Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki, Serge Piperno

▶ **To cite this version:**

Marc Bernacki, Serge Piperno. Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique. RR-4699, INRIA. 2003. inria-00071887

HAL Id: inria-00071887
https://inria.hal.science/inria-00071887

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki — Serge Piperno

N° 4699

Janvier 2003

THÈME 4

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4699--FR

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique

Marc Bernacki , Serge Piperno

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 4699 — Janvier 2003 — 39 pages

Résumé : Nous démontrons une condition de stabilité L^2 de type CFL pour un schéma en volumes finis avec flux centrés du second ordre pour la résolution des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme en deux ou trois dimensions d'espace, avec des conditions aux limites absorbantes ou réfléchissantes. Nous illustrons les capacités de notre schéma sur plusieurs cas tests et nous élargissons notre étude par un cas test dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire non uniforme.

Mots-clés : linéarisation des équations d'Euler, volumes finis, schéma saute-mouton, flux centrés, condition limite absorbante, condition limite réfléchissante, stabilité L^2, maillages non structurés

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

Finite volume scheme with centered fluxes for the wave propagation in aeroacoustics

Abstract: We prove a sufficient CFL-like stability condition for the L^2 stability of a second-order accurate finite volume scheme with centered fluxes for the solution of linearized Euler equations around an uniform flow in two or three space dimensions, with absorbing or reflecting boundary conditions. Some tests cases illustrate the potential of our scheme and we widen our study with another test case within the framework of small perturbations around a non uniform steady flow.

Key-words: linearisation of the Euler equations, finite volume methods, leap-frog time scheme, centered fluxes, absorbing boundary condition, reflecting boundary condition, L^2 stability, unstructured meshes

Table des matières

Introduction **5**

1 Schéma en volumes finis pour l'acoustique 3D (écoulement uniforme) **6**
1.1 Les équations modèles . . . 6
1.2 Systèmes symétriques de Friedrichs . . . 6
1.3 Un schéma en volumes finis avec flux centrés de type saute-mouton . . . 7
1.3.1 Introduction . . . 7
1.3.2 Formulation faible . . . 8
1.4 Une condition suffisante de stabilité . . . 9
1.4.1 Etude d'une énergie . . . 9
1.4.2 Termes correctifs . . . 11
1.4.3 Une condition suffisante de stabilité . . . 12
1.5 Une condition de type réfléchissante . . . 14

2 Cas tests (écoulement uniforme) **17**
2.1 Cas test 1 . . . 18
2.1.1 La formulation du cas test . . . 18
2.1.2 Les résultats numériques . . . 19
2.1.3 Analyse . . . 21
2.2 Cas test 2 . . . 22
2.2.1 La formulation du cas test . . . 22
2.2.2 Les résultats numériques . . . 23
2.2.3 Analyse . . . 23
2.3 Cas test 3 . . . 23
2.3.1 La formulation du cas test . . . 23
2.3.2 Solution analytique . . . 24
2.3.3 Les résultats numériques . . . 24
2.3.4 Analyse . . . 26
2.4 Cas test 4 . . . 27
2.4.1 La formulation du cas test . . . 27
2.4.2 Solution analytique . . . 27
2.4.3 Les résultats numériques . . . 27
2.4.4 Analyse . . . 28

3 Introduction au cas d'un écoulement non uniforme **28**
3.1 Introduction . . . 28
3.2 Formulation du schéma . . . 29
3.3 La formulation du cas test . . . 30
3.4 Les résultats numériques . . . 31
3.5 Analyse . . . 32

Conclusion **32**

Annexe **34**
Annexe 1 . . . 34
Annexe 2 . . . 36

Références **39**

Introduction

Nous pouvons affirmer que l'aéroacoustique est un sujet récent, non pas au sens théorique puisque les premiers résultats datent du début du siècle mais au sens numérique. En effet l'amélioration depuis vingt ans des techniques de simulation numérique ont permis de modéliser des problèmes aussi complexes que celui de la génération et de la propagation de bruits générés par les structures turbulentes d'écoulements stationnaires. Les applications nombreuses dans le domaine des transports justifient cette évolution et ils existent donc aujourd'hui de nombreuses approches (voir [2, 5, 12, 18]). Nous pouvons cataloguer les différentes méthodes numériques existantes en deux grandes familles. Tout d'abord les méthodes directes qui consistent à résoudre de manière très précise les équations posées par la physique, la difficulté majeure à surmonter pour ce choix étant l'élaboration d'algorithmes numériques capables à la fois de calculer des fluctuations acoustiques de très faibles amplitudes par rapport au champ aérodynamique et d'assurer la propagation des ondes acoustiques sur de longues distances sans effet notable de diffusion et de dispersion. De plus l'élaboration de conditions aux limites performantes s'avère cruciale puisqu'il faut à tout prix minimiser les réflexions parasites perturbant l'analyse des fluctuations acoustiques. En fait par sa complexité, ce type d'approche est inutilisable dans le cas de géométries complexes. Cela justifie l'existence de méthodes hybrides qui consistent à découpler les déterminations des champs aérodynamiques et acoustiques, le champ de vitesse obtenu étant introduit dans un opérateur de propagation sous la forme de termes sources, les difficultés de cette approche résidant dans le fait qu'une légère erreur au niveau de l'opérateur de propagation ou des termes sources peut conduire au final à des écarts importants au niveau du champ sonore rayonné. Ce rapport constitue une suite logique des travaux précédents [4]. Dans ce rapport nous nous étions intéressé à l'utilisation de schémas en volumes finis avec flux centrés pour l'étude de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire, le but étant à long terme de construire et de valider une méthode numérique performante pour la propagation de ces perturbations, c'est-à-dire en fait de construire un opérateur de propagation précis et efficace. Nous avions réussi à obtenir des résultats très intéressants dans le cas de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme en une et deux dimensions d'espace pour un domaine sans parois, tandis que dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire non uniforme, seuls des résultats partiels ont été démontrés en une dimension d'espace. En effet dans le cadre non uniforme, les difficultés théoriques et numériques auxquelles nous avons été confronté se sont accrues considérablement.
Pour pouvoir améliorer la compréhension de ce document et éviter au lecteur de devoir obligatoirement se plonger dans la lecture du rapport de recherche cité ci-dessus, nous avons décidé de rappeler brièvement en annexe les différents résultats importants que nous avons implicitement utilisés pour ce nouveau rapport. Quant aux apports nouveaux, nous pouvons les répartir de la façon suivante :

- Elargissement des résultats déjà obtenus au cas de perturbations dans un écoulement uniforme en trois dimensions d'espace dans un cadre isentropique ou non
- Introduction de conditions aux limites absorbantes et réfléchissantes
- Illustration de ces résultats
- Introduction au cadre non uniforme

1 Schéma en volumes finis pour l'acoustique 3D (écoulement uniforme)

1.1 Les équations modèles

D'après l'annexe 1.3.ii), si nous considérons les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme , nous obtenons pour $M = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 \delta u \\ \rho_0 c_0 \delta v \\ \rho_0 c_0 \delta w \\ \delta p \end{pmatrix}$ le système suivant:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \frac{\partial M}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \frac{\partial M}{\partial y} + \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} \frac{\partial M}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

En fait nous négligeons l'équation portant sur $\delta\rho$ car dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme nous avons la relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta p - c_0^2 \delta\rho\right) + u_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta p - c_0^2 \delta\rho\right) + v_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta p - c_0^2 \delta\rho\right) + w_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta p - c_0^2 \delta\rho\right) = 0,$$

ce qui nous permet connaissant δp, de déterminer $\delta\rho$:

$$\delta\rho\left(t,x,y,z\right) = \delta\rho\left(0,x - u_0 t, y - v_0 t, z - w_0 t\right) + \frac{1}{c_0^2}\left(\delta p\left(t,x,y,z\right) - \delta p\left(0,x - u_0 t, y - v_0 t, z - w_0 t\right)\right).$$

Finalement, cela justifie que nous nous intéressions aux problèmes de la forme

$$\begin{cases} \Omega \quad \text{un ouvert de} \mathbb{R}^m \\ U : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^m \\ \mathbb{A}_i, \text{m matrices carrées symétriques de } L\left(\mathbb{R}^m\right) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{A}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i\left(U\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial t} + div\left(\vec{\mathbb{F}}\left(U\right)\right) = 0 \\ U\left(x,0\right) = U_0\left(x\right) \end{cases} \quad (2)$$

Après avoir rappelé des résultats théoriques d'existence et d'unicité, nous verrons que l'utilisation de schémas en volumes finis avec flux centrés permet de construire pour ce type de problème un schéma non diffusif sur maillage non structuré, ainsi que des conditions aux limites absorbantes et réfléchissantes.

1.2 Systèmes symétriques de Friedrichs

Cette partie constitue un rappel très bref de la théorie sur les systèmes de Friedrichs [7]. Rappelons le cadre général proposé par Friedrichs pour étudier les systèmes symétriques d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. On se restreint ici aux problèmes d'évolution posés dans des domaines de la forme $\Omega \times [0,T]$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et nécessitant la donnée de la fonction inconnue au temps $t = 0$. Soient $\mathbb{A}_i\left(x,t\right)$, m matrices carrées symétriques de $L(\mathbb{R}^p)$ dont les coefficients sont lipschitziens dans $\Omega \times [0,T]$ et $\mathbb{A}_0\left(x,t\right)$ une matrice carrée de $L(\mathbb{R}^p)$ dont les coefficients sont dans $L^\infty\left(\Omega \times [0,T]\right)$. On cherche une fonction $\mathrm{U} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^p$, solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{A}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \mathbb{A}_0 U = \mathbb{F} \\ U\left(x,0\right) = U_0\left(x\right) \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$U_0 \in \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^p, \qquad F \in \left(L^2\left(\Omega \times [0,T]\right)\right)^p$$

Pour Ω différent de $I\!R^m$, il faut rajouter à (3) des conditions aux limites. Une solution proposée par Friedrichs pour obtenir un problème bien posé est la suivante : soient $\Gamma = \partial\Omega$ et n vecteur normal à Γ, orienté vers l'extérieur. On pose

$$\mathbb{B}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} n_i \mathbb{A}_i\,(x,t) \quad \forall x \in \Gamma$$

Soit $\mathbb{M}(x,t)$, une matrice carrée de $L(I\!R^p)$, définie $\forall x \in \Gamma$, et telle que :

$$\mathbb{M} + \mathbb{M}^t \geq 0$$

$$Ker\,(\mathbb{B} - \mathbb{M}) \oplus Ker\,(\mathbb{B} + \mathbb{M}) = I\!R^p$$

Alors la condition aux limites homogène est :

$$U\,(x,t) \in Ker\,(\mathbb{B}(x,t) - \mathbb{M}(x,t)) \qquad \forall x \in \Gamma. \tag{4}$$

On se rapportera à Phillips-Sarason [14] pour la théorie générale et on retiendra pour la suite le résultat suivant: **sous des hypothèses convenables de régularité, le problème défini par (3) et la condition aux limites (4) admet une solution unique.**

1.3 Un schéma en volumes finis avec flux centrés de type saute-mouton

1.3.1 Introduction

Le système des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme auquel nous nous intéressons, synthétisé par le système (2), est linéaire, hyperbolique et conservatif en la variable U. Cela explique le choix de schémas en volumes finis, initialement construits pour la résolution numérique de tels systèmes. L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial d'existence des équations en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation faible du système de lois de conservation, écrite pour chaque cellule. A partir d'un maillage bidimensionnel de type éléments finis triangulaires, il existe différents choix possibles de cellules, ce qui ne change en rien le schéma. Un des choix possibles est défini par des polygones centrés autour des noeuds du maillage en dimension deux (par des polyèdres en dimension trois), ce qui est représenté sur la figure suivante :

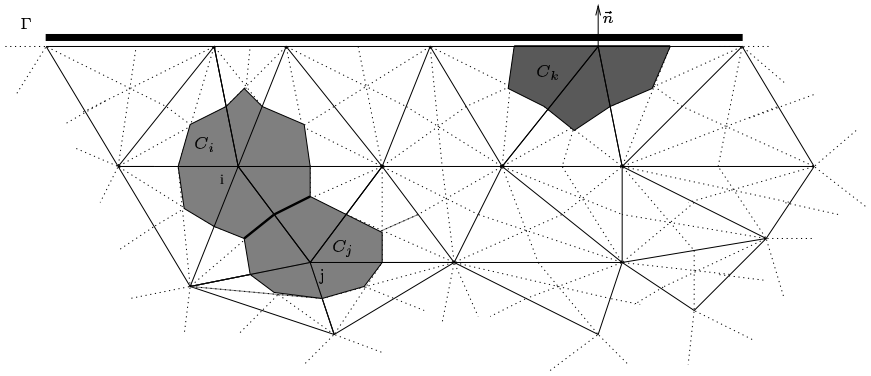

FIG. 1 – *Exemple de cellules internes et aux bords*

L'intersection entre deux cellules internes (par exemple : c_i et c_j) est une réunion de deux segments et c_k est une cellule d'intégration au bord. Pour chaque cellule c_i, $|c_i|$ correspond à son volume et $\delta\rho_i$,δu_i,δv_i,δw_i,δp_i aux valeurs moyennes respectives des variables physiques dans la cellule. Nous appelons interface interne entre deux cellules leur intersection et interface externe l'intersection entre une cellule

au bord et le bord lui-même (noté Γ pour la figure 1). Pour chaque interface interne $c_{ij} = c_i \cap c_j$, nous définissons

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{I}_{ij} = \displaystyle\int_{c_i \cap c_j} \vec{n}\, dS \quad avec \quad \vec{n} \quad la\ normale\ unitaire\ à \quad \partial c_i \cap \partial c_j \quad dirigée\ de \quad c_i \quad vers \quad c_j \\ l_{ij} = \|\vec{I}_{ij}\| \\ \vec{n}_{ij} = \dfrac{1}{l_{ij}} \vec{I}_{ij} \end{array} \right.$$

De la même manière, nous étendons ces définitions aux interfaces externes, l'indice j correspondant alors à une cellule fictive à l'extérieur du domaine. Enfin pour toute cellule c_i, nous nommons $s(i)$ la réunion des indices des cellules voisines à c_i et P_i la mesure discrète de la frontière de la cellule c_i : $P_i = \sum_{j \in s(i)} l_{ij}$.

