'exprimer comme un produit de convolution [10, 12, 4]:

$$\sigma = G * \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = R * \varepsilon \tag{5}$$

où $R = \dfrac{\partial G}{\partial t}$ est la dérivée au sens des distributions de G (G est discontinu en 0) et avec

$$(R * \varepsilon)_{ij} = \sum_{k,l=1}^{d} R_{ijkl} * \varepsilon_{kl}. \tag{6}$$

On peut remarquer que (2) généralise la loi de Hooke : le cas du matériau élastique est obtenu avec le choix :

$$G = C(x)H(t)$$

où H est la fonction de Heavside et C le tenseur d'élasticité.

Une forme alternative de la relation de contrainte-déformation peut être obtenue en inversant les rôles de la déformation et de la contrainte dans (2) de telle manière que la déformation à l'instant t soit déterminée par l'histoire de la contrainte. Ce qui s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau \tag{7}$$

où J est le tenseur de **fluage** vérifiant :

$$J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk}. \tag{8}$$

1.2 Écriture sous forme différentielle

Le type d'équations "intégro-différentielles" présentées précédemment est très lourd à résoudre dans le cadre d'une simulation numérique. Une façon plus pratique de présenter le comportement visco-élastique est de l'écrire sous une forme différentielle en se basant sur des analogies mécaniques qui font intervenir des assemblages de ressorts et d'amortisseurs dans le cas monodimensionnel (modèles rhéologiques élémentaires) [3, 7, 12, 14] :

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon, \tag{9}$$

où D est l'opérateur différentiel :

$$D^i : f \to \frac{\partial^i f}{\partial t^i}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

P et Q sont des polynômes différentiels :

$$P(D) = \sum_{m=0}^{N} a_m D^m, \quad Q(D) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^m. \tag{10}$$

Gurtin et Sternberg [12] ont montré l'équivalence entre les représentations intégrale et différentielle dans le cas $M = N$ sous des hypothèses :

Hypothèse 1.1 $a_N \neq 0$

Hypothèse 1.2 $b_N = 0 \Leftrightarrow b_m = 0 \ \ \forall m = 0, \cdots, M$

Hypothèse 1.3

$$\sum_{m=n}^{N} a_m \frac{\partial^{m-n}}{\partial t^{m-n}}\sigma(0) = \sum_{m=n}^{N} b_m \frac{\partial^{m-n}}{\partial t^{m-n}}\varepsilon(0) \ \ \forall n = 1, \cdots, N \tag{11}$$

Si ces hypothèses sont vérifiées, il existe une fonction de relaxation G telle que σ et ε sont liés par la relation (2).

Remarque 1.1 *Il est facile de voir que l'hypothèse (11) sur les conditions initiales est nécessaire. En effet, supposons d'une part que σ et ε sont liés par (9) et d'autre part qu'il existe G telle que (2) soit satisfaite. En appliquant la transformée de Laplace*

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

aux deux relations (2) et (9), on obtient les deux relations suivantes :

$$\tilde{\sigma}(s) = s\tilde{G}(s)\tilde{\varepsilon}(s) \tag{12}$$

et

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{P}(s)\tilde{\sigma}(s) - \displaystyle\sum_{m=1}^{N} a_m \big[s^{m-1}\sigma(0) + s^{m-2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\sigma}{\partial^{m-1}}(0)\big] = \\ \qquad \tilde{Q}(s)\tilde{\varepsilon}(s) - \displaystyle\sum_{m=1}^{M} b_m \big[s^{m-1}\varepsilon(0) + s^{m-2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\varepsilon}{\partial^{m-1}}(0)\big]. \end{array} \right. \tag{13}$$

Ces deux relations sont compatibles si G vérifie

$$\bar{G}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{s\bar{P}(s)} \tag{14}$$

et si de plus on a :

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m=1}^{N} a_m \big[s^{m-1}\sigma(0) + s^{m-2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\sigma}{\partial^{m-1}}(0)\big] = \\ \qquad \displaystyle\sum_{m=1}^{M} b_m \big[s^{m-1}\varepsilon(0) + s^{m-2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\varepsilon}{\partial^{m-1}}(0)\big]. \end{array} \right. \tag{15}$$

Cette dernière relation entraîne (11), lorsque $M = N$.

1.3 Le modèle de Zener

Écriture sous forme différentielle

Dans le cas monodimensionnel, les modèles viscoélastiques les plus couramment utilisés sont les modèles de Maxwell, de Kelvin-Voigt et de Zener [4, 11]. Dans l'étude qui suit, nous nous somme intéréssés à une extension du modèle de Zener aux dimensions supérieures. Pour ce modèle, les polynômes différentiels sont de degré 1. Plus précisément, la loi de comportement s'écrit sous forme différentielle :

$$\sigma + \tau_0\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(\frac{\partial u}{\partial t}) \tag{16}$$

où $\tau_0 > 0$ est un temps de relaxation, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont deux tenseurs 4×4 symétriques, définis positifs. Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de ces tenseurs.

Écriture sous forme intégrale

Le temps de relaxation τ_0 étant supposé strictement positif, la relation (16) peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{1}{\tau_0}(\sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)) + \partial_t(\sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)) = -\frac{1}{\tau_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})\varepsilon(u). \tag{17}$$

En multipliant cette équation par $e^{\frac{1}{\tau_0}s}$ et en intégrant entre 0 et t, on obtient, en choisissant la condition initiale $\sigma_0 = \boldsymbol{D}\varepsilon(u_0)$:

$$\sigma(t) = \boldsymbol{D}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t -\frac{1}{\tau_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})e^{-\frac{t-s}{\tau_0}}\varepsilon(u(s))\,ds.$$

Ce qui donne la forme intégrale de la loi de Zener:

$$\sigma(t) = G(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial s}(s)\varepsilon(t-s)\,ds,$$

avec

$$G(t) = \boldsymbol{C} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \tag{18}$$

La fonction de relaxation G s'écrit donc comme la superposition du tenseur d'élasticité et d'une fonction exponentielle qui s'annule à l'infini. Nous verrons que le tenseur $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ doit être défini positif pour que le modèle soit dissipatif.

Le modèle de Zener isotrope

Par analogie avec le cas purement élastique, on dit que le milieu caractérisé par la loi de comportement (16) est **isotrope** si il existe des coefficients $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\tau_\lambda(x)$, $\tau_\mu(x)$ tels que

$$(\boldsymbol{C}\sigma)_{ij} = \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\sigma_{ij}\ ;\ (\boldsymbol{D}\sigma)_{ij} = \lambda\tau_\lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\tau_\mu\sigma_{ij}$$

et on définit les coefficients

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\ v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\ \tau_p = \tau_0\frac{\lambda\tau_\lambda + 2\mu\tau_\mu}{\lambda+2\mu},\ \tau_s = \tau_0\tau_\mu, \tag{19}$$

avec v_p (resp. v_s) la vitesse et τ_p (resp. τ_s) le temps de relaxation associés à l'onde de pression (resp. onde de cisaillement).

Le modèle de Zener monodimensionnel

On retrouve le modèle de Zener 1D en définissant $\boldsymbol{C} = \mu$ et $\boldsymbol{D} = \tau_0^{-1}\mu\tau_1$ avec la condition $\tau_1 > \tau_0$ (équivalente a $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C} > 0$ dans le cas général). Dans ce cas, la loi de comportement devient :

$$\sigma + \tau_0\,\partial_t\sigma = \mu\,\partial_x u + \mu\tau_1\,\partial^2_{xt}u. \tag{20}$$

1.4 Généralisation du modèle de Zener

À partir du modèle de Zener "simple", il est facile de construire un modèle plus complexe, composé d'un certain nombre d'éléments de Zener en parallèle [6], comme ceci est illustré dans le cas 1D sur la figure 1. Sur cette figure, les paramètres $E_i, \tilde{E}_i, i = 1, \cdots, k$ représentent les modules d'élasticité des ressorts et les $\eta_i, i = 1, \cdots, k$ les paramètres de viscosité des amortisseurs. En dimension supérieure, le modèle de Zener généralisé revient à définir le tenseur des contraintes comme une superposition:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i. \tag{21}$$

où chaque σ_i est relié au tenseur des déformations par:

$$\sigma_i + \tau_i^0\partial_t\sigma_i = \boldsymbol{C}_i\varepsilon(u) + \tau_i^0\,\boldsymbol{D}_i\varepsilon(\partial_t u), \qquad i = 1, \cdots, k. \tag{22}$$

2 Analyse mathématique

Nous nous intéressons dans cette partie à l'analyse mathématique du modèle de Zener (résultats d'existence, unicité) et à l'étude des principales propriétés de la solution : décroissance de l'énergie et dispersion des ondes.

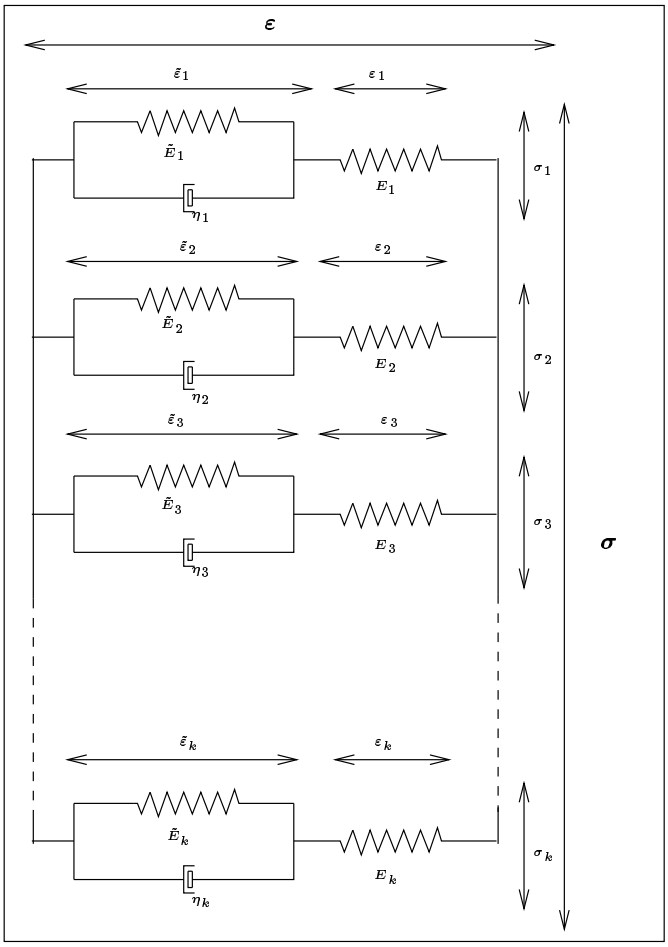


FIG. 1: *Modèle de Zener généralisé*

2.1 Problème modèle

On s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu modélisé par une loi de comportement de type Zener (16) en dimension n ($n = 1, 2, 3$). On cherche donc à déterminer le champ de déplacement u et le tenseur des contraintes σ vérifiant:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\,\sigma = f, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,T], & \text{(i)} \\
\sigma + \tau_0 \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(\dfrac{\partial u}{\partial t}), & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,T], & \text{(ii)} \\
u(x,0) = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 & \text{dans } \mathbb{R}^n, & \text{(iii)} \\
\sigma(x,0) = \sigma_0, & \text{dans } \mathbb{R}^n, & \text{(iv)}
\end{array}
\right. \tag{23}
$$

avec

$$
(\mathbf{div}\,\sigma)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \forall i = 1, n
$$

où ρ est la densité volumique, τ_0 un temps de relaxation, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux tenseurs 4×4 symétriques

$$
\boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{C}_{jikl} = \boldsymbol{C}_{klij} \ , \ \boldsymbol{D}_{ijkl} = \boldsymbol{D}_{jikl} = \boldsymbol{D}_{klij}, \tag{24}
$$

et définis positifs:

$$(25)\qquad \left|\begin{array}{l} 0 < M_-|\sigma|^2 \le \boldsymbol{C}\sigma : \sigma \le M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n, \quad (i) \\ 0 < M_-|\sigma|^2 \le \boldsymbol{D}\sigma : \sigma \le M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n, \quad (ii) \end{array}\right.$$

où $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ est le sous espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des tenseurs symétriques et où

$$\left|\begin{array}{l} \sigma : \tilde{\sigma} = \sigma_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}, \ \ \forall (\sigma, \tilde{\sigma}) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2 \ \ \text{(produit scalaire dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)), \\ |\sigma| = (\sigma : \sigma)^{\frac{1}{2}} = \big(\sum\limits_{i,j} \sigma_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}} \ \ \text{(la norme du produit scalaire)}, \\ \boldsymbol{G}\sigma = \boldsymbol{G}_{ijkl}\sigma_{kl}, \ \ \forall (\boldsymbol{G}, \sigma) \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\big) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n). \end{array}\right.$$

