



La méthode multipôle appliquée au calcul du champ proche

Nathalie Bartoli

► To cite this version:

Nathalie Bartoli. La méthode multipôle appliquée au calcul du champ proche. RR-4777, INRIA. 2003. inria-00071809

HAL Id: inria-00071809

<https://inria.hal.science/inria-00071809>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La méthode multipôle appliquée au calcul du champ proche

Nathalie BARTOLI

N° 4777

Mars 2003

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

La méthode multipôle appliquée au calcul du champ proche

Nathalie BARTOLI*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4777 — Mars 2003 — 48 pages

Résumé : Les applications de post-traitement en électromagnétisme utilisent souvent le calcul des champs en zone proche ou lointaine. Dans ce document, nous nous intéressons au calcul des champs proches par la formulation des équations intégrales dans le cas d'objets axisymétriques. À partir de la connaissance des courants à la surface d'un objet, il s'agit de déterminer les champs créés par cet objet sur son entourage. Nous avons utilisé pour cela la méthode multipôle, connue pour calculer rapidement des produits matrice-vecteur dans le cadre des équations de Maxwell. Son efficacité est validée sur de nombreux exemples par rapport à une méthode classique. Le gain obtenu est d'autant plus intéressant qu'il va nous permettre de réduire considérablement le temps d'exécution du logiciel de couplage *Echo_light* d'Alcatel Space qui nécessite de nombreux calculs d'interactions proches.

Mots-clés : équations intégrales, géométries pluri-axisymétriques, champ proche, algorithme multipôle

Travail effectué dans le cadre d'un contrat entre l'Inria-Cermics et Alcatel Space

* INRIA- CERMICS

Computation of the near field via the multipole method

Abstract: In electromagnetism, the post processing uses frequently the computation of fields in a near or a far zone. In this document, the computation of the near field is done by integral equations and only axisymmetrical objects are considered. From the knowledge of the currents at the surface of the object, we are interested in evaluating the fields in the vicinity of this object. Our approach is based on the multipole method, well known to compute very quickly some matrix-vector products in the Maxwell's equations. Its efficiency is validate on numerical examples compared to some classical methods. The improvement is particularly interesting for the software `Echo_light` of Alcatel Space requiring many computations of interaction between obstacles.

Key-words: integral equations, multi-axisymmetrical geometries, near field, multipole algorithm

1 Contexte de l'étude

Nous nous sommes intéressés au logiciel `Echo_light` d'Alcatel Space. Ce logiciel d'électromagnétisme permet de coupler plusieurs structures rayonnantes axisymétriques et sa particularité vient du fait que les objets peuvent avoir des axes de symétrie quelconques, c'est à dire pas nécessairement colinéaires. Lors d'une précédente étude, nous avons optimisé ce logiciel et introduit de nouvelles fonctionnalités : simplification et optimisation du script shell, parallélisation sur une ferme de PCs, possibilité d'alimenter le dispositif à partir de plusieurs sources, mise en place d'un processus itératif avec un critère d'arrêt. Ces différents changements ont permis de réduire considérablement les temps d'exécution qui étaient prohibitifs avec la version initiale, sur certains exemples nous avons divisé le temps CPU par quatre. Cependant, l'interaction entre deux objets reste encore une étape très coûteuse, d'autant qu'elle est répétée un grand nombre de fois, par exemple dans le cas du septet, sept antennes cieres interagissent entre elles. Une première optimisation du code fortran avait été réalisée et avait permis de diviser le temps de calcul du champ proche par un facteur 1.5 et de diviser d'autant le temps global de `Echo_light`. Nous pouvons espérer qu'en accélérant le calcul des champs, nous réduirons encore le temps d'exécution de `Echo_light`. C'est dans cette optique que nous nous sommes intéressés à la méthode multipôle, connue pour calculer rapidement le champ électromagnétique à partir de la connaissance des courants. Du fait de nos relations avec l'équipe électromagnétisme du CERFACS¹, nous avons obtenu l'accord d'utiliser leur code multipôle CESC-FMM pour cette étude. Je tiens à remercier F. Collino et F. Millot, qui ont développé ce code ; leur soutien et leurs conseils m'ont permis de mener à bien ce travail.

Pour cette étude de faisabilité, nous nous sommes limités au calcul du champ électrique. La méthodologie et les résultats obtenus par la méthode multipôle peuvent s'étendre facilement au cas magnétique. Ce travail est présenté dans ce document et s'organise de la manière suivante. Nous rappelons dans une première partie les notations et les repères utilisés. Les formules de champ proche et leurs propriétés sont ensuite détaillées. Cette partie reprend des notions théoriques sur la formulation intégrale en axisymétrie. Dans l'optique d'utiliser un code multipôle, nous avons cherché à séparer la donnée des courants sur l'émetteur du champ que l'on souhaite calculer sur les points du récepteur. Ce travail préliminaire nous a conduit à l'écriture de plusieurs formulations de champ proche qui sont présentées en fin de première partie. La deuxième partie concerne l'algorithme multipôle et son application pour le calcul du champ proche. L'algorithme multipôle est habituellement utilisé en électromagnétisme pour calculer le flux des courants à travers les arêtes d'un maillage surfacique constitué de triangles. Nous l'avons adapté pour prendre en compte la connaissance du vecteur courant en chacun des points de la surface de l'antenne émettrice. Deux algorithmes multipôles ont été développés dans le but d'accélérer le calcul des interactions. Nous comparerons ensuite les temps de calcul des différentes formulations dans le cas d'exemples réalistes extraits du premier rapport sur la validation du logiciel `Echo_light`.

1. Centre Européen de Formation Avancée en Calcul Scientifique à Toulouse, www.cerfacs.fr/emc

2 Calcul du champ proche en axisymétrie : quatre formulations équivalentes

Avant toute chose, il convient de rappeler que le logiciel `Echo_light` est basé sur une formulation par équations intégrales dans le cas particulier d'objets à symétrie de révolution. La propriété d'axisymétrie permet de décomposer les courants et les champs en série de Fourier ; chaque terme est alors calculé indépendamment des autres. Par exemple, la détermination du courant est faite mode par mode via une décomposition LU de la matrice associée au mode et si M modes sont nécessaires pour recomposer la série, nous aurons M systèmes à résoudre.

2.1 Les notations et les repères

Nous considérons deux obstacles :

- un obstacle émetteur où les courants électromagnétiques ont été déterminés mode par mode via un calcul préalable
- un obstacle récepteur sur lequel on souhaite calculer les champs électromagnétiques produits par l'influence de l'obstacle émetteur.

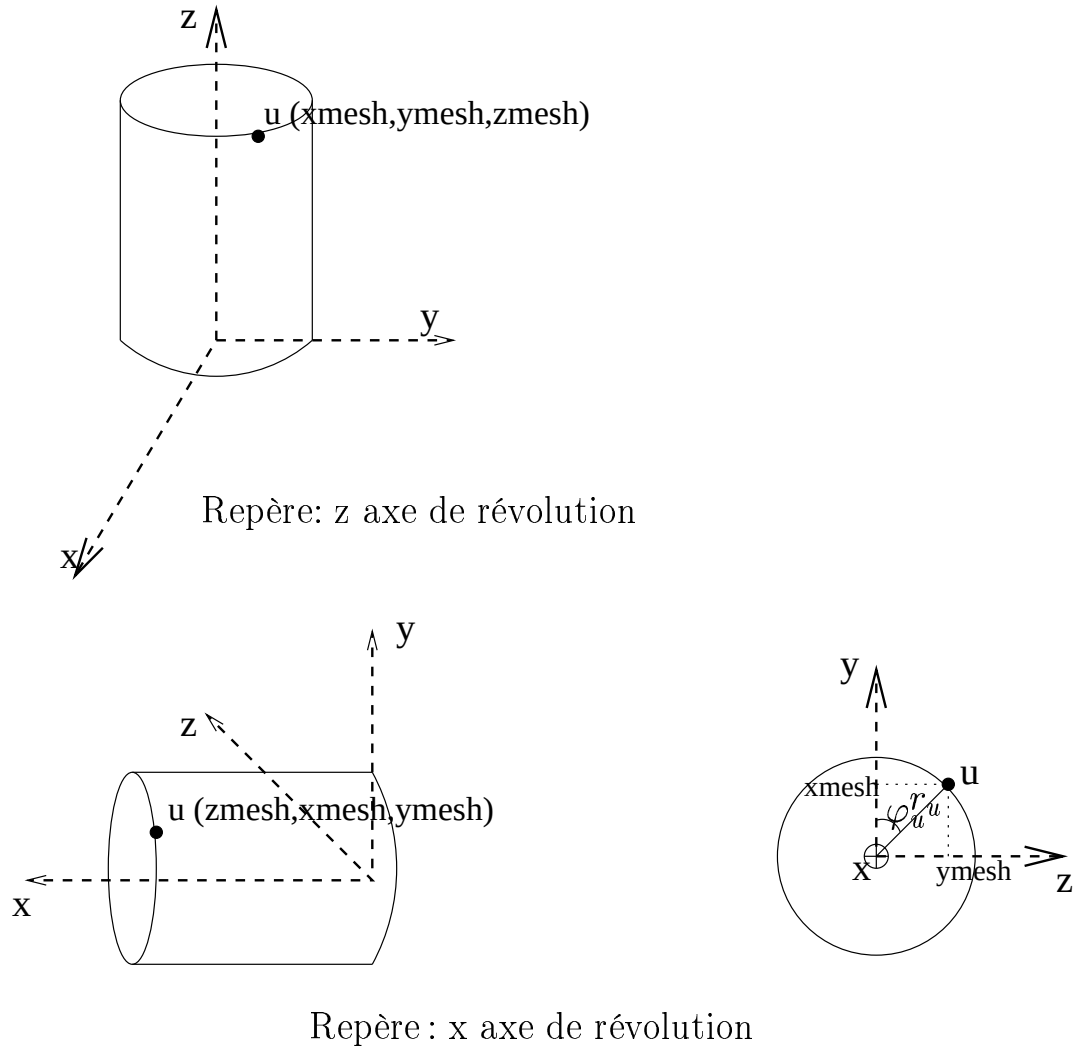
Nous disposons pour cela de trois fichiers d'entrée que l'on renomme sous la forme :

- `courant.emetteur` qui contient les courants électrique et magnétique, donnés mode par mode et dans les deux polarisations, en chaque degré de liberté de l'obstacle émetteur,
- `donnees.emetteur` qui décrit le maillage 2D de la génératrice de l'émetteur, la table de connectivité et les degrés de liberté,
- `maille.receveur` qui contient la géométrie 3D du récepteur, c'est à dire l'ensemble des points où l'on souhaite calculer le champ électromagnétique.

On note u un point appartenant à la surface du récepteur et v un point sur la surface émettrice. Ces points sont repérés à l'aide de leurs coordonnées cartésiennes ou polaires. Sur la figure 1, le point u du récepteur est caractérisé :

- par son maillage 3D avec les trois coordonnées $(x_{\text{mesh}}, y_{\text{mesh}}, z_{\text{mesh}})$ si z est l'axe de révolution de l'obstacle,
- par son maillage 3D avec les trois coordonnées $(z_{\text{mesh}}, x_{\text{mesh}}, y_{\text{mesh}})$ si x est l'axe de révolution de l'obstacle,
- par son maillage 2D-axi avec les coordonnées (x_u, r_u, φ_u) si x est l'axe de révolution de l'obstacle.

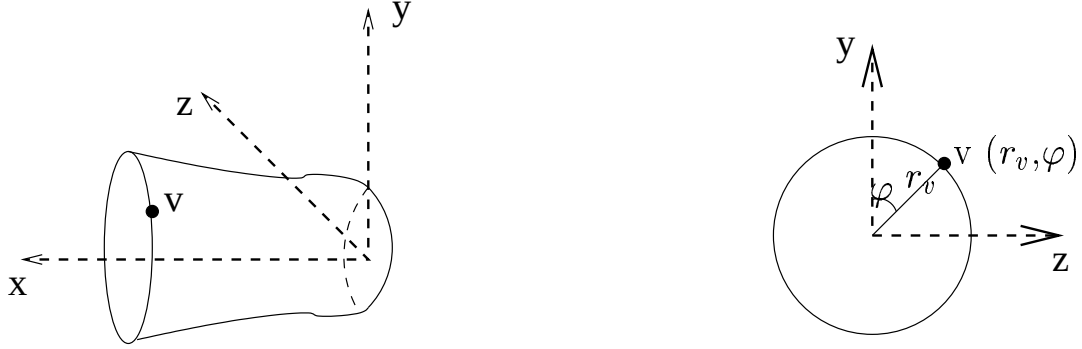
On remarque que $x_u = z_{\text{mesh}}$, $r_u = \sqrt{x_{\text{mesh}}^2 + y_{\text{mesh}}^2}$ et $\varphi_u = \arctan(y_{\text{mesh}}/x_{\text{mesh}})$.

FIG. 1 – *Repères pour un point u du récepteur.*

De la même manière, la figure 2 montre qu'un point v de l'émetteur est caractérisé

- par ses coordonnées (r_v, φ) sur le cercle en dimension deux,
- par ses coordonnées sur un segment k de la génératrice (x_k, y_k) ,
- par ses coordonnées $(x_k, y_k \cos(\varphi), y_k \sin(\varphi))$ en dimension trois.

La génératrice est discrétisée par des segments et l'indice k se reporte au numéro de segment auquel appartient le point v .



Repère : x axe de révolution

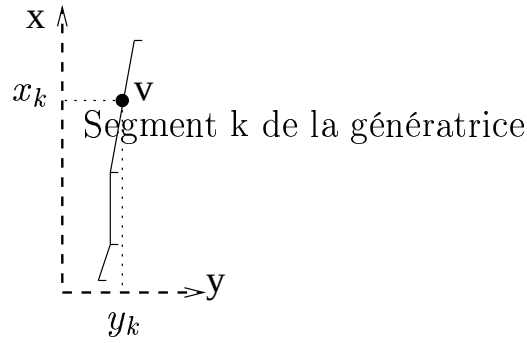


FIG. 2 – Repères pour un point v de l'émetteur.

Pour définir le vecteur $\vec{R} = u - v$, nous utilisons le même repère pour l'émetteur et le récepteur, par exemple si x est l'axe de révolution

$$\vec{R} \begin{vmatrix} z_{\text{mesh}} - x_k \\ x_{\text{mesh}} - y_k \cos \varphi \\ y_{\text{mesh}} - y_k \sin \varphi \end{vmatrix} \quad (1)$$

ou encore, si l'on se place dans le plan de coupe $\varphi_u = 0$,

$$\vec{R} \begin{vmatrix} \text{zmesh} - x_k \\ ru - y_k \cos \varphi \\ -y_k \sin \varphi. \end{vmatrix} \quad (2)$$

Remarque 2.1.1 (Dans le plan $\varphi_u = 0$) Dans le cas où $\varphi_u = 0$, la distance entre les points u et v est une fonction de $\cos \varphi$

$$R^2 = (\text{zmesh})^2 + r_u^2 + y_k^2 - 2r_u y_k \cos \varphi. \quad (3)$$

Cette dépendance en $\cos \varphi$ nous permettra de simplifier certaines intégrales.