1.3.2 Formulation faible

Une formulation faible est obtenue en intégrant le système (2) sur chaque cellule c_i et en prenant comme fonctions tests les fonctions caractéristiques des cellules. On obtient grâce aux formules de Green, une équation vérifiée sur chaque cellule :

$$|c_i| \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i + \int_{\partial c_i} \vec{\mathbb{F}}(U) \cdot \vec{n}\, dS = 0 \tag{5}$$

ce que l'on peut récrire

$$|c_i| \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i + \sum_{j \in s(i)} l_{ij} H_{ij} = 0 \tag{6}$$

où $l_{ij} H_{ij}$ est une approximation que nous allons définir du flux $\int_{\partial c_i} \vec{\mathbb{F}}(U) \cdot \vec{n}\, dS$

Flux interne centré Comme cela est annoncé, le flux interne choisi est un flux centré. On considère donc

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{ij} = H\left(U_i, U_j, \vec{n}_{ij}\right) \\ H\left(u,v,\vec{n}\right) = \dfrac{\vec{\mathbb{F}}(u) + \vec{\mathbb{F}}(v)}{2} \cdot \vec{n} = \displaystyle\sum_k \left(\frac{F_k(u) + F_k(v)}{2} \right) n_k = \underbrace{\left(\sum_k n_k \mathbb{A}_k \right)}_{\mathbb{P}} \left(\frac{u+v}{2} \right) \end{array} \right. \tag{7}$$

Discrétisation temporelle Le schéma en temps choisi est un schéma de type saute-mouton. Finalement l'équation discrète que nous obtenons sur chaque cellule et pour tout instant $t^k = k\Delta t$ avec $k \in \mathbb{Z}$, Δt le pas de temps, $t^k \in [0,T]$ et U^k l'approximation numérique de U à l'instant t^k, s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}{2\Delta t} + \dfrac{1}{|c_i|} \displaystyle\sum_{j \in s(i)} l_{ij} H_{ij}\left(U_i^k, U_j^k, n_{ij}\right) = 0 \\ avec\ le\ flux\ interne \quad H_{ij}^k \equiv H_{ij}\left(U_i^k, U_j^k, n_{ij}\right) = \left(\dfrac{\vec{\mathbb{F}}\left(U_i^k\right) + \vec{\mathbb{F}}\left(U_j^k\right)}{2} \right) \cdot n_{ij} = \mathbb{P}_{ij} \left(\dfrac{U_i^k + U_j^k}{2} \right) \\ avec \quad \mathbb{P}_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} n_{ij\,k} \mathbb{A}_k \end{array} \right. \tag{8}$$

Remarque 1.1 *:*

- *Pour une interface externe c_{ij}, le flux numérique correspondant à une condition absorbante et celui correspondant à une condition réfléchissante seront donnés par la suite.*
- *Nous rappelons les résultats géométriques élémentaires suivants:*

$$l_{ij} = l_{ji}$$

$$\vec{n}_{ij} = -\vec{n}_{ji} \Longrightarrow \mathbb{P}_{ij} = -\mathbb{P}_{ji}$$

$$\sum_{j \in s(i)} l_{ij}\vec{n}_{ij} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{j \in s(i)} l_{ij}\mathbb{P}_{ij} = 0$$

- *En utilisant la technique des équations équivalentes, nous pourrions démontrer le résultat suivant (ce qui est fait dans [4] et rappelé dans l'annexe 2 pour le cas des équations d'Euler linéarisées en deux dimensions d'espace):*

  Lemme 1.1 *En supposant le milieu de propagation infini, le schéma (8) est d'ordre deux en temps et en espace sur un maillage régulier.*

  (voir [16, 15] pour la théorie).

1.4 Une condition suffisante de stabilité

Dans cette partie nous supposerons que seules des conditions absorbantes sont imposées aux bords du domaine.

1.4.1 Etude d'une énergie

Le but de cette partie est de démontrer, dans le cadre de nos équations, l'existence d'une condition suffisante de stabilité pour notre schéma en tenant compte de conditions aux limites absorbantes qu'il nous reste à déterminer. De manière similaire à l'énergie introduite dans [4] et rappelée dans l'annexe 2, commençons par considérer l'énergie suivante :

$$E^n = \sum_i |c_i| \left({}^tU_i^n \cdot U_i^n + {}^tU_i^{n+1} \cdot U_i^{n-1} \right) \tag{9}$$

Le fait que l'énergie discrète donnée par (9) soit une forme quadratique définie positive des variables U_i^n et U_i^{n-1} pour tout i n'a rien d'évident, cela repose sur l'expression du schéma. Dans la suite, nous prouverons que la somme de cette énergie avec des termes de correction aux frontières absorbantes, décroît à chaque pas de temps et constitue une forme quadratique définie positive sous une condition de type CFL. Ce résultat nous donnant alors une condition suffisante de stabilité L^2 pour notre schéma.
Posons $\Delta E = E^n - E^{n-1}$, nous avons alors le premier résultat suivant:

Proposition 1.1 *En notant H_{ij}^n les flux aux niveaux des interfaces externes qu'ils restent à définir, nous avons*

$$\Delta E = -\Delta t \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^tU_i^n \cdot \left(2H_{ij}^{n-1} - \mathbb{P}_{ij}U_i^{n-1} \right) + {}^tU_i^{n-1} \cdot \left(2H_{ij}^n - \mathbb{P}_{ij}U_i^n \right) \right) \tag{10}$$

Démonstration 1.1

$$\Delta E = E^n - E^{n-1} = \sum_i |c_i| \left({}^tU_i^n \cdot \left(U_i^n - U_i^{n-2} \right) + {}^tU_i^{n-1} \cdot \left(U_i^{n+1} - U_i^{n-1} \right) \right)$$

$$= -2\Delta t \sum_i \sum_{j \in s(i)} l_{ij} \left({}^tU_i^n \cdot H_{ij}^{n-1} + {}^tU_i^{n-1} \cdot H_{ij}^n \right)$$

La double sommation peut être récrite comme une somme sur les interfaces sous la forme suivante :

$$\Delta E = \Delta t \left(\epsilon_{interne} + \epsilon_{externe} \right)$$

avec

$$\epsilon_{interne} = -2 \sum_{internes}^{interfaces} \left[l_{ij} \left({}^tU_i^n \cdot H_{ij}^{n-1} + {}^tU_i^{n-1} \cdot H_{ij}^n \right) + l_{ji} \left({}^tU_j^n \cdot H_{ji}^{n-1} + {}^tU_j^{n-1} \cdot H_{ji}^n \right) \right]$$

$$\epsilon_{externe} = -2 \sum_{externes}^{interfaces} \left[l_{ij} \left({}^tU_i^n \cdot H_{ij}^{n-1} + {}^tU_i^{n-1} \cdot H_{ij}^n \right) \right]$$

En utilisant (8) et les résultats géométriques énoncés précédemment, on peut récrire $\epsilon_{interne}$ sous la forme :

$$\epsilon_{interne} = -\sum_{internes}^{interfaces} \left[l_{ij}^t U_i^n \mathbb{P}_{ij} \left(U_i^{n-1} + U_j^{n-1} \right) + {}^t U_i^{n-1} \mathbb{P}_{ij} \left(U_i^n + U_j^n \right) \right.$$
$$\left. - {}^t U_j^n \mathbb{P}_{ij} \left(U_i^{n-1} + U_j^{n-1} \right) - {}^t U_j^{n-1} \mathbb{P}_{ij} \left(U_i^n + U_j^n \right) \right]$$

De plus d'après les hypothèses initiales, les matrices $\mathbb{A}_k$ pour $k \in \{1,..,m\}$ sont symétriques. Donc pour tout vecteur $\vec{n}_{ij}$ la matrice $\mathbb{P}_{ij}$ est symétrique. Ce qui permet d'affirmer que

$$ {}^t U_i^k \mathbb{P}_{ij} U_j^k = {}^t U_j^k \mathbb{P}_{ij} U_i^k \qquad \forall i,j,k$$

donc

$$\epsilon_{interne} = -2 \sum_{internes}^{interfaces} l_{ij} \left[{}^t U_i^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} - {}^t U_j^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right]$$

finalement

$$\Delta E = -\Delta t \left[2 \sum_{internes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} - {}^t U_j^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right) + 2 \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \left[{}^t U_i^n \cdot \left(2H_{ij}^{n-1} - \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right) + {}^t U_i^{n-1} \cdot \left(2H_{ij}^n - \mathbb{P}_{ij} U_i^n \right) \right] \right]$$

$$\Delta E = -\Delta t \left[\sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \left[{}^t U_i^n \cdot \left(2H_{ij}^{n-1} - \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right) + {}^t U_i^{n-1} \cdot \left(2H_{ij}^n - \mathbb{P}_{ij} U_i^n \right) \right] \right.$$
$$\left. + \underbrace{2 \sum_i \sum_{j \in s(i)} l_{ij} \left({}^t U_i^n \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right)}_{= {}^t U_i^n \left(\sum_i \sum_{j \in s(i)} l_{ij} \mathbb{P}_{ij} \right) U_i^{n-1} = 0} \right]$$

On obtient le résultat annoncé

$$\Delta E = -\Delta t \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^n \cdot \left(2H_{ij}^{n-1} - \mathbb{P}_{ij} U_i^{n-1} \right) + {}^t U_i^{n-1} \cdot \left(2H_{ij}^n - \mathbb{P}_{ij} U_i^n \right) \right)$$

■

Remarque 1.2 *:*

- *La première remarque que nous pouvons faire est que la variation d'énergie s'écrit uniquement en fonction des interfaces externes, donc sur un domaine de calcul infini ou périodique l'énergie se conserve. (Ce résultat étant démontré dans [4] toujours dans le cadre des équations d'Euler linéarisées en deux dimensions d'espace, voir annexe 2).*
- *De plus, nous pouvons voir que la construction d'une forme quadratique définie positive décroissante à chaque pas de temps dépend uniquement du choix d'un flux externe, une infinité de choix s'offre à nous.*

Nous allons maintenant travailler dans le cadre particulier d'interfaces externes uniquement absorbantes, pour cela il nous reste à construire un flux absorbant. Revenons à la forme générale de $\mathbb{P}_{ij} = \sum_k n_{ij_k} \mathbb{A}_k$: comme toutes les matrices $\mathbb{A}_k$ sont symétriques, $\mathbb{P}_{ij}$ l'est aussi pour tout vecteur $\vec{n}_{ij}$. Donc $\mathbb{P}_{ij}$ est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{n}_{ij}$ il existe $\mathbb{T}_{ij}$ matrice orthonormée et $\mathbb{D}_{ij}$ matrice diagonale telles que

$$\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{T}_{ij} \mathbb{D}_{ij} {}^t \mathbb{T}_{ij}$$

considérons alors

$$\mathbb{P}_{ij}^{\pm} = \mathbb{T}_{ij} \mathbb{D}_{ij}^{\pm} {}^t \mathbb{T}_{ij} \quad avec \quad \mathbb{D}_{ij}^{\pm} = diag\left(\lambda_i^{\pm} \right)$$
$$|\mathbb{P}_{ij}| = \mathbb{T}_{ij} |\mathbb{D}_{ij}| {}^t \mathbb{T}_{ij} \quad avec \quad |\mathbb{D}_{ij}| = diag\left(|\lambda_i| \right)$$

exemple Dans le cadre du système (1), nous avons en posant $\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{pmatrix} \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij} & 0 & 0 & c_0 n_{ij_x} \\ 0 & \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij} & 0 & c_0 n_{ij_y} \\ 0 & 0 & \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij} & c_0 n_{ij_z} \\ c_0 n_{ij_x} & c_0 n_{ij_y} & c_0 n_{ij_z} & \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

en considérant le vecteur $\vec{n}_{ij}$ unitaire

$$\mathbb{D}_{ij} = \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij} \mathbb{I}d + diag\,(0,0,c_0, -c_0)$$

Nous proposons pour le flux au niveau d'une interface absorbante:

$$H_{ij}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{ij} U_i^n + |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-1}\right) \tag{11}$$

Grâce à (10), en remplaçant le flux absorbant par son expression, nous obtenons directement le résultat suivant

Lemme 1.2

$$\Delta E = -\Delta t \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-1} + {}^t U_i^n |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-2}\right) \tag{12}$$

1.4.2 Termes correctifs

La variation d'énergie donnée par (12) ne répond pas à nos attentes puisqu'elle n'a aucune raison d'être négative à chaque pas de temps. Cela justifie l'utilisation de termes correctifs, considérons alors

$$F^n = E^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^n |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^n - {}^t U_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-1}\right) \tag{13}$$

Nous pouvons déjà remarquer que la correction choisie ne concerne que les interfaces absorbantes ce qui se justifie par la conservation de l'énergie E lorsque le domaine ne comporte pas d'interfaces absorbantes. Nous allons maintenant montrer que F^n est bien une forme quadratique définie positive des variables U_i^n et U_i^{n-1} pour tout i et que de plus elle est décroissante à chaque pas de temps.

Proposition 1.2 *F^n donnée par (13) est une suite décroissante, plus précisément nous avons*

$$\Delta F = F^n - F^{n-1} = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij}^t \left(U_i^n + U_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(U_i^n + U_i^{n-2}\right) \leq 0 \tag{14}$$

Démonstration 1.2 En reprenant l'expression (13) de F^n, nous avons directement

$$\Delta F = \Delta E - \frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t U_i^n |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^n - 2\,{}^t U_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-1} + {}^t U_i^{n-2} |\mathbb{P}_{ij}|\, U_i^{n-2}\right)$$

et en utilisant (12), on obtient le résultat annoncé:

$$\Delta F = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{interfaces}^{interfaces} l_{ij}^t \left(U_i^n + U_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(U_i^n + U_i^{n-2}\right)$$

de plus d'après cette expression, ΔF est bien toujours négatif car $|\mathbb{P}_{ij}|$ est une matrice positive. Finalement la suite F^n est bien une suite décroissante et cela indépendamment du pas de temps.

■

Remarque 1.3 *: Le lecteur attentif pourra s'étonner du choix du flux absorbant, car en effet tout les résultats précédents resteraient vrais si dans l'expression du flux absorbant nous avions choisi à la place de $|\mathbb{P}_{ij}|$ n'importe quelle matrice positive. Seulement, nous verrons dans la prochaine partie que la condition de stabilité dépend du rayon spectral de la matrice choisie, plus précisément un rayon spectral plus important accélérerait la décroissance de F mais en même temps diminuerait le pas de temps maximal assurant la stabilité. De plus, il est évidemment nécessaire que notre condition au limite ne rende pas notre schéma inconsistant.*

1.4.3 Une condition suffisante de stabilité

Théorème 1.1 *En utilisant le schéma défini par (8) et (11) sur un maillage quelconque, l'énergie F^n définit par (13) est à la fois une suite décroissante et une forme quadratique définie positive des variables U_i^n, U_i^{n-1} $\forall i$ (assurant ainsi la stabilité L^2 du schéma) sous la condition suffisante suivante*

$$\forall\,(i,j)\setminus j\in s\,(i)\,,\quad \Delta t<\frac{2\,|c_i|}{P_i\rho\,(\mathbb{P}_{ij})}, \tag{15}$$

avec ρ la fonction rayon spectral.