Remarque 2.1 *La symmétrie dans le sens (24) implique*

$$\boldsymbol{G}\sigma : \tilde{\sigma} = \boldsymbol{G}\tilde{\sigma} : \sigma \ \ \textit{pour tout } \boldsymbol{G}\textit{symétrique et } (\sigma, \tilde{\sigma}) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2.$$

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes:

– ρ, τ_0, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ mesurables.

$$(26)\qquad -\ 0 < \rho_- \le \rho(x) \le \rho_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n.$$

– $0 < \tau_- \le \tau_0(x) \le \tau_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n$.

– la condition d'absorption : $\mathcal{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ est défini positif:

$$(27)\qquad 0 < M_-|\sigma|^2 \le \mathcal{A}\sigma : \sigma \le M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^n$$

et on note par $\mathcal{A}_\tau$ le tenseur sumétrique défini positif $\tau_0\mathcal{A}$.

2.2 Existence et unicité de solutions fortes

Dans cette partie, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution forte du problème (23). Dans ce cadre, citons les travaux de Fabrizio et Morro [9] qui ont étudié le premier modèle (intégro-différentiel) (4) et ont montré l'existence de la solution dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^n))$ sous des conditions sur les données intiales et la fonction de relaxation G.

On considère les espaces fonctionnels:

$$(28)\qquad \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)) = \Big\{\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \,/\, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\sigma|^2\, dx < \infty\Big\}, \\ \underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{\sigma \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)) \,/\, \mathbf{div}\,\sigma \in \big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)^n\Big\}. \end{array}$$

On a le théorème d'existence et d'unicité:

Théorème 2.1 *Pour toutes conditions initiales* $(u_0, u_1, \sigma_0) \in \big((H^1(\mathbb{R}^n))^n\big)^2 \times \underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)$ *et tout* $f \in C^1(0,T; \big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)^n)$, *il existe une unique solution* (u, σ) *du problème (23), avec*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in C^1\big(0,T; \big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^n\big) \cap C^2\big(0,T; \big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)^n\big), \\ \sigma \in C^0\big(0,T; \underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big(0,T; L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big). \end{array}\right.$$

Démonstration :

On écrit le problème (23) sous la forme d'un système d'évolution du premier ordre en introduisant les variables: $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $p = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u)$. Le problème (23) se réécrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,p = \dfrac{f}{\rho}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} - \mathcal{A}\varepsilon(v) + \dfrac{1}{\tau_0}p = 0, \\ u(x,0) = u_0,\ v(x,0) = u_1,\ p(x,0) = p_0 = \sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0), \end{array} \right. \tag{29}$$

ou encore, en posant $W = (u, v, p)^t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dW}{dt} + AW = F, \\ W(0) = W_0, \end{array} \right. \tag{30}$$

avec

$$AW = \begin{pmatrix} -v \\ -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,p \\ -\mathcal{A}\varepsilon(v) + \dfrac{1}{\tau_0}p \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

On introduit l'espace de Hilbert

$$H = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \times L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)) \tag{32}$$

muni du produit scalaire

$$(W_1, W_2)_H = (u_1, u_2)_\rho + (\varepsilon(u_1) : \varepsilon(u_2))_{\boldsymbol{C}} + (v_1, v_2)_\rho + (p_1 : p_2)_{\mathcal{A}^{-1}}, \tag{33}$$

avec $W_1 = (u_1, v_1, p_1)^t$ et $W_2 = (u_2, v_2, p_2)^t$ et

$$(u_1, u_2)_\rho = \int_{\mathbb{R}^n} \rho\, u_1 u_2\, dx, \quad (p_1 : p_2)_{\boldsymbol{C}} = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{C}p_1 : p_2\, dx.$$

Remarque 2.2 *Le produit scalaire (33) est bien défini grâce à (25)-(27).*

On considère l'opérateur non borné sur $D(A) \subset H \to H$ défini par (31) avec

$$D(A) = \Big\{ (u, v, p) \in H \ /\ p + \boldsymbol{C}\varepsilon(u) \in \underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n), v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \Big\}. \tag{34}$$

Pour appliquer la théorie de Hille-Yosida on aura besoin du

Lemme 2.1 *L'opérateur $A + \lambda I$ est maximal monotone pour tout $\lambda > 1/2$.*

Démonstration :

- **Monotonie**: soit $W = (u, v, p)^t \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned} (AW, W)_H &= -\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, uv\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{div}\,\big(\boldsymbol{C}\varepsilon(u) + p\big)v\, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} [\varepsilon(v)p - \mathcal{A}_\tau^{-1}p] : p\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, uv\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_\tau^{-1}p : p\, dx, \end{aligned}$$

d'autre part :

$$|W|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \rho\,|u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \rho\,|v|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}^{-1}p : p\,dx.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(AW, W)_H + \lambda|W|_H^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(\lambda|u|^2 - uv + \lambda|v|^2)\,dx \\ &\geq (\lambda - \frac{1}{2})\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|u|^2 + |v|^2)\,dx\end{aligned}$$

ce qui montre que $A + \lambda I$ est monotone dès que $\lambda > 1/2$.

- **Surjectivité** : montrons que $A + \nu I$ est surjective pour tout $\nu > 0$. Ceci équivaut à montrer que pour tout $F = (f, g, h)^t \in H$, il existe une solution $W = (u, v, \sigma)^t \in D(A)$ du système

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} \nu u - v = f, & (a) \\ -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) + \nu v - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,p = g, & (b) \\ -\mathcal{A}(x)\varepsilon(v) + \dfrac{1+\nu\tau_0}{\tau_0}p = h. & (c) \end{cases}$$

Si (35) a une solution, il est facile d'éliminer v et p et de voir que u doit vérifier l'équation:

$$\text{(36)} \qquad -\mathbf{div}\,\big(\tilde{\mathcal{A}}(x)\varepsilon(u)\big) + \rho\,\nu^2 u = \rho\,g + \rho\,\nu f + \mathbf{div}\,\big(\frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}h\big) - \mathbf{div}\,\big(\frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}\mathcal{A}(x)\varepsilon(f)\big),$$

avec

$$\text{(37)} \qquad \tilde{\mathcal{A}} = \boldsymbol{C} + \frac{\nu\tau_0}{1+\nu\tau_0}\mathcal{A}.$$

La formulation variationnelle de (36) s'écrit: trouver $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ tel que

$$a(u, \tilde{u}) = l(\tilde{u}), \quad \forall \tilde{u} \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$$

avec

$$\text{(38)} \qquad \left| \begin{array}{l} a(u, \tilde{u}) = (\tilde{\mathcal{A}}\varepsilon(u) : \varepsilon(\tilde{u})) + \nu^2(\rho\,u, \tilde{u}), \\ \\ l(\tilde{u}) = (\rho\,g, \tilde{u}) + \nu(\rho\,f, \tilde{u}) - (\dfrac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}\,h : \varepsilon(\tilde{u})) + (\dfrac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}\,\mathcal{A}\varepsilon(f) : \varepsilon(\tilde{u})), \end{array} \right.$$

où $(.,.)$ (resp. $(. : .)$) désigne le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$).

D'après (25)-(i), (27) et l'inégalité de Korn [8, 15] dans $\big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^n$, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue coercive sur $\big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^n$ pour tout $\nu \neq 0$. Le théorème de Lax-Milgram permet alors d'affirmer que le problème (38) admet une solution unique u dans $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$. Les données (f, h) étant supposées appartenir à $(H^1(\mathbb{R}^n))^n \times L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))$, on obtient l'existence de $p \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))$ en posant

$$\text{(39)} \qquad p = \frac{\nu\tau_0}{1+\nu\tau_0}\mathcal{A}\varepsilon(u) + \frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}h - \frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0}\mathcal{A}\varepsilon(f)$$

et on montre l'existence de $v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ en utilisant (35)-(a). Enfin en remontant à l'équation (36), on voit facilement que p et u vérifient :

$$\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u) + p) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Nous avons donc démontré que $A + \nu I$ était surjectif $\forall \nu > 0$. Pour finir la démonstration du lemme, il suffit de raisonner avec $\nu = \lambda + 1$.

Sous l'hypothèse $W_0 \in D(A)$ et grâce au théorème de Hille-Yosida [5], nous déduisons que le problème (29) admet une unique solution $W \in C^0(0,T;D(A)) \cap C^1(0,T;H)$. On a

- $u \in C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big)$,
- $v = \partial_t u \in C^0\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big)$,
- $\sigma = p + \boldsymbol{C}\varepsilon(u) \in C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n))\big)$ et $p \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)))\big)$,

ce qui entraîne

$$\begin{cases} u \in C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n)^n\big), \\ \sigma \in C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big) \end{cases}$$

et achève la démonstration. ■

Il n'y a aucune difficulté à obtenir un résultat analogue dans le cas du modèle de Zener général (22). Dans ce cas, on cherche le champ de déplacement u et les tenseurs des contraintes "élémentaires" σ_i qui composent σ (voir relation (21)) solutions du problème:

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} \rho\,\partial_{tt}^2 u - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbf{div}\,\sigma_i = f, \\ \sigma_i + \tau_i^0 \partial_t \sigma_i = \boldsymbol{C}_i\varepsilon(u) + \tau_i^0 \boldsymbol{D}_i \varepsilon(\partial_t u), \quad i = 1,\cdots,k, \\ u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1, \\ \sigma_i(x,0) = \sigma_i^0, \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,\cdots,k. \end{cases}$$

On peut alors montrer le:

Théorème 2.2 *Si* $(u_0,u_1,\sigma_1^0,\cdots,\sigma_k^0) \in \big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^2 \times \big(\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big)^k$. *Alors pour tout* $f \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))^n\big)$ *il existe une unique solution du problème (40)*

$$\begin{cases} u \in C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big), \\ \sigma_i \in C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)))\big), \ \ \forall i = 1,\cdots,k. \end{cases}$$

2.3 Résultats de régularité

En supposant plus de régularité sur les données, on peut obtenir un résultat de régularité en temps sur la solution:

Théorème 2.3 *On suppose que les données du problème (23) vérifient* ($k \geq 2$)*:*

$$\text{(41)} \qquad \begin{cases} (\rho,\tau_0,\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}) \in \big(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)\big)^2 \times \Big(\big(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)\big)^{n^4}\Big)^2, \\ (u_0,u_1,\sigma_0) \in (H^k(\mathbb{R}^n))^2 \times (H^k(\mathbb{R}^n))^{n^2}, \\ f \in C^k\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^{k-1}\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big). \end{cases}$$

Alors la solution forte (u,σ) *du problème (23) vérifie:*

$$u \in C^k\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^{k+1}\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}))^n\big),$$
$$\sigma \in C^{k-1}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^k\big(0,T,L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)))\big).$$

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur k.