Pour un plan de coupe φ fixé, nous définissons en chaque point de la génératrice un repère local $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_\varphi)$ comme l'indique la figure 3. L'angle α est l'angle que fait le vecteur tangent $\vec{u}_t$ avec l'axe de révolution. Les vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_\varphi$ sont donnés par

$$\vec{u}_t \begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \varphi \\ \sin \alpha \sin \varphi \\ \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (4)$$

et

$$\vec{u}_\varphi \begin{vmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0. \end{vmatrix} \quad (5)$$

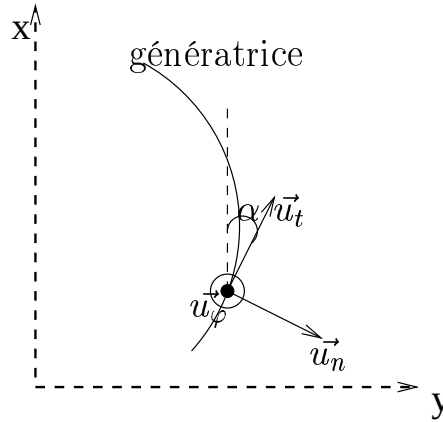


FIG. 3 – Système de coordonnées locales à φ fixé.

Tout vecteur $\vec{I}$ peut se décomposer dans ce repère sous la forme

$$\vec{I} = I^t \vec{u}_t + I^\varphi \vec{u}_\varphi \quad (6)$$

où I^φ est la composante azimutale et I^t la composante méridienne. **Cette décomposition sous la forme azimuth-méridien est une propriété fondamentale de la formulation axisymétrique.**

2.2 La formule de champ proche

Les courants électrique et magnétique sont notés $\vec{j}$ et $\vec{m}$. Ils sont connus en chacun des points v de la surface émettrice. On pose $\vec{m} = i\omega\mu_0\vec{p}$. Le champ électrique diffracté au point u est donné par la somme de trois intégrales

$$\begin{aligned}\vec{E}(u) &= i\omega\mu_0\mu_r \int_{\Gamma} G(u,v)\vec{j}(v) d\Gamma(v) \\ &\quad - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \text{grad}_u \int_{\Gamma} G(u,v) \text{div} \vec{j} d\Gamma(v) \\ &\quad - i\omega\mu_0 \text{rot}_u \int_{\Gamma} G(u,v) \vec{p} d\Gamma(v).\end{aligned}\tag{7}$$

On suppose que les objets sont placés dans le vide, par conséquent les constantes de permittivité et de perméabilité sont $\varepsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$. L'expression de $\vec{E}$ se simplifie et s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 A - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} B - i\omega\mu_0 C\tag{8}$$

où les trois termes intégraux A , B et C sont

$$A = \int_{\Gamma} G(u,v)\vec{j}(v) d\Gamma(v)\tag{9}$$

$$B = \int_{\Gamma} \text{grad}_u G(u,v) \text{div} \vec{j}(v) d\Gamma(v)\tag{10}$$

$$C = \text{rot}_u \int_{\Gamma} G(u,v) \vec{p}(v) d\Gamma(v) = \int_{\Gamma} \text{grad}_u G(u,v) \wedge \vec{p}(v) d\Gamma(v).\tag{11}$$

Avant de détailler la discrétisation des différents termes, nous décrivons les propriétés relatives à la géométrie axisymétrique.

2.3 Expressions continue et discrète des courants

Grâce à la symétrie de révolution, les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{p}$ se décomposent en série de Fourier par rapport à la variable φ

$$\begin{aligned}\vec{j} &= j^t \vec{u}_t + j^\varphi \vec{u}_\varphi = \sum_m j_m^t \vec{u}_t e^{im\varphi} + j_m^\varphi \vec{u}_\varphi e^{im\varphi} \\ \vec{p} &= p^t \vec{u}_t + p^\varphi \vec{u}_\varphi = \sum_m p_m^t \vec{u}_t e^{im\varphi} + p_m^\varphi \vec{u}_\varphi e^{im\varphi}.\end{aligned}\tag{12}$$

Le rayonnement électromagnétique créé par des corps de révolution a été initié par Harrington et Mautz [8] et les différentes routines axi s'inspirent de leurs travaux. En utilisant les propriétés de symétrie des courants, nous avons

$$\text{en polarisation TE} \begin{cases} j_{-m}^t = j_m^t, & j_{-m}^\varphi = -j_m^\varphi \\ p_{-m}^t = -p_m^t, & p_{-m}^\varphi = p_m^\varphi \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{et en polarisation TM} \begin{cases} j_{-m}^t = -j_m^t, & j_{-m}^\varphi = j_m^\varphi \\ p_{-m}^t = p_m^t, & p_{-m}^\varphi = -p_m^\varphi. \end{cases} \quad (14)$$

La somme pour $m \in \mathbb{Z}$ peut être réduite aux modes $m \geq 0$ suivant les formules :

$$\vec{j} = \begin{cases} j_0^t \vec{u}_t + j_0^\varphi \vec{u}_\varphi + 2 \sum_{m>0} j_m^t \vec{u}_t \cos(m\varphi) + i j_m^\varphi \vec{u}_\varphi \sin(m\varphi) & \text{en polarisation TE} \\ j_0^t \vec{u}_t + j_0^\varphi \vec{u}_\varphi + 2 \sum_{m>0} i j_m^t \vec{u}_t \sin(m\varphi) + j_m^\varphi \vec{u}_\varphi \cos(m\varphi) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (15)$$

$$\vec{p} = \begin{cases} p_0^t \vec{u}_t + p_0^\varphi \vec{u}_\varphi + 2 \sum_{m>0} i p_m^t \vec{u}_t \sin(m\varphi) + p_m^\varphi \vec{u}_\varphi \cos(m\varphi) & \text{en polarisation TE} \\ p_0^t \vec{u}_t + p_0^\varphi \vec{u}_\varphi + 2 \sum_{m>0} p_m^t \vec{u}_t \cos(m\varphi) + i p_m^\varphi \vec{u}_\varphi \sin(m\varphi) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (16)$$

La divergence du courant électrique est donnée par

$$\text{div} \vec{j}(v) = \frac{1}{r_v} \partial_t(r_v j^t) + \frac{1}{r_v} \partial_\varphi(j^\varphi) = \frac{1}{r_v} \sum_m (i m j_m^\varphi + \partial_t(r_v j^t)) e^{i m \varphi}. \quad (17)$$

En utilisant les propriétés de symétrie du courant pour $m < 0$, l'expression devient

$$\text{div} \vec{j}(v) = \begin{cases} \frac{1}{r_v} \left(\partial_t(r_v j_0^t) + 2 \sum_{m>0} \partial_t(r_v j_m^t) \cos(m\varphi) + i m j_m^\varphi \cos(m\varphi) \right) & \text{en polarisation TE} \\ \frac{1}{r_v} \left(\partial_t(r_v j_0^t) + 2 \sum_{m>0} i \partial_t(r_v j_m^t) \sin(m\varphi) - m j_m^\varphi \sin(m\varphi) \right) & \text{en polarisation TM.} \end{cases} \quad (18)$$

Les courants $\vec{j}$ et $\vec{p}$ sont décrits respectivement par 3 degrés de liberté sur chaque segment k . La composante azimutale est décrite par un degré de liberté dit "fuyant" pris au centre de l'élément et la composante méridienne utilise deux degrés tangentiels pris aux extrémités de k

$$\begin{cases} j_k^t = \left(\frac{t}{\Delta_k} - 1\right) T_1^k + \frac{t}{\Delta_k} T_2^k \\ j_k^\varphi = T_3^k \end{cases} \quad (19)$$

où Δ_k est la longueur du segment k et t est l'abscisse curviligne qui décrit k avec $t \in [0, \Delta_k]$. Les composantes azimutale et méridienne qui décrivent $\vec{p}$ utilisent une décomposition similaire. Comme l'indique la figure 4, sur chaque segment k , six degrés de liberté sont donc à

déterminer pour décrire les courants $\vec{j}$ et $\vec{p}$. Comme la détermination des courants se fait mode par mode, il y a donc 3 degrés de liberté $(T_{m,1}^k, T_{m,2}^k, T_{m,3}^k)$ (resp $(P_{m,1}^k, P_{m,2}^k, P_{m,3}^k)$) associés à chaque valeur de m pour décrire (j_m^t, j_m^φ) (resp. pour (p_m^t, p_m^φ)).

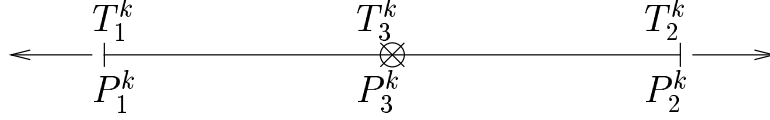


FIG. 4 – Les 6 degrés de liberté électrique et magnétique sur un segment k .

2.4 Expression du noyau de Green et de sa dérivée

Le noyau de Green qui intervient dans la formulation intégrale est donné par

$$G(u, v) = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \quad (20)$$

où k_0 est le nombre d'onde, $\vec{R} = u - v$ avec $R = |u - v|$ est donné par les formules (1) ou (2). La dérivée du noyau intervient également dans le calcul du champ diffracté

$$\vec{\text{grad}}_u G(u, v) = \frac{e^{ik_0 |u-v|}}{4\pi |u-v|} \left(ik_0 - \frac{1}{|u-v|} \right) \frac{u-v}{|u-v|} = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R^3} (ik_0 R - 1) \vec{R} \quad (21)$$

et on note

$$\vec{\text{grad}}_u G(u, v) = G_R \vec{R}. \quad (22)$$

Remarque 2.4.1 (Expressions de G et de G_R dans le plan $\varphi_u = 0$) Si le point u est pris dans le plan de coupe $\varphi_u = 0$, l'expression de R est donnée par la formule (3) ce qui permet de simplifier les calculs car G (ou G_R) est alors une fonction de $\cos \varphi$. En utilisant les propriétés des fonctions paires et impaires [10], nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} G(\cos \varphi) \cos(m\varphi) d\varphi &= 2 \int_0^\pi G(\cos \varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \\ \int_0^{2\pi} G(\cos \varphi) \sin(m\varphi) d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Ces propriétés sont valables pour la dérivée G_R .

2.5 Intégrale de surface et points de quadrature

Pour les corps à symétrie de révolution, l'intégrale sur la surface s'écrit

$$\int \int_S ds = \int_0^T dt \int_0^{2\pi} r(t) d\varphi \quad (24)$$

si le point t qui décrit la génératrice varie entre 0 et T . Chacune des intégrales A , B ou C fait donc intervenir deux intégrations : une sur la génératrice et une autre sur le cercle autour de l'axe de révolution.

2.5.1 Intégration sur la génératrice

L'intégration sur la génératrice se décompose sur N_k segments et sur chacun des segments k , on considère N_s points de Gauss

$$\int_0^T f(t) dt \simeq \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) f(\xi_i) \quad (25)$$

où $w(i)$ est le poids de Gauss associé et $\xi_i = \Delta_k(1 - s_i)/2$, avec s_i un point de Gauss dans l'intervalle $[-1, 1]$. Il y a un total de $N_k \times N_s$ points de Gauss pour discrétiser la génératrice. Pour déterminer la position d'un point $v = (x_k, y_k)$ appartenant au segment k de coordonnées $(x1_k, y1_k)$ et $(x2_k, y2_k)$, nous avons l'expression suivante au niveau continu pour $t \in [0, \Delta_k]$

$$\begin{cases} x_k(t) = \cos(\alpha)t + x1_k \\ y_k(t) = \sin(\alpha)t + y1_k \end{cases} \quad (26)$$

comme l'indique la figure 5 où est représentée l'abscisse t sur le segment k .

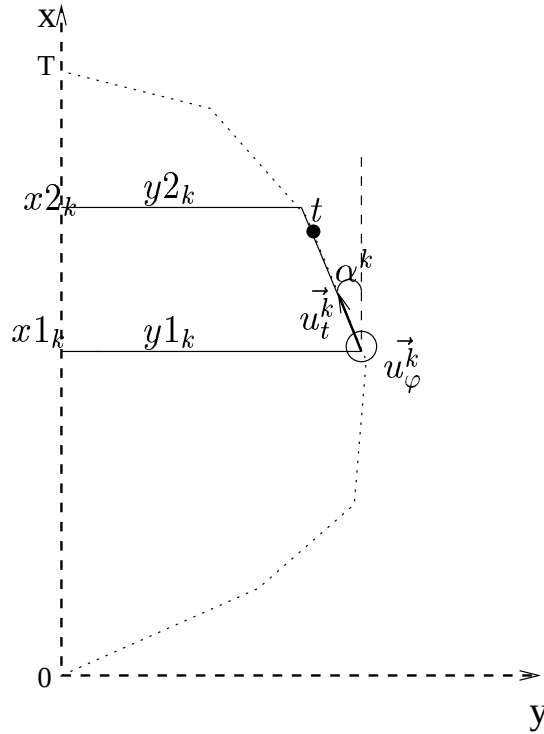


FIG. 5 – *Discrétisation de la génératrice.*

Au niveau discret, nous avons une expression simple pour exprimer le cosinus et le sinus

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= (x2_k - x1_k)/\Delta_k \\ \sin \alpha &= (y2_k - y1_k)/\Delta_k.\end{aligned}\tag{27}$$

Comme t est approché par le point de Gauss $\Delta_k(1 - s_i)/2$, il vient alors

$$\begin{cases} x_k(i) = x1_k(1 + s_i)/2 + x2_k(1 - s_i)/2 \\ y_k(i) = y1_k(1 + s_i)/2 + y2_k(1 - s_i)/2 \end{cases} \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \dots N_s.\tag{28}$$

2.5.2 Intégration autour de l'axe de révolution

Pour l'intégration suivant l'angle $\varphi \in [0, 2\pi]$, le nombre de points de Gauss N_p tel qu'il a été défini dans le code, dépend du rayon du cercle, de la distance entre le point u et le point v et de la valeur du mode m . Le choix de N_p est fait selon une règle empirique qui ne peut être communiquée. Disons simplement que c'est une fonction de $k_0|u - v|$ et de m

$$N_p = f(m, k_0|u - v|),\tag{29}$$

où k_0 est le nombre d'onde relié à la fréquence f_0 du problème et à la vitesse des ondes c par $k_0 = 2\pi f_0/c$. Une démonstration sur le nombre de points de quadrature est présentée dans la section 7. L'intégrale sur le cercle est approchée par

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \simeq \pi \sum_{j=1}^{N_p} w(j) f(\xi_j),\tag{30}$$

où les points de Gauss sont $\xi_j = 2\pi(1 + s_j)/2$ avec $s_j \in [-1, 1]$ et $w(j)$ les poids associés. Notons que cette dépendance entre la position du point u , le mode m et le choix de N_p sera un des points importants à supprimer lors de l'approche multipolaire.