Démonstration 1.3 Repartons de

$$E^n=\sum_i|c_i|\left({}^tU_i^n\cdot U_i^n+{}^t\,U_i^{n+1}\cdot U_i^{n-1}\right)=\sum_i|c_i|\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2+{}^t\,U_i^{n-1}\cdot\left(U_i^{n+1}-U_i^{n-1}\right)\right)$$

$$E^n=\sum_i\left[|c_i|\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-2\Delta t^tU_i^{n-1}\cdot\sum_{j\in s(i)}l_{ij}H_{ij}^n\right]$$

or

$$\forall i\quad\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\mathbb{P}_{ij}=0\Longrightarrow E^n=\sum_i\left[|c_i|\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-2\Delta t^tU_i^{n-1}\cdot\sum_{j\in s(i)}l_{ij}\left(H_{ij}^n-\frac{1}{2}\mathbb{P}_{ij}U_i^n\right)\right]$$

$$\begin{aligned}E^n=&\sum_{internes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\Delta t^tU_i^{n-1}\mathbb{P}_{ij}U_j^n\right.\\&\left.+\frac{|c_j|}{P_j}\left(\|U_j^n\|^2+\|U_j^{n-1}\|^2\right)+\Delta t^tU_j^{n-1}\mathbb{P}_{ij}U_i^n\right]\\&+\sum_{absorbantes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\Delta t^tU_i^{n-1}\,|\mathbb{P}_{ij}|\,U_i^{n-1}\right]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}F^n=&\sum_{internes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\Delta t^tU_i^{n-1}\mathbb{P}_{ij}U_j^n\right.\\&\left.+\frac{|c_j|}{P_j}\left(\|U_j^n\|^2+\|U_j^{n-1}\|^2\right)+\Delta t^tU_j^{n-1}\mathbb{P}_{ij}U_i^n\right]\\&+\sum_{absorbantes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\frac{\Delta t}{2}\left({}^tU_i^n\,|\mathbb{P}_{ij}|\,U_i^n+{}^t\,U_i^{n-1}\,|\mathbb{P}_{ij}|\,U_i^{n-1}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^n\geq&\sum_{internes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\Delta t\|U_i^{n-1}\|\|U_j^n\|\rho\,(\mathbb{P}_{ij})\right]\\&+\sum_{internes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_j|}{P_j}\left(\|U_j^n\|^2+\|U_j^{n-1}\|^2\right)-\Delta t\|U_j^{n-1}\|\|U_i^n\|\rho\,(\mathbb{P}_{ij})\right]\\&+\sum_{absorbantes}^{interfaces}l_{ij}\left[\frac{|c_i|}{P_i}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\|U_i^n\|^2+\|U_i^{n-1}\|^2\right)\rho\,(|\mathbb{P}_{ij}|)\right]\end{aligned}$$

Finalement

$$F^n \geq \sum_{\substack{interfaces\\internes}} l_{ij} \left[\left(\|U_i^n\|^2 + \|U_i^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_i|}{P_i} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right) \right) + \left(\|U_j^n\|^2 + \|U_j^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_j|}{P_j} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right) \right) \right]$$
$$+ \sum_{\substack{interfaces\\absorbantes}} l_{ij} \left(\|U_i^n\|^2 + \|U_i^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_i|}{P_i} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(|\mathbb{P}_{ij}| \right) \right)$$

Et comme $\rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right) = \rho \left(|\mathbb{P}_{ij}| \right)$, on en déduit la condition de stabilité annoncée

$$\forall \left(i,j \right) \backslash j \in s \left(i \right), \quad \Delta t < \frac{2 \left| c_i \right|}{P_i \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right)}$$

car F^n est bien sous cette condition de type CFL une forme quadratique définie positive des variables U_i^{n-1} et U_i^n pour tout i.

■

Remarque 1.4 *:*

- *Pour vérifier ce qui a été dit dans la précédente remarque, nous pouvons voir que le fait de choisir une matrice positive autre que $|\mathbb{P}_{ij}|$ dans l'expression du flux absorbant (que l'on appellera $\mathbb{G}_{ij}$) aurait conduit à la condition de stabilité plus restrictive suivante*

$$\forall \left(i,j \right) \backslash j \in s \left(i \right), \quad \Delta t < \min \left(\frac{2 \left| c_i \right|}{P_i \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right)} \right)$$

$$\forall \left(i,j \right) \backslash j \in s \left(i \right) \quad et \quad c_j \quad cellule\ fictive, \quad \Delta t < \min \left(\frac{2 \left| c_i \right|}{P_i \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right)}, \frac{2 \left| c_i \right|}{P_i \rho \left(\mathbb{G}_{ij} \right)} \right)$$

  Il existe dans la littérature de nombreuses façons de construire une condition de type absorbante dans le cadre de nos équations, voir par exemple [5],[18],[9],[13]. Une des méthodes les plus simple à mettre en pratique par rapport à notre schéma serait celle décrite dans [9] et [13], elle est basée sur une approche de type caractéristique. Le système hyperbolique est diagonalisé afin de faire disparaître les ondes entrantes aux niveaux des parois absorbantes, cette condition absorbante connaît malheureusement plusieurs défauts majeurs, tout d'abord elle n'est pas adaptée aux incidences obliques et le traitement des coins s'avère problématique. La méthode construite par Tam & Dong [18], est beaucoup plus efficace car de nature multidimensionnelle, elle consiste à utiliser les expressions asymptotiques des équations d'Euler obtenues en champ lointain. Nous ne rentrerons ici pas plus dans les détails, car bien que ces différents types de conditions absorbantes aient prouvé leur efficacité, elles mettraient en défaut les résultats du théorème 1.1.
- *Nous tenions également à remarquer que les résultats que nous venons de présenter dans cette partie sont en tous points analogues avec ceux démontrés dans [17] dans le cadre de l'utilisation d'un schéma volumes finis avec flux centrés sur les équations de Maxwell.*
- *En conclusion, nous venons de démontrer dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme que le schéma d'ordre 2 défini par (8) et (11) était sur maillage non structuré, sous une condition de type CFL, stable et même non diffusif sur un domaine sans parois absorbantes.*

1.5 Une condition de type réfléchissante

Le but de cette partie est de construire dans un contexte bien particulier une condition aux limites réfléchissante en deux dimensions d'espace. Le principe que nous allons utiliser est très conventionnel puisqu'il s'agit de considérer les interfaces réfléchissantes comme des "miroirs". Cependant nous verrons que le contexte particulier de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme restreint l'utilisation de cette méthode. Le dessin suivant rappel que les interfaces à la frontière, par rapport au type de maillage que nous avons choisi, peuvent être une droite ou une réunion de deux droites.

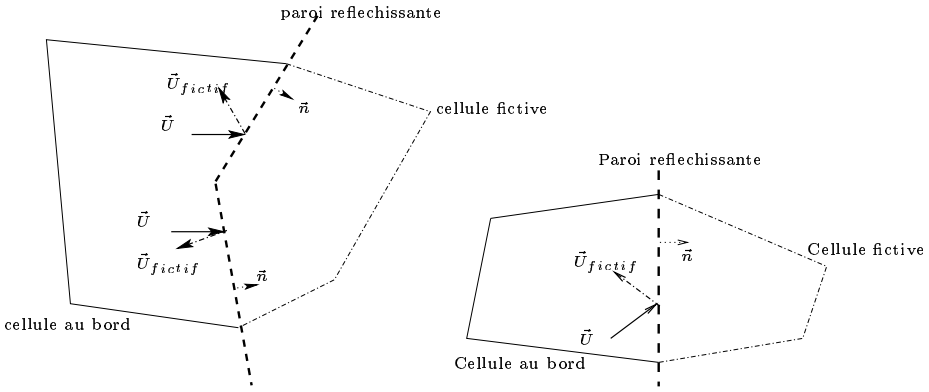

FIG. 2 – *Parois réfléchissantes*

Nous allons dans le cas simple d'une interface réfléchissante rectiligne introduire un flux réfléchissant et démontrer que sous certaines hypothèses l'introduction de conditions aux limites réfléchissantes via l'utilisation de ce flux ne modifie pas la variation d'énergie définie par (14). Le problème que nous considérons est celui de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme en deux dimensions d'espace régit par le système suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho_0 c_0 \delta u\\ \rho_0 c_0 \delta v\\ \delta p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_0 & 0 & c_0\\ 0 & u_0 & 0\\ c_0 & 0 & u_0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho_0 c_0 \delta u\\ \rho_0 c_0 \delta v\\ \delta p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_0 & 0 & 0\\ 0 & v_0 & c_0\\ 0 & c_0 & v_0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho_0 c_0 \delta u\\ \rho_0 c_0 \delta v\\ \delta p\end{pmatrix}=0 \quad (16)$$

L'idée physique souvent utilisée pour la construction de parois réfléchissantes est de traiter ces parois comme des "miroirs", ce qui est illustré par la figure 2 ci-dessus. Il s'agit en fait d'imaginer une cellule fictive où les différentes grandeurs physiques seraient le reflet de celles de la cellule au bord. Dans le cas d'une paroi linéaire (dessin de droite), en indiçant par j la cellule fictive, par i la cellule au bord et en notant ${}^t(n_x,n_y)$ la normale unitaire (dirigée de c_i vers c_j) à l'interface, nous obtenons les égalités suivantes:

$$\begin{pmatrix}\delta\rho_j\\ \delta u_j\\ \delta v_j\\ \delta p_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-2n_x^2 & -2n_xn_y & 0\\ 0 & -2n_xn_y & 1-2n_y^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho_i\\ \delta u_i\\ \delta v_i\\ \delta p_i\end{pmatrix}$$

$$W_j=\left(\mathbb{I}+\tilde{\mathbb{H}}_{ij}\right)W_i \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbb{H}}_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2n_x^2 & -2n_xn_y & 0\\ 0 & -2n_xn_y & -2n_y^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Si nous revenons à la forme générale du flux interne que nous avons choisi, nous obtenons par identification le flux au niveau d'une paroi réfléchissante pour le système (16) (nous ne tenons donc pas compte de $\delta\rho$) :

$$H_{ij}=\frac{1}{2}\mathbb{P}_{ij}\left(W_i+W_j\right)\Longrightarrow H_{ij,réfléchissant}=\frac{1}{2}\mathbb{P}_{ij}\left(\mathbb{I}+\mathbb{H}_{ij}\right)W_i \quad (17)$$

avec

$$\mathbb{P}_{ij} = \begin{pmatrix} u_0 n_{ij_x} + v_0 n_{ij_y} & 0 & c_0 n_{ij_x} \\ 0 & u_0 n_{ij_x} + v_0 n_{ij_y} & c_0 n_{ij_y} \\ c_0 n_{ij_x} & c_0 n_{ij_y} & u_0 n_{ij_x} + v_0 n_{ij_y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - 2n_{ij_x}^2 & -2n_{ij_x} n_{ij_y} & 0 \\ -2n_{ij_x} n_{ij_y} & 1 - 2n_{ij_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition 1.3 *En supposant que*

- *les équations régissant l'évolution de la perturbation soient données par (16)*
- *les interfaces réfléchissantes soient linéaires*
- *l'écoulement uniforme vérifie au niveau des interfaces réfléchissantes l'équation suivante* $\vec{U_0} \cdot \vec{n}_{ij} = 0$
- *les flux internes et absorbants soient ceux définis par (8) et (11)*

alors l'énergie F^n *définie par (13) vérifie toujours*

$$\Delta F = F^n - F^{n-1} = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij}^t \left(W_i^n + W_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(W_i^n + W_i^{n-2}\right) \leq 0$$

et de plus

$$si \quad \begin{cases} \forall \quad interface\ interne \quad I_{ij}, & \Delta t < \dfrac{2\,|c_i|}{P_i \rho\,(\mathbb{P}_{ij})} \\ \forall \quad interface\ réfléchissante\ d'une\ cellule \quad c_i, & \Delta t < \dfrac{2\,|c_i|}{P_i c_0} \end{cases}$$

l'énergie discrète F^n *est une forme quadratique définie positive des variables* W_i^n *et* W_i^{n-1}, $\forall i$.

Démonstration 1.4 En reprenant le résultat obtenu en (10) et en tenant compte de la présence d'interfaces réfléchissantes et absorbantes, nous obtenons

$$\Delta E = -\Delta t \left[\sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t W_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}| W_i^{n-1} + {}^t W_i^n |\mathbb{P}_{ij}| W_i^{n-2} \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t W_i^n \mathbb{P}_{ij} \mathbb{H}_{ij} W_i^{n-1} + {}^t W_i^{n-1} \mathbb{P}_{ij} \mathbb{H}_{ij} W_i^n \right) \right]$$

Or sous l'hypothèse $u_0 n_x + v_0 n_y = 0$ (pour les interfaces réfléchissantes)

$$\mathbb{P}_{ij}\mathbb{H}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_0 n_{ij_x} \\ 0 & 0 & c_0 n_{ij_y} \\ -c_0 n_{ij_x} & -c_0 n_{ij_y} & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathbb{P}_{ij}\mathbb{H}_{ij}$ est antisymétrique, donc ${}^t W_i^n \mathbb{P}_{ij}\mathbb{H}_{ij} W_i^{n-1} + {}^t W_i^{n-1} \mathbb{P}_{ij}\mathbb{H}_{ij} W_i^n = 0 \quad \forall\,(i,j)$. Finalement nous retrouvons les relations (12) et (14)

$$\Delta E = -\Delta t \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left({}^t W_i^{n-1} |\mathbb{P}_{ij}| W_i^{n-1} + {}^t W_i^n |\mathbb{P}_{ij}| W_i^{n-2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta F = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij}^t \left(W_i^n + W_i^{n-2}\right) |\mathbb{P}_{ij}| \left(W_i^n + W_i^{n-2}\right)$$

et F^n reste une suite décroissante. De plus, si nous reprenons le même principe que la démonstration 1.3 en tenant compte des parois réfléchissantes

$$
\begin{aligned}
E^n = & \sum_{internes}^{interfaces} l_{ij} \left[\frac{|c_i|}{P_i} \left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) - \Delta t {}^t W_i^{n-1} \mathbb{P}_{ij} W_j^n \right. \\
& \left. + \frac{|c_j|}{P_j} \left(\|W_j^n\|^2 + \|W_j^{n-1}\|^2 \right) + \Delta t {}^t W_j^{n-1} \mathbb{P}_{ij} W_i^n \right] \\
& + \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left[\frac{|c_i|}{P_i} \left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) - \Delta t {}^t W_i^{n-1} \left| \mathbb{P}_{ij} \right| W_i^{n-1} \right] \\
& + \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} l_{ij} \left[\frac{|c_i|}{P_i} \left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) - \Delta t {}^t W_i^{n-1} \mathbb{P}_{ij} \mathbb{H}_{ij} W_i^n \right] \\
F^n \geq & \sum_{internes}^{interfaces} l_{ij} \left[\left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_i|}{P_i} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right) \right) \right. \\
& \left. + \left(\|W_j^n\|^2 + \|W_j^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_j|}{P_j} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \right) \right) \right] \\
& + \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_i|}{P_i} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(|\mathbb{P}_{ij}| \right) \right) \\
& + \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} l_{ij} \left(\|W_i^n\|^2 + \|W_i^{n-1}\|^2 \right) \left(\frac{|c_i|}{P_i} - \frac{\Delta t}{2} \rho \left(\mathbb{P}_{ij} \mathbb{H}_{ij} \right) \right)
\end{aligned}
$$

et comme $\rho(\mathbb{P}_{ij}) = c_0$, on obtient le résultat annoncé. Ce théorème nous fournit donc une condition suffisante de type CFL pour la stabilité L^2 du schéma.