On commence par $k = 2$. Appliquant le théorème 2.1 au problème

$$(42)\qquad \begin{cases} \rho\partial^2_{tt}V - \mathbf{div}\,\Sigma = F = \partial_t f, \\ \Sigma + \tau_0\partial_t\Sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(V) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t V), \\ V/_{t=0} = V_0 = u_1,\ \dfrac{\partial V}{\partial t}/_{t=0} = V_1 = \dfrac{1}{\rho}(f(x,0) + \mathbf{div}\,\sigma_0), \\ \Sigma/_{t=0} = \Sigma_0 = \dfrac{1}{\tau_0}\big(\boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(u_1) - \sigma_0\big). \end{cases}$$

Sous les hypothèses (41), les données initiales (V_0, V_1, Σ_0, F) vérifient les conditions du théorème 2.1, d'où l'existence d'une solution unique (V, Σ) du système (42) :

$$\begin{cases} V \in C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big), \\ \Sigma \in C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big). \end{cases}$$

Les primitives

$$(43)\qquad u(t) = u_0 + \int_0^t V(s)\,ds, \qquad \sigma(t) = \sigma_0 + \int_0^t \Sigma(s)\,ds$$

vérifient alors

$$\begin{cases} u \in C^2\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^3\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big), \\ \sigma \in C^1(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^2\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big). \end{cases}$$

Pour finir il suffit de montrer que (u, σ) est la solution du (23). Or (u, σ) vérifie :

$$(44)\qquad \begin{cases} \partial_t\big(\rho\partial^2_{tt}u - \mathbf{div}\,\sigma - f\big) = 0, \\ \partial_t\big(\sigma + \tau_0\partial_t\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) - \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t u)\big) = 0. \end{cases}$$

En intégrant (44) entre 0 et t et en tenant compte des conditions initiales :

$$(45)\qquad \begin{cases} V/_{t=0} = \partial_t u/_{t=0} = u_1, \\ \partial_t V/_{t=0} = \partial^2_{tt}u/_{t=0} = \dfrac{1}{\rho}(f(x,0) + \mathbf{div}\,\sigma_0), \\ \Sigma/_{t=0} = \partial_t\sigma/_{t=0} = \dfrac{1}{\tau_0}\big(\boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(u_1) - \sigma_0\big), \end{cases}$$

nous montrons que (u, σ) est la solution du (23).

Passons au cas général $k \geq 3$. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k-1$ et montrons qu'il est valable pour k. D'après le résultat précédent on sait que la solution (u, σ) de (23) appartient à $C^2\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^3\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^1(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^2\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big)$ et elle vérifie (44). Les dérivées

$$(V, \Sigma) = (\partial_t u, \partial_t \sigma)$$

sont dans $C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big)$ et (V, Σ) est la solution du (42). Comme les données initiales vérifient :

$$(V_0, V_1, \Sigma_0, F) \in (H^{k-1}(\mathbb{R}^n))^2 \times (H^{k-1}(\mathbb{R}^n))^{n^2} \times C^{k-1}\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^{k-2}\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big),$$

d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{cases} V \in C^{k-1}\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^k\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}))^n\big), \\ \Sigma \in C^{k-2}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^{k-1}\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big), \end{cases}$$

ce qui implique

$$\left| \begin{array}{l} u \in C^k\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^{k+1}\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}))^n\big), \\ \sigma \in C^{k-1}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^k\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big). \end{array} \right.$$

■

2.4 Existence et unicité de solutions faibles

On note

$$Q_T = \mathbb{R}^n \times [0,T] \ , \ \ Q_T^* = \mathbb{R}^n \times]0,T] \tag{46}$$

et les espaces

$$\begin{array}{l} \mathcal{H}(Q_T) = \{v \in C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^0\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) / \ v(T) = 0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial v}{\partial t}(T) = 0\}, \\ \mathcal{L}(Q_T) = \{\tilde{\sigma} \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big) / \ \tilde{\sigma}(T) = 0\}. \end{array} \tag{47}$$

On dit que (u,σ) est une solution faible du problème (23) si elle vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho u \partial_{tt}^2 v + \sigma : \varepsilon(v) - fv\big]\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \rho\big[u_1(x)v(x,0) - u_0(x)\partial_t v(x,0)\big]\, dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\sigma : \tilde{\sigma} - \tau_0\, \sigma : \partial_t\tilde{\sigma} - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \tilde{\sigma} + \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(u) : \partial_t\tilde{\sigma}\big]\, dx\, dt = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \big[\tau_0\, \sigma_0 : \tilde{\sigma}(x,0) - \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(u_0) : \tilde{\sigma}(x,0)\big]\, dx, \\ \forall (v,\tilde{\sigma}) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{array} \right. \tag{48}$$

On a le théorème d'existence et d'unicité de la solution faible

Théorème 2.4 *Si les données initiales*

$$(u_0,u_1,\sigma_0,f) \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n \times L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)) \times L^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big).$$

Alors le problème (48) admet une unique solution

$$(u,\sigma) \in C^0\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big).$$

Démonstration :

1. **Existence.** Par densité, il existe une suite $(u_0^n,u_1^n,\sigma_0^n,f^n) \in \big((H^1(\mathbb{R}^n))^n\big)^2 \times \underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n) \times C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big)$ vérifiant :

$$\left| \begin{array}{lll} u_0^n \to u_0 & \text{dans} & (H^1(\mathbb{R}^n))^n, \\ u_1^n \to u_1 & \text{dans} & (L^2(\mathbb{R}^n))^n, \\ \sigma_0^n \to \sigma_0 & \text{dans} & L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)), \\ f^n \to f & \text{dans} & L^1\big(0,T,(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big). \end{array} \right. \tag{49}$$

Soit (u^n,σ^n) la solution forte du problème (23) associée aux données initiales $(u_0^n,u_1^n,\sigma_0^n,f^n)$ (cf. théorème 2.1). Appliquons les estimations du théorème 4.1 §4.1 aux différences $(u^p-u^q,\sigma^p-\sigma^q)$, nous remarquons que la suite (u^n,σ^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach

$$W(0,T;\mathbb{R}^n) = C^0\big(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big), \tag{50}$$

muni de la norme

$$\|(u,\sigma)\|_W = \sup_{t\in[0,T]} \Big[\|u(t)\|_\rho + \|\partial_t u\|_\rho + \|\vec{\nabla} u(t)\| + \|\sigma(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}}\Big]. \tag{51}$$

On en déduit l'existence de $(u,\sigma) \in W(0,T;\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\left|\begin{array}{ll} u^n \to u & \text{dans} \quad C^0\big(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \times C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big), \\ \sigma^n \to \sigma & \text{dans} \quad C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big). \end{array}\right.$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que si (u^n,σ^n) est une solution forte alors en particulier elle est solution faible du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \Big[\rho u^n \partial^2_{tt} v + \sigma^n \varepsilon(v)\Big]\, dx\, dt = \int_{Q_T} f v\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} \rho\Big[u_1^n(x) v(x,0) - u_0^n(x)\partial_t v(x,0)\Big]\, dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \Big[\sigma^n : \tilde\sigma - \tau_0 \sigma^n : \partial_t\tilde\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u^n) : \tilde\sigma + \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(u^n) : \partial_t\tilde\sigma\Big]\, dx\, dt = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big[\tau_0\sigma_0^n : \tilde\sigma(x,0) - \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(u_0^n) : \tilde\sigma(x,0)\Big]\, dx, \\ \forall (v,\tilde\sigma) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{array}\right.$$

et faire un passage à la limite quand $n \to +\infty$.

2. **Unicité.** Par linéarité, il suffit de montrer l'unicité de la solution du problème (48) en l'absence de source et avec des données initiales nulles. Soit (u,σ) une solution du problème (48) avec $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\sigma_0 = 0$ et $f = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho u \partial^2_{tt} v + \sigma : \varepsilon(v)\big]\, dx\, dt = 0, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\sigma : \bar\sigma - \tau_0 \sigma : \partial_t\bar\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \bar\sigma + \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(u) : \partial_t\bar\sigma\big]\, dx\, dt = 0, \\ \forall (v,\bar\sigma) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{array}\right. \tag{52}$$

On considère le problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho\partial^2_{tt}\bar u - \mathbf{div}\,\bar\sigma = u, & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T[, \\ \bar\sigma - \tau_0\partial_t\bar\sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(\bar u) - \tau_0 \boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t\bar u), & \text{dans} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T[, \\ \bar u(x,T) = \partial_t\bar u(x,T) = 0,\ \bar\sigma(x,T) = 0, & \end{array}\right. \tag{53}$$

ce problème admet une unique solution forte $(\bar u,\bar\sigma)$ dans l'espace :

$$C^1\big(0,T;\big(H^1(\mathbb{R}^n)\big)^n\big) \cap C^2\big(0,T;\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big)^n\big) \times C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n))\big).$$

car comme $u \in C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big)$ il suffit d'appliquer le théorème 2.1 en réécrivant le dernier problème sous la forme du système (23), en faisant le changement de variable $s = T - t$ et en prenant comme données les fonctions

$$(u_0,u_1,\sigma_0,f) = (0,0,0,u(T-s)).$$

Si on note $\pi = \sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)$, le système (52) se réécrit ($\mathcal{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho u \partial^2_{tt} v + \pi : \varepsilon(v) + \boldsymbol{D}\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\big]\, dx\, dt = 0, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\pi : \tilde\sigma - \tau_0\, \pi : \partial_t\tilde\sigma + \mathcal{A}\varepsilon : \tilde\sigma\big]\, dx\, dt = 0, \\ \forall (v,\tilde\sigma) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{array}\right. \tag{54}$$

On remarque que par construction de $(\bar{u}, \bar{\sigma})$ on peut choisir comme fonctions test dans (52)

$$(v, \tilde{\sigma}) = (\bar{u}, \mathcal{A}^{-1}\bar{\pi}) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T)\ ,\ \bar{\pi} = \bar{\sigma} - \boldsymbol{D}\varepsilon(\bar{u}). \tag{55}$$

Le système (54) donne alors

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \left[\rho u \partial^2_{tt}\bar{u} + \pi : \bar{\varepsilon} + \boldsymbol{D}\varepsilon : \bar{\varepsilon}\right] dx\, dt = 0, & (i) \\ \displaystyle\int_{Q_T} \left[\mathcal{A}^{-1}\pi : \bar{\pi} - \tau_0\, \mathcal{A}^{-1}\pi : \partial_t\bar{\pi} + \varepsilon : \bar{\pi}\right] dx\, dt = 0, & (ii) \end{cases} \tag{56}$$

où $\varepsilon = \varepsilon(u)$ et $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\bar{u})$. On fait ensuite le produit scalaire au sens des tenseurs de la deuxième équation du système (53) avec $\mathcal{A}^{-1}\pi$. Après intégration sur Q_T, nous obtenons :

$$\int_{Q_T} \left[\mathcal{A}^{-1}\bar{\pi} : \pi - \tau_0\, \mathcal{A}^{-1}\partial_t\bar{\pi} : \pi + \bar{\varepsilon} : \pi\right] dx\, dt = 0. \tag{57}$$