En résumé, l'intégrale d'une fonction f sur la surface se discrétise de la manière suivante

$$\int_{\Gamma} f(v) d\Gamma(v) = \int_0^T \int_0^{2\pi} f(t, \varphi) r(t) d\varphi \simeq \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} y_k(i) w(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) f(\xi_i, \xi_j)\tag{31}$$

et par conséquent chaque point v de l'émetteur est décrit par un couple de points de Gauss (ξ_i, ξ_j) .

2.6 Une première formulation axisymétrique

De manière à utiliser la décomposition des courants en série de Fourier sous la forme (j_m^t, j_m^φ) et (p_m^t, p_m^φ) et les propriétés du noyau de Green (23), les intégrales A, B et C vont être évaluées mode par mode dans le plan $\varphi_u = 0$. Concernant la bibliographie sur ce sujet,

le lecteur pourra par exemple se reporter à [2], [8], [9] pour plus de précisions. A partir du calcul A_m , B_m et C_m , nous avons

$$E_m(\varphi_u = 0) = i\omega\mu_0 A_m - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} B_m - i\omega\mu_0 C_m. \quad (32)$$

Chaque terme E_m de la série de Fourier est indépendant des autres termes et ainsi le champ diffracté au point u avec $\varphi_u \neq 0$ est déterminé

$$\vec{E}(u) = \sum_m E_m e^{im\varphi_u}. \quad (33)$$

Chaque terme A_m , B_m ou C_m est un vecteur à trois composantes qui dépend de la polarisation et du mode.

1. L'intégrale (9) s'écrit sous forme discrète et pour m fixé

$$A_m = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G(u, \xi_i, \xi_j) \left(j_m^t(\xi_i) \vec{u}_t(\xi_i, \xi_j) + j_m^\varphi(\xi_i) \vec{u}_\varphi(\xi_i, \xi_j) \right) e^{im\xi_j}. \quad (34)$$

Les trois composantes $A_m \cdot x$, $A_m \cdot y$ et $A_m \cdot z$ sont obtenues par projection des vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_\varphi$ sur les axes à partir des formules (4) et (5). Les termes $j_m^t(\xi_i)$ et $j_m^\varphi(\xi_i)$ sont obtenus à partir des trois degrés de liberté (19) définis sur le segment k et du point de Gauss $s_i \in [-1, 1]$

$$\begin{cases} j_m^t(\xi_i) = -\frac{(1+s_i)}{2} T_{m,1}^k + \frac{(1-s_i)}{2} T_{m,2}^k \\ j_m^\varphi(\xi_i) = T_{m,3}^k. \end{cases} \quad (35)$$

2. Le deuxième terme intégral (10) s'écrit sous la forme discrète suivante

$$B_m = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G_R(u, \xi_i, \xi_j) \vec{R}(u, \xi_i, \xi_j) \text{div} \vec{j}_m(\xi_i) e^{im\xi_j} \quad (36)$$

où le terme de divergence est donné par la formule (18). Dans la formule (36), c'est la projection du vecteur $\vec{R}$ sur les axes qui détermine chacune des composantes de B_m .

3. Le troisième terme intégral (11) s'écrit

$$C_m = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G_R(u, \xi_i, \xi_j) \vec{R}(u, \xi_i, \xi_j) \wedge \vec{p}_m(\xi_i, \xi_j) e^{im\xi_j}, \quad (37)$$

et les trois composantes de C_m sont données par le produit vectoriel $\vec{R} \wedge \vec{p}_m$.

2.7 Avantages et inconvénients de cette première formulation

Dans les formules (34), (36) et (37), des simplifications peuvent s'opérer pour le calcul de chacune des composantes :

- pour déduire le calcul aux termes $m \geq 0$, le facteur $e^{im\xi_j}$ est remplacé par un $\cos(m\xi_j)$ ou un $\sin(m\xi_j)$ en fonction de la polarisation,
- toutes les intégrales contenant des termes en $G(\cos\varphi)\sin(m\varphi)$ sont nulles, le nombre de termes à calculer est donc réduit,
- l'intégration se réduit à l'intervalle $[0, \pi]$ à cause des symétries du noyau et par conséquent seul $N_p/2$ points de Gauss sont à déterminer sur cet intervalle.

En résumé, les intégrales qui restent à déterminer sont :

- $A_0.x, A_0.y, A_0.z, B_0.x, B_0.y, C_0.x, C_0.y, C_0.z$ pour les deux polarisations,
- $A_m.x, A_m.y, B_m.x, B_m.y, C_m.x, C_m.y$ pour la polarisation TE,
- $A_m.z, B_m.z, C_m.z$ pour la polarisation TM,

soit un total de 14 termes en polarisation TE et 11 termes en polarisation TM. A partir de tous ces termes calculés pour chaque valeur de m , il est facile de recomposer la série pour déterminer le champ au point u

$$\vec{E}(u) = \sum_m E_m e^{im\varphi_u}.$$

Dans le but d'arriver à un découplage émetteur-récepteur, le premier point gênant concerne le choix du nombre de points de quadrature pour l'intégration sur la variable φ . On a remarqué que N_p est une fonction de m et de la distance entre les points u et v , ce qui signifie que le maillage de la surface émettrice dépend du point u considéré, mais également de m . Notre objectif est de pouvoir considérer un seul maillage de l'émetteur quelles que soient les variables m et u .

2.8 Une deuxième formulation plus globale

Dans le but d'écrire le champ proche avec une formulation multipôle, nous souhaitons disposer des courants en chaque point v de l'émetteur, c'est à dire évaluer $\vec{j}(v)$ et $\vec{p}(v)$ à partir de leurs composantes modales. Cette démarche revient à inverser l'ordre des boucles dans la recombinaison du champ proche : sommer d'abord sur les modes, avant d'intégrer sur la surface émettrice. Les intégrales s'écrivent sous la forme

$$A = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G(u, \xi_i, \xi_j) \vec{j}(\xi_i, \xi_j). \quad (38)$$

$$B = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G_R(u, \xi_i, \xi_j) \operatorname{div} \vec{j}(\xi_i, \xi_j) \vec{R}(u, \xi_i, \xi_j) \quad (39)$$

$$C = \pi \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\Delta_k}{2} \sum_{i=1}^{N_s} w(i) y_k(i) \sum_{j=1}^{N_p} w(j) G_R(u, \xi_i, \xi_j) \vec{R}(u, \xi_i, \xi_j) \wedge \vec{p}(\xi_i, \xi_j). \quad (40)$$

On évalue ensuite directement $\vec{E}(u)$ avec la formule (8). Les vecteurs $\vec{j}$, $\vec{p}$ et la divergence $\text{div} \vec{j}$ peuvent être déterminés de manière globale en chaque couple de points (ξ_i, ξ_j) à partir des définitions (15), (16) et (18).

Dans ce cas, la définition de R est donnée par (1). Par conséquent, les propriétés de symétrie du noyau ne sont plus valables et l'intégration sur le cercle doit se faire sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ avec N_p points de Gauss. Toutes les intégrales $A.x$, $A.y$, $A.z$, $B.x$, $B.y$, $B.z$, $C.x$, $C.y$, $C.z$ sont à évaluer et on vérifie numériquement que

- $A.z = 0$, $B.z = 0$ et $C.z = 0$ en polarisation TE,
- $A.x = 0$, $A.y = 0$, $B.x = 0$, $B.y = 0$, $C.x = 0$ et $C.y = 0$ en polarisation TM.

L'implémentation de cette formulation ne pose aucune difficulté importante, il faut cependant modifier la règle qui fixe le nombre de points d'intégration sur le cercle car ce nombre doit être indépendant de m . On reprend la formule empirique (29) en remplaçant m par le nombre de modes maximum $M = \max(m)$ utilisé pour la décomposition du courant

$$N_p = f(M, k_0 |u - v|). \quad (41)$$

D'un point de vue des temps de calcul, la formulation mode par mode est plus rapide lorsque le nombre de modes est petit, 2 dans les exemples que nous avons traités. Par contre, si on considère le cas du septet où 13 modes sont nécessaires pour la décomposition, la deuxième formulation est plus performante. Par exemple avec 13 modes, pour évaluer le champ électrique dans les deux polarisations sur une antenne cierge comprenant 21240 points, le temps de calcul est divisé par 1.4 en utilisant cette nouvelle formulation. D'autres exemples viendront illustrer ce gain dans la section 4.

2.9 Une troisième formulation pour l'approche multipolaire

La formulation multipôle a pour devise "de séparer ce qui se passe au récepteur de ce qui se passe à l'émetteur", et par conséquent le nombre de points de Gauss N_p sur l'émetteur ne peut dépendre de la position u du point sur le récepteur. Pour éliminer cette dépendance, nous avons choisi une autre règle pour fixer le nombre de points N_p que celle utilisée dans le code initial, ou dans la formulation précédente. Le nombre de points de Gauss sur le cercle d'intégration doit dépendre du rayon du cercle et du nombre d'onde. On choisit la règle suivante

$$N_p = f\left(k_0 r + \max(\log(k_0 r + \pi), k_0 r \log^2(k_0 r)^{1/3}), M\right), \quad (42)$$

où k_0 représente le nombre d'onde et r est le rayon du cercle d'intégration. Cette formule s'inspire de la loi utilisée pour choisir le nombre de multipôles dans l'algorithme FMM (Fast Multipole Method) [5], [11]. Ce choix s'avère très efficace lors de l'intégration numérique. Une étude sur le nombre de points d'intégration est faite dans la section 7.

Cette troisième formulation est identique à la précédente, seul le nombre de points de Gauss N_p diffère dans le calcul des intégrales (38), (39) et (40). Le nombre de points de Gauss sur la totalité de la surface émettrice est donné par

$$N_{pg} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_s} N_p, \quad (43)$$

où N_p est variable suivant les lois (29) et (41) ou bien fixe avec la loi (42). Lors des comparaisons en terme de temps CPU entre les formulations 2 et 3, le nombre de points N_{pg} calculé avec la loi (42) est quasiment toujours supérieur à celui obtenu avec la loi (41), ce qui explique que la formulation 3 soit plus précise mais aussi plus coûteuse (voir section 4).

2.10 Une quatrième formulation de référence

Cette formulation a pour but de créer un potentiel de référence que l'on pourra comparer à celui obtenu avec la version multipôle. Comme le code multipôle s'adresse (pour le moment) à des obstacles conducteurs parfaits, nous vérifions que le courant magnétique est bien égal à zéro sur l'émetteur. Le calcul du champ proche se réduit alors aux deux intégrales A et B . Nous supposons connus :

- les coordonnées des N_{pg} points de Gauss sur la surface émettrice, notées (x_n, y_n, z_n) ,
- le courant électrique $\vec{j}$ en ces N_{pg} points,
- la divergence $\vec{j}$ en ces N_{pg} points,
- les coefficients d'intégration (sur la génératrice et sur le cercle) donnés par

$$\text{coef}(n) = \frac{\Delta_k}{2} w(i) y_k(i) w(j) \text{ pour } n \text{ variant de } 1 \text{ à } N_{pg}. \quad (44)$$

Toutes ces données sont fournies par un programme préalable qui utilise les mêmes fichiers d'entrée, à savoir le courant sur les degrés de liberté de chaque segment émetteur (fichier `courant.emetteur`), les coordonnées des segments, la table de connectivité (fichier `donnees.emetteur`) et les points sur la surface réceptrice (fichier `maille.receveur`). Si on note v_n un point de Gauss sur la surface émettrice, l'expression des intégrales est très simple

$$A = \sum_{n=1}^{N_{pg}} G(u, v_n) \text{coef}(n) \vec{j}(v_n) \quad (45)$$

$$B = \sum_{n=1}^{N_{pg}} G_R(u, v_n) \text{coef}(n) \text{div} \vec{j}(v_n) \vec{R}(u, v_n). \quad (46)$$

La détermination du vecteur $\vec{R}$ est immédiate à partir des coordonnées de u (fournies par `maille.receveur`) et de v_n

$$\vec{R} \left| \begin{array}{l} \text{zmesh} - x_n \\ \text{xmesh} - y_n \\ \text{ymesh} - z_n. \end{array} \right. \quad (47)$$

Remarquons que le stockage des données a été optimisé, en calculant directement les produits $\text{coef}(n)\vec{j}(v_n)$ et $\text{coef}(n)\text{div}\vec{j}(v_n)$ dans le programme préalable. Le stockage des données peut également se faire dans un fichier non formaté de manière à réduire davantage l'espace mémoire.

Les quatre formulations que nous venons de présenter seront comparées lors des applications numériques. Nous disposons à l'issue de ce cheminement :

- des trois composantes du courant données sur les N_{pg} points de Gauss qui caractérisent la surface émettrice,
- de la divergence donnée en ces mêmes points,
- des coordonnées en dimension 3 de ces points,
- du fichier `maille.receveur` qui caractérise les points à la surface du récepteur.

A partir de ces données, nous allons voir comment utiliser l'algorithme multipôle pour déterminer le champ électrique aux points du récepteur.

3 La formulation multipôle pour le calcul du champ proche

3.1 Rappels sur la méthode multipôle

La formulation multipôle est connue pour calculer rapidement un produit matrice-vecteur. Si N_e désigne le nombre de points sur l'émetteur et N_r le nombre de points sur le récepteur, le temps de calcul pour évaluer le champ en chacun des points du récepteur est de l'ordre de $c_1(N_e \times N_r)$ par un calcul direct et se réduit à $c_2(N_e \log N_e + N_r \log N_r)$ avec un calcul multipôle. Notons que même si la constante c_2 est supérieure à c_1 , le gain en temps de calcul devient vite important dès lors que N_e et N_r sont grands. Regardons l'exemple de la figure 6 où une application de la méthode multipôle à un niveau est illustrée. Le but est d'évaluer le champ aux 4 points du récepteur à partir de la connaissance des courants aux 3 points de l'émetteur. De manière directe, nous devons calculer 12 interactions. Si on note c_{Bv} et c_{Bu} , les centres respectifs des boîtes contenant les points v et u , la méthode multipôle centralise l'information en ces deux points, puis transporte l'information centre à centre. On voit sur la figure 7 que nous avons alors 8 calculs à effectuer avec cet algorithme. Le nombre de points sur cet exemple n'est pas significatif mais illustre seulement le principe de la méthode.

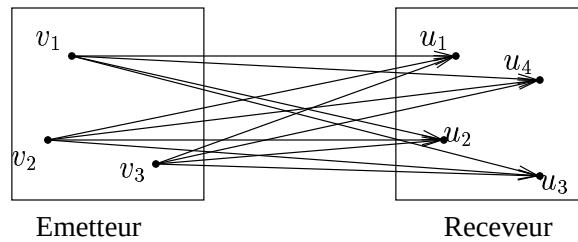


FIG. 6 – Interactions entre deux objets de manière directe.

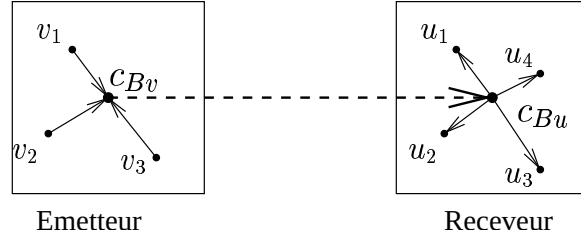


FIG. 7 – Interactions entre deux objets avec l'algorithme multipôle à un niveau.