■

Remarque 1.5 *:*

- *la première remarque qui s'impose est une synthèse du résultat obtenu : dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme en deux dimensions d'espace avec des conditions aux limites absorbantes ou réfléchissantes (sous certaines hypothèses au niveau du bord), nous avons construit un schéma qui pour tout type de maillage est stable sous une condition de type CFL, non diffusif si le domaine ne comporte pas de parois absorbantes et d'ordre deux en temps et en espace si le maillage est régulier.*
- *Malheureusement, la condition de type réfléchissante que nous avons utilisée est très restrictive. En effet, tout d'abord nous devons remarquer que la démonstration de la conservation de l'énergie au niveau des interfaces réfléchissantes s'appuie sur l'hypothèse géométrique d'interfaces rectilignes, elle reste vérifiable si l'interface au bord est composé de deux droites (toujours sous la condition $\vec{U}_0 \cdot \vec{n}_{ij}$, avec $\vec{n}_{ij} = \int_{c_i \cap c_j} \vec{n} \, dS$). Finalement la conservation de l'énergie repose sur une condition forte concernant la géométrie des parois. De plus il convient également de se demander ce que devient la condition $u_0 n_x + v_0 n_y = 0$ dans le contexte d'un écoulement uniforme. Cette condition d'orthogonalité entre l'écoulement moyen et la normale d'une interface réfléchissante restreint encore l'utilisation de notre flux absorbant, elle a cependant un sens physique évident. Le dessin suivant illustre un domaine d'écoulement et un écoulement uniforme pour lesquels nous pouvons utiliser notre condition aux limites réfléchissante.*

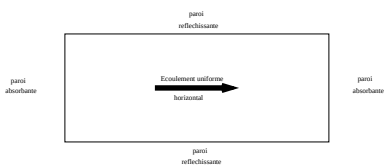

FIG. 3 – *Exemple de géométrie*

2 Cas tests (écoulement uniforme)

	conditions initiales	écoulements porteurs	domaines	figures	parois	maillages	légendes
cas test 1 uniforme	$\delta\rho\,(0,x,y) = 0$ $\delta u\,(0,x,y) = 0$ $\delta v\,(0,x,y) = 0$ $\delta p\,(0,x,y) = \exp\left(-100(x^2+y^2)\right)$	$\rho_0 = 1$ $u_0 = 0.5$ $v_0 = 0$ $p_0 = 1/\gamma$	$-1 \leq x \leq 1$ $-1 \leq y \leq 1$	fig 5 fig 7 fig 8 fig 6 fig 9 fig 10	absorbantes absorbantes en amont et en aval	101×101 501×501 501×501 101×101 501×501 501×501	représentation de δp pour t=0, 0.4, 0.7, 1, 1.3, 1.6 s résidu et énergie pour $0 \leq t \leq 2$ représentation de δp pour t=0, 0.4, 0.7, 1, 1.3, 1.6 s résidu et énergie pour $0 \leq t \leq 2$
cas test 2 uniforme	$\delta\rho\,(0,x,y) = 0$ $\delta u\,(0,x,y) = 0$ $\delta v\,(0,x,y) = 0$ $\delta p\,(0,x,y) = \exp\left(-100(x^2+y^2)\right)$	$\rho_0 = 1$ $u_0 = 0.1$ $v_0 = 0$ $p_0 = 1/\gamma$	$-5 \leq x \leq 5$ $-0.5 \leq y \leq 0.5$	fig 11	absorbantes en amont et en aval	1001×101	représentation de δp pour t=0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5 s énergie pour $0 \leq t \leq 3.5$
cas test 3 uniforme	$\delta\rho\,(0,x,y) = \epsilon \exp\left(-\frac{\ln(2)}{b^2}\left(x^2+y^2\right)\right)$ $\delta u\,(0,x,y) = 0$ $\delta v\,(0,x,y) = 0$ $\delta p\,(0,x,y) = \epsilon \exp\left(-\frac{\ln(2)}{b^2}\left(x^2+y^2\right)\right)$ $\epsilon = 10^{-3}$, $b = 3$	$\rho_0 = 1$ $u_0 = 0.5$ $v_0 = 0$ $p_0 = 1/\gamma$	$-50 \leq x \leq 50$ $-50 \leq y \leq 50$	fig12 fig 13 fig14 fig15	absorbantes	101×101 301×301 501×501 101×101 501×501	représentation de δp pour t=40, 80, 120 s et comparaison entre la coupe en y=0 pour t=120 s et la solution exacte log du résidu en pression pour $0 \leq t \leq 200$
cas test 4 uniforme	$f\,(x,y) = \exp\left(-\frac{\ln(2)}{9}\left(x^2+y^2\right)\right)$ $g\,(x,y) = \exp\left(-\frac{\ln(2)}{25}\left((x-67)^2+y^2\right)\right)$ $\delta\rho\,(0,x,y) = f\,(x,y) + 0.1g\,(x,y)$ $\delta u\,(0,x,y) = 0.04yg\,(x,y)$ $\delta v\,(0,x,y) = -0.04\,(x-67)\,g\,(x,y)$ $\delta p\,(0,x,y) = f\,(x,y)$	$\rho_0 = 1$ $u_0 = 0.5$ $v_0 = 0$ $p_0 = 1/\gamma$	$-100 \leq x \leq 100$ $-100 \leq y \leq 100$	fig 16	absorbantes	101×101 301×301 501×501	représentation de $\delta\rho\,(x,y,40)$ comparaison de $\delta\rho\,(x,14,40)$ avec la solution exacte
cas test 5 non uniforme	$\delta\rho\,(0,x,y) = 0$ $\delta u\,(0,x,y) = 0$ $\delta v\,(0,x,y) = 0$ $\delta p\,(0,x,y) = \exp\left(-(x^2+y^2)\right)$	$\rho_0 = 1$ $u_0 = \begin{cases} 0.1y & \text{pour } \lvert y\rvert \leq 10 \\ 1 & \text{pour } y \geq 10 \\ -1 & \text{pour } y \leq -10 \end{cases}$ $v_0 = 0$ $p_0 = 1/\gamma$	$-50 \leq x \leq 50$ $-50 \leq y \leq 50$	fig 11	absorbantes	501×501	représentation de δp pour t=0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100 s énergie pour $0 \leq t \leq 100$

Ce tableau résume les données des différents cas tests auxquels nous nous sommes intéressés et que nous allons à présent détailler.

2.1 Cas test 1

2.1.1 La formulation du cas test

Le premier cas test est assez simple, il s'agit de visualiser la propagation d'une impulsion acoustique en deux dimensions d'espace, introduite au centre d'un maillage construit à partir d'un maillage régulier en drapeau anglais de 101×101 puis de 501×501 points (comme l'illustre la figure 4). Cela en présence d'un écoulement uniforme horizontal de vitesse égale à Mach $M = 0.5$. Le but de ce cas test est de mettre en pratique les résultats théoriques obtenus et de voir comment se comporte la perturbation au niveau des parois absorbantes et réfléchissantes. Pour cela nous considérons pour les deux maillages le cas où toutes les parois sont absorbantes et celui où seules les parois en amont et en aval le sont (ce qui est en accord avec la remarque 1.5). De plus on détermine à chaque itération temporelle, la valeur de l'énergie F^n, la variation théorique de cette énergie donnée par la formule (14), la variation effectivement obtenue de cette énergie et la norme L^2 discrète des fluctuations de pression sur le domaine de calcul. Ce taux de fluctuations que l'on appellera résidu de pression est exprimé sous la forme

$$R_{pression} = \sqrt{\frac{1}{nc}\sum_i \delta p^2}, \quad \text{avec nc le nombre de cellules du maillage}$$

Dans tous ces cas, le domaine de calcul est défini par $-1 \leq x,y \leq 1$. A $t = 0$, on impose les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} \delta\rho\,(0,x,y) = 0 \\ \delta u\,(0,x,y) = 0 \\ \delta v\,(0,x,y) = 0 \\ \delta p\,(0,x,y) = \exp\left(-100\left(x^2+y^2\right)\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_0 = 1 \\ u_0 = 0.5 \\ v_0 = 0 \\ p_0 = 1/\gamma \end{cases}$$

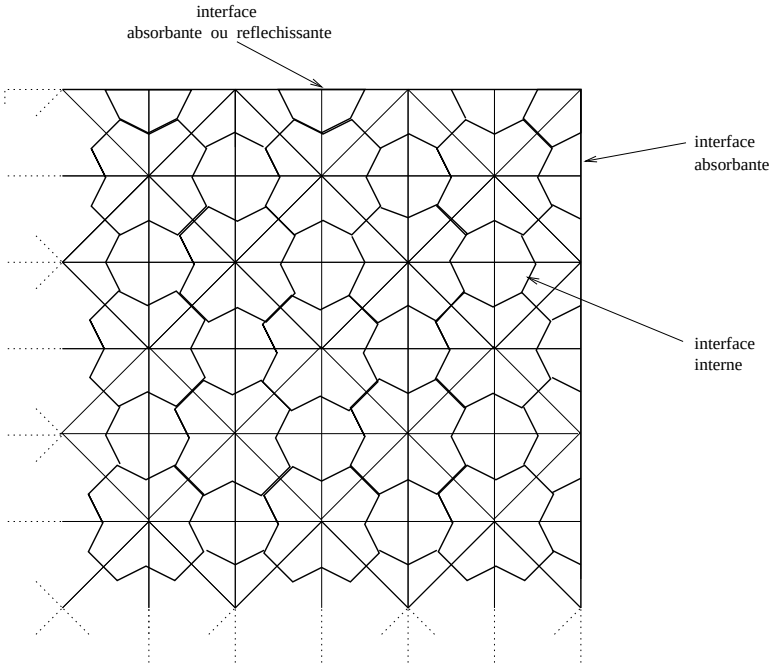

FIG. 4 – *Maillage utilisé*

2.1.2 Les résultats numériques

Maillage 101×101 avec condition absorbante sur toute la frontière :

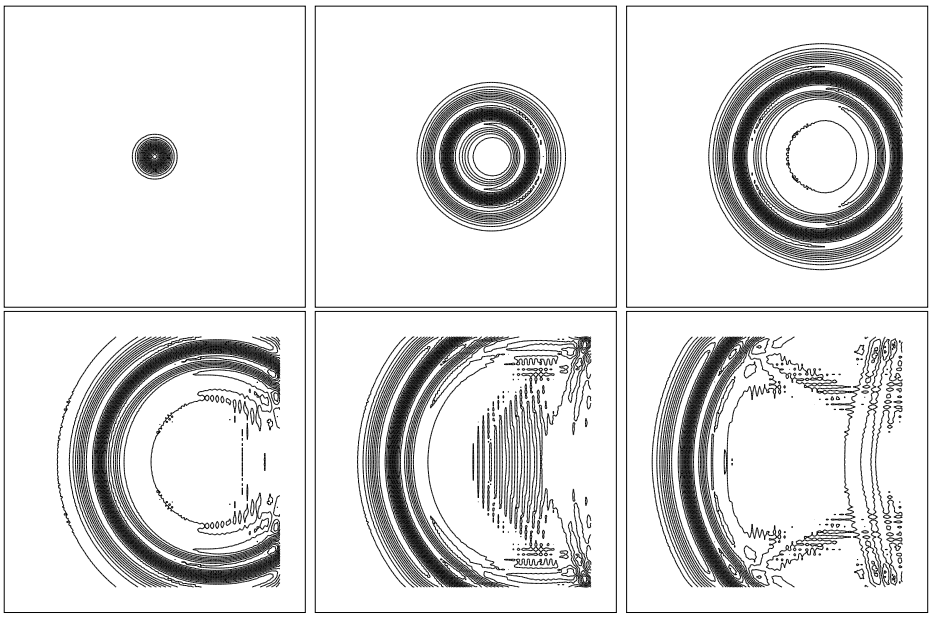

FIG. 5 – *Impulsion de pression en deux dimensions pour t=0s, t=0.4s, t=0.7s, t=1s, t=1.3s, t=1.6s*

Maillage 101×101 avec condition absorbante en amont et en aval de l'écoulement :

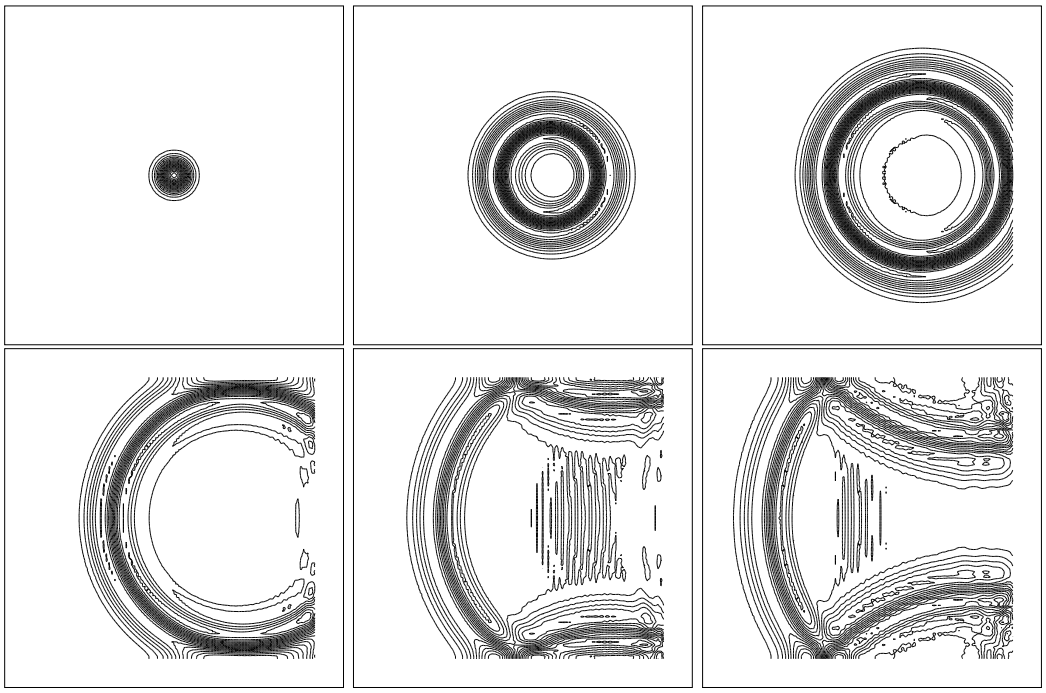

FIG. 6 – *Impulsion de pression en deux dimensions pour t=0s, t=0.4s, t=0.7s, t=1s, t=1.3s, t=1.6s*