La dernière équation et l'équation (ii) de (56) impliquent

$$\int_{Q_T} \pi : \bar{\varepsilon}\, dxdt = \int_{Q_T} \bar{\pi} : \varepsilon\, dxdt.$$

D'où (56)-(i) devient :

$$\int_{Q_T} \left[\rho u \partial^2_{tt}\bar{u} - \bar{\pi} : \varepsilon + \boldsymbol{D}\varepsilon : \bar{\varepsilon}\right] dxdt = 0.$$

En remplaçant $\bar{\pi}$ par sa valeur donée par (55) et après une intégration par partie nous obtenons :

$$\int_{Q_T} u[\rho\partial^2_{tt}\bar{u} - \mathbf{div}\,\bar{\sigma}]\, dxdt = 0.$$

Or, comme $(\bar{u}, \bar{\sigma})$ est la solution du problème (53), on a

$$\int_{Q_T} |u(x,t)|^2 dxdt = 0, \tag{58}$$

ce qui entraîne $u = 0$. Pour finir on montre que $\sigma = 0$ en utilisant la deuxième équation de (48) : $\displaystyle\int_{Q_T} [\sigma : \tilde{\sigma} - \tau_0\, \sigma : \partial_t\tilde{\sigma}]\, dxdt = 0\ \ \forall \tilde{\sigma} \in \mathcal{L}(Q_T)$. D'où l'unicité de la solution ■

2.5 Décroissance d'énergie

Définition 2.1 *Soit (u, σ) la solution forte du système (23). On appelle énergie de (u, σ) à l'instant t la quantité*

$$E(u, \sigma, t) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_\rho\ + \frac{1}{2}\|\varepsilon(u)\|^2_C + \frac{1}{2}\|p\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}, \tag{59}$$

avec

$$p = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u). \tag{60}$$

Remarque 2.3 *On remarque que*

- *la quantité d'énergie se décompose en deux parties, la première $\frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_\rho\, dx + \frac{1}{2}\|\varepsilon(u)\|^2_C$ correspond à l'énergie classique du cas purement élastique (i.e. lorsque τ_0 est nul) et la deuxième $\frac{1}{2}\|p\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}$, dûe aux effets de la visco-élasticté, s'exprime comme la norme de la différence entre la contrainte viscoélastique et la contrainte élastique.*

– *Compte tenu de la régularité de (u,σ), l'énergie $E(t)$ vérifie :*

$$E \in C^1(0,T) \ ; \ E(u) < +\infty \quad \forall t \geq 0.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.5 *L'énergie $E(t)$ associée au problème (23) vérifie l'identité :*

$$\frac{dE}{dt} = -\|p\|^2_{\mathcal{A}_\tau^{-1}} + (f, \partial_t u) \tag{61}$$

et elle décroît en l'absence de terme source ($f = 0$).

Démonstration :

• On remarque qu'on peut réécrire les équations (i) et (ii) du problème (23) en fonction de u et p :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\, p - \mathbf{div}\,(C\varepsilon(u)) = f, \tag{62}$$

$$\mathcal{A}^{-1}\partial_t p + \mathcal{A}_\tau^{-1} p = \varepsilon(\partial_t u). \tag{63}$$

En appliquant le produit scalire dans $\mathbb{R}^n$ à (62) par $\partial_t u$ et dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à (63) par p, après une intégration sur $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u\|^2_\rho - (\mathbf{div}\, p, \partial_t u) - (\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)), \partial_t u) = (f, \partial_t u), \tag{64}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|p\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \|p\|^2_{\mathcal{A}_\tau^{-1}} - (\varepsilon(\partial_t u) : p) = 0, \tag{65}$$

en faisant une intégration par partie du deuxième et trosième terme de l'équation (64), nous aurons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u\|^2_\rho + (p, \varepsilon(\partial_t u)) + (\boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(\partial_t u)) = (f, \partial_t u), \tag{66}$$

ce qui donne (61) en sommant les deux identités (65) et (66).

• On en déduit la décroissance de l'énergie pour $f = 0$ car l'hypothèse (27) montre que $\mathcal{A}$ est défini positif et par conséquent $-\|p\|^2_{\mathcal{A}_\tau^{-1}}$ est un terme de dissipation. ■

Remarque 2.4 *On remarque toujours le rôle important de la condition d'absorption $\mathcal{A} > 0$ que ce soit dans les résultat d'existence et d'unicité de la solution ou dans le résultat de dissipation d'énergie.*

De nouveau, on peut aisément étendre ce résultat au modèle de Zener généralisé (40).

Théorème 2.6 *La quantité d'énergie*

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2_\rho + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\|\varepsilon(u)\|^2_{\boldsymbol{C}_i} + \|p_i\|^2_{\mathcal{A}_i^{-1}}\right] \tag{67}$$

associée à la solution $(u,(\sigma_i)_{i=1,k})$ du problème (40) homogène ($f = 0$) vérifie

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\|p_i\|^2_{(\mathcal{A}_i^\tau)^{-1}} \leq 0, \tag{68}$$

avec

$$p_i = \sigma_i - \boldsymbol{C}_i\varepsilon(u), \ \ \mathcal{A}_i = \boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{C}_i, \ \ \mathcal{A}_i^\tau = \tau_i^0\mathcal{A}_i, \ \ \forall i = 1, \cdots, k.$$

2.6 Propagation à vitesse finie

Dans ce paragraphe on s'est intéressé au problème de la propagation à vitesse finie des ondes viscoélastiques. On montre que lorsqu'on part de données à support compact, la solution reste à support compact à tout instant. On va même déterminer de façon géométrique un majorant du support des données. Dans ce contexte cette étude peut être considérée comme une généralisation du travail mené par Canadas [11] pour le problème monodimensionnel (20).

Soit $\boldsymbol{G}$ un tenseur d'ordre quatre symétrique défini positif et ν un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on note $\Gamma(\boldsymbol{G},\nu)$ le tenseur de Chrystoffel [1] associé au tenseur $\boldsymbol{G}$ suivant le vecteur ν, le tenseur symétriqye défini positif :

$$\Gamma(\boldsymbol{G},\nu) = \Gamma_{ij} = G_{ikjl}\,\nu_k\,\nu_l,$$

Remarque 2.5 *Le tenseur de Chrystoffel intervient, lorsque on fait une analyse par ondes planes pour le problème purement élastique ($\tau_0 = 0$), c'est à dire si on cherche des solutions (u,σ) sous la forme (96) §3.2 on trouve une relation de dispersion :*

$$\Gamma(\boldsymbol{C},k)\,d = \rho\omega^2 d \Longleftrightarrow \Gamma(\boldsymbol{C},\nu)\,d = \rho V^2 d$$

avec $\nu = \dfrac{k}{|k|}$ *et* V *la vitesse de phase suivant la direction* ν.

Soit ν un vecteur de S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, nous définissons les quantités :

$$V_p(x,\nu) = \Big(\sup_{v\neq 0} \frac{\Gamma(\boldsymbol{D},\nu)v.v}{\rho|v|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

et

$$V_p^+(\nu) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{V_p(x,\nu)\}. \tag{70}$$

La notation (69) est liée par analogie à v_p la vitesse des ondes P dans le cas d'un milieu élastique isotrope, dans ce cas $V_p(x,\nu) = v_p(x)$ dans toutes les directions ν. On considère les demi-espaces mobiles de vitesse $V \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}_\nu(V,t) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x.\nu \leq Vt\}. \tag{71}$$

On a le théorème :

Théorème 2.7 *Si les données (u_0,u_1,σ_0,f) sont à support compact et si elles ont la régularité du théorème 2.1, alors la solution du problème (23) reste à support compact. En particulier, si*

$$supp\, u_0 \cup supp\, u_1 \cup supp\, \sigma_0 \cup supp\, f(.,t) \subset K,$$

où K est un compact, alors

$$supp\, u(.,t) \subset K + \mathcal{E}(t), \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

où

$$\mathcal{E}(t) = \bigcap_{\nu\in S^{n-1}} \mathcal{E}_\nu(V_p^+(\nu),t)$$

Démonstration :

On va faire la démonstration dans le cas des données du problème sont assez régulières (les solutions assez régulières) et $K = B(0,R)$ une boule de centre 0 et de rayon R, on se ramène au cas général en procédant par régularisation et en utilisant le fait que tout compact est limite d'une réunion finie

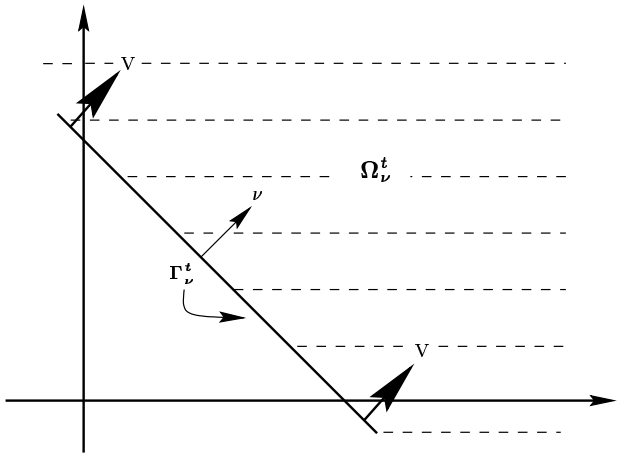


FIG. 2: *Le demi-espace mobile*

de boules fermées. On considère ν un vecteur quelconque de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, le demi-espace mobile :

$$\Omega_\nu^t = (B(0,R) + \mathcal{E}_\nu(V,t))^c = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x.\nu > R + Vt\},$$

Ω_ν^t est donc un demi-espace mobile qui "fuit" dans la direction ν à la vitesse V, $\Gamma_\nu^t = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x.\nu = R + Vt\}$ la frontière de Ω_ν^t (voir figure 2) et $d\sigma$ la mesure surfacique sur Γ_ν^t.
On notera que par construction :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = u_1(x) = 0,\ \sigma_0(x) = 0,\ \ \forall\, x \in \Omega_\nu^0, \\ f(x,t) = 0,\ \ \forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \Omega_\nu^t. \end{array} \right. \tag{72}$$

A l'instant $t = 0$, la solution est nulle dans Ω_ν^t. L'idée de la démonstration est de trouver V (assez grand) pour que la solution u soit nulle sur Ω_ν^t.