Dans [6], on montre que le noyau de Green se décompose de la manière suivante

$$G(u, v) = \frac{k_0}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_S e^{-ik_0(u - c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) e^{ik_0(v - c_{Bv}) \cdot \vec{s}} d\vec{s} \quad (48)$$

où S est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ et $\vec{s}$ une direction sur la sphère. L'opérateur de transfert T_L permet de transporter l'information du centre c_{Bv} au centre c_{Bu}

$$T_L(\vec{s}, D) = i \sum_{\ell=0}^L i^\ell (2\ell + 1) h_\ell^{(1)}(k_0 |D|) P_\ell(D \cdot u), \quad (49)$$

$P_\ell(x)$ étant le polynôme de Legendre de rang ℓ et $h_\ell^{(1)}(x)$ la fonction de Hankel sphérique de première espèce et d'ordre ℓ [11]. L'entier L , utilisé pour tronquer la série, détermine la qualité de l'approximation et a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature [3], [4]. En pratique, nous utilisons une formulation multipôle multi-niveaux en effectuant un découpage récursif des boîtes, qui sera détaillé un peu plus tard. Au niveau ℓv , nous fixons

$$L(\ell v) = \text{Ent} \left[k_0 a(\ell v) + \max(C \log(k_0 a(\ell v) + \pi), k_0 a(\ell v) \log^2(k_0 a(\ell v))^{1/3}) \right] \quad (50)$$

où $\text{Ent}[x]$ désigne la partie entière de x et $a(\ell v)$ est la taille de la boîte, c'est à dire l'arête du cube, au niveau ℓv et C est une constante que l'on peut faire varier. On choisit $C = 2.15$. Pour simplifier l'approche multipôle, **nous nous limitons aux cas des interactions électriques entre obstacles parfaitement conducteurs**. Nous recherchons le champ électrique

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \int_\Gamma G(u, v) \vec{j}(v) d\Gamma(v) - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \int_\Gamma \text{grad}_u G(u, v) \text{div} \vec{j} d\Gamma(v). \quad (51)$$

Si l'on remplace le noyau de Green par son approximation multipôle (48) et sa dérivée par

$$\text{grad}_u G(u, v) = \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S -ik_0 \vec{s} e^{-ik_0(u - c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) e^{ik_0(v - c_{Bv}) \cdot \vec{s}} d\vec{s}, \quad (52)$$

l'expression du champ proche (51) devient

$$\begin{aligned} \vec{E}(u) = & i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv}) \cdot \vec{s}} \vec{j}(v) d\Gamma(v) \right) dS \\ & - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S -ik_0 \vec{s} e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv}) \cdot \vec{s}} \text{div} \vec{j} d\Gamma(v) \right) dS \end{aligned} \quad (53)$$

que l'on réécrit sous la forme de deux termes

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \left(\vec{E}_1(u) + \vec{E}_2(u) \right) \quad (54)$$

avec

$$\vec{E}_1(u) = \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv}) \cdot \vec{s}} \vec{j}(v) d\Gamma(v) \right) dS \quad (55)$$

et

$$\vec{E}_2(u) = \frac{1}{k_0^2} \int_S -ik_0 \vec{s} e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv}) \cdot \vec{s}} \text{div} \vec{j} d\Gamma(v) \right) dS. \quad (56)$$

A ce stade de la décomposition, on voit déjà que la détermination de $\vec{E}_1(u)$ nécessite trois produits matrice-vecteur, un pour chacune des composantes de $\vec{j}$, le calcul de $\vec{E}_2(u)$ utilise un seul calcul multipolaire vectoriel, ce qui fait au total 4 produits FMM à calculer, d'où l'appellation Formulation Multipôle à 4 Composantes. Nous verrons un peu plus tard comment réduire ce nombre de composantes.

3.2 La formulation multipôle à 4 composantes

L'algorithme multipôle est basé sur une décomposition homogène de la surface Γ . La méthode de décomposition couramment utilisée consiste à placer cette surface à l'intérieur d'une boîte cubique. Cette boîte est divisée en huit sous-boîtes et chaque sous-boîte est divisée récursivement de la même manière. Le découpage en octree s'arrête quand la plus petite longueur d'arête du cube est d'environ un quart de longueur d'onde. Seules les boîtes ayant une intersection non vide avec la surface sont prises en compte. Chaque boîte constitue un sous-domaine de la surface et sa taille dépend du niveau considéré. L'approche multipôle est valide pour calculer des interactions lointaines, c'est à dire des interactions entre deux boîtes non-voisines ; en pratique, au moins une boîte doit séparer les deux boîtes qui interagissent.

Par convention, le niveau de départ est appelé niveau 1 et il contient une seule boîte, celle qui entoure la surface. Au niveau 2, nous avons au plus 8 boîtes mais elles sont toutes voisines les unes des autres, aucun calcul ne peut se faire via les multipôles avant le niveau 3. A partir du niveau 3, certaines boîtes vont pouvoir interagir entre elles et celles qui sont encore voisines ne le seront peut-être plus au niveau supérieur. Plus la taille de la boîte est

grande, plus le nombre d'échantillons pour discrétiser la fonction définie en son centre sur la sphère unité est important. Il y a donc un compromis à trouver entre le nombre et la taille des boîtes. Le choix des points de quadrature sur la sphère unité a fait l'objet de nombreuses études. Pour intégrer exactement toutes les harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à $2L$, nous prenons une distribution uniforme sur la sphère avec

$$(L + 1) \text{ points pour l'angle } \theta \in [0, \pi] \text{ et } (2L + 1) \text{ points pour l'angle } \varphi \in [0, 2\pi],$$

soit un total de $(2L + 1)(L + 1)$ points de discrétisation sur la sphère unité. Des techniques permettent d'optimiser ce choix en tenant compte des symétries. Pour davantage de précisions sur ces aspects, le lecteur pourra se reporter aux travaux [3], [5], [6], [11], [12].

Le nombre de niveaux dans la décomposition est choisi par l'utilisateur en sachant que l'arête du plus petit cube, notée a doit être de l'ordre de $\lambda/4$, soit encore $k_0 a = \pi/2 \simeq 1.57$. On pourrait proposer un découpage automatique jusqu'au niveau n avec

$$n = \text{Ent} \left[\frac{\log(4a_{\max})}{\log 2} \right] + 1 \quad (57)$$

si $a_{\max}$ est l'arête du cube qui entoure les deux obstacles exprimée en longueur d'onde. En pratique, on s'arrête quand $k_0 a \simeq 1$.

On suppose que les points u et v sont suffisamment éloignés, c'est à dire séparés au moins par une boîte soit une distance minimum de $\lambda/4$ entre u et v . La contribution de la boîte B_v contenant le point v au champ électrique $\vec{E}(u)$ s'écrit alors comme la somme de deux termes (au facteur $i\omega\mu_0 k_0/16\pi^2$ près)

$$\vec{E}_1(u) = \int_S e^{-ik_0(u-c_{B_u}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{B_u} - c_{B_v}) \vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) dS \quad (58)$$

$$\vec{E}_2(u) = \frac{1}{k_0^2} \int_S -ik_0 \vec{s} e^{-ik_0(u-c_{B_u}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{B_u} - c_{B_v}) \mathcal{F}_2(\vec{s}) dS \quad (59)$$

où le vecteur $\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s})$ représente le champ lointain créé par la boîte B_v

$$\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{B_v}) \cdot \vec{s}} \vec{j}(v) d\Gamma(v), \quad (60)$$

et le scalaire $\mathcal{F}_2(\vec{s})$ est donné par

$$\mathcal{F}_2(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{B_v}) \cdot \vec{s}} \text{div} \vec{j}(v) d\Gamma(v). \quad (61)$$

Le calcul de $\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s})$ (ou de $\mathcal{F}_2$), appelé **étape d'agrégation**, est fait pour toutes les boîtes non voisines de B_u . Ensuite vient l'**étape de transfert** qui consiste à calculer l'interaction de chaque boîte B_v au centre de B_u à partir de la connaissance des champs lointains

$$\vec{\mathcal{G}}_1(\vec{s}) = \sum_{B_v \text{ non voisines}} T_L(\vec{s}, c_{B_u} - c_{B_v}) \vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) \quad (62)$$

$$\mathcal{G}_2(\vec{s}) = \sum_{B_v \text{ non voisins}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \mathcal{F}_2(\vec{s}) \quad (63)$$

et finalement le calcul du champ s'écrit comme la somme de potentiel vectoriel et de potentiel scalaire, c'est l'**étape d'intégration ou de désagrégation**

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \left(\int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} \vec{\mathcal{G}}_1(\vec{s}) dS + \frac{1}{k_0^2} \int_S -ik_0\vec{s} e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} \mathcal{G}_2(\vec{s}) dS \right). \quad (64)$$

Classiquement l'algorithme multipôle est couplé à une méthode itérative GMRES [7] pour calculer le courant à la surface d'un obstacle. Son utilisation ici est un peu différente et certaines étapes ont été adaptées. Tout d'abord la géométrie est constituée de deux obstacles : l'émetteur et le récepteur. Nous ne connaissons pas les maillages de ces deux obstacles : ni les arêtes ou la table de connectivité 3D ne sont fournies, seules sont données les coordonnées des points qui constituent la surface. La construction de l'octree est faite à partir d'une grande boîte qui entoure les deux géométries et lors de la division récursive en sous-boîtes, nous conservons l'information suivante : la boîte B appartient-elle au récepteur ou à l'émetteur ? Cette donnée nous permettra de restreindre l'étape d'agrégation aux seules boîtes qui intersectent la surface de l'émetteur et de la même manière, d'effectuer l'étape de désagrégation sur les boîtes appartenant au récepteur.

L'algorithme s'écrit sous la forme suivante :

0: *Initialisation*

géométrie de l'émetteur et du récepteur : coordonnées des points
lecture des paramètres du calcul : fréquence, niveaux pour le découpage ...
construction de l'octree et échantillonnage des sphères pour chaque niveau
lecture des composantes j_x, j_y, j_z et $\text{div}(j)$ en chaque point de l'émetteur

1: *Boucle pour $C = \text{une composante } x, y \text{ ou } z$*

1 produit matrice-vecteur

agrégation sur les boîtes de l'émetteur : calcul de $\vec{\mathcal{F}}_1$

transfert : calcul de T_L

calcul de la composante C de $\vec{\mathcal{G}}_1$

désagrégation sur les boîtes du récepteur

potentiel scalaire = composante C

1: *fin de la boucle pour C*

2: *Composante $C = \text{div } \vec{j}$*

1 produit matrice-vecteur

agrégation sur les boîtes de l'émetteur : calcul de $\mathcal{F}_2$

transfert : calcul de T_L

calcul de $\mathcal{G}_2$

multiplication par $ik_0\vec{s}$ et désagrégation sur les boîtes du récepteur

potentiel vectoriel = 3 composantes

3: *Champ $\vec{E}(u) = \text{potentiel scalaire} + \text{potentiel vectoriel}$*

Pour calculer le champ électrique dans les deux polarisations, nous avons juste modifié la lecture des courants afin de disposer de j_x, j_y, j_z et $\text{div} \vec{j}$ dans les polarisations TE et TM. Nous avons également introduit une boucle supplémentaire dans l'algorithme juste avant la boucle sur les composantes (boucles 1 et 2 dans l'algorithme). La construction de l'octree, l'échantillonnage des sphères sont donc faits une fois pour toutes.

3.3 La formulation multipôle à 3 composantes

Nous rappelons l'expression du champ électrique (51) dans le cas d'obstacles conducteurs parfaits

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \left(\int_{\Gamma} G(u,v) \vec{j}(v) d\Gamma(v) + \frac{1}{k_0^2} \int_{\Gamma} \text{grad}_u G(u,v) \text{div} \vec{j} d\Gamma(v) \right). \quad (65)$$

Après intégration par parties sur le second terme, et en utilisant la propriété du noyau de Green $\text{grad}_v G(u,v) = -\text{grad}_v G(u,v)$, nous avons

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \left(\int_{\Gamma} G(u,v) \vec{j}(v) d\Gamma(v) + \frac{1}{k_0^2} \int_{\Gamma} \text{grad}_u G(u,v) \otimes \text{grad}_u G(u,v) \vec{j}(v) d\Gamma(v) \right) \quad (66)$$

ou encore, en notant Id la matrice identité,

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \int_{\Gamma} \left[\text{Id}_{3 \times 3} + \frac{1}{k_0^2} \text{grad}_u G(u,v) \otimes \text{grad}_u G(u,v) \right] \vec{j}(v) d\Gamma(v). \quad (67)$$

Le terme entre crochets est appelé tenseur dyadique de Green [12], c'est une matrice 3×3 dont chaque colonne est constituée des trois composantes du champ électrique d'un dipôle orienté selon l'une des trois directions de l'espace. Utilisant les identités suivantes

$$\begin{cases} \left(\text{Id}_{3 \times 3} + \frac{1}{k_0^2} \text{grad}_u G(u,v) \otimes \text{grad}_u G(u,v) \right) \vec{j}(v) e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} = \\ (\text{Id}_{3 \times 3} - \vec{s} \otimes \vec{s}) \vec{j}(v) e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} = (\vec{s} \wedge (\vec{j}(v) \wedge \vec{s})) e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}}, \end{cases}$$

le champ proche se met sous la forme

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv}) \cdot \vec{s}} (\vec{s} \wedge (\vec{j}(v) \wedge \vec{s})) d\Gamma(v) \right) dS. \quad (68)$$

Cette nouvelle expression du champ ne fait plus intervenir la divergence du courant et nécessite seulement trois produits matrice-vecteur associés à chacune des 3 composantes de $\vec{j}$

$$\vec{E}(u) = \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} \vec{\mathcal{G}}_1(\vec{s}) dS. \quad (69)$$

Nous avons fait le choix de conserver l'étape d'agrégation avec $\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s})$ donné par la formule (60) et de modifier le calcul de désagrégation en ajoutant le double produit vectoriel

$$\vec{\mathcal{G}}_1(\vec{s}) = \sum_{B_v \text{ non voisines}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv})(\vec{s} \wedge (\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) \wedge \vec{s}). \quad (70)$$

Cette formulation ne nécessite que trois produits multipôles, c'est à dire un de moins que la version précédente. Cependant chacun de ces produits est plus coûteux en terme de temps CPU du fait du double produit vectoriel dans le calcul de $\vec{\mathcal{G}}_1$. Si on conserve le même échantillonnage sur la sphère unité, cette formulation à 3 composantes est un peu moins précise à cause de l'intégration sur la sphère unité du produit $\vec{s} \wedge \cdot \wedge \vec{s}$ qui introduit deux harmoniques sphériques supplémentaires. Il faudrait alors considérer davantage de points d'échantillonnage, mais ceci ne fait pas l'objet de la présente étude.