Maillage 501×501 avec condition absorbante sur toute la frontière :

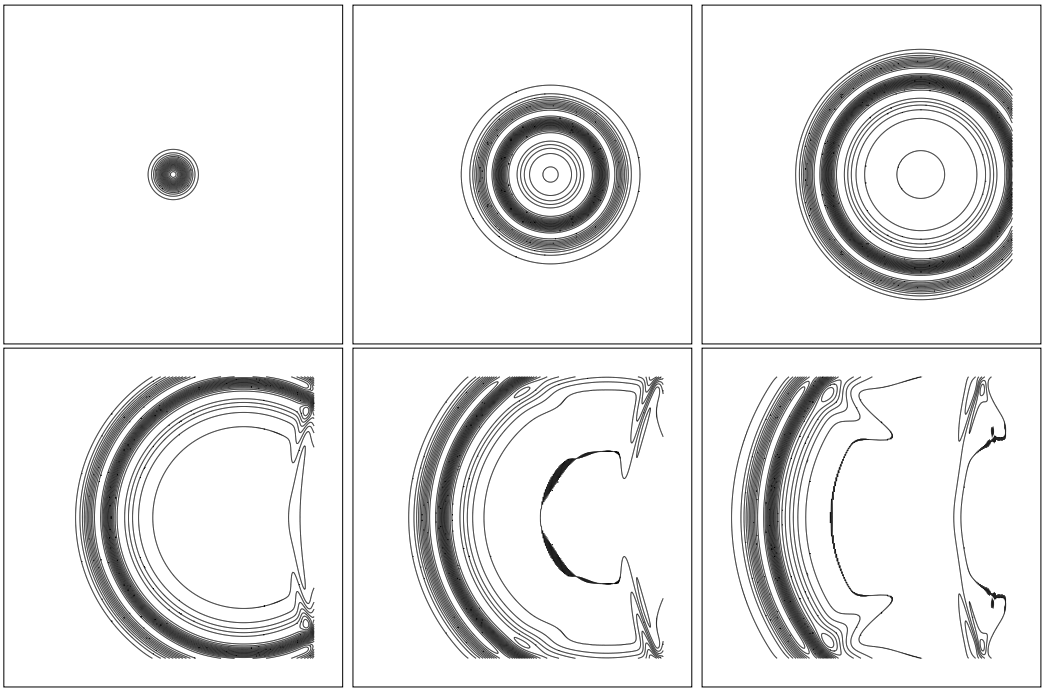

FIG. 7 – *Impulsion de pression en deux dimensions pour t=0s, t=0.4s, t=0.7s, t=1s, t=1.3s, t=1.6s*

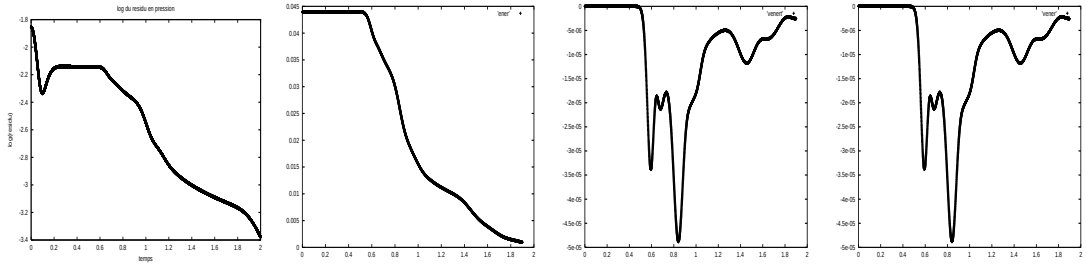

FIG. 8 – *log du résidu en pression, énergie, variation théorique d'énergie et variation d'énergie obtenue.*

Maillage 501×501 avec conditions absorbante et réfléchissante :

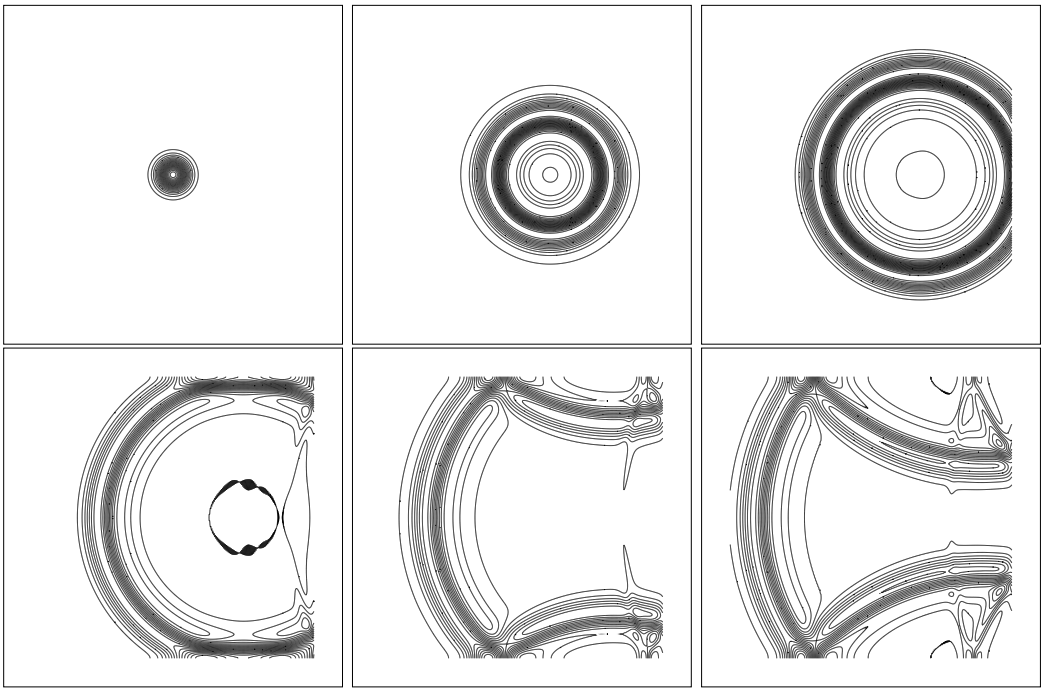

FIG. 9 – *Impulsion de pression en deux dimensions pour t=0s, t=0.4s, t=0.7s, t=1s, t=1.3s, t=1.6s*

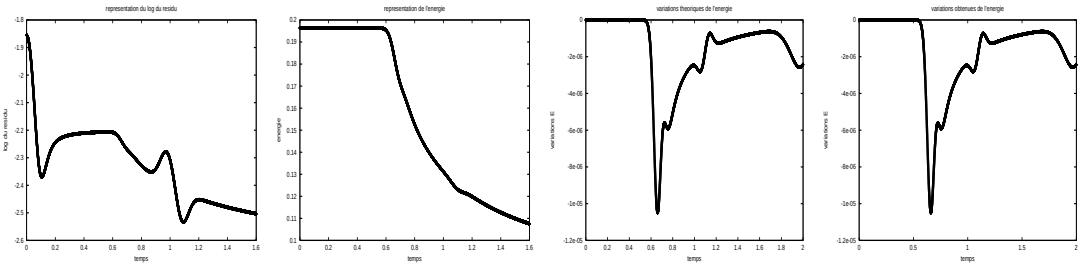

FIG. 10 – *log du résidu en pression, énergie, variation théorique d'énergie et variation d'énergie obtenue.*

2.1.3 Analyse

- Tout d'abord nous pouvons visualiser grâce aux figures 5 et 7, le comportement logique de la perturbation à l'intérieur du domaine. En effet le pulse s'étend dans toutes les directions du plan à la vitesse du son en étant convecté horizontalement par l'écoulement et de plus l'amplitude décroît.
- En étant précis (représentation de 20 isocontours pour δp variant de -0.07 à 0.07) nous pouvons constater toujours grâce aux figures 5 et 7 la présence de réflexions parasites aux niveaux des parois absorbantes. En fait leurs amplitudes sont faibles comparativement à celle de l'onde acoustique lorsqu'elle atteint les parois: de l'ordre de 8% pour le maillage 101×101 et de l'ordre de 5% pour le maillage 501×501.
  Evidemment l'erreur commise n'est pas négligeable, cela montre que notre condition au limite absorbante doit être améliorée.
- Quant à notre condition réfléchissante, les résultats paraissent satisfaisants pour le maillage 101×101 et très bons pour le maillage 501×501, les erreurs commises sont difficiles à interpréter puisque

nous avons à la fois deux sortes de conditions aux limites. Cette raison justifie l'étude du cas test que nous verrons dans la partie suivante où seules des conditions aux limites réfléchissantes seront à prendre en considération.

- Les résultats représentés par la figure 8 sont intéressants. Nous pouvons vérifier l'accord parfait entre la variation théorique d'énergie et la variation constatée au cours du temps, nous pouvons également visualiser sur la courbe représentative du log du résidu en pression (ainsi que sur la courbe représentative de l'énergie) trois changements de pente successifs (ce qui correspond aux instants où la perturbation atteint les parois aval, haute et basse). Enfin, le résidu restant au bout de t=2s est de l'ordre de 3% du résidu initial.

- De même, les résultats présentés par la figure 10 illustrent l'accord entre les résultats théoriques et numériques.

2.2 Cas test 2

2.2.1 La formulation du cas test

Ce second cas test consiste à tester les performances de notre condition réfléchissante et de vérifier qu'elle n'influe pas sur le bilan énergétique (d'après (14)). Pour cela nous allons considérer un domaine rectangulaire dix fois plus long que large et étudier l'évolution d'un pulse en pression introduit au centre du maillage au sein d'un écoulement uniforme horizontal. Comme cela est expliqué dans la remarque 1.5, d'après la forme de l'écoulement choisi, nous imposons des conditions aux limites absorbantes en amont et en aval. Le choix du domaine nous permettant tout de même de considérer que seules les parois réfléchissantes influent sur les perturbations acoustiques pendant un temps significatif. On détermine à chaque itération temporelle la valeur de l'énergie F^n. Le domaine de calcul est défini par $-0.5 \leq y \leq 0.5$, $-5 \leq x \leq 5$ et le maillage est formé de 101×1001 points ($\Delta x = \Delta y = 0.01$). A t=0, on impose les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} \delta\rho\,(0,x,y) = 0 \\ \delta u\,(0,x,y) = 0 \\ \delta v\,(0,x,y) = 0 \\ \delta p\,(0,x,y) = \exp\left(-100\left(x^2+y^2\right)\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_0 = 1 \\ u_0 = 0.1 \\ v_0 = 0 \\ p_0 = 1/\gamma \end{cases}$$

2.2.2 Les résultats numériques

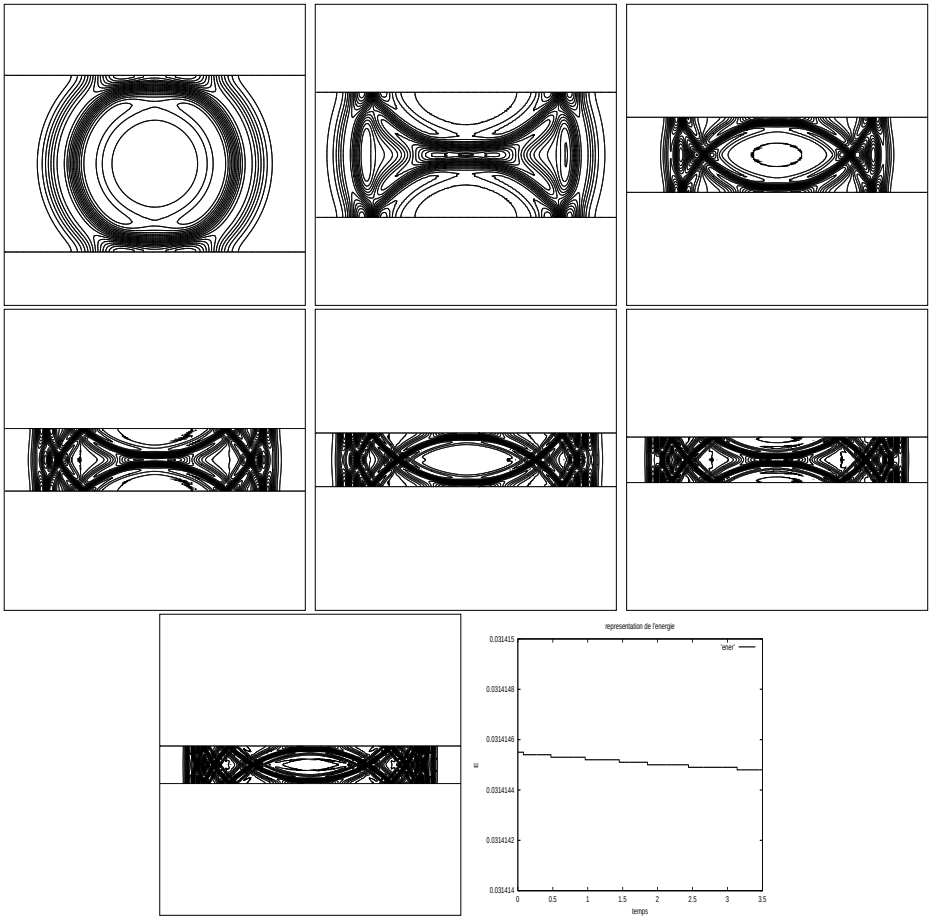

FIG. 11 – *Impulsion de pression en deux dimensions pour t=0.5s, t=1s, t=1.5s, t=2s, t=2.5s, t=3s et t=3.5s; représentation de l'énergie pour t variant de 0 à 3.5s*

2.2.3 Analyse

- Les résultats sont très explicites et montrent la qualité de notre condition réfléchissante, nous pouvons vérifier que la variation de l'énergie est quasiment nulle (après calcul: de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4}\%$).