Nous utilisons une technique d'estimation d'énergie, on considère le système des équations (62) et (63) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\, p - \mathbf{div}\,(C\varepsilon(u)) = f, & (i) \\ \mathcal{A}_\tau^{-1} p + \mathcal{A}^{-1} \partial_t p = \varepsilon(\partial_t u). & (ii) \end{array} \right. \tag{73}$$

On considère la densité d'énergie

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\rho\, |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \boldsymbol{C}\varepsilon : \varepsilon + \mathcal{A}^{-1} p : p\Big). \tag{74}$$

En faisant le produit scalaire de l'équation (73)-(i) par $\partial_t u$ et de l'équation(73)-(ii) par p et en intégrant sur Ω_ν^t, on obtient aisément l'identité suivante :

$$\int_{\Omega_\nu^t} \frac{\partial e}{\partial t}\, dx + \int_{\Omega_\nu^t} \mathcal{A}_\tau^{-1} p : p\, dx + \int_{\Gamma_\nu^t} (p + \boldsymbol{C}\varepsilon) n.\partial_t u\, d\sigma = 0,$$

où ν est le vecteur normal à Γ_ν^t intérieur à Ω_ν^t, $\sigma\,\nu = \sigma_{ij}\nu_j$ désigne le produit matrice vecteur dans $\mathbb{R}^n$ et $\nu.v = \nu_i v_i$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant la relation (valable pour tout $e(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$):

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\nu^t} e(x,t)\, dx = \int_{\Omega_\nu^t} \frac{\partial e}{\partial t}(x,t)\, dx - V \int_{\Gamma_\nu^t} e(x,t)\, dx, \tag{75}$$

on en déduit

$$\frac{dE_\nu}{dt}(t) + \int_{\Omega_\nu^t} \mathcal{A}_\tau^{-1} p : p\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\nu^t} \phi_\nu(x,t)\, d\sigma = 0$$

où

$$E_\nu(t) = \int_{\Omega_\nu^t} e(x,t)\, dx$$

et

$$\phi_\nu(x,t) = V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,|\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}^2 + V\,|p|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + 2(p+\boldsymbol{C}\varepsilon)\nu.\partial_t u, \tag{76}$$

avec

$$|\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}^2 = \boldsymbol{C}\varepsilon : \varepsilon \ \text{ et } \ |p|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \mathcal{A}^{-1}p : p.$$

Remarque 2.6 *On distingue entre les normes du produit scalaire associées à un tenseur symétrique défini positif $\boldsymbol{C}$ dans les espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$. On note $|.|_{\boldsymbol{C}}$ la norme du produit scalaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\sigma,\varepsilon) & \longrightarrow & \boldsymbol{C}\sigma : \varepsilon \end{array}$$

et $\|.\|_{\boldsymbol{C}}$ la norme du produit scalire

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))\times L^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\sigma,\varepsilon) & \longrightarrow & (\boldsymbol{C}\sigma:\varepsilon) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{C}\sigma : \varepsilon\, dx. \end{array}$$

On voit que l'énergie décroît si la forme quadratique ϕ_ν est positive. Pour cela, nous avons besoin du lemme :

Lemme 2.2 *Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{C}\varepsilon)\nu.v \le |\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}(\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v.v)^{\frac{1}{2}}, \quad (i) \\ &p\,\nu.v \le |p|_{\mathcal{A}_\tau}(\Gamma(\mathcal{A},\nu)v.v)^{\frac{1}{2}}. \qquad (ii) \end{aligned} \tag{77}$$

Démonstration :

Soit $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{C}\varepsilon.\nu)v &= C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\nu_j\,v_i \\ &= C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,(\nu\otimes v)_{ij} = \boldsymbol{C}\varepsilon : \nu\otimes v \le (\boldsymbol{C}\varepsilon:\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{C}\,\nu\otimes v : \nu\otimes v)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec $\nu\otimes v = \nu_i\, v_j$. Alors pour avoir (i) il suffit de montrer que

$$\boldsymbol{C}\,\nu\otimes v : \nu\otimes v = \Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v.v$$

En effet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}\,\nu\otimes v : \nu\otimes v &= \boldsymbol{C}_{ijkl}(\nu\otimes v)_{kl}(\nu\otimes v)_{ij} \\ &= \boldsymbol{C}_{ijkl}\,\nu_k\,v_l\,\nu_i\,v_j \\ &= (C_{ijkl}\,\nu_i\,\nu_k)v_l\,v_j = (C_{lkji}\,\nu_i\,\nu_k)v_j\,v_l \\ &= \Gamma_{lj}(\boldsymbol{C},\nu)\,v_j\,v_l = \Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v.v \end{aligned}$$

de même pour (ii), on a

$$\begin{aligned} p\nu.v &= p : \nu\otimes v \\ &= p : \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\nu\otimes v \\ &\le (\mathcal{A}^{-1}p : p)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}\nu\otimes v : \nu\otimes v)^{\frac{1}{2}} = |p|_{\mathcal{A}^{-1}}(\Gamma(\mathcal{A},\nu)v.v)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

En utilisant ce lemme on oubtient d'après (76)

$$\begin{aligned}
\phi_\nu(x,t) &\geq V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + V\,|p|^2_{\mathcal{A}^{-1}} - 2\,|\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}\,(\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)\partial_t u.\partial_t u)^{\frac{1}{2}} - 2\,|p|_{\mathcal{A}^{-1}}\,(\Gamma(\mathcal{A},\nu)\partial_t u.\partial_t u)^{\frac{1}{2}}.\\
&\geq V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}})^{\frac{1}{2}}\,(\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)\partial_t u.\partial_t u + \Gamma(\mathcal{A},\nu)\partial_t u.\partial_t u)^{\frac{1}{2}}\\
&= V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}})^{\frac{1}{2}}\,(\Gamma(\boldsymbol{C}+\mathcal{A},\nu)\partial_t u.\partial_t u)^{\frac{1}{2}}\\
&= V\rho\,|\partial_t u|^2 + V(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}^{-1}})^{\frac{1}{2}}\,(\Gamma(\boldsymbol{D},\nu)\partial_t u.\partial_t u)^{\frac{1}{2}} \qquad (78)
\end{aligned}$$

En utilisant le définition (69) de V_p, l'inégalité (78) devient

$$\phi_\nu(x,t) \geq V\rho|\partial_t u|^2 + V(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}_\tau}) - 2V_p\sqrt{\rho}(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |p|^2_{\mathcal{A}_\tau})^{\frac{1}{2}}|\partial_t u|. \qquad (79)$$

Le deuxième terme de cette inégalité définit une forme quadratique positive si

$$\rho(V_p^2 - V^2) \leq 0 \Longleftrightarrow V \geq V_p.$$

En choisissant $V = V_p^+(\nu)$ donné par (70), nous aurons $\phi_\nu \geq 0$ et par conséquant E_ν décroissante. On a donc en particulier

$$E_\nu(t) \leq E_\nu(0) = 0 \ \text{ (par construction)}$$

ce qui nous donne $u(x,t) = 0$ dans Ω^t_ν, d'où *supp* $u(.,t) \subset \{\Omega^t_\nu\}^c = B(0,R) + \mathcal{E}_\nu(V_p^+(\nu),t)$. Le raisonnement étant valable pour tout $\nu \in S^{n-1}$, sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$supp\, u(.,t) \subset \bigcap_{\nu\in S^{n-1}} \{\Omega^t_\nu\}^c = B(0,R) + \mathcal{E}(t).$$

Remarque 2.7 *En particulier, dans le cas isotrope, V_p ne dépend pas de ν, on trouve*

$$\begin{aligned}
V_p(x,\nu) &= \Big(\frac{\lambda(x)\tau_\lambda(x) + 2\mu(x)\tau_\mu(x)}{\rho(x)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\frac{\lambda(x)\tau_\lambda(x) + 2\mu(x)\tau_\mu(x)}{\lambda(x)+2\mu(x)}\,\frac{\lambda(x)+2\mu(x)}{\rho}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{\tau_p(x)}{\tau_0(x)}}v_p(x)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$V_p^+(\nu) = V^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sqrt{\frac{\tau_p(x)}{\tau_0(x)}}v_p(x).$$

d'où $supp\, u(.,t) \subset B(0, R + V^+t)$ *(voir le figure ci-dessous dans le cas $n = 2$)*

3 Études des milieux homogènes

On se place pour faire cette analyse en milieu homogène. Nous allons tout d'abord déterminer les ondes planes se propageant dans un milieu visco-élastique 1D. Nous pourrons ensuite étendre les résultats 1D au cas tridimensionnel.

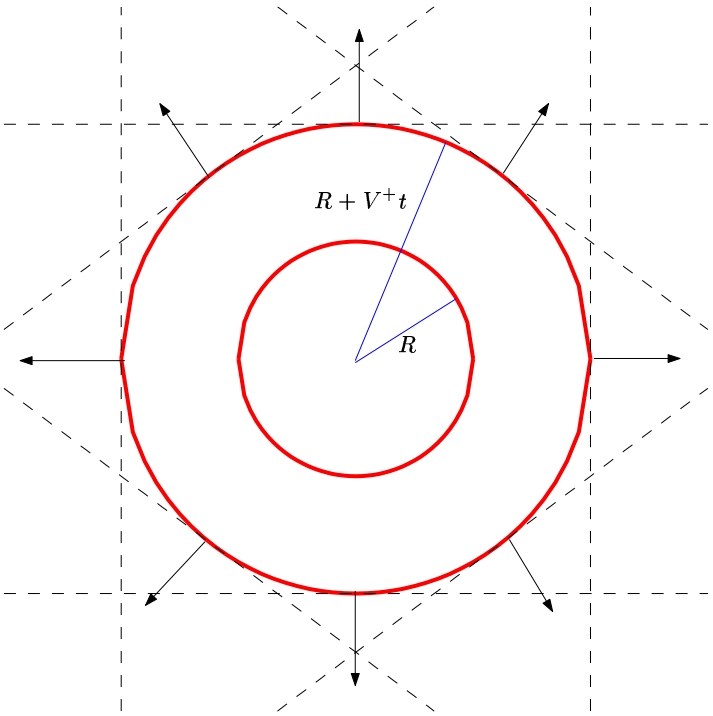


FIG. 3: *Support de u*

3.1 Analyse par ondes planes en 1D

Dans ce qui suit ρ, μ, τ_0 et τ_1 sont des constantes strictement positives. On considère le problème de Zener monodimensionnel (20)

$$(80) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}, & \\ \rho\, \partial_{tt}^2 u - \partial_x \sigma = f, & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \\ \sigma + \tau_0\, \partial_t \sigma = \mu\, \partial_x u + \mu \tau_1\, \partial_{xt}^2 u, & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[. \end{cases}$$

On s'intéresse aux solutions particulières du problème homogène (80) ($f = 0$), de type ondes planes :

$$(81) \qquad \begin{cases} u(x,t) &= u_0\, e^{i(\omega t - kx)}, \\ \sigma(x,t) &= \sigma_0\, e^{i(\omega t - kx)} \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde. Pour que (u, σ) définis par (81) soit une solution de (80), k et ω doivent être reliés par la relation de dispersion :

$$(82) \qquad \omega^2 = c^2 k^2 \left(\frac{1 + i\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_0}\right), \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Nous allons étudier cette équation comme une équation en ω où k est un paramètre. Si on fait le changement de variable $S = i\omega$, la relation (82) devient:

$$(83) \qquad \frac{S^2}{c^2 k^2} = -\frac{1 + S\tau_1}{1 + S\tau_0},$$

ce qui équivaut à l'équation à coefficients réels de degré 3 suivante:

$$\tau_0 S^3 + S^2 + \tau_1 c^2 k^2 S + c^2 k^2 = 0. \tag{84}$$

Cette équation admet soit trois racines réelles, soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Notons qu'une racine réelle correspond à un mode non propagatif (mode purement amorti). On montre que dans "presque tous les cas", il y a deux modes propagatifs et un mode purement amorti, et que ce résultat est toujours vrai à hautes fréquences. Plus précisément, montrons le:

Lemme 3.1 *Si τ_0 et τ_1 vérifient:*

1. *$\tau_0 \geq \tau_1/9$, alors l'équation (84) admet, pour tout k, une racine réelle $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^*$ comprise entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ (mode purement amorti) et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\eta} \pm i\boldsymbol{\omega}^*$ (modes propagatifs).*
2. *$\tau_0 < \tau_1/9$, alors il existe $K_-(\tau_0, \tau_1, c) \geq 0$ et $K_+(\tau_0, \tau_1, c) \geq 0$ (donnés en (87-88)) tels que*
   - *Si $|k| \in [K_-, K_+]$, l'équation (84) admet trois racines réelles comprises entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ (trois modes purement amortis).*
   - *Si $|k| \notin [K_-, K_+]$, l'équation (84) admet une racine réelle $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^*$ comprise entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\eta} \pm i\boldsymbol{\omega}^*$*

Démonstration :

Rappelons qu'une équation algébrique du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se ramène par le changement de variable : $x = X - \dfrac{b}{3a}$, à la forme canonique

$$X^3 + 3pX + 2q = 0, \tag{85}$$

avec

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}\Big[\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\Big].$$

Cette équation a trois racines:

1. $\Delta > 0 \quad \rightarrow$ une racine réelle et deux complexes conjuguées.
2. $\Delta \leq 0 \quad \rightarrow$ trois racines réelles.