3.4 Un mot sur la formulation multipôle à deux composantes

Dans [5], on voit que le nombre de produits matrice-vecteur peut encore se réduire en utilisant les coordonnées sphériques sur la sphère unité. On note $(\vec{s}, \vec{s}_\theta, \vec{s}_\varphi)$ la base orthonormée de la sphère unité. En utilisant les relations sur le double produit vectoriel, nous avons

$$(\vec{s} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{s})) = \vec{j} - (\vec{s} \cdot \vec{j})\vec{s}$$

qui s'écrit en coordonnées sphérique comme la somme de deux termes tangents à la sphère unité

$$\vec{j} - (\vec{s} \cdot \vec{j})\vec{s} = (\vec{s}_\theta \cdot \vec{j})\vec{s}_\theta + (\vec{s}_\varphi \cdot \vec{j})\vec{s}_\varphi.$$

A partir de cette décomposition, il suffit d'utiliser une formulation multipôle à deux composantes pour recomposer le champ. En pratique, les fonctions $\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s})$ et $\vec{\mathcal{G}}_1(\vec{s})$ se décomposent selon leurs composantes $\vec{s}_\theta$ et $\vec{s}_\varphi$. Une difficulté cependant apparaît lors de l'interpolation pour passer d'un niveau à un autre dans l'octree où plus de points sur la sphère unité sont à prendre en compte pour la discrétisation. Plus de précisions sur ces aspects sont données dans [5] et [11]. Nous n'avons pas étudié dans le cadre de cette étude la formulation à deux composantes.

4 Applications numériques et comparaisons de temps de calcul

Lors des exemples numériques, nous allons comparer les six formulations rappelées ci-dessous.

1. La formulation 1, notée **F1-axi** et décrite dans la section 2.6, utilise la décomposition en modes du courant, on précisera donc le nombre de modes nécessaires. Par ailleurs, le nombre de points de Gauss lors de l'intégration sur la surface émettrice varie en fonction de la position du point sur le récepteur et du mode, on précisera donc le

- nombre de points de Gauss utilisé (valeur maximale, minimale et moyenne) pour discrétiser la surface émettrice. Du fait des symétries du noyau, nous rappelons que l'intégration autour de l'axe de révolution se fait dans l'intervalle $[0, \pi]$.
2. La formulation 2, notée **F2-axi** et décrite dans la section 2.8, est basée sur la reconstitution des courants et de la divergence avant l'intégration sur la surface. Le nombre de points de Gauss n'est pas tout à fait calculé de la même manière que pour la formulation 1 : on utilise le nombre $\max(m)$ à la place de m , mais la dépendance par rapport à la distance entre u et v reste identique. Cette fois l'intégration se fait dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, il y a donc au minimum deux fois plus de points de Gauss que dans la formulation 1. On précisera également la valeur minimale, maximale et moyenne de ce nombre.
 3. La formulation 3, notée **F3-axi** et décrite dans la section 2.9, est identique à la formulation 2, seul le nombre de points de Gauss sur l'émetteur est calculé indépendamment du récepteur et reste le même tout au long de la simulation.
 4. La formulation 4, notée **F4-refFMM** relit les trois composantes du courant et la divergence pour effectuer un calcul direct en sommant sur les points de Gauss de la surface émettrice (voir section 2.10). Cette formulation permet d'obtenir un potentiel de référence par rapport auquel sera calculée l'erreur avec la formulation multipôle.
 5. La formulation FMM à 4 composantes, décrite dans la section 3.2 et notée **FMM-4C**, utilise le même nombre de points de Gauss que les formulations 3 et 4. Un paramètre important de la formulation FMM reste le nombre de niveaux pour le découpage et l'erreur obtenue par rapport à une formulation classique (potentiel de référence donné par la formulation 4). On précisera le temps CPU pour effectuer les 4 produits matrice-vecteur, et le temps CPU global qui englobe la construction de l'octree, l'échantillonnage des sphères et les quatre produits matrice-vecteur. La taille des boîtes et le nombre de boîtes seront précisés pour chacun des niveaux considérés.
 6. La formulation FMM à 3 composantes (cf. section 3.3 et notée **FMM-3C**) utilise les mêmes paramètres que la formulation FMM à 4 composantes et le potentiel obtenu sera comparé à celui fourni par la formulation 4. De la même manière, nous préciserons le temps CPU pour les trois produits FMM, le temps total pour la simulation, la taille et le nombre de boîtes.

Les temps CPU sont donnés pour le calcul du champ électrique dans les deux polarisations pour tous les points du maillage 3D qui constituent la surface du récepteur. Les calculs ont été réalisés sur un PC bipro P4Xeon à 2GHz chacun et 1 Giga de RAM.

4.1 Un premier exemple de validation

L'exemple que l'on considère ici n'est pas un exemple réaliste dans la mesure où les fichiers ont été générés artificiellement dans le seul but de valider les différentes formulations. Pour cette raison, le courant a été choisi de manière à nécessiter que deux modes pour sa décomposition. Néanmoins, le fichier courant `emetteur` représente un courant associé à la

connectique de `donnees.emetteur` et le fichier `maille.receveur` correspond au maillage du récepteur avec 21240 points.

2 modes	Npg	temps CPU	Erreur L^2 pour $\vec{E}$
F1-axi	min(Npg) = 2520 max(Npg) = 2520 moy(Npg) = 2520	t	référence
F2-axi	min(Npg) = 5040 max(Npg) = 5040 moy(Npg) = 5040	1.16 t	7.79 10 ⁻⁰⁷ % par rapport à F1-axi
F3-axi	Npg = 6352 fixe	1.41 t	7.96 10 ⁻⁰⁸ % par rapport à F2-axi
F4-refFMM	Npg = 6352 fixe	0.84 t	7.85 10 ⁻⁰⁷ % par rapport à F1-axi

TAB. 1 – Temps de calcul (relativement au temps de référence t) pour le champ proche en fonction des différentes formulations dans un cas simple.

Comme le montre le tableau 1, les formulations 2 et 3 où les boucles sont inversées coûtent un peu plus chères en temps CPU que la formulation initiale. Nous verrons que ce n'est plus le cas dès lors que le nombre de modes à prendre en compte est plus important. Lorsque le nombre de points de Gauss est fixé avec la loi (42), le temps de calcul est plus long, un facteur 1.2 est observé entre les formulations 2 et 3, car le nombre de points est plus grand : 6352 points au lieu de 5040 avec la loi (41).

$k_0 = 385.63$ $N_e = 6352$ $N_r = 21440$						
	$k_0 a$	Niveaux	Boîtes	CPU matrice-vecteur	CPU global	Erreur L^2
FMM-4C	6.36	7	140	1min 43s	1min 48s	0.0015%
FMM-4C	3.18	8	476	1min 28s	1min 33s	0.012%
FMM-4C	1.59	9	1492	1min 26s	1min 31s	0.025%
FMM-4C	0.79	10	3756	1min 40s	1min 45s	0.041%
FMM-3C	6.36	7	140	1min 27s	1min 32s	0.0098%
FMM-3C	3.18	8	476	1min 09s	1min 15s	0.037%
FMM-3C	1.59	9	1492	1min 06s	1min 11s	0.13%
FMM-3C	0.79	10	3756	1min 16s	1min 21s	0.45%

TAB. 2 – Temps CPU et erreur sur le champ $\vec{E}$ avec la formulation multipôle 3 ou 4 composantes (FMM-3C et FMM-4C) pour une distance inter-objets de 12λ .

Cet exemple très simple où peu de modes et peu de points sont mis en jeu, permet d'illustrer le principe de la méthode multipôle :

- si on considère peu de niveaux c'est à dire $k_0 a \gg 1$, l'erreur relative est très petite mais le temps de calcul n'est pas forcément minimisé,
- si on considère plus de niveaux, c'est à dire si on se rapproche de $k_0 a = 1$, le nombre de boîtes augmentent, le temps CPU diminue et l'erreur multipolaire augmente un peu,
- si on considère un nombre de niveaux tel que $k_0 a < 1$, alors le nombre de boîtes est souvent trop important et l'algorithme peut être ralenti par les opérations de translation qui sont trop nombreuses.

Dans tous les cas, l'efficacité de l'algorithme multipôle est prouvée : nous effectuons le même calcul en deux fois moins de temps en fonction du nombre de niveaux choisi. L'erreur relative reste très faible avec les deux formulations multipôles. Nous avons ainsi validé notre processus et pouvons effectuer des comparaisons sur des exemples plus importants.

4.2 Deux antennes cieres métalliques espacées de 12λ

Dans l'exemple du septet [1], la géométrie était constituée de sept antennes cieres composées de parties métalliques et diélectriques ($\epsilon_r = 1.85 + i0.006$) comme le montre la figure 8 ou encore la coupe sur la figure 9-a. L'antenne source est alimentée par un guide d'onde au niveau de sa base. Pour cette étude, nous avons repris la même géométrie en supprimant les parties diélectriques comme indiqué sur la figure 9-b : l'antenne présente alors une cavité importante.

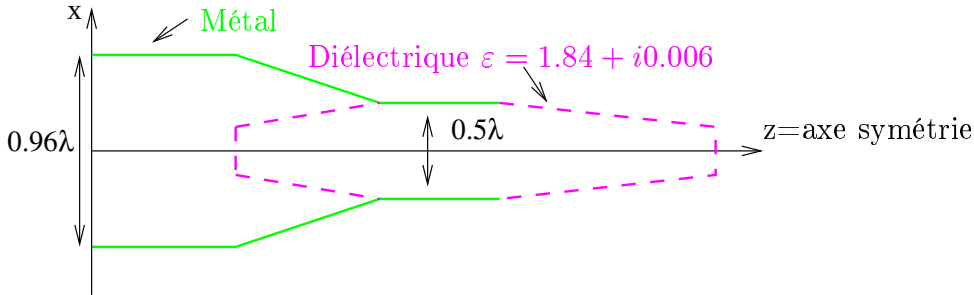


FIG. 8 – Antenne cierge.

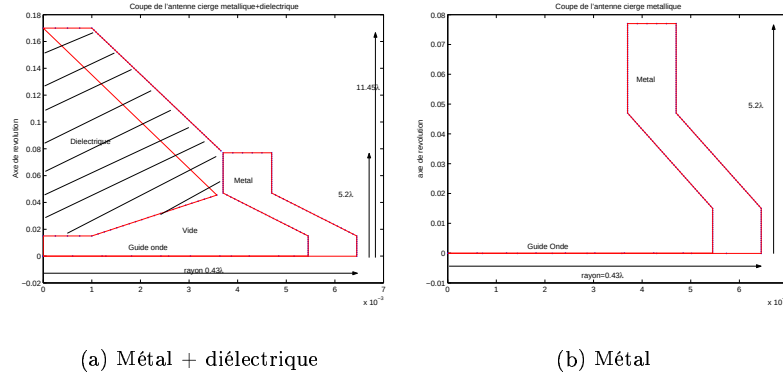


FIG. 9 – Coupe de l'antenne cierge.

Dans cet exemple, nous considérons donc deux antennes cieres métalliques présentées en dimension 3 sur la figure 10. Les caractéristiques du maillage sont

- une fréquence fixée à 20.2GHz, soit un nombre d'onde $k_0 = 423.36$,
- un pas de maillage de $\lambda/20$,
- 235 segments pour former la génératrice présentée sur la figure 9-b,
- 471 degrés de liberté sur la génératrice pour calculer le courant électrique (degrés fuyants et tangentiels),
- 170 génératrices que l'on répète entre 0 et 2π pour former le maillage surfacique.

Les deux obstacles sont distants de 12λ . On souhaite calculer le champ électrique en chacun des points du maillage 3D de l'antenne réceptrice, soit un total de 79900 points à partir de la connaissance du courant sur l'antenne émettrice. Le courant sur l'émetteur a été calculé mode par mode par les routines axi.

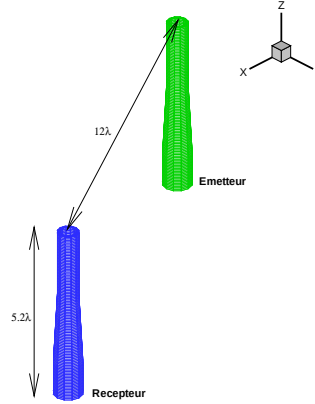


FIG. 10 – *Géométrie et maillage des deux antennes cieres métalliques.*

Le tableau 3 permet de comparer les temps de calcul entre les trois premières formulations. Nous rappelons que dans la version actuelle du code c'est la formulation 1, notée **F1-axi** qui est utilisée. Une première amélioration, à peu de frais, serait d'utiliser la formulation 2 qui modifie seulement l'ordre des boucles et qui permet de gagner un facteur 1.5 sur le temps de calcul. La formulation 3, qui fixe le nombre de points de Gauss, est identique dans ce cas à la formulation 2 : l'erreur entre les deux formulations est négligeable. Le temps nécessaire à la formulation 4 n'est pas comparable aux temps précédents, il est seulement donné ici comme référence pour effectuer un produit matrice-vecteur par une méthode classique.

13 modes	Npg	temps CPU	Erreur L^2 pour $\vec{E}$
F1-axi	min(Npg) = 7488 max(Npg) = 8460 moy(Npg) = 7718	t	référence
F2-axi	min(Npg) = 18800 max(Npg) = 18880 moy(Npg) = 18800	$0.73t$	$2.129 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi
F3-axi	Npg = 18800 fixe	$0.73t$	0% par rapport à F2-axi
F4-refFMM	Npg = 18800 fixe	$0.11t$	$2.128 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi

TAB. 3 – Temps de calcul pour le champ proche en fonction des différentes formulations pour une distance inter-objets de 12λ .

Remarque 4.2.1 (Nombre de points de Gauss pour la formulation 2) Dans le tableau 3, on voit que le nombre de points de Gauss pour la formulation 2, où N_p est calculé par la loi (41), ne varie pas. Nous avons un nombre de points de quadrature fixe entre $[0, 2\pi]$ avec $N_p = 40$. Sachant que nous avons 235 éléments et 2 points de Gauss sur chaque segment, le nombre de points de Gauss sur la surface est exactement

$$N_{pg} = 235 \times 2 \times 40 = 18800.$$

Entre les formulations F2-axi et F3-axi, le nombre de Gauss est identique, c'est pour cette raison que l'erreur L^2 entre les deux formulations est égale à 0% et les temps de calcul sont équivalents.

Pour créer les fichiers d'entrée du code multipôle, il faut

- moins de 2 secondes pour les fichiers de géométrie et de courant,
- moins de 37 minutes pour créer le potentiel de référence dans les deux polarisations. Le calcul de ce potentiel n'est pas nécessaire et dans le cadre de notre étude, permet d'évaluer l'erreur due à l'approximation multipôle.