2.3 Cas test 3

2.3.1 La formulation du cas test

Ce troisième cas test est inspiré de la littérature, en effet il provient de [6] et son intérêt principal réside dans le fait que nous connaissons de manière analytique la solution exacte. Le but est de tester notre condition absorbante mais cette fois comparativement à une solution de référence. Le domaine de calcul est défini par $-50 \leq x,y \leq 50$ et nous réalisons le calcul sur un domaine de 101×101, 301×301 et 501×501 points. On considère toujours la propagation d'une impulsion acoustique de forme Gaussienne dans un écoulement uniforme horizontal $M = 0.5$, de masse volumique et de pression $\rho_0 = 1$ et $p_0 = 1/\gamma$.

A $t = 0$, on impose les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} \delta\rho\,(0,x,y) = \epsilon \exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{b^2}\left(x^2+y^2\right)\right) \\ \delta u\,(0,x,y) = 0 \\ \delta v\,(0,x,y) = 0 \\ \delta p\,(0,x,y) = \epsilon \exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{b^2}\left(x^2+y^2\right)\right) \end{cases}$$

avec une demi-largeur de la Gaussienne de $b = 3$ et une amplitude de l'impulsion de pression de $\epsilon = 10^{-3}$. De plus à chaque itération temporelle, on calcul comme pour les cas-tests précédents le résidu basé sur la norme L^2 de la fluctuation de pression.

On étudie les champs de pression aux trois instants $t = 40s$, $t = 80$ et $120s$, et l'évolution temporelle du résidu de $t = 0s$ à $t = 200s$.

2.3.2 Solution analytique

Ce problème admet comme unique solution:

$$\delta p\,(t,x,y) = \frac{\epsilon}{2\alpha}\int_0^{+\infty} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\alpha}\right)\cos\left(c_0\xi t\right) J_0\left(\eta\xi\right)\, d\xi$$

$$\textit{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\ln(2)}{b^2} \\ \eta = \sqrt{\left(x-u_0 t\right)^2 + y^2} \\ J_0\,(z) \qquad \textit{la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0} \end{cases}$$

2.3.3 Les résultats numériques

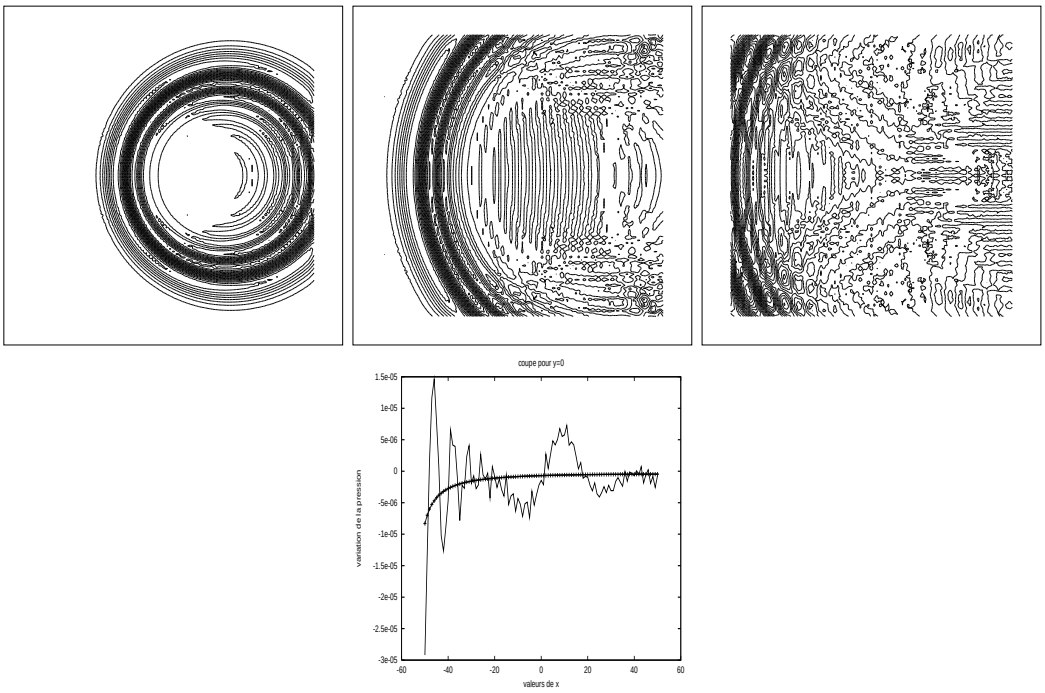

FIG. 12 – *Sur un maillage* 101×101*: représentation de* δp *pour t=40s,80s et 120s (20 isocontours); comparaison entre la coupe en y=0 et la solution exacte pour t=120s*

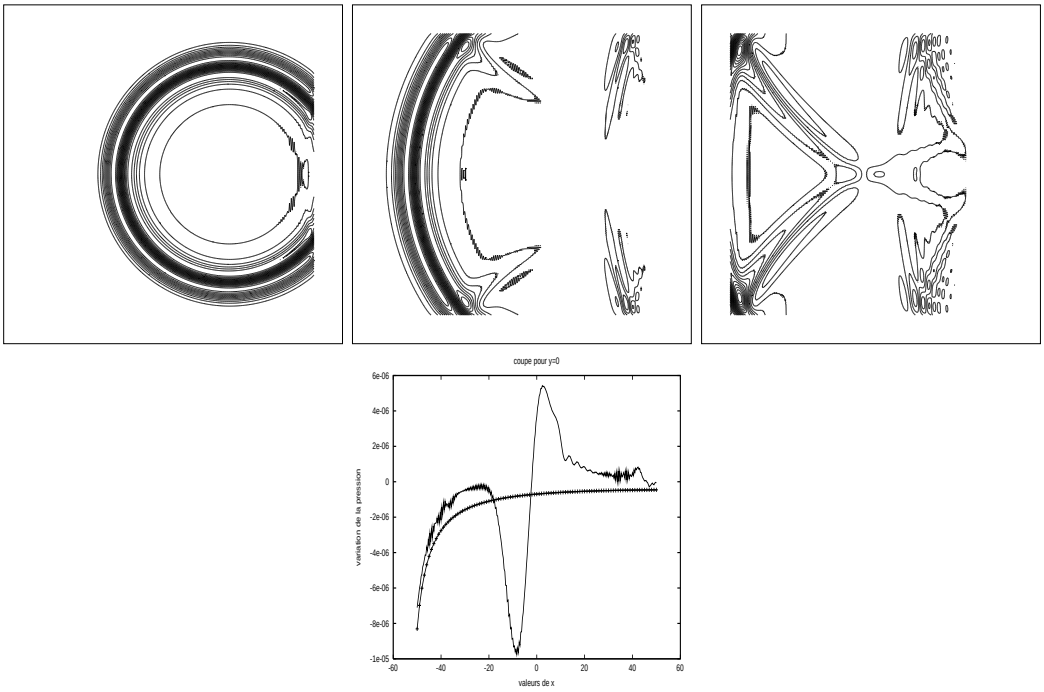

FIG. 13 – *Sur un maillage* 301×301*: représentation de* δp *pour t=40s, 80s et 120s (20 isocontours); comparaison entre la coupe en y=0 et la solution exacte pour t=120s*

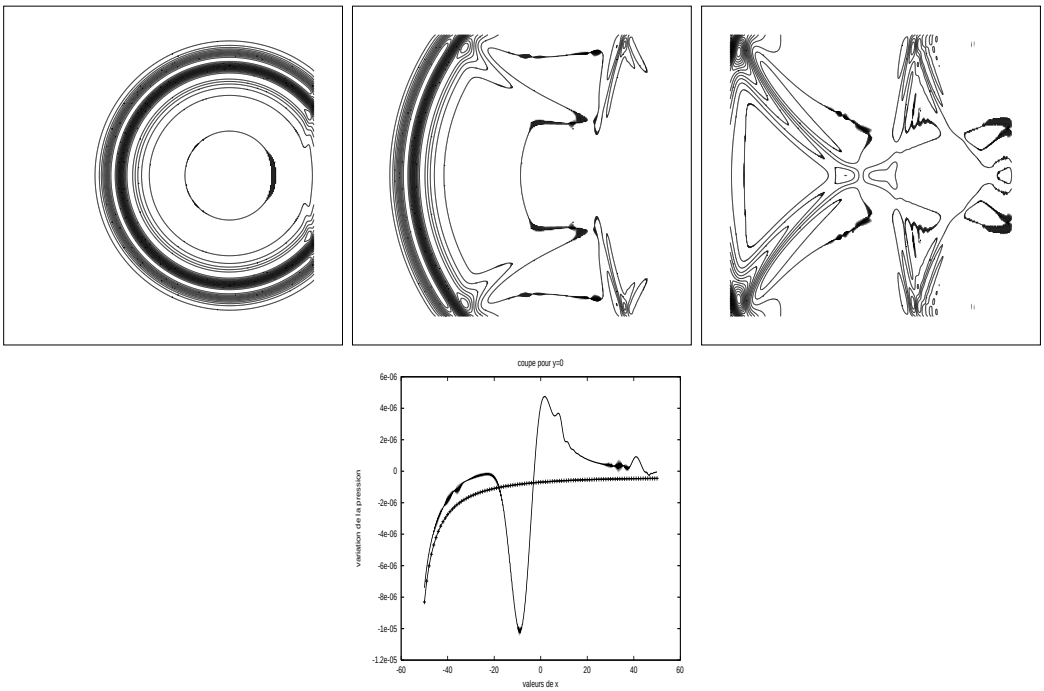

FIG. 14 – *Sur un maillage* 501×501*: représentation de* δp *pour t=40s,80s et 120s (20 isocontours); comparaison entre la coupe en y=0 et la solution exacte pour t=120s*

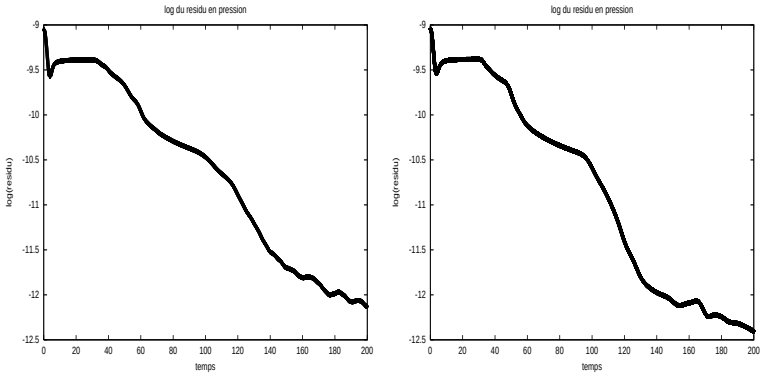

FIG. 15 – *Représentation pour un maillage* 101×101 *et* 501×501 *de l'évolution du log du résidu en pression avec t variant de 0 à 200s*

2.3.4 Analyse

Le résultat le plus intéressant de ce cas test est la comparaison pour chaque type de maillage entre la coupe en y=0 et la solution exacte. Nous pouvons vérifier que dans les cas d'un maillage 301×301 et 501×501 les valeurs numériques obtenues sont proches de la solution au niveau de la paroi en amont (proche de x=-50) mais nous pouvons également noter la présence d'une variation brutale centré en x=-5, cette erreur illustre les réflexions parasites dues aux trois autres parois. Le rapport entre l'amplitude de la perturbation lorsqu'elle atteint la paroi en amont($t \simeq 100s$) et l'amplitude de cette erreur est de l'ordre de 7% pour le maillage 301×301 et de l'ordre de 6% pour le maillage 501×501. Ce qui corrobore l'erreur que nous avions obtenu pour le premier cas test. Enfin nous pouvons vérifier sur la figure 13 que les réflexions parasites sont rapidement absorbées puisque le résidu en t=200s est de l'ordre de 0.1% du résidu initial.

2.4 Cas test 4

Ce quatrième cas test est lui aussi issu de la littérature (voir [1, 12]). Tout d'abord comme pour le cas test précédent nous connaissons la solution exacte. Son but est de tester la précision de notre schéma dans la partie interne du domaine de l'écoulement avec une perturbation initiale plus complexe (composée de deux pulses).

2.4.1 La formulation du cas test

Le domaine de calcul est défini par $-100 \leq x,y \leq 100$ et comme pour le cas test précédent nous utilisons successivement un maillage $101 \times 101, 301 \times 301$ et 501×501. Nous supposons que la perturbation est introduite dans un écoulement uniforme horizontal de Mach=M=0.5, de masse volumique et de pression $\rho_0 = 1$ et $p_0 = 1/\gamma$. A t=0s, on impose les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} \delta\rho\,(0,x,y) = \exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{9}\left(x^2+y^2\right)\right) + 0.1\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67)^2+y^2\right)\right) \\ u\,(0,x,y) = 0.04y\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67)^2+y^2\right)\right) \\ v\,(0,x,y) = -0.04\,(x-67)\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67)^2+y^2\right)\right) \\ p\,(0,x,y) = \exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{9}\left(x^2+y^2\right)\right) \end{cases}$$

2.4.2 Solution analytique

Ce problème admet comme unique solution:

$$\begin{cases} \delta\rho\,(t,x,y) = \dfrac{9I_0}{2\ln(2)} + 0.1\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67-Mt)^2+y^2\right)\right) \\ \delta u\,(t,x,y) = \dfrac{9\,(x-Mt)\,I_1}{2\ln(2)\,\eta} + 0.04y\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67-Mt)^2+y^2\right)\right) \\ \delta v\,(t,x,y) = \dfrac{9yI_1}{2\ln(2)\,\eta} + 0.04y\exp\left(-\dfrac{\ln(2)}{25}\left((x-67-Mt)^2+y^2\right)\right) \\ \delta p\,(t,x,y) = \dfrac{9I_1}{2\ln(2)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \eta\,(x,y) = \sqrt{(x-Mt)^2+y^2} \\ I_0\,(t,x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{9\xi^2}{4\ln(2)}\right) J_0\,(\eta\xi)\cos(\xi t)\;d\xi \\ I_1\,(t,x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{9\xi^2}{4\ln(2)}\right) J_1\,(\eta\xi)\sin(\xi t)\;d\xi \end{cases}$$

2.4.3 Les résultats numériques

Les résultats présentés ci-dessous représentent $\delta\rho\,(40,x,y)$ et une comparaison de $\delta\rho\,(40,x,14)$ avec la solution exacte pour les maillages 101×101, 301×301 et 501×501.