L' équation (84), après réduction à sa forme canonique, a pour discriminant

$$\Delta = p^3 + q^2 = \frac{c^2 k^2}{27\tau_0^4}\left[\tau_0 \tau_1^3 c^4 k^4 + (\frac{27}{4}\tau_0^2 - \frac{9}{2}\tau_0\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_1^2)c^2 k^2 + 1\right]$$

Δ a le même signe que :

$$\tilde{\Delta}(k^2) = Ak^4 + Bk^2 + 1, \tag{86}$$

avec

$$A = \tau_0 \tau_1^3 c^4, \qquad B = (\frac{27}{4}\tau_0^2 - \frac{9}{2}\tau_0\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_1^2)c^2.$$

Une étude du trinôme $\tilde{\Delta}(X)$ montre que

- Si $\tau_0 < \tau_1/9$, le trinôme admet deux racines réelles positives

$$z_\pm(\tau_0, \tau_1, c) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2A}$$

pouvant s'exprimer en fonction du rapport $R = \tau_0/\tau_1$:

$$z_\pm(\tau_0,\tau_1,c) = \frac{1}{2c^2\tau_0\tau_1}(-27(R-\alpha_-)(R-\alpha_+) \pm (1-9R)^{3/2}(1-R)^{1/2}) \tag{87}$$

avec $\alpha_\pm = 1/3(2\sqrt{3}/3 \pm 1)$. Il est alors clair que $\tilde{\Delta}(k^2) \leq 0$ si $k^2 \in [z_-, z_+]$ c'est à dire si $|k| \in [K_-, K_+]$, avec

$$K_\pm = \sqrt{z_\pm}. \tag{88}$$

– Si $\tau_0 \geq \tau_1/9$, on montre que $\tilde{\Delta}$ est soit toujours positif (si $\tau_0 < \tau_1$) soit admet deux racines réelles négatives (si $\tau_0 \geq \tau_1$), donc dans tous les cas $\tilde{\Delta}(k^2) > 0$ pour tout k.

Il nous reste à montrer que les racines réelles sont comprises entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$. Ceci est immédiat en se rappelant qu'une racine S est solution de (83) et si S est réelle, le membre de gauche est positif ce qui montre que $(1+S\tau_1)(1+S\tau_0) < 0$ et par conséquent que toute racine réelle est située entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$. ■

Quelques propriétés des solutions. On s'intéresse ici au cas où (84) admet une racine réelle $\boldsymbol{S = S^*}$ et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S = \eta \pm i\omega^*}$, ce qui d'après le lemme est toujours vérifié au moins dès que k est assez grand. Ces solutions correspondent à

– deux modes propagatifs: $e^{\eta(k)t}e^{i(\omega^*(k)t-kx)}$ et $e^{\eta(k)t}e^{i(-\omega^*(k)t-kx)}$.

– un mode purement amorti: $e^{S^*(k)t}e^{-ikx}$.

La somme des trois racines de (84) vaut:

$$2\eta(k) + S^*(k) = -\frac{1}{\tau_0},$$

par conséquent

$$\eta(k) = -\frac{1}{2}[S^*(k) + \frac{1}{\tau_0}]. \tag{89}$$

Or d'après le lemme précédent, $S^*(k)$ est située entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$, ce qui montre que

1. si $\tau_1 > \tau_0$, alors $-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1}\Big) \leq \eta(k) \leq 0 \ \ \forall k$, ce qui correspond à de l'amortissement.
2. si $\tau_1 < \tau_0$, alors $-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1}\Big) \geq \eta(k) \geq 0 \ \ \forall k$, qui correspond cette fois-ci à un terme exponentiellement croissant en temps.

Remarques

1. On retrouve donc ici le fait que le phénomène d'absorption est lié à l'inégalité $\tau_1 > \tau_0$.
2. On remarque que même quand $\tau_1 < \tau_0$, $\eta(k)$ reste borné et le problème de Cauchy reste bien posé.

Hypothèse: dans toute la suite, on supposera que $\tau_0 < \tau_1$.

Propriétés du mode purement amorti. On montre que, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, la racine réelle $S = S^*(k)$ vérifie :

– $\boldsymbol{(P_1)}$ $\quad -\dfrac{1}{\tau_0} < S^*(k) < -\dfrac{1}{\tau_1}, \ \ \forall k \in \mathbb{R}^*$.

– $\boldsymbol{(P_2)}$ $\quad k \longrightarrow S^*(k)$ est paire.

- $(\boldsymbol{P_3})$ $\lim_{k\to 0} S^*(k) = -\frac{1}{\tau_0}, \quad \lim_{k\to\infty} S^*(k) = -\frac{1}{\tau_1}.$

La première propriété a été démontrée dans le lemme précédent et est ici précisée dans le cadre de l'hypothèse $\tau_0 < \tau_1$. La deuxième propriété découle du fait que l'équation (84) définissant les solutions ne dépend que de k^2. Enfin les limites (P_3) s'obtiennent aisément à partir de (83) en utilisant que S^* est réelle. On peut en fait montrer plus précisément que

$$S^*(k) \sim -\frac{1}{\tau_0} + (\tau_1 - \tau_0)c^2k^2. \tag{90}$$

Nous illustrons ces propriétés sur la figure 5 où on représente un exemple de courbe $S^*(k)$. *Notons que les hautes fréquences sont moins amorties (temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_1}$) que les basses fréquences (temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_0 < \tau_1}$).*

Propriétés des modes propagatifs amortis, qui correspondent aux solutions $\eta(k) \pm i\omega^*(k)$. La relation (89) permet de déduire des propriétés sur η c'est à dire sur l'amortissement des modes propagatifs:

- $(\boldsymbol{P_4})$ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0}\right] \leq \eta(k) \leq 0.$
- $(\boldsymbol{P_5})$ $k \longrightarrow \eta(k)$ paire.
- $(\boldsymbol{P_6})$ $\lim_{k\to 0} \eta(k) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \eta(k) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0}\right].$

On peut enfin déduire de (90) l'équivalence:

$$\eta(k) \sim -\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_0)c^2k^2. \tag{91}$$

Nous illustrons ces propriétés sur la figure 6 où on représente un exemple de courbe $\eta(k)$. *Les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences (pour lesquels l'amortissement tend vers 0) et la constante de temps à haute fréquence est* $2\frac{\tau_1\tau_0}{\tau_1 - \tau_0}$.

En ce qui concerne la partie propagative, la vitesse de phase des modes propagatifs est donnée par $\omega^*(k)/k$. Le produit des racines de (84) s'exprime:

$$(\omega^*(k)^2 + \eta(k)^2)S^*(k) = -\frac{c^2k^2}{\tau_0}, \tag{92}$$

ce qui permet d'obtenir:

$$\frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = -\frac{1}{\tau_0 S^*(k)} - \frac{\eta(k)^2}{c^2k^2}. \tag{93}$$

En utilisant la propriété (P_3) et le fait que $\eta(k)$ est en $O(k^2)$ au voisinage de $k = 0$ d'après (91), on montre que :

$$\lim_{k\to\pm\infty} \frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \qquad \lim_{k\to 0} \frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = 1. \tag{94}$$

Les hautes fréquences se propagent donc plus vite que les basses fréquences. On représente la vitesse de phase sur la figure 7.

Conclusion 3.1 *En conclusion, on a*

1. *un mode* **purement amorti** *correspondant à $\boldsymbol{S = S^*}$. Les hautes fréquences sont moins amorties(temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_1}$) que les basses fréquences(temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_0 < \tau_1}$)*