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$						
	$k_0 a$	Niveaux	Boîtes	CPU matrice-vecteur	CPU global	Erreur L^2
FMM-4C	17.86	3	4	11min 37s	11min 46s	0.00026%
FMM-4C	8.93	4	8	3min 47s	3min 56s	0.006%
FMM-4C	4.47	5	58	1min 22s	1min 31s	0.012%
FMM-4C	2.23	6	250	39s	48s	0.031%
FMM-4C	1.12	7	1162	24s	34s	0.09%
FMM-3C	17.86	3	4	11min 36s	11min 45s	0.00026%
FMM-3C	8.93	4	8	3min 44s	3min 54s	0.005%
FMM-3C	4.47	5	58	1min 20s	1min 29s	0.017%
FMM-3C	2.23	6	250	40s	49s	0.08%
FMM-3C	1.12	7	1162	23s	32s	0.36%

TAB. 4 – Temps CPU et erreur sur le champ $\vec{E}$ avec la formulation multipôle 3 ou 4 composantes (FMM-3C et FMM-4C) pour une distance inter-objets de 12λ .

Si l'on compare les formulations à 3 et 4 composantes, les temps de calcul sont à peu près identiques. La formulation à 3 composantes est sensiblement plus rapide, quelques secondes d'écart sont observées, mais le gain n'est pas très important. Comme on s'y attendait, l'erreur relative avec la formulation 3C est souvent plus grande que la formulation 4C ; cela est dû à la règle de quadrature sur la sphère unité qui est moins exacte dans ce cas.

Remarque 4.2.2 (Exemple pour choisir le nombre de niveaux) La dimension de l'arête qui entoure les deux obstacles est une des sorties du code multipôle et vaut ici 0.1690 mètres, soit 11.38λ . Pour illustrer le choix du nombre de niveaux, la règle (57) donnerait ici un niveau maximum inférieur à 7 avec

$$n = \text{Ent} \left[\frac{\log(4(0.1690/\lambda))}{\log 2} \right] + 1 = \text{Ent}[5.5094] + 1 < 7 \quad \text{avec } \lambda = 0.0148.$$

Ce nombre maximum est vérifié expérimentalement puisque l'on voit dans le tableau 4 que $k_0 a = 2.23$ au niveau 6 et $k_0 a = 1.12$ au niveau 7.

Si l'on avait que quelques chiffres à retenir sur cet exemple, ce serait le tableau 5 où nous avons choisi de conserver 7 niveaux de manière à vérifier $k_0 a$ de l'ordre de 1.

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$		
temps F1-axi		t
$k_0 a = 1.12$	Erreur L^2 pour $\vec{E}$ / F1-axi	Temps CPU
4C lv7	0.09%	$t/555$
3C lv7	0.36%	$t/586$

TAB. 5 – Résumé des temps CPU pour le calcul de $\vec{E}$ entre la version initiale F1-axi et la formulation FMM pour une distance inter-objets de 12λ .

4.3 Deux antennes cieres métalliques espacées de 1.2λ

Dans cet exemple, la géométrie des deux objets est décrite sur la figure 10, seule la distance a été divisée par un facteur 10. Les interactions entre les deux objets sont plus nombreuses et le champ électromagnétique plus intense. Nous nous retrouvons exactement dans la configuration du septet métallique où les sept antennes cieres doivent interagir deux à deux.

13 modes	Npg	temps CPU	Erreur L^2 pour $\vec{E}$
F1-axi	min(Npg) = 6796 max(Npg) = 8460 moy(Npg) = 7487	t	référence
F2-axi	min(Npg) = 18880 max(Npg) = 18880 moy(Npg) = 18800	$0.73t$	$2.36 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi
F3-axi	Npg = 18800 fixe	$0.72t$	0% par rapport à F2-axi
F4-refFMM	Npg = 18800 fixe	$0.12t$	$2.36 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi

TAB. 6 – Temps de calcul pour le champ proche en fonction des différentes formulations pour une distance inter-objets de 1.2λ .

Comme précédemment, la formulation 2 permet de gagner environ un facteur 1.5 sur le temps CPU tout en conservant une erreur relative très faible par rapport à la formulation 1.

Pour l'algorithme multipôle, la taille des boîtes a changé car les deux objets sont plus proches. Nous faisons varier le nombre de niveaux dans le but de trouver le compromis idéal temps - erreur.

Lorsque le temps nécessaire pour effectuer les translations est important par rapport au temps des produits matrice-vecteur, nous précisons sa valeur dans le tableau en notant (tr temps CPU).

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$						
	$k_0 a$	Niveaux	Boîtes	CPU matrice-vecteur	CPU global	Erreur L^2
FMM-4C	2.04	5	276	34s	44s	15%
FMM-4C	1.02	6	1332	26s (tr 5s)	36s	0.69%
FMM-4C	0.51	7	6364	37s (tr 20s)	48s	0.49%
FMM-4C	0.26	8	24595	1min 40s (tr 1min 17s)	1min 52s	0.49%
FMM-3C	2.04	5	276	32s	41s	12%
FMM-3C	1.02	6	1332	23s (tr 3s)	32s	0.90%
FMM-3C	0.51	7	6364	29s (tr 14s)	39s	2.8%
FMM-3C	0.26	8	24595	1min 14s (tr 55s)	1min 26s	2.8%

TAB. 7 – Temps CPU et erreur sur le champ $\vec{E}$ avec la formulation multipôle 3 ou 4 composantes (FMM-3C et FMM-4C) pour une distance inter-objets de 1.2λ .

Remarquons que lorsque 8 niveaux sont utilisés dans la formulation multipôle à 4 composantes, les quatre produits matrice-vecteur nécessitent 1min 40s, mais la quasi-totalité de ce temps est utilisé pour effectuer les translations (1min 17 s). Le nombre de boîtes est beaucoup trop élevé : 24 595 boîtes sont rajoutées au niveau 8 par rapport à 1332 boîtes au niveau 6. La règle empirique qui consiste à choisir le nombre de niveaux multipôles lorsque $k_0 a$ est proche de 1 permet dans ce cas d'obtenir 6 niveaux et une erreur relativement faible sur le calcul du champ proche. Le tableau 8 résume le gain apporté par la formulation multipôle dans le calcul des interactions entre deux objets très proches.

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$		
temps F1-axi		t
$k_0 a = 1.02$	Erreur L^2 pour $\vec{E}$ /F1-axi	Temps CPU
4C lv6	0.69%	$t/513$
3C lv6	0.90%	$t/577$

TAB. 8 – Résumé des temps CPU pour le calcul de $\vec{E}$ entre la version initiale F1-axi et la formulation FMM pour une distance inter-objets de 1.2λ .

Si on considère davantage de termes dans la série pour approximer le noyau de Green, ce qui revient à augmenter le nombre de multipôles (50) en faisant varier la constante C , nous pouvons diminuer l'erreur relative au dépend du temps de calcul. Nous ne pouvons pas augmenter indéfiniment la valeur de C à cause de la divergence de la fonction de Hankel lorsque ℓ tend vers $+\infty$ dans le terme de transfert (49). Le tableau 9 illustre la variation de l'erreur en fonction de C dans le cas de la formulation FMM à 4 composantes avec 6 niveaux. La valeur optimale serait dans ce cas $C = 3$. Si C est trop grand, par exemple lorsque $C = 10$, la série diverge.

	$C = 2.15$	$C = 3$	$C = 5$	$C = 10$
erreur L^2	0.69%	0.67%	0.67%	3.5%
temps CPU	36s	44s	1min 16 s	3min 39s

TAB. 9 – Erreur relative sur le champ proche en fonction du nombre de multipôles.

4.4 Deux antennes cieres métalliques espacées de 2.4λ

Nous présentons un dernier exemple où nous avons multiplié par 2 la distance entre les deux antennes cieres. Les tableaux 10 et 11 regroupent les erreurs et les temps CPU pour chacune des formulations.

13 modes	Npg	temps CPU	Erreur L^2 pour $\vec{E}$
F1-axi	min(Npg) = 7108 max(Npg) = 8460 moy(Npg) = 7655	t	référence
F2-axi	min(Npg) = 18880 max(Npg) = 18880 moy(Npg) = 18800	$0.71t$	$1.893 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi
F3-axi	Npg = 18800 fixe	$0.71t$	$3.49 \cdot 10^{-15}\%$ par rapport à F2-axi
F4-refFMM	Npg = 18800 fixe	$0.11t$	$1.894 \cdot 10^{-05}\%$ par rapport à F1-axi

TAB. 10 – Temps de calcul pour le champ proche en fonction des différentes formulations pour une distance inter-objets de 2.4λ .

Pour utiliser l'algorithme multipôle de manière optimale, il faut considérer ici 6 niveaux pour le découpage, au delà le nombre de boîtes est trop élevé et les translations sont trop nombreuses.

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$						
	$k_0 a$	Niveaux	Boîtes	CPU matrice-vecteur	CPU global	Erreur L^2
FMM-4C	4.08	4	69	1min 21s	1min 31s	0.032%
FMM-4C	2.04	5	293	33s	43s	0.14%
FMM-4C	1.02	6	1341	24s	34s	0.16%
FMM-4C	0.51	7	6396	37s (tr 20s)	47s	0.46%
FMM-3C	4.08	4	69	1min 20s	1min 30s	0.064%
FMM-3C	2.04	5	293	32s	41s	0.34%
FMM-3C	1.02	6	1341	21s	30s	0.46%
FMM-3C	0.51	7	6396	29s (tr 14s)	39s	2.4%

TAB. 11 – Temps CPU et erreur sur le champ $\vec{E}$ avec la formulation multipôle 3 ou 4 composantes (FMM-3C et FMM-4C) pour une distance inter-objets de 2.4λ .

Le gain de la méthode multipôle est mis en évidence une fois de plus dans le tableau 12.

$k_0 = 423.36 \ N_e = 18800 \ N_r = 79900$		
temps F1-axi		t
$k_0 a = 1.02$	Erreur L^2 pour $\vec{E}$ / F1-axi	Temps CPU
4C lv6	0.16%	$t/550$
3C lv6	0.46%	$t/624$

TAB. 12 – Résumé des temps CPU pour le calcul de $\vec{E}$ entre la version initiale F1-axi et la formulation FMM pour une distance inter-objets de 2.4λ .

4.5 Interaction de deux antennes en fonction de la distance : conclusion

Dans les trois exemples précédents, nous avons fait varier la distance entre les deux antennes cierge : 12λ , 1.2λ et 2.4λ . Dans chacun des cas, la formulation 2 où l'algorithme a été modifié avec l'inversion des boucles lors de l'intégration sur la surface émettrice, permet de diviser le temps de calcul par un facteur 1.5 par rapport à la formulation actuelle (formulation 1 F1-axi) : quelques heures de calcul sont néanmoins nécessaires. Avec la formulation multipôle à 3 ou 4 composantes, il faut à présent environ 36s pour effectuer ce même calcul de champ $\vec{E}$ sur l'antenne cierge. Le gain est beaucoup plus remarquable mais nécessite beaucoup plus d'investissements que l'inversion des boucles dans l'algorithme. Retenons que le gain est quasiment indépendant de la distance entre les deux objets, seule l'erreur sur la formulation multipôle varie.

5 Couplage avec le logiciel Echo_light

Le logiciel `Echo_light` fait appel à la routine de champ proche de nombreuses fois lors de chaque itération. Rappelons que ce logiciel est très coûteux en terme de temps CPU malgré les premières optimisations réalisées lors de la précédente étude. Il s'agit ici d'estimer le temps de calcul du logiciel en supposant que le calcul de champ proche est effectué à l'aide de la routine multipôle. Si le gain s'avère intéressant, on pourra alors envisager de substituer la nouvelle routine FMM à l'ancienne routine dans le script du logiciel.

5.1 Trois antennes cieres métalliques

Nous considérons le cas des trois antennes cieres espacées de 1.2λ , où une seule antenne est alimentée comme l'indique la figure 11. Nous utilisons la version séquentielle du logiciel `Echo_light` pour calculer le rayonnement de cet ensemble constitué d'une source et de trois objets (source comprise). Une seule itération du logiciel est effectuée car les temps de calcul deviennent rapidement importants et dans de nombreux cas, une itération suffit pour approcher les résultats de mesure par exemple. Le temps CPU reporté dans le tableau 13 pour le calcul des interactions, c'est à dire du champ proche créé sur le récepteur à partir du courant sur l'émetteur, est obtenu à partir de la routine de champ proche dans sa version optimisée. Cette optimisation, réalisée lors de la précédente étude [1] sur le logiciel, consistait à regrouper dans une seule et même routine le calcul de $\vec{E}$ et celui de $\vec{H}$. On a noté dans le tableau 13 les temps d'exécution relatifs du logiciel `Echo_light` pour effectuer un calcul de champ proche après l'optimisation de la routine.

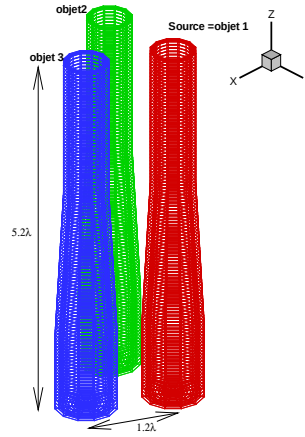


FIG. 11 – Géométrie et maillage des trois antennes cieres.

3 antennes cieres - distance 1.2λ		
1 itération du logiciel <code>Echo_light</code>		t
détails des interactions	nombre de modes	calcul $\vec{E}-\vec{H}$
objet 2 sur 1	13 modes	$0.25t$
objet 3 sur 1	12 modes	$0.23t$
objet 3 sur 2	12 modes	$0.23t$
objet 2 sur 3	13 modes	$0.25t$
total des interactions champ proche par rapport au CPU global		96%

TAB. 13 – Temps passé pour le calcul des interactions lors d’une itération du logiciel `Echo_light` avec 3 antennes.

Remarque 5.1.1 (Le nombre d’interactions proches) Dans le tableau 13, les interactions “source - objet 2” ou “source - objet 3” ne sont pas répertoriés. En effet, dans tous les cas test, la source est alimentée par un mode guidé et éclaire en polarisation TE au mode 1. La routine qui calcule le champ créé par la source sur les objets voisins est donc très rapide puisqu’elle n’utilise que le mode $m = 1$, et n’a donc pas besoin d’être optimisée. Pour une itération du logiciel, il n’y a donc que 4 calculs de champ proche qui sont coûteux, la source n’en faisant pas partie.

Sur cet exemple, où seulement trois objets sont pris en compte, le temps passé pour calculer les interactions représente au minimum 96% du temps global pour effectuer une itération de `Echo_light`. Il est donc important de réduire le coût des interactions dans le but de diminuer le temps d’exécution du logiciel. Pour des raisons qui seront justifiées dans la section 6.2, nous pouvons estimer le temps de calcul de la méthode multipôle pour calculer les champs proches $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à partir de la connaissance des courants électrique et magnétique. Nous devons multiplier par 4 le temps des produits matrice-vecteur et ajouter environ 10 secondes pour prendre en compte la construction de l’octree, la discrétisation des sphères... On reprend les résultats du tableau 8 pour évaluer le temps d’une interaction entre deux objets distants de 1.2λ . Pour estimer le temps global d’une itération du logiciel `Echo_light` couplé à l’algorithme multipôle, nous devons considérer

- les quatre interactions dont la liste est donnée dans le tableau 13,
- les calculs de courants, les calculs de champs sur la grille de visualisation : ce temps est déduit de la différence entre le temps CPU global et le coût des champs proches, par exemple ici ce temps représente moins de 5% du temps CPU global pour une itération de `Echo_light`.