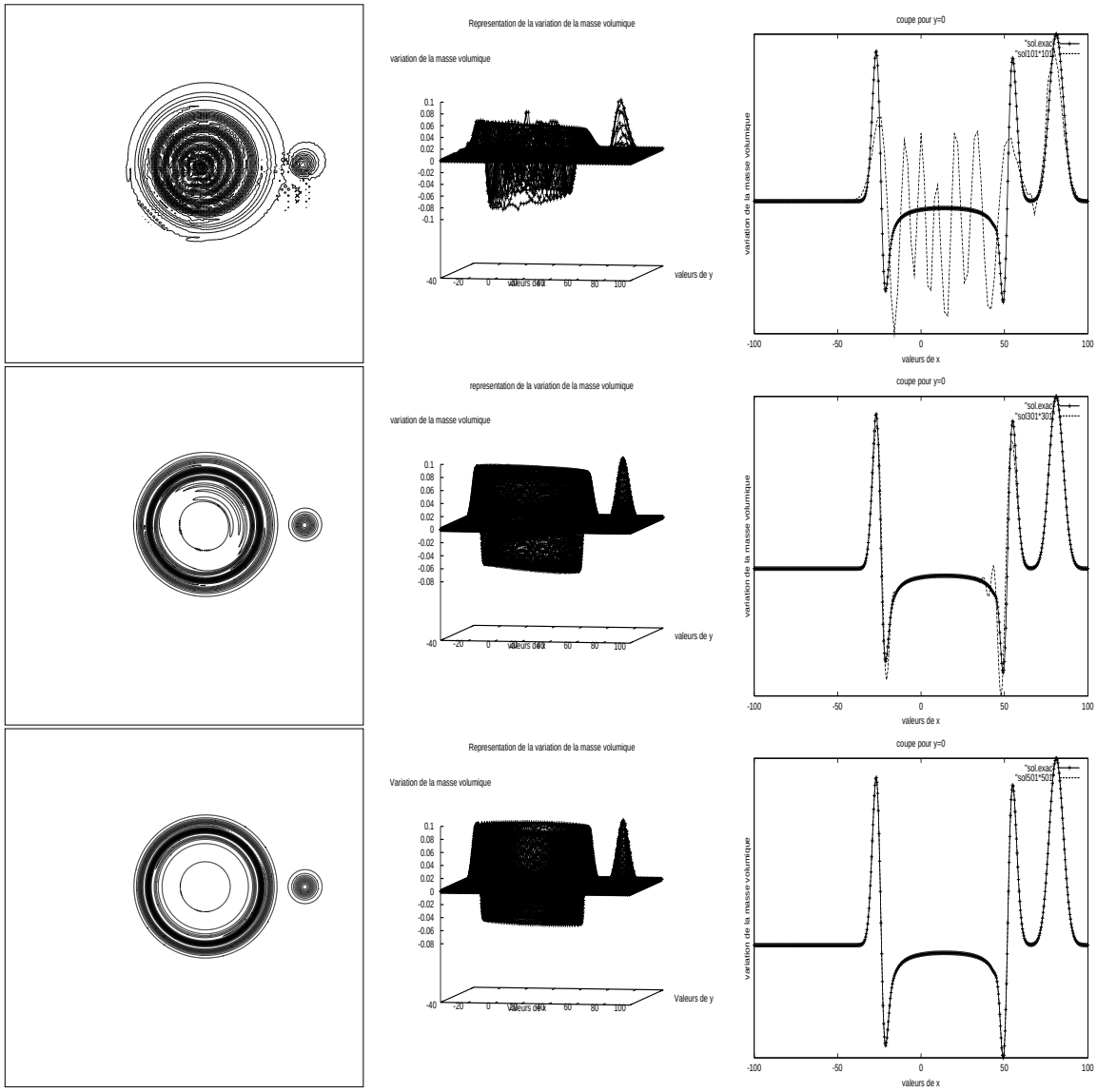

FIG. 16 – *Représentation de* $\delta\rho\,(x,y,40)$ *et de* $\delta\rho\,(x,14,40)$ *pour un maillage* 101×101, 301×301 *et* 501×501.

2.4.4 Analyse

Ces résultats illustrent que la solution numérique donnée par notre schéma est réaliste pour le maillage 301×301 et parfaite pour le maillage 501×501. La nécessité d'un maillage aussi fin s'explique par le fait que notre schéma "n'est que" d'ordre 2, cependant la qualité des résultats obtenus par rapport au caractère peu coûteux de l'implémentation est très intéressant. Il est en fait très encourageant d'obtenir de tels résultats, il s'offre à nous de nombreuses possibilités pour améliorer la précision.

3 Introduction au cas d'un écoulement non uniforme

3.1 Introduction

Les résultats de la partie précédente ont illustré l'efficacité de notre schéma dans le cadre de petites perturbations d'un écoulement uniforme, ce qui évidemment justifie l'idée d'utiliser de telles méthodes

dans le cadre beaucoup plus complexe de petites perturbations autour d'un écoulement stationnaire non uniforme. En effet dans ce nouveau cadre les grandeurs physiques de l'écoulement sont dépendantes de l'espace et rendent donc le schéma que nous avons construit dans la première partie inutilisable. Cependant l'idée d'utiliser des schémas en volumes finis avec flux centrés reste justifiée pour les mêmes raisons que dans le cadre uniforme. Les difficultés actuelles majeures de ce choix étant l'absence totale de résultats théoriques tels que la conservation d'une énergie discrète ou l'existence d'une condition suffisante de stabilité et le fait qu'il n'existe pas pour ce type de problème de solution de référence (à part pour certains cas très particuliers où l'équation de Lilley nous fournit une solution analytique), il sera donc difficile de juger de la précision des calculs. Toutefois comme nous allons le voir, sur le cas test suivant, rien ne nous empêche d'un point de vue qualitatif et par des calculs de résidus ou d'énergie de vérifier le bon sens de nos résultats.

3.2 Formulation du schéma

Si nous restons dans le cadre le plus générale qui soit, nous pouvons considérer le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega \quad \text{un ouvert de} I\!R^m \\ U : \Omega \times [0,T] \rightarrow I\!R^m \\ \mathbb{A}_i \text{,m matrices carrées de } L\left(I\!R^m\right) \text{,fonctions de} x_1,..,x_m \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_i U\right) = 0 \\ U\left(x,0\right) = U_0\left(x\right) \end{array}\right. \tag{18}$$

Exemple Dans le cadre de la linéarisation des équations d'Euler en deux dimensions, nous aurions (voir annexe 1)

$$U = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \dfrac{\delta p}{\gamma-1} + \dfrac{1}{2}\delta p\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\left(\gamma-1\right)v_0^2 + \left(\gamma-3\right)u_0^2\right) & -u_0\left(\gamma-3\right) & -v_0\left(\gamma-1\right) & \left(\gamma-1\right) \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ u_0\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(u_0^2+v_0^2\right) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}\right) & \frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u_0^2 & -\left(\gamma-1\right)u_0v_0 & \gamma u_0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_0v_0 & v_0 & u_0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\left(\gamma-1\right)u_0^2 + \left(\gamma-3\right)v_0^2\right) & -u_0\left(\gamma-1\right) & -v_0\left(\gamma-3\right) & \left(\gamma-1\right) \\ v_0\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(u_0^2+v_0^2\right) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}\right) & -\left(\gamma-1\right)u_0v_0 & \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)v_0^2 & \gamma v_0 \end{pmatrix}$$

Flux et discrétisation temporelle Par analogie avec les flux définis dans le cas de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme, considérons le schéma suivant

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{U_i^{n+1}-U_i^{n-1}}{2\Delta t}+\dfrac{1}{|c_i|}\displaystyle\sum_{j\in s(i)} l_{ij}H_{ij}\left(U_i^n,U_j^n,\vec{n}_{ij}\right)=0 \\
H^n_{ij_{interne}}=H_{interne}\left(U_i^n,U_j^n,\vec{n}_{ij}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}^i_{ij}U_i^n+\mathbb{P}^j_{ij}U_j^n\right) \\
\mathbb{P}^k_{ij}=\displaystyle\sum_l \mathbb{A}_l\left(x_k,y_k\right)n_{ij_l} \\
H^n_{ij_{absorbant}}=H_{absorbant}\left(U_i^n,U_j^n,\vec{n}_{ij}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}^i_{ij}U_i^n+\left|\mathbb{P}^i_{ij}\right|U_j^{n-1}\right) \\
H^n_{ij_{réfléchissant}}=H_{réfléchissant}\left(U_i^n,U_j^n,\vec{n}_{ij}\right)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}^i_{ij}\left(\mathbb{I}+\mathbb{H}^i_{ij}\right)U_i^n \\
\mathbb{H}^i_{ij}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2n_{ij_x}\left(n_{ij_x}u_{0i}+n_{ij_y}v_{0i}\right) & 1-2n_{ij_x}^2 & -2n_{ij_x}n_{ij_y} & 0 \\
2n_{ij_y}\left(n_{ij_x}u_{0i}+n_{ij_y}v_{0i}\right) & -2n_{ij_x}n_{ij_y} & 1-2n_{ij_x}^2 & 0 \\
2\left(n_{ij_x}u_{0i}+n_{ij_y}v_{0i}\right)^2 & -2n_{ij_x}\left(n_{ij_x}u_{0i}+n_{ij_y}v_{0i}\right) & -2n_{ij_y}\left(n_{ij_x}u_{0i}+n_{ij_y}v_{0i}\right) & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\right. \tag{20}
$$

(voir Annexe 1.3.iii pour la diagonalisation de la matrice $\mathbb{P}^i_{ij}$)

3.3 La formulation du cas test

Ce cas test consiste toujours à visualiser la propagation d'un pulse acoustique, introduit au centre d'un maillage 501×501 borné par des parois de type absorbantes, mais cette fois au sein d'un écoulement cisaillé (solution des équations d'Euler) défini par

$$
\rho_0=1,\qquad u_0=\left\{\begin{array}{ll} 0.1y & \text{pour} \quad |y|\leq 10 \\ 1 & \text{pou} \quad y\geq 10 \\ -1 & \text{pour} \quad y\leq -10 \end{array}\right. ,\qquad v_0=0,\qquad p_0=1/\gamma
$$

Le domaine de calcul est défini par $-50\leq x,y\leq 50$. A t=0, on impose les conditions initiales suivantes

$$
\left\{\begin{array}{l}
\delta\rho\left(0,x,y\right)=0 \\
\delta u\left(0,x,y\right)=0 \\
\delta v\left(0,x,y\right)=0 \\
\delta p\left(0,x,y\right)=\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)
\end{array}\right.
$$

3.4 Les résultats numériques

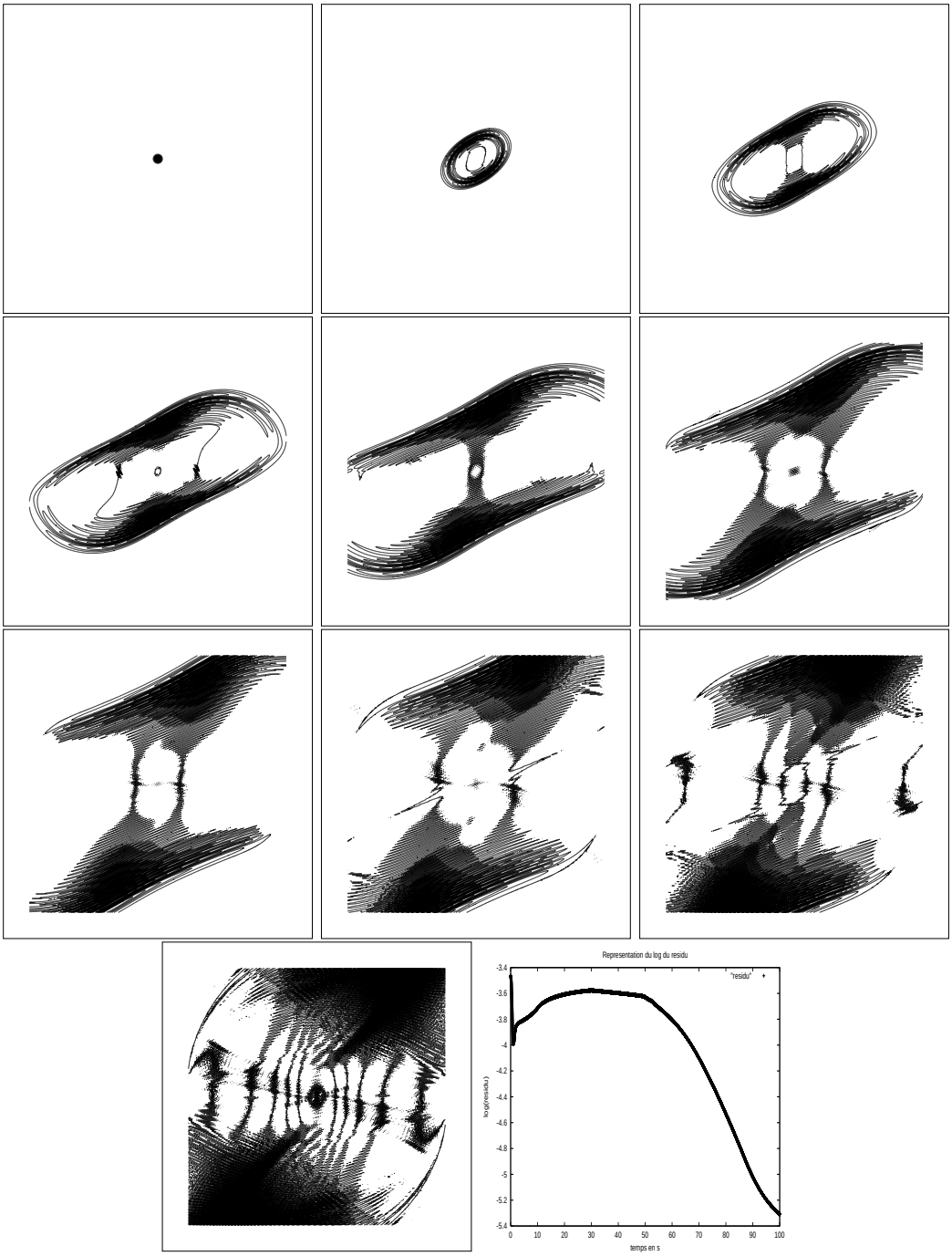

FIG. 17 – *Représentations de δp pour t=0s, 10s ,20s, 30s, 40s, 50s, 60s, 70s, 80s, 100s et du log du résidu pour t variant de 0s à 100s*

3.5 Analyse

Il nous est impossible de critiquer quantitativement les résultats obtenus puisque nous ne connaissons pas la solution exacte d'un tel problème. Nous pouvons cependant faire plusieurs remarques d'ordre qualitatifs:

- Nous pouvons tout d'abord remarquer que la convection de la perturbation est en accord avec la forme de l'écoulement cisaillé.
- Nous pouvons vérifier sur les représentations de δp en t=70 s, 80 s et 100 s l'apparition de réflexions parasites.
- Enfin nous pouvons vérifier, grâce au dernier graphique, que le résidu en t=100 s est de l'ordre de 1% du résidu initial.