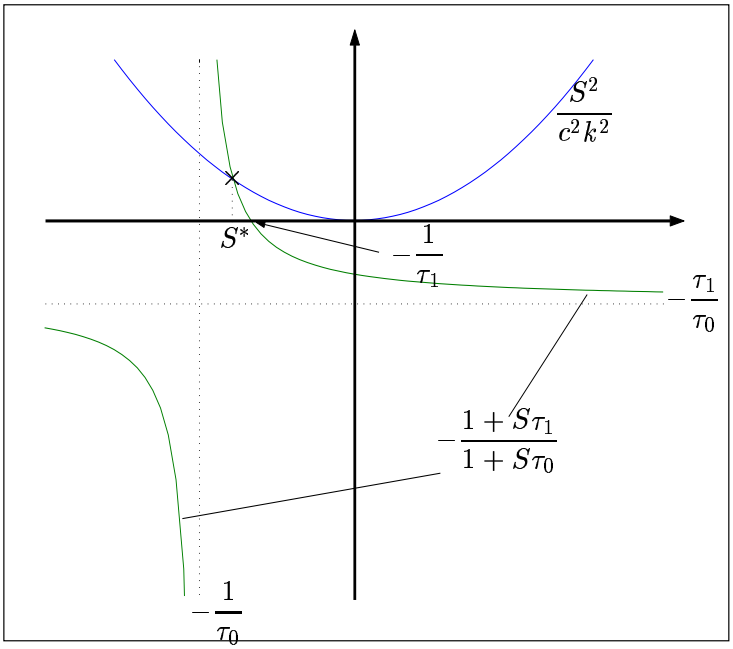


FIG. 4: *Solution graphique*

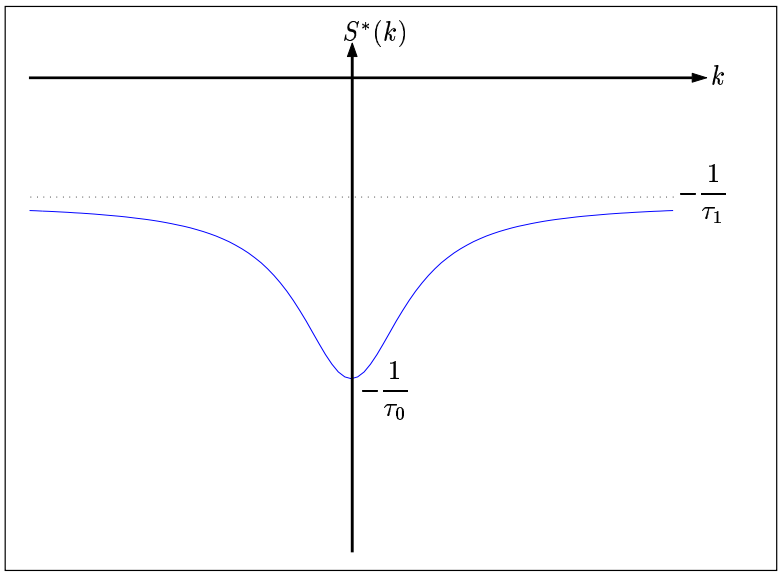


FIG. 5: *Allure de* $k \longrightarrow S^*(k)$

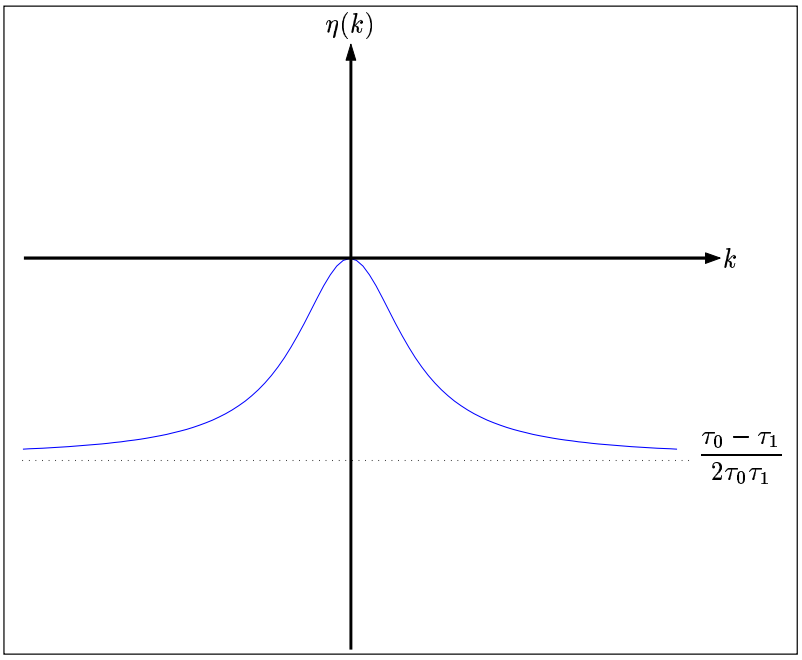


FIG. 6: *Allure* $k \longrightarrow \eta(k)$

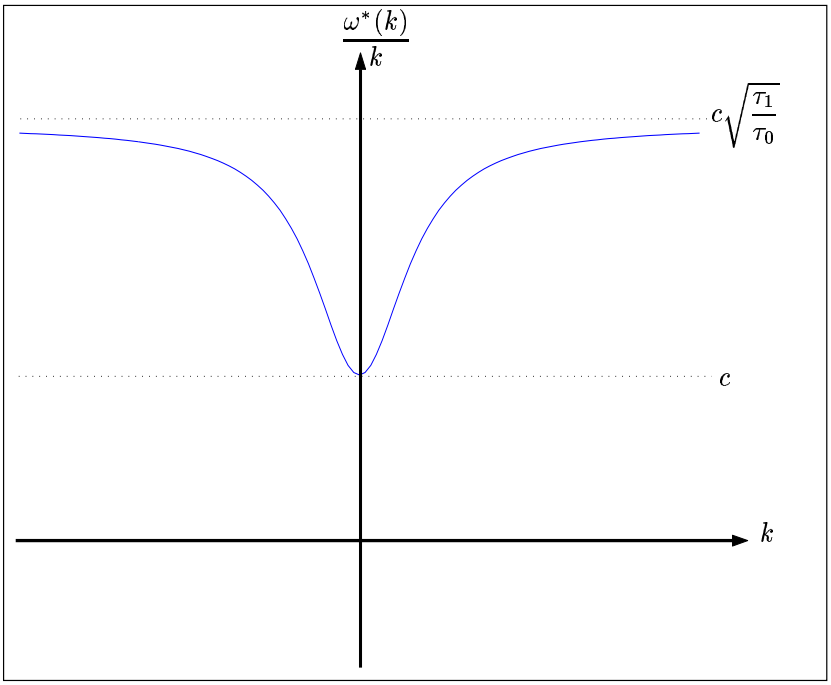


FIG. 7: *Allure* $k \longrightarrow \dfrac{\omega^*(k)}{k}$

2. *deux modes* **propagatifs amortis** *correspondant à* $\boldsymbol{S = \eta \pm i\omega}$. *Les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences(pour lesquelles l'amortissement tend vers 0) et la constante de temps à haute fréquence est* $\boldsymbol{2\tau_1\tau_0/(\tau_1 - \tau_0)}$.

3. *pour les* **modes propagatifs**, *les hautes fréquences se propagent plus vite mais sont davantage amorties.*

3.2 Analyse par ondes planes en 3D

Nous menons dans cette section une analyse par ondes planes analogue à celle du cas 1D, dans le cas d'un milieu visco-élastique isotrope 3D. On considère le problème isotrope en milieu homogène:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\partial_{tt}^2 u_i - \partial_{x_j}\sigma_{ij} = 0, \\ \sigma_{ij} + \tau_0\partial_t\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \tau_0\lambda\tau_\lambda\delta_{ij}\partial_t\varepsilon_{kk} + 2\tau_0\mu\tau_\mu\partial_t\varepsilon_{ij}. \end{array} \right. \tag{95}$$

On s'intéresse aux solutions particulières de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = u_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{x})}\,\overrightarrow{d}, \\ \sigma(x,t) = \sigma_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{x})}\,\overrightarrow{\overrightarrow{D}}\,. \end{array} \right. \tag{96}$$

avec

$$\overrightarrow{k} = (k_1,k_2,k_3)^t,\ \overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3)^t,\ \overrightarrow{d} = (d_1,d_2,d_3)^t$$

et

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

Remplaçons ces expressions dans le système (95), on obtient la relation de dispersion

$$\big[i\omega^3\tau_0 + \omega^2 - (\frac{\mu}{\rho} + i\Omega\tau_0\frac{\mu\tau_\mu}{\rho})|k|^2\big]\,\overrightarrow{d} = \big[\frac{\lambda+\mu}{\rho} + i\Omega\tau_0\frac{\lambda\tau_\lambda + \mu\tau_\mu}{\rho}\big](\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d})\,\overrightarrow{k}. \tag{97}$$

En introduisant les vitesses v_p et v_s et les temps de relaxation τ_p et τ_s (voir (19)), l'équation (97) devient

$$\big[i\omega^3\tau_0 + \omega^2 - v_s^2(1+i\Omega\tau_s)|k|^2\big]\,\overrightarrow{d} = \big[v_p^2(1+i\omega\tau_p) - v_s^2(1+i\omega\tau_s)\big](\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d})\,\overrightarrow{k}. \tag{98}$$

Le produit scalaire de cette relation par $\overrightarrow{k}$ implique en particulier

$$\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d}\,\big[i\omega^3\tau_0 + \omega^2 - v_p^2(1+i\omega\tau_p)|k|^2\big] = 0. \tag{99}$$

Deux cas se présentent alors, selon que $\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d}$ est nul ou non :

1. **Les ondes P** (ondes de compression) : $\boldsymbol{\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d} \neq 0}$. Dans ce cas, la relation (98) montre que $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{d}$ sont colinéaires et (99) donne la relation de dispersion des ondes **P**

   $$\omega^2(1+i\omega\tau_0) = v_p^2|k|^2(1+i\omega\tau_p). \tag{100}$$

2. **Les ondes S** (ondes de cisaillement): $\boldsymbol{\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{d} = 0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{d}$ sont donc orthogonaux et (98) donne la relation de dispersion des ondes **S**

   $$\omega^2(1+i\omega\tau_0) = v_s^2|k|^2(1+i\omega\tau_s). \tag{101}$$

On peut remarquer que, si on fait le changement de variable $S = i\omega$, les équations (100) et (101) s'écrivent sous la forme :

$$\tau_0 S^3 + S^2 + \tau_i v_i^2|k|^2 S + v_i^2|k|^2 = 0 \quad \forall i = p,s. \tag{102}$$

L'équation (102) est la même que l'équation (84) obtenue en dimension un, en remplaçant τ_i par τ_1, v_i par c et $|k|$ par k pour $i = p,s$. Les conclusions de l'analyse en 1D peuvent donc être étendues en 3D.

4 Du viscoélastique à l'élastique

Dans cette partie nous nous sommes intéressés au comportement de l'onde visco-élastique quand le coefficient d'amortissement τ_0 tend vers zéro et nous montrons dans quel sens cette solution converge vers la solution de l'équation d'onde (équation de l'élasticité) obtenue lorsque on néglige ces coefficients.

4.1 Estimations a priori

L'identité d'énergie permet d'obtenir des estimations de la solution:

Théorème 4.1 *Pour tout $t \geq 0$, la solution du problème (23) vérifie les estimations suivantes:*

$$\|\partial_t u(t)\|_\rho + \|\sigma(t) - \boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds, \tag{103}$$

$$\|u(t)\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + t\sqrt{2E_0} + \int_0^t (t-s)\|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds, \tag{104}$$

Il existe une constante $C = C(n, M_-, M_+)$ telle que

$$\|\vec{\nabla} u\| + \|\sigma(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq C\big(\sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds\big). \tag{105}$$

Où E_0 désigne l'énergie initiale

$$E_0 = \frac{1}{2}\Big[\|u_1\|_\rho^2 + \|\varepsilon(u_0)\|_{\boldsymbol{C}}^2 + \|p_0\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2\Big]. \tag{106}$$

Démonstration :

En intégrant entre 0 et t l'identité d'énergie (61), on obtient:

$$E(t) \leq E_0 + \int_0^t (f(s), \partial_t u(s))\, ds \leq E_0 + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_\rho \, \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds, \tag{107}$$

la deuxième inégalité provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Or, par définition de l'énergie (59) on a

$$\|\partial_t u(s)\|_\rho^2 \leq 2E(s).$$

Par conséquent

$$E(t) \leq E_0 + \sqrt{2}\int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}} (E(s))^{1/2}\, ds \tag{108}$$

et le lemme de Gronwall permet d'en déduire:

$$E(t) \leq \big(\sqrt{E_0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds\big)^2. \tag{109}$$

Pour obtenir l'estimation (103) il suffit de remarquer que $\|\partial_t u(t)\|_\rho$ et $\|p(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ sont majorés par $\sqrt{2E(t)}$. Pour la deuxième estimation (104), on remarque que u est une primitive de $\partial_t u$:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \partial_t u(s)\, ds,$$

ce qui implique

$$\|u(t)\|_\rho \quad \leq \quad \|u_0\|_\rho + \|\int_0^t \partial_t u(s)\, ds\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_\rho\, ds$$

et on utilise (103) pour conclure. Pour la troisième estimation on utilise d'abord l'inégalité de Korn [8, 15]: il existe une constante C_k dépendant de n telle que

$$\|\vec{\nabla} u\| \leq C_k \|\varepsilon(u)\| \tag{110}$$

et comme $\varepsilon(u)$ vérifie

$$\sqrt{M_-}\ \|\varepsilon(u)\| \leq \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}} \leq \sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}}\, ds, \tag{111}$$

on en déduit la première partie de (105). On majore enfin les contraintes par:

$$\|\sigma(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \|p(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Or $\|p(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ a été estimé par (103) et $\|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ est clairement majoré par

$$\|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \leq \quad C\|\varepsilon(u)\|$$

où C est une constante dépendant de M_-, M_+. Pour conclure on utilise (111). ■

4.2 Convergence et estimation de l'écart

Dans cette section on s'intéresse au cas où τ_0 tend vers vers zéro de la façon suivante :

$$\tau_0^\eta(x) = \eta, \ \ \eta \to 0^+$$

avec $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$ et $\mathcal{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ ont les propriétés (25) et (27). On considère (u_η, σ_η) la solution du problème viscoélastique

$$\begin{cases} \rho\partial_{tt}^2 u_\eta - \mathbf{div}\,\sigma_\eta = f, & \text{dans } Q_T^*, \\ \sigma_\eta + \eta\tau_0\,\partial_t\sigma_\eta = \boldsymbol{C}\varepsilon(u_\eta) + \eta\tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t u_\eta), & \text{dans } Q_T^*, \\ u_\eta(x,0) = u_0,\ \partial_t u_\eta(x,0) = u_1,\ \sigma_\eta(x,0) = \sigma_0, & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{112}$$

et (u, σ) la solution du problème purement élastique

$$\begin{cases} \rho\partial_{tt}^2 u - \mathbf{div}\,\sigma = f, & \text{dans } Q_T^*, \\ \sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(u), & \text{dans } Q_T^*, \\ u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1, & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{113}$$

De même que pour le problème de viscoélasticité on a le théorème d'existence et unicité de la solution forte et des estimations d'énergie [13] pour le problème (113).