1 itération du logiciel Echo_light				t
distance 1.2λ	calcul $\vec{E}$ 1 interaction	calculs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ 1 interaction	calculs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ 4 interactions	estimation 1 itération Echo_light + FMM
4C lv6	36s	1min 54s	7min 36s	$t/20$
3C lv6	32s	1min 42s	6min 48s	$t/21$

TAB. 14 – Estimation des temps CPU avec la formulation FMM pour effectuer une itération de Echo_light lorsque les 3 antennes sont distantes de 1.2λ .

Le tableau 14 permet de mettre en valeur le gain “à priori” de la méthode multipôle pour effectuer une itération de Echo_light pour calculer le rayonnement de 3 objets proches de 1.2λ . Le temps de calcul du logiciel est divisé par **un facteur 20 par rapport à la version avec la routine de champ proche optimisée**. Si on fait varier la distance entre les trois antennes, nous obtenons un temps CPU pour la méthode multipôle à peu près identique en cumulant :

- le temps de la méthode FMM pour effectuer les 2^2 interactions,
- le temps nécessaire au logiciel Echo_light pour créer les fichiers de géométrie, les calculs de courants....

Les tableaux 15 et 16 illustrent le gain du couplage Echo_light - FMM par rapport à la version classique du logiciel pour des distances inter-objets de 2.4λ et de 12λ .

3 antennes cierges - distance 2.4λ	
1 itération du logiciel Echo_light	t
estimation Echo_light + FMM	$t/19$

TAB. 15 – Estimation des temps CPU avec la formulation FMM pour effectuer une itération de Echo_light lorsque les 3 antennes sont distantes de 2.4λ .

3 antennes cierges - distance 12λ	
1 itération du logiciel Echo_light	t
estimation Echo_light + FMM	$t/18$

TAB. 16 – Estimation des temps CPU avec la formulation FMM pour effectuer une itération de Echo_light lorsque les 3 antennes sont distantes de 12λ .

On observe sur ces deux exemples que le temps CPU a été divisé au minimum par 18 par rapport à la version optimisée. Précisons que le temps CPU de la méthode multipôle semble indépendant de la distance entre les objets. On essaie d’étendre ce raisonnement au cas de n objets (sources comprises) de type antenne cierge. Il y aurait normalement $n(n-1)$ interactions de champ proche, mais l’émission de la source ne faisant intervenir qu’un seul mode, les interactions entre la source et les antennes environnantes sont effectuées très

rapidement ; cela a déjà été mentionné dans la remarque 5.1.1. Pour effectuer une itération du logiciel, il y a alors $(n - 1)^2$ interactions qui utilisent un temps de calcul important et qui nécessitent une optimisation.

Pour une distance inter-objets de 1.2λ , d'après les tableaux 13 et 14, un calcul de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ nécessite en moyenne un temps

- t avec la version de champ proche optimisée,
- $t/210$ avec l'algorithme multipôle.

Pour la routine de champ proche, les temps de calcul ont tendance à diminuer au fur et à mesure que la distance entre les objets augmente, cf tableaux 15 et 16. Pour la méthode multipôle, les temps de calcul restent quasiment identiques. Nous allons pouvoir étendre nos estimations aux cas de n objets, en particulier à l'exemple du septet, en utilisant ce temps de référence pour la méthode multipôle.

5.2 Extension au cas de n objets : exemple du septet

Pour obtenir le coût d'une itération de `Echo_light` dans le cas de n objets, il faut multiplier ce temps par $(n - 1)^2$ et ajouter le calcul des courants, ... Nous prenons le cas du septet où $n = 7$. Les antennes cieres sont constituées de parties métalliques et diélectriques. Dans les cas test décrit dans le précédent rapport [1], nous avons les paramètres de maillage suivant :

- une fréquence fixée à 20.2GHz, soit un nombre d'onde $k_0 = 423.36$,
- un pas de maillage de $\lambda/10$,
- 218 segments pour former la génératrice présentée sur la figure 9-a,
- 638 degrés de liberté sur la génératrice pour calculer les courants électrique et magnétique,
- 150 génératrices que l'on répète entre 0 et 2π pour former le maillage surfacique,
- 39000 points forment la surface du récepteur là où l'on souhaite calculer le champ proche lors des interactions,
- 11 modes de Fourier suffisent à la décomposition en série.

On souligne donc trois points importants par rapport aux exemples précédents : la présence de parties diélectriques, le nombre de points sur le récepteur est divisé par deux et le nombre de modes passe de 13 à 11. Les estimations pour calculer $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le cas d'une décomposition à 11 modes sont :

- un temps t pour effectuer une interaction avec la version optimisée,
- un temps $t/47$ avec l'algorithme multipôle, on reprend ici le temps pour évaluer les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à partir des courants $(\vec{j}, \vec{m})$ sur les 79900 points du récepteur et on suppose qu'il n'y a pas de dépendance vis à vis du nombre de modes.

Le tableau 17 permet d'estimer le coût d'une itération dans le cas du septet couplant métal et diélectrique. Nous rappelons que les temps de calcul ont été obtenus sur un PC bipro (P4Xeon à 2GHz chacun et 1 Giga de RAM)

septet	formulation axi	FMM
1 interaction	t	$t/47$
36 interactions	$36t$	$0.76t$
coût autres calculs	$1.15t$	
coût 1 itération Echo_light		37.15t
estimation 1 itération sur PC Echo_light + FMM		1.91t

TAB. 17 – Estimation d’une itération du logiciel Echo_light couplé avec la FMM dans le cas du septet métal+diélectrique.

Dans l’exemple du septet, l’estimation sur le temps de calcul du logiciel Echo_light couplé à la méthode multipôle semble prometteuse : un facteur 20 par rapport à la version optimisée représente le gain obtenu dans le cas d’une itération du logiciel.

5.3 Conclusion sur le couplage du logiciel Echo_light et de la méthode multipôle

Les estimations sur le temps d’exécution du logiciel Echo_light couplé à la méthode multipôle pour le calcul des interactions sont très encourageantes. Dans le cas d’objets très proches, environ une longueur d’onde, la méthode multipôle reste très efficace et l’erreur obtenue sur le champ est largement acceptable. Les premières modifications effectuées sur le logiciel ont permis de gagner un gain important : le groupement des calculs de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ au sein d’une même routine, l’inversion des boucles dans l’algorithme de champ proche. Chacune de ces modifications nécessite peu de changements au niveau du code et permet de réduire le temps CPU d’un facteur 1.5 environ. Cependant, l’approche multipôle reste de loin la meilleure des optimisations possibles : le temps de calcul a été divisé par 20 ! Pour intégrer la routine multipôle au logiciel, il faut disposer du calcul des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ à partir des courants électrique et magnétique. Par rapport à la version du code multipôle actuelle, nous devons ajouter la prise en compte du courant magnétique et le calcul de $\vec{H}$. Ces extensions sont décrites d’un point de vue théorique dans la section suivante. D’un point de vue informatique, l’implémentation ne devrait pas poser de problèmes particuliers car la structure du code n’est pas modifiée :

- le courant magnétique fait intervenir une nouvelle intégrale dans le calcul de $\vec{E}$, on doit créer une nouvelle routine peu différente des précédentes,
- le calcul de $\vec{H}$ est similaire à celui de $\vec{E}$, il suffit de remplacer $\vec{j}$ par $\vec{m}$ en faisant attention aux constantes.

6 Perspectives

6.1 Matériaux diélectriques

On étend la formulation multipôle au cas des obstacles diélectriques. On considère une antenne émettrice sur laquelle sont connus le courant électrique $\vec{j}(v)$ et le courant magnétique $\vec{m}(v)$ avec $\vec{m} = i\omega\mu_0\vec{p}$. L'expression du champ électrique en un point u du récepteur est donnée par (7) ou encore sous la forme multipolaire par la somme de trois termes

$$\vec{E}(u) = \vec{E}_1(u) + \vec{E}_2(u) + \vec{E}_3(u) \quad (71)$$

avec

$$\vec{E}_1(u) = \frac{i\omega\mu_0k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) dS \quad (72)$$

$$\vec{E}_2(u) = \frac{i\omega\mu_0k_0}{16\pi^2} \frac{1}{k_0^2} \int_S -ik_0\vec{s} e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \mathcal{F}_2(\vec{s}) dS \quad (73)$$

$$\vec{E}_3(u) = -\frac{i\omega\mu_0k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) (-ik_0)\vec{s} \wedge \vec{\mathcal{F}}_3(\vec{s}) dS \quad (74)$$

où les fonctions d'agrégation $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont été définies par (60) et (61). La fonction vectorielle $\vec{\mathcal{F}}_3(\vec{s})$ a une définition identique à $\vec{\mathcal{F}}_1$ appliquée ici au courant magnétique

$$\vec{\mathcal{F}}_3(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{Bv})\cdot\vec{s}} \vec{p}(v) d\Gamma(v). \quad (75)$$

Cette formulation utilise 7 produits matrice-vecteur et peut être ramenée à 6 produits matrice-vecteur avec l'utilisation du tenseur dyadique de Green pour regrouper les termes $\vec{E}_1(u)$ et $\vec{E}_2(u)$. Dans le but de réduire davantage le nombre de composantes, nous regroupons les trois termes sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu})\cdot\vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \\ \left(\int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv})\cdot\vec{s}} \left[\vec{s} \wedge (\vec{j}(v) \wedge \vec{s}) + ik_0\vec{s} \wedge \vec{p}(v) \right] d\Gamma(v) \right) dS. \end{aligned} \quad (76)$$

La seule fonction d'agrégation

$$\vec{\mathcal{F}}_E = \int_{\Gamma} e^{ik_0(v-c_{Bv})\cdot\vec{s}} \left[\vec{s} \wedge (\vec{j}(v) \wedge \vec{s}) + ik_0\vec{s} \wedge \vec{p}(v) \right] d\Gamma(v) \quad (77)$$

qui intervient dans ce calcul a une forme plus compliquée puisqu'elle dépend de $\vec{j}$ et de $\vec{p}$ mais permet d'obtenir une formulation multipôle à trois composantes. Une formulation à deux composantes est aussi envisageable en coordonnées sphériques.

Si l'on veut estimer le temps de calcul pour évaluer le champ $\vec{E}(u)$ associé à $\vec{j}$ et $\vec{p}$, on peut surévaluer sa valeur à partir de la formulation à 6 composantes. Il suffit alors de multiplier par un facteur 2 le temps des produits matrice-vecteur pour 3 composantes. Par extension, nous effectuons le même calcul à partir de la formulation à 4 composantes. Pour illustrer ces propos, nous reprenons les temps CPU du tableau 8, nous obtenons alors des estimations sur le calcul de $\vec{E}$ en tant que fonction de $\vec{j}$ et de $\vec{p}$.

Temps CPU	Réel $\vec{E}(\vec{j})$	Estimé $\vec{E}(\vec{j}, \vec{p})$
4C lv6	26s + 10s = 36s	26s×2 + 10s = 62s
3C lv6	23s + 10s = 33s	23s×2 + 10s = 46s

TAB. 18 – Estimations du calcul de $\vec{E}$ sur un obstacle diélectrique.

6.2 Détermination du champ magnétique avec l'algorithme multi-pôle

La détermination du champ $\vec{H}$ est immédiate à partir des formules écrites pour $\vec{E}$: il suffit de remplacer $\vec{j}$ par $\vec{p}$ et inversement en faisant attention aux constantes devant les intégrales

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(u) = & -k_0^2 \int_{\Gamma} G(u, v) \vec{p}(v) d\Gamma(v) \\
 & - \text{grad}_u \int_{\Gamma} G(u, v) \text{div} \vec{p} d\Gamma(v) \\
 & + \text{rot}_u \int_{\Gamma} G(u, v) \vec{j} d\Gamma(v).
 \end{aligned} \tag{78}$$

Nous écrivons alors le champ $\vec{H}$ en chaque point u de l'antenne réceptrice comme la somme de trois termes en s'inspirant de l'équation (71)

$$\vec{H}(u) = \vec{H}_1(u) + \vec{H}_2(u) + \vec{H}_3(u) \tag{79}$$

avec

$$\vec{H}_1(u) = -\frac{k_0^3}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) dS \tag{80}$$

$$\vec{H}_2(u) = -\frac{k_0^3}{16\pi^2} \frac{1}{k_0^2} \int_S -ik_0 \vec{s} e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) \mathcal{F}_2(\vec{s}) dS \tag{81}$$

$$\vec{H}_3(u) = \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{Bu}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{Bu} - c_{Bv}) (-ik_0) \vec{s} \wedge \vec{\mathcal{F}}_3(\vec{s}) dS. \tag{82}$$

L'opérateur de transfert reste inchangé par rapport au calcul du champ électrique, il est donné par la formule (49). Les fonctions d'agrégation $\vec{\mathcal{F}}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_3$ sont définies de manière

similaire avec

$$\vec{\mathcal{F}}_1(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{B_v}) \cdot \vec{s}} \vec{p}(v) d\Gamma(v), \quad (83)$$

$$\mathcal{F}_2(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{B_v}) \cdot \vec{s}} \text{div} \vec{p}(v) d\Gamma(v), \quad (84)$$

$$\vec{\mathcal{F}}_3(\vec{s}) = \int_{\Gamma \cap B_v} e^{ik_0(v-c_{B_v}) \cdot \vec{s}} \vec{j}(v) d\Gamma(v). \quad (85)$$

Tout comme pour le champ $\vec{E}$, le nombre de produits matrice-vecteur peut être optimisé. Rappelons que $\vec{E}$ s'écrit

$$\vec{E}(u) = i\omega\mu_0 \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{B_u}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{B_u} - c_{B_v}) \vec{\mathcal{F}}_E(\vec{s}) dS. \quad (86)$$

On montre que $\vec{H}$ peut également s'exprimer en fonction de $\vec{\mathcal{F}}_E$ définie par (77) sous la forme

$$\vec{H}(u) = -k_0^2 \frac{k_0}{16\pi^2} \int_S e^{-ik_0(u-c_{B_u}) \cdot \vec{s}} T_L(\vec{s}, c_{B_u} - c_{B_v}) \frac{i}{k_0} \vec{s} \wedge \vec{\mathcal{F}}_E(\vec{s}) dS. \quad (87)$$

Nous avons alors une seule fonction d'agrégation à calculer pour déterminer à la fois $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Le nombre de composantes est alors minimal : 2 ou 3 en fonction du système de coordonnées choisi.

6.3 Les optimisations possibles

A priori, il est possible de réduire davantage le temps de calcul de la méthode multipôle d'une part et de certaines routines du logiciel `Echo_light` d'autre part. Nous présentons ici une liste non exhaustive des améliorations possibles.

Prise en compte les symétries : dans l'exemple du septet mono-alimenté, les antennes périphériques sont éclairées de la même manière : les courants et les champs produits peuvent donc se déduire à partir d'un seul calcul.