Conclusion

Dans ce rapport, nous avons démontré l'existence d'une condition suffisante de stabilité sur maillage quelconque dans le cadre d'un schéma en volumes finis avec flux centrés appliqué aux équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme en deux et trois dimensions d'espace. Pour être plus précis, nous avons montré l'existence d'une énergie ayant la propriété sur maillage non structuré, sous une condition de type CFL, soit de se conserver si le domaine ne comporte pas de parois absorbantes, sinon de décroître à chaque itération temporelle. Les différents cas tests illustrant ce rapport démontrent la potentialité de ce schéma dans le domaine de l'aéroacoustique. En effet nous avons obtenu des résultats de bonne qualité comparativement aux coûts de calculs très faibles et à l'implémentation assez simple, or la littérature existante dans ce domaine regorge de schémas très complexes et très lourds.
Cependant ou plutôt heureusement, de nombreuses améliorations peuvent être apportées à notre schéma, tout d'abord au niveau de la précision en augmentant l'ordre mais surtout aux niveaux des conditions aux limites où nos résultats numériques ne sont pas assez performants. De nombreuses possibilités s'offrent à nous pour remédier à nos problèmes: introduction d'une zone éponge en sortie de domaine de type PML [3, 10], optimisation de notre flux absorbant, utilisation de la méthode Galerkin-discontinue [11]... Cependant nous aimerions conserver la propriété remarquable de notre schéma: son caractère non diffusif sur un maillage non structuré d'un domaine sans parois absorbantes (ce que permet la méthode Galerkin-discontinue). En effet, l'objectif principal est de pouvoir utiliser notre méthode sur des domaines de calculs compliqués d'où la nécessité d'utiliser des maillages non structurés. Evidemment nos deux soucis majeurs restent le passage du domaine uniforme au domaine stationnaire non uniforme et l'introduction de termes sources car bien que notre méthode reste applicable et fiable, comme l'illustre le cas test 5, nous n'avons pour l'instant aucun résultat théorique tangible.

Annexe

Annexe 1: Forme des équations

1.1 Lois de conservation des équations d'Euler instationnaires en 3 dimensions d'espace :
Le système des équations d'Euler sous forme conservative s'écrit dans le cas d'un gaz parfait:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F\left(W\right)}{\partial x}+\frac{\partial G\left(W\right)}{\partial y}+\frac{\partial H\left(W\right)}{\partial z}=0 \tag{21}$$

$$W=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E\end{pmatrix}\quad F\left(W\right)=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ \left(E+p\right)u\end{pmatrix}\quad G\left(W\right)=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ \left(E+p\right)v\end{pmatrix}\quad H\left(W\right)=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho wv\\ \rho w^2+p\\ \left(E+p\right)w\end{pmatrix}$$

avec ρ la masse volumique, u, v et w les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{U}$ et E l'énergie totale par unité de volume.
La pression p est donnée par la loi d'état des gaz parfait:

$$p=\left(\gamma-1\right)\left(E-\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\right)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

1.2 Forme générale de la linéarisation des équations d'Euler :
Dans l'hypothèse de la régularité de la solution W, au second ordre près, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\delta\rho\\ \rho_0\delta u+u_0\delta\rho\\ \rho_0\delta v+v_0\delta\rho\\ \rho_0\delta w+w_0\delta\rho\\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p+\frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)+\rho_0\left(u_0\delta u+v_0\delta v+w_0\delta w\right)\end{pmatrix}\\ +\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho_0\delta u+u_0\delta\rho\\ u_0^2\delta\rho+2u_0\rho_0\delta u+\delta p\\ u_0\rho_0\delta v+v_0\rho_0\delta u+u_0v_0\delta\rho\\ u_0\rho_0\delta w+w_0\rho_0\delta u+u_0w_0\delta\rho\\ u_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p+\frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)+\rho_0\left(u_0\delta u+v_0\delta v+w_0\delta w\right)\right)\\ +\delta u\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0+\frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)\right)\end{pmatrix}\\ +\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho_0\delta v+v_0\delta\rho\\ u_0\rho_0\delta v+v_0\rho_0\delta u+u_0v_0\delta\rho\\ v_0^2\delta\rho+2v_0\rho_0\delta v+\delta p\\ w_0\rho_0\delta v+v_0\rho_0\delta w+w_0v_0\delta\rho\\ v_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p+\frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)+\rho_0\left(u_0\delta u+v_0\delta v+w_0\delta w\right)\right)\\ +\delta v\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0+\frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)\right)\end{pmatrix}\\ +\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\rho_0\delta w+w_0\delta\rho\\ u_0\rho_0\delta w+w_0\rho_0\delta u+u_0w_0\delta\rho\\ v_0\rho_0\delta w+w_0\rho_0\delta v+w_0v_0\delta\rho\\ w_0^2\delta\rho+2w_0\rho_0\delta w+\delta p\\ w_0\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\delta p+\frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)+\rho_0\left(u_0\delta u+v_0\delta v+w_0\delta w\right)\right)\\ +\delta w\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0+\frac{1}{2}\rho_0\left(u_0^2+v_0^2+w_0^2\right)\right)\end{pmatrix}=0\end{array}\right. \tag{22}$$

1.3 Formes particulières et diagonalisation :

- i) Dans le cadre d'un écoulement isentropique nous avons

$$\delta p = c_0^2 \delta\rho$$

Dans le cadre d'un écoulement uniforme quelconque nous avons

$$\delta\rho\,(t,x,y,z) = \delta\rho\,(0,x-u_0t,y-v_0t,z-w_0t) + \frac{1}{c_0^2}\left(\delta p\,(t,x,y,z) - \delta p\,(0,x-u_0t,y-v_0t,z-w_0t)\right)$$

- ii) Dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme en trois dimensions d'espace et en ne tenant pas compte de l'équation sur la masse volumique le système précédent peut s'écrire

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \frac{\partial W}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \frac{\partial W}{\partial y} + \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 \delta u \\ \rho_0 c_0 \delta v \\ \rho_0 c_0 \delta w \\ \delta p \end{pmatrix}$$

De plus pour tout vecteur normé $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$, la matrice $\mathbb{P} = n_x\mathbb{A} + n_y\mathbb{B} + n_z\mathbb{C}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres:

$$\mathbb{P} = \mathbb{T}\mathbb{D}\mathbb{T}^{-1}$$

où

$$\mathbb{D} = diag\left(\vec{U}\cdot\vec{n}, \vec{U}\cdot\vec{n}, \vec{U}\cdot\vec{n} + c_0, \vec{U}\cdot\vec{n} - c_0\right) \qquad \vec{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

- iii) Dans un cadre stationnaire non uniforme en deux dimensions d'espace, nous pouvons également écrire

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}W\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbb{B}W\right) = 0 \qquad \text{avec} \quad W = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0\delta u + u_0\delta\rho \\ \rho_0\delta v + v_0\delta\rho \\ \frac{1}{\gamma-1}\delta p + \frac{1}{2}\delta\rho\left(u_0^2+v_0^2\right) + \rho_0\left(u_0\delta u + v_0\delta v\right) \end{pmatrix}$$

et pour tout vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, la matrice $\mathbb{P} = n_x\mathbb{A} + n_y\mathbb{B}$ s'écrit

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ -u_0v_0n_y + \frac{1}{2}n_x\left((\gamma-1)v_0^2 + (\gamma-3)u_0^2\right) & v_0n_y - u_0(\gamma-3)n_x & u_0n_y - v_0(\gamma-1)n_x & (\gamma-1)n_x \\ -u_0v_0n_x + \frac{1}{2}n_y\left((\gamma-1)u_0^2 + (\gamma-3)v_0^2\right) & v_0n_x - u_0(\gamma-1)n_y & u_0n_x - v_0(\gamma-3)n_y & (\gamma-1)n_y \\ (u_0n_x+v_0n_y)\left(\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)\left(u_0^2+v_0^2\right) - \frac{c_0^2}{\gamma-1}\right) & n_x\left(\frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u_0^2\right) - n_y(\gamma-1)u_0v_0 & n_y\left(\frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)v_0^2\right) - n_x(\gamma-1)u_0v_0 & \gamma(u_0n_x+v_0n_y) \end{pmatrix}$$

De plus quelque soit l'écoulement stationnaire et le vecteur unitaire $\vec{n}$, $\mathbb{P}$ est diagonalisable

$$\mathbb{P} = \mathbb{T}\mathbb{D}\mathbb{T}^{-1}$$

avec

$$\mathbb{D} = diag\left(u_0 n_x + v_0 n_y, u_0 n_x + v_0 n_y, u_0 n_x + v_0 n_y + c_0, u_0 n_x + v_0 n_y - c_0\right)$$

en prenant

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & 1 & 1 \\ -n_y & u_0 n_x + v_0 n_y & u_0 + n_x c_0 & u_0 - n_x c_0 \\ n_x & 0 & v_0 + n_y c_0 & v_0 - n_y c_0 \\ v_0 n_x - u_0 n_y & \frac{1}{2}\left(\left(u_0^2 - v_0^2\right) n_x + 2 u_0 v_0 n_y\right) & \frac{1}{2}\left(u_0^2 + v_0^2\right) + c_0\left(u_0 n_x + v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}\right) & \frac{1}{2}\left(u_0^2 + v_0^2\right) + c_0\left(-u_0 n_x - v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}\right) \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$n_x \neq 0 \quad \text{car} \quad det\left(\mathbb{T}\right) = \frac{2 c_0^3 n_x}{\gamma - 1}$$

sinon en prenant

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & n_y & 1 & 1 \\ -n_y & 0 & u_0 + n_x c_0 & U_0 - n_x c_0 \\ n_x & u_0 n_x + v_0 n_y & v_0 + n_y c_0 & v_0 - n_y c_0 \\ v_0 n_x - u_0 n_y & \frac{1}{2}\left(\left(v_0^2 - u_0^2\right) n_y + 2 u_0 v_0 n_x\right) & \frac{1}{2}\left(u_0^2 + v_0^2\right) + c_0\left(u_0 n_x + v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}\right) & \frac{1}{2}\left(u_0^2 + v_0^2\right) + c_0\left(-u_0 n_x - v_0 n_y + \frac{c_0}{\gamma - 1}\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{car} \quad det\left(\mathbb{T}\right) = \frac{2 c_0^3 n_y}{\gamma - 1}$$

et $\vec{n}$ étant supposé unitaire, nous ne pouvons avoir $(n_x,n_y) = (0,0)$.

Annexe 2

Linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement uniforme en deux dimensions d'espaces :
Le théorème démontré dans le rapport RR-4506 et qui à été généralisé dans ce présent rapport est le suivant

Théorème 3.1 *Dans le cadre de petites perturbations autour d'un écoulement uniforme en deux dimensions d'espace et en ne tenant pas compte de l'équation sur la pression, le système vérifié par les grandeurs physiques est le suivant*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 & c_0 & 0 \\ c_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \frac{\partial W}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad avec \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \delta\rho \\ \rho_0 \delta u \\ \rho_0 \delta v \end{pmatrix}.$$

de plus, le schéma définit par (7) et (8) possède les propriétés suivantes:

- *Il est d'ordre deux en temps et en espace sur un maillage infini régulier*

- *L'énergie définie par*

$$E^n = \sum_i |c_i| \left((X_i^n)^2 + X_i^{n+1} X_i^{n-1} + (Y_i^n)^2 + Y_i^{n+1} Y_i^{n-1} + (Z_i^n)^2 + Z_i^{n+1} Z_i^{n-1} \right)$$

  se conserve sur un maillage infini quelconque
- *Sous la condition suffisante suivante*

$$\frac{|c_i|}{P_i} \geq \Delta t \left(\frac{1}{2} |u_0| + \frac{1}{2} |v_0| + |c_0| \right) \qquad \forall i$$

  l'énergie définie précédemment est une forme quadratique définie positive des variables $X_i^n, X_i^{n+1}, Y_i^n, Y_i^{n+1}, Z_i^n$ *et* $Z_i^{n+1} \quad \forall i$.

■

Références

[1] Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics. ICASE/LaRC, NASA Conference Publication, Hampton, Virginia, october 1994.

[2] Acoustique dans les écoulements. Ecoles cea-edf-inria, INRIA, septembre 2000. support de cours.

[3] J.-P. Berenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physcics*, 1994.

[4] M. Bernacki. Schémas en volumes finis avec flux centrés: application à l'aéroacoustique. Rapport de recherche numéro 4506, INRIA, juillet 2002.

[5] C. Bogey. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides.* PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2000.

[6] C.Bailly et J.-M.Clarisse C.Bogey. Workshop conditions aux limites numériques: conditions non réfléchissantes en aéroacoustique. 2002.

[7] R. Dautray et J.L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, numéro 9.* MASSON, 1984 et 1985.

[8] M. Feistauer. *Mathematical methods in fluid dynamics.* Number 67 in Pitman Monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics 67. Longman Scientific Technical, 1993.

[9] E. Godlewski and P.A. Raviart. Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Technical Report 118, Applied Mathematical Sciences, 1996.

[10] T. Gonzalez. *Contributions aux conditions d'interface et conditions aux limites pour le système d'équations Euler compressible.* PhD thesis, Université Paris 6, 2000.

[11] M. A. Hulsen. The discontinuous galerkin method with explicit runge-kutta time integration for hyperbolic and parabolic systems with source terms. Delft University of Technology, Laboratory for Aero and Hydrodynamics, November 1991. MEMT 19.

[12] I.Abalakin, A.Dervieux, and T.Kozubskaya. A vertex centered high order muscl scheme applying to linearised euler acoustics. Rapport de recherche numéro 4459, INRIA, juillet 2002.

[13] D. Kröner. Absorbing boundary conditions for the linearized euler equations in 2-d. Technical Report 195, Mathematics of computation, july 1991. volume 57.

[14] R.S. Phillips and L. Sarason. Singular symmetric positive first order differential operators. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15(2), 1966.

[15] R.Carpentier, A.dLa Bourdonnaye, and B.Larrouturou. On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods. Technical Report 94-26, INRIA,CERMICS, 1994.

[16] R.F.Warming and F.Hyett. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *J.Comp.Phys.*, 14(2):159, 1974.

[17] S.Piperno, M.Remaki, and L.Fezoui. A centered second-order finite volume scheme for the heterogeneous maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes. Rapport de recherche numéro 4161, INRIA, avril 2001.

[18] C.K.W. Tam and J.C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of computational physcics*, (107):262–281, 1993.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399