Théorème 4.2 *Sous l'hypothèse* $(u_0, u_1, f) \in D(\Delta_{\boldsymbol{C}}) \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big)$
Le problème (113) admet une unique solution (u, σ) *avec*

$$u \in C^2\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^1\big(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n\big) \cap C^0(0,T;D(\Delta_{\boldsymbol{C}})),$$

$$\sigma \in C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^{n^2}_s\big) \cap C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^s(\mathbb{R}^n)).$$

Où l'espace

$$D(\Delta_{\boldsymbol{C}}) = \{u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \,/\, \Delta_{\boldsymbol{C}} u = \mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n\}. \tag{114}$$

L'objectif de cette étude est de montrer dans quel sens la solution (u_η, σ_η) converge vers (u, σ) solution du problème (113). On a le théorème :

Théorème 4.3 *Si les données du problème vérifient*

$$\left\{\begin{array}{l} (\rho, \tau_0, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) \in \left(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)\right)^2 \times \left((W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^{n^2}\right)^2, \\ (u_0, u_1, \sigma_0) \in (H^3(\mathbb{R}^n))^2 \times (H^3(\mathbb{R}^n))^{n^2}, \\ f \in C^3\left(0, T; (L^2(\mathbb{R}^n))^n\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n\right), \end{array}\right. \tag{115}$$

et si σ_η vérifie à l'instant initial la loi élastique :

$$\sigma_0 = \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0). \tag{116}$$

Alors, on a les estimations :

$$\begin{array}{l} \left\|u_\eta - u\right\|_{C^0(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))^n)} \leq C(n, M_-, M_+, \tau_+, T)\,\eta, \\ \left\|\sigma_\eta - \sigma\right\|_{C^0(0,T;(L^2(\mathbb{R}^n))^{n^2})} \leq C(n, M_-, M_+, \tau_+, T)\,\eta. \end{array} \tag{117}$$

De plus si les données initiales (u_0, u_1, σ_0, f) ne vérifient que les hypothèses des théorèmes 2.1 et 4.2, on a :

$$\begin{array}{ll} u_\eta \rightharpoonup u & \textit{dans } H^1(Q_T) \textit{ faible}, \\ u_\eta \to u & \textit{dans } L^2_{loc}(Q_T) \textit{ fort}, \\ \sigma_\eta \rightharpoonup \sigma & \textit{dans } L^2(Q_T) \textit{ faible}. \end{array} \tag{118}$$

Démonstration :

On note $V_\eta = u_\eta - u$ et $\Sigma_\eta = \sigma_\eta - \sigma$, elles vérifient le problème

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho\,\partial^2_{tt} V_\eta - \mathbf{div}\,\Sigma_\eta = 0, & \text{dans } Q^*_T, \\ \Sigma_\eta - \boldsymbol{C}\varepsilon(V_\eta) = g_\eta, & \text{dans } Q^*_T, \\ V_\eta(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ \partial_t V_\eta(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{119}$$

avec

$$g_\eta = \eta\tau_0\left(\boldsymbol{D}\varepsilon(\partial_t u_\eta) - \partial_t \sigma_\eta\right). \tag{120}$$

Notre but est de trouver une estimation de la norme de V_η et Σ_η en fonction de η.
Si on note $W_\eta = \partial_t V_\eta$, le problème (119) se réécrit

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho\,\partial_t W_\eta - \mathbf{div}\,\Sigma_\eta = 0, & \text{dans } Q^*_T, \\ \boldsymbol{C}^{-1}\partial_t \Sigma_\eta - \varepsilon(W_\eta) = \tilde{g}_\eta, & \text{dans } Q^*_T, \\ W_\eta(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ \Sigma_\eta(x,0) = \Sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0), & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{121}$$

avec

$$\tilde{g}_\eta = \boldsymbol{C}^{-1}\partial_t g_\eta.$$

L'énergie :

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left[\rho|W_\eta|^2 + \boldsymbol{C}^{-1}\Sigma_\eta : \Sigma_\eta\right] dx,$$

vérifie

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}_\eta \Sigma_\eta \, dx.$$

En suivant les étapes de la démonstration du théorème 4.1, on obtient les estimations :

Théorème 4.4 *On a, pour tout* $t \geq 0$

$$\|W_\eta(t)\|_\rho \leq \sqrt{2\tilde{E}_0} + \int_0^t \|\tilde{g}_\eta(s)\|_{\boldsymbol{C}} \, ds, \tag{122}$$

$$\|\Sigma_\eta(t)\|_{\boldsymbol{C}^{-1}} \leq \sqrt{2\tilde{E}_0} + \int_0^t \|\tilde{g}_\eta(s)\|_{\boldsymbol{C}} \, ds. \tag{123}$$

L'hypothèse (116) implique que $\tilde{E}_0 = 0$. Pour avoir des estimations de la norme de V_η et de Σ_η il suffit donc d'estimer $\|\tilde{g}_\eta\|_{\boldsymbol{C}}$.

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}_\eta(s)\|_{\boldsymbol{C}} &= \|\eta \boldsymbol{D}\varepsilon(\partial^2_{tt} u_\eta) - \eta \partial^2_{tt} \sigma_\eta\|_{\boldsymbol{C}^{-1}} \\ &\leq C\eta \Big[\|\vec{\nabla} \partial^2_{tt} u_\eta\| + \|\partial^2_{tt} \sigma_\eta\| \Big] \end{aligned}$$

où C ne dépend que de M_- et τ_+. En utilisant les résultats de régularités du §2.3 et en reprenant les estimations du théorème 4.1 (voir (125)) nous majorons les normes $\|\vec{\nabla} \partial_{tt} u_\eta\|$ et $\|\partial^2_{tt} \sigma_\eta\|$ independement de η. Finalement, en utilise le fait que :

$$V_\eta(t) = \int_0^t W(s) \, ds \quad , \quad \boldsymbol{C}\varepsilon(V_\eta) = \Sigma_\eta - g_\varepsilon \tag{124}$$

et on conclut que $\sup_{t \in [0,T]} \|V_\eta(t)\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^n} \leq C(n, M_-, M_+, \tau_+, T)\, \eta$.

Pour la démonstration de la deuxième partie du théorème, on suppose que (u_0, u_1, σ_0, f) vérifient les hypothèses des théorèmes 2.1 et 4.2. En reprenant les estimations à priori du théorème 4.1 pour la solution forte (u_η, σ_η) du problème (112), on a

$$\left| \begin{array}{l} \sup\limits_{[0,T]} \|\dfrac{\partial u_\eta}{\partial t}(t)\|_\rho \leq \sqrt{2E_0} + \displaystyle\int_0^T \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}} \, ds, \\ \sup\limits_{[0,T]} \|u_\eta(t)\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + T\sqrt{2E_0} + T \displaystyle\int_0^T \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}} \, ds, \\ \sup\limits_{[0,T]} \left(\|\vec{\nabla} u_\eta\| + \|\sigma_\eta(t)\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right) \leq C \Big[\sqrt{2E_0} + \displaystyle\int_0^T \|f(s)\|_{\frac{1}{\rho}} \, ds \Big] \quad ; \quad C = C(n, M_-, M_+). \end{array} \right. \tag{125}$$

Ces estimations sont indépendantes de η, par suite $\dfrac{\partial u_\eta}{\partial t}$, $\vec{\nabla} u_\eta$, u_η et σ_η sont bornées dans $L^2(Q_T)$, ce qui entraîne l'existence des sous suites u_η et σ_η véreifiant :

$$\left| \begin{array}{lcll} u_\eta & \rightharpoonup & \tilde{u} \quad \text{dans} \quad H^1(Q_T) & \text{faible}, \\ u_\eta & \to & \tilde{u} \quad \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q_T) & \text{forte}, \\ \sigma_\eta & \rightharpoonup & \tilde{\sigma} \quad \text{dans} \quad L^2(Q_T) & \text{faible}. \end{array} \right. \tag{126}$$

Comme (u_η, σ_η) est une solution faible du problème (48) avec $\tau_0^\eta = \eta \tau_0$, après un passage à la limite $(\eta \to 0)$, on trouve que $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ est une solution faible du problème élastique

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \left[\rho \tilde{u} \partial^2_{tt} v + \tilde{\sigma} : \varepsilon(v) - f v \right] dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \rho \left[u_1(x) v(x,0) - u_0(x) \partial_t v(x,0) \right] dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \left[\tilde{\sigma} : \tau - \boldsymbol{C}\varepsilon(\tilde{u}) : \tau \right] dx \, dt = 0, \\ \forall (v, \tau) \in \mathcal{H}(Q_T) \times C^0\big(0, T; (L^2(\mathbb{R}^n))^{n^2}_s\big). \end{array} \right. \tag{127}$$

Comme le problème (127) admet une solution faible unique [13] et que toute solution forte est une solution faible on a $(\bar{u}, \bar{\sigma}) = (u, \sigma)$ ■

Références

[1] B. A. Auld. *Acoustic Fields and ElasticWaves in solids*, volume I et II. Wiley, 1973.

[2] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. II. Analyse numérique. Technical report, INRIA, to appear 2003.

[3] D. R. Bland. *The theory of linear viscoelasticity.* Pergamon press inc, 1960.

[4] T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux.* Publications de l'Institut Français du Pétrole, 1986.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle-Théorie et applications.* Masson, 1983.

[6] J. M. Carcione. *Wave Fields in Real Media : Wave propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media.* Pergamon, 2001.

[7] R.M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity-An introduction.* Academic Press Inc, 1982.

[8] G. Duvaut and J. L. Lions. *Inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[9] M. Fabrizio and A. Morro. *Mathematical problems in linear viscoelasticity.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[10] Y.C. Fung. *Foundations of solid mechanics.* Prentice Hall Inc, New-Jersey, 1965.

[11] G.Canadas. *Etude mathématique et numrique d'une équation hyperbolique du troisième ordre intervenant en sismique.* PhD thesis, Université de Pau, 1979.

[12] M. E. Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 11:291–356, 1962.

[13] P. Joly. Analyse et approximation de modèle de propagation d'ondes. Cours de l'Ecole polytechnique, Paris, 2001.

[14] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes-Application à la synthèse sonore.* PhD thesis, Université du Maine, 1997.

[15] J. A. Nitsche. On korn's second inequality. *R.A.I.R.O Numerical Analysis*, 15(3):237–248, 1981.

[16] J. Salencon. *Viscoélasticité.* Presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399