Passage en coordonnées sphériques : comme nous l'avons déjà mentionné, dans la méthode multipôle le passage en coordonnées sphériques permettrait de réduire le nombre de produits matrice-vecteur.

Grouper les interactions : à partir de la connaissance des courants sur un objet, il est possible de calculer son interaction avec plusieurs objets à partir d'un seul calcul multipôle. Il suffit de considérer une boîte cubique qui entoure tous les objets : l'étape d'agrégation se fera sur l'objet qui émet et l'étape de désagrégation sur tous les autres objets récepteur. Dans le cas de n objets, nous avons actuellement $(n-1)^2$ interactions à considérer. A la place de faire $(n-1)^2$ appels à une routine de champ proche (avec ou sans la formulation multipôle), nous ferions $(n-1)$ appels à la nouvelle routine multipôle qui utilise les groupements. Chaque calcul multipôle serait plus coûteux que la version présentée ici, mais il permettrait de prendre en compte $(n-1)$ interactions à chaque fois.

7 Etude de la règle de quadrature sur le cercle

7.1 Analyse et démonstration

Notre but est de trouver la règle de quadrature pour intégrer le plus précisément possible le terme

$$G_m = \int_0^{2\pi} G(|u - v|) e^{im\varphi} d\varphi. \quad (88)$$

Sur la figure 12, nous avons représenté le point u , le point v et le centre du cercle c_v sur lequel on souhaite intégrer la fonction. Nous définissons les deux vecteurs

$$\vec{r} = c_v - v \quad \vec{r}_0 = u - c_v.$$

On a donc $x - y = \vec{r} + \vec{r}_0$.

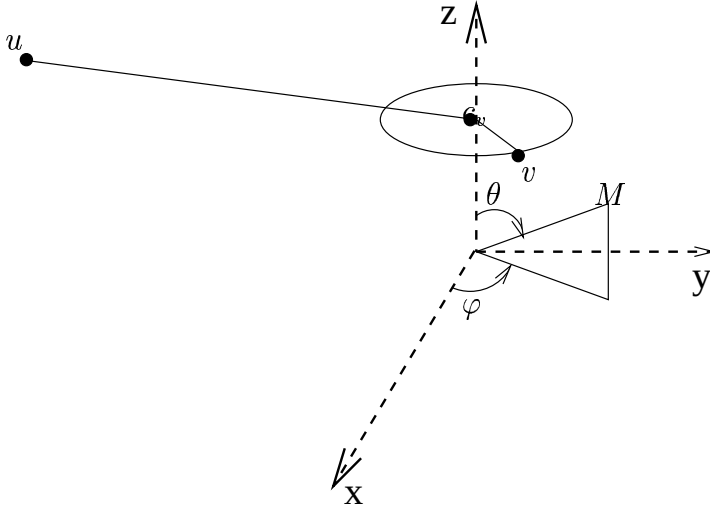


FIG. 12 – *Intégration sur le cercle.*

D'après le théorème de Gegenbauer, nous avons la décomposition suivante du noyau de Green

$$G(|u - v|) = \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell + 1) (-1)^\ell h_\ell^{(1)}(k_0 |\vec{r}_0|) j_\ell(k_0 |\vec{r}|) P_\ell(\cos(\vec{r}_0, \vec{r})). \quad (89)$$

Nous pouvons montrer que le noyau de Green peut être approché précisément en prenant L termes dans la série, c'est l'approximation multipôle et L est donné par exemple par la formule

$$L = \text{Ent}[k_0 r + C \log(k_0 r + \pi)]. \quad (90)$$

Sous la condition $|\vec{r}| > \beta|\vec{r}|$, où β est une constante, nous pouvons écrire

$$P_\ell(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \text{sum}_{n=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,n}^*(\vec{r}_0) Y_{\ell,n}(\vec{r}), \quad (91)$$

où les fonctions Y_{lm} sont les harmoniques sphériques, et le symbole $*$ désigne le complexe conjugué. En remplaçant l'expression du polynôme de Legendre dans la formule (89), nous obtenons

$$G(|u-v|) = ik_0 \sum_{n=-L}^{+L} (-1)^\ell h_\ell^{(1)}(k_0|\vec{r}_0|) j_\ell(k_0|\vec{r}|) \sum_{n=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,n}^*(\vec{r}_0) Y_{\ell,n}(\vec{r}). \quad (92)$$

Puisque la série est à présent finie, nous pouvons inverser les sommations, et il vient

$$G(|u-v|) = ik_0 \sum_{n=-L}^{+L} \sum_{\ell=0}^{+L} (-1)^\ell h_\ell^{(1)}(k_0|\vec{r}_0|) j_\ell(k_0|\vec{r}|) Y_{\ell,n}^*(\vec{r}_0) Y_{\ell,n}(\vec{r}). \quad (93)$$

Il reste à mettre en évidence la dépendance de $G(|u-v|)$ par rapport à l'angle d'intégration φ . Il est facile de voir que $\vec{r}_0$ est indépendant de φ de même que le rayon du cercle $|\vec{r}|$. Le seul terme qui dépend de φ est donc $Y_{\ell,n}(\vec{r})$. Le vecteur $\vec{r}$ s'exprime facilement car nous sommes dans le plan $\theta = \pi/2$, voir figure 12,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0. \end{pmatrix} \quad (94)$$

Les harmoniques sphériques sont données par

$$\forall \theta \in [0; \pi] \text{ et } \forall \varphi \in [0; 2\pi], \quad (95)$$

$$Y_{l,n}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_l^n(\cos \theta) e^{in\varphi},$$

que nous devons prendre dans le cas particulier où $\theta = \pi/2$. Le noyau de Green peut se mettre sous la forme

$$G(|u-v|) = \sum_{n=-L}^{+L} \alpha_{l,n} e^{in\varphi} \quad (96)$$

où les coefficients $\alpha_{l,n}$ sont indépendants de φ . On veut donc intégrer G_m qui se met sous la forme

$$G_m = \sum_{n=-L}^{+L} \alpha_{l,n} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{im\varphi} d\varphi. \quad (97)$$

Avant de s'intéresser à cette intégrale, nous allons étudier le nombre de points de quadrature pour intégrer

$$f = \int_0^{2\pi} e^{ip\varphi} d\varphi \quad \text{avec } -L \leq p \leq L. \quad (98)$$

La fonction f est nulle dès que $p \neq 0$ et $f = 2\pi$ si $p = 0$. Il faut donc choisir une quadrature avec un nombre de points n_p , des poids de Gauss w_j et des points φ_j qui vérifient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_p} w_j^\varphi e^{ip\varphi_j} &= 0 \text{ si } p \neq 0 \\ &= 2\pi \text{ si } p = 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Si on prend une distribution uniforme à $L + 1$ points sur $[0, 2\pi]$ avec

$$\begin{cases} \varphi_j = \frac{2\pi}{L+1}j & \text{avec } 0 \leq j \leq L \\ w_j = \frac{2\pi}{L+1}, \end{cases} \quad (100)$$

nous obtenons exactement la fonction f . En effet, nous avons la somme d'une série géométrique de raison $e^{ip\frac{2\pi}{L+1}}$ qui s'écrit

$$\sum_{j=0}^L w_j^\varphi e^{ip\varphi_j} = \frac{2\pi}{L+1} \sum_{j=0}^L (e^{ip\frac{2\pi}{L+1}})^j = \frac{2\pi}{L+1} \frac{1 - (e^{ip\frac{2\pi}{L+1}})^{L+1}}{1 - e^{ip\frac{2\pi}{L+1}}} \quad (101)$$

et qui vaut 2π si $p = 0$ et 0 sinon. Si nous revenons à notre fonction G_m , nous pouvons poser $p = n + m$ pour nous ramener à l'étude de quadrature sur la fonction f avec

$$-L + m \leq p \leq L + m.$$

On peut donc conclure qu'en prenant $L + m + 1$ points équidistribués sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, nous approchons exactement G_m . L'erreur que l'on commet provient de la troncature de la série de Gegenbauer et on montre [3], [4] que certaines valeurs de la constante C qui intervient dans le calcul de L (90), permettent d'obtenir des erreurs de l'ordre de 10^{-6} .

7.2 Etude numérique

Nous venons de trouver une règle de quadrature pour intégrer la fonction G_m sur le cercle. Cette règle utilise des points équirépartis sur le cercle entre 0 et 2π . La loi empirique (29) qui est utilisée dans le code ou bien les lois (41) et (42) fixent le nombre de points de Gauss. Deux règles d'intégration peuvent être à priori utilisées pour évaluer numériquement G_m :

1. des points équirépartis avec des poids égaux,
2. des points de Gauss et des poids associés.

Pour déterminer la précision de chacune des ces règles, il faudrait faire une étude de convergence avec un calcul de l'erreur. Nous avons calculé G_m à partir de

Loi 1 N_p points de Gauss sur $[0, 2\pi]$ avec

$$N_p = f(m, k_0 | u - v |)$$

Loi 2 N_p points de Gauss sur $[0, 2\pi]$ avec

$$N_p = f(M, k_0 | u - v |)$$

Loi 3 N_p points équirépartis sur $[0, 2\pi]$ avec

$$N_p = L + m + 1$$

Loi 4 N_p points équirépartis sur $[0, 2\pi]$ avec

$$N_p = L + M + 1$$

où on a noté $M = \max(m)$. Le point u est choisi et le point v est un point sur la génératrice fixé pour chaque élément k . Le nombre de points de Gauss sur la surface à intégrer dépend

- du nombre d'éléments sur la génératrice : on choisit un exemple avec 235 éléments,
- du nombre de points de Gauss sur chaque segment : on choisit un seul point par segment,
- du choix de N_p pour intégrer sur $[0, 2\pi]$.

Le nombre de points sur la surface est donné par $N_{pg} = 235 \times 1 \times N_p$. Prenons l'exemple du mode $m = 0$ et $M = 12$. Nous évaluons l'erreur relative (en norme L^2) sur le calcul de G_m en prenant pour référence une solution calculée avec beaucoup de points

Loi 1 : $1.0105 \cdot 10^{-08}\%$ avec 7492 points de Gauss

Loi 2 : $8.2307 \cdot 10^{-09}\%$ avec 9400 points de Gauss

Loi 3 : $2.1414 \cdot 10^{-07}\%$ avec 2823 points équirépartis

Loi 4 : $6.4700 \cdot 10^{-09}\%$ avec 8859 points équirépartis.

Nous reprenons le même cas test en changeant $m = 10$. Le nombre de points varie pour les lois 1 et 3. L'erreur est donnée par

Loi 1 : $4.8925 \cdot 10^{-09}\%$ avec 8460 points de Gauss

Loi 2 : $5.0809 \cdot 10^{-09}\%$ avec 9400 points de Gauss

Loi 3 : $5.1814 \cdot 10^{-08}\%$ avec 7523 points équirépartis

Loi 4 : $4.0768 \cdot 10^{-08}\%$ avec 8859 points équirépartis.

On vérifie que plus le nombre de points sur la surface est important, plus l'erreur diminue. Cependant, la **loi 3** qui utilise le résultat théorique démontré précédemment, permet d'obtenir une erreur négligeable avec un minimum de points d'intégration équirépartis par comparaison aux autres lois, en particulier pour les petites valeurs de m .

Table des matières

1	Contexte de l'étude	3
2	Calcul du champ proche en axisymétrie : quatre formulations équivalentes	4
2.1	Les notations et les repères	4
2.2	La formule de champ proche	8
2.3	Expressions continue et discrète des courants	8
2.4	Expression du noyau de Green et de sa dérivée	10
2.5	Intégrale de surface et points de quadrature	10
2.5.1	Intégration sur la génératrice	11
2.5.2	Intégration autour de l'axe de révolution	12
2.6	Une première formulation axisymétrique	12
2.7	Avantages et inconvénients de cette première formulation	14
2.8	Une deuxième formulation plus globale	14
2.9	Une troisième formulation pour l'approche multipolaire	15
2.10	Une quatrième formulation de référence	16
3	La formulation multipôle pour le calcul du champ proche	17
3.1	Rappels sur la méthode multipôle	17
3.2	La formulation multipôle à 4 composantes	19
3.3	La formulation multipôle à 3 composantes	22
3.4	Un mot sur la formulation multipôle à deux composantes	23
4	Applications numériques et comparaisons de temps de calcul	23
4.1	Un premier exemple de validation	24
4.2	Deux antennes cieres métalliques espacées de 12λ	26
4.3	Deux antennes cieres métalliques espacées de 1.2λ	31
4.4	Deux antennes cieres métalliques espacées de 2.4λ	33
4.5	Interaction de deux antennes en fonction de la distance : conclusion	34
5	Couplage avec le logiciel Echo_light	35
5.1	Trois antennes cieres métalliques	35
5.2	Extension au cas de n objets : exemple du septet	38
5.3	Conclusion sur le couplage du logiciel Echo_light et de la méthode multipôle	39
6	Perspectives	40
6.1	Matériaux diélectriques	40
6.2	Détermination du champ magnétique avec l'algorithme multipôle	41
6.3	Les optimisations possibles	42
7	Etude de la règle de quadrature sur le cercle	43
7.1	Analyse et démonstration	43
7.2	Etude numérique	45

Références

- [1] Nathalie Bartoli. Le logiciel Echo_light : Optimisation et validation. Rapport Technique XXXX, INRIA, mars 2003.
- [2] P Bonnemason and Stupfel B. Modeling high frequency scattering by axisymmetric perfectly or imperfectly conducting scatterers. *Electromagnetics*, 13:111–129, 1993.
- [3] Quentin Carayol. *Développement et analyse d'une méthode multipôle multiniveaux pour l'électromagnétisme*. PhD thesis, Université Paris 6, janvier 2002.
- [4] Ronald Coifman, Vladimir Rokhlin, and Stephen Wandzura. The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3):7–12, 1993.
- [5] F. Collino and F. Millot. La méthode multipôle pour les problèmes de diffraction. Technical Report TR/EMC/00/95, CERFACS, Toulouse, France, 2000.
- [6] Eric Darve. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. PhD thesis, Université Paris 6, janvier 1999.
- [7] V. Frayssé, L. Giraud, and S. Gratton. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics. Technical report, Cerfacs TR/PA/97/49, Toulouse, France, 1997.
- [8] Roger F. Harrington and Joseph R. Mautz. Radiation and scattering from bodies of revolution. *Appl. Sci. Res.*, 20:405–435, 1969.
- [9] Roger F. Harrington and Joseph R. Mautz. Green's functions for surfaces of revolution. *Radio Science*, 7(5):603–611, 1972.
- [10] D. Pogarielloff. Logiciel Elfi2r, analyse détaillée. Technical Report 39.141.02.66, Alcatel Space Industries, 1989.
- [11] Guillaume Sylvand. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications*. PhD thesis, ENPC-CERMICS, 2002.
- [12] E. Michielssen W.C. Chew, J.M. Jin and J.M. Song, editors. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House Antennas and Propagation Library, Boston, London, 2001.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399