Métrique continue et optimisation de maillage

David Leservoisier, Paul-Louis George, Alain Dervieux

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Métrique continue et optimisation de maillage

David Leservoisier- Paul Louis George- Alain Dervieux

No 4172

Avril 2001

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4172--FR

Métrique continue et optimisation de maillage

David Leservoisier*- Paul Louis George†- Alain Dervieux‡

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4172 — Avril 2001 — 24 pages

Résumé : On propose une modélisation fonctionnelle du problème du maillage optimal en P^1-continu pour représenter dans L^2 une fonction du plan deux fois continûment dérivable ; cette modélisation repose sur un modèle fonctionnel de maillage, la "métrique continue".

Mots-clé : maillages, adaptation, approximation, interpolation, compression, métrique.

(Abstract: pto)

* SNECMA, Centre de Villaroche, 77550 Moissy Cramayel, FRANCE
† INRIA, BP 105, 78153 Le Chesnais Cedex, FRANCE
‡ INRIA, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, FRANCE

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

Continuous metrics and mesh optimization

Abstract: This paper describes a functional analysis modelisation of the problem of the optimal mesh in continuous P^1 for representing in L^2 a twice continuous differentiable function defined on the plan ; this relies on an abstract mesh model, the "continous metrics".

Key-words: mesh, adaptation, approximation, interpolation, compression, metrics.

Table des matières

1 Introduction

Dans la mesure où l'utilisation d'un maillage adapté au calcul en cours procure en général un important gain en efficacité, il est naturel de considérer le maillage comme une des inconnues du système discret à résoudre. Nous constatons alors que chercher un maillage adapté à une solution à calculer (sur ce maillage) est une démarche non-linéaire, même si l'Equation aux Dérivées Partielles (EDP) à résoudre est linéaire. Compte tenu des puissances de calcul actuelles, cette non-linéarité (le maillage dépend de la solution, celle-ci dépendant du maillage) ne doit pas nous conduire à ne pas envisager ce type de problème.

En revanche, une famille de maillages non-isotopologiques [1] ne se plonge pas facilement dans un espace vectoriel, et ceci est un handicap pour l'analyse autant que pour la résolution numérique effective.
Rappelons que dans le cas isotopologique, il est loisible dans un contexte discret de manipuler les coordonnées des N nœuds du maillage, ou même dans un contexte continu, de manipuler la carte déformant le maillage à partir d'un maillage de référence ; il est alors possible de définir de manière précise le maillage que l'on considèrera comme adapté à la solution (voir par exemple [6],[8]).

Dans le cas non-isotopologique, la situation est moins claire. Un événement aussi banal qu'un échange de diagonale est à la fois trivial du point de vue manipulation de maillage, de conséquence souvent négligeable au regard du niveau de précision de l'approximation, et pourtant difficile à formaliser. Optimiser un maillage dans de telles conditions conduit à utiliser des techniques booléennes (recuit simulé, etc.) très utiles mais souvent peu efficaces face aux techniques usuelles de l'analyse numérique différentiable.

Par ailleurs, il semble superflu, dans beaucoup de cas, de distinguer deux maillages partout de finesse comparable, quoique non identiques, puisque la précision d'approximation résultant de leur emploi est essentiellement la même.

Nous proposons d'explorer une voie possible permettant de remplacer une classe de maillages par la simple spécification de la finesse locale de ces maillages. Pour cela, nous nous inspirons des travaux réalisés par plusieurs équipes spécialistes du maillage en tétraèdres et notamment du maillage adaptatif reposant sur des métriques discrètes ([4], [5], [2]) .

La manipulation d'une *métrique continue* permet de se plonger dans un espace vectoriel fonctionnel du même type que celui dans lequel se trouve la solution continue de l'EDP. Un tel progrès est déjà mesurable sur les démarches d'*interpolation adaptative*, dans lesquelles on cherche à représenter le plus fidèlement possible sur un maillage adapté une fonction

1. Plusieurs maillages de topologie différente: un maillage est défini par sa topologie et sa métrique. La topologie est décrite par un ensemble d'entiers (nombre d'éléments, connectivité, etc.), tandis que la métrique est décrite par des nombres réels (coordonnées des nœuds, etc.).

régulière. Nous illustrons, dans ce contexte, une conséquence du “plongement hilbertien” en exhibant une métrique optimale par le calcul des variations.

2 Métrique dans un intervalle

Après quelques définitions relatives aux métriques, on rappelle quelques résultats sur l'erreur d'interpolation avant d'en montrer une application permettant de construire une métrique dite optimale.

2.1 Définitions

On appelle *métrique*, un ensemble de données permettant de spécifier la finesse en tout point d'un maillage non-nécessairement uniforme d'un intervalle.

Une métrique sur l'intervalle $[a,b]$ de la droite réelle est une fonction continue de la variable spatiale $x \in [a,b]$, à valeurs *strictement positives.* Elle permet de spécifier la longueur du segment $AB = [a,b]$ dans la métrique $\mathcal{M}$ par la relation suivante :

$$L_{\mathcal{M}}(AB) = \int_a^b \sqrt{\mathcal{M}} \;\; ds \tag{1}$$

Plus exactement, on dira qu'un maillage (ou subdivision) à N points
$x_0 = a, x_1, ...x_N = b$ de l'intervalle *respecte idéalement la métrique* $\mathcal{M}$ s'il respecte la relation de *longueur unitaire* :

pour tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, *on a* $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\mathcal{M}} dx = 1$.

La relation précédente s'exprime également à partir de la *taille de maille*, $m = \mathcal{M}^{-1/2}$ via l'égalité :

pour tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, *on a* $\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1/m \; dx = 1$,

ou encore à partir de la densité de nœuds, $d = 1/m$:

pour tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, *on a* $\int_{x_i}^{x_{i+1}} d \; dx = 1$.

De même que l'on définit la complexité d'un algorithme par le nombre d'opérations à effectuer, la complexité d'une métrique correspond au nombre de mailles du maillage qui lui correspond. On appelle donc *complexité de la métrique* $\mathcal{M}$ la quantité suivante :

$$C(\mathcal{M}) = \int_a^b \sqrt{\mathcal{M}} dx = \int_a^b 1/m dx = \int_a^b d \; dx. \tag{2}$$

On vérifie que si un maillage à $N+1$ points $x_0 = a, x_1, ... x_N = b$ de l'intervalle *respecte idéalement la métrique* $\mathcal{M}$, alors :

$$\int_a^b m^{-1}(x)\, dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} m^{-1}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N}(1) = N. \tag{3}$$

Un tel maillage n'existe donc que si l'intégrale de m^{-1} sur $[a,b]$ est un nombre entier supérieur ou égal à l'unité.
Réciproquement, dès que la métrique (supposée donc strictement positive) a une complexité $C(\mathcal{M})$ entière et plus grande que l'unité, il existe un maillage (et un seul) qui respecte idéalement cette métrique. Il est défini par :

$$x_0 = a, \tag{4}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\mathcal{M}} dx = 1\ , \tag{5}$$

la deuxième équation permettant de définir de manière unique chaque x_i.

2.2 Erreur d'interpolation

Puisque la métrique détermine la finesse locale du maillage (ou dans certains cas des maillages) qui la respecte, elle détermine aussi plus ou moins l'erreur d'interpolation commise sur ce(s) maillage(s); nous proposons une mesure de cette erreur.

On considère:

- Un maillage uniforme de finesse h tel que $x_0 < x_1 < ... < x_N$ avec $x_i = x_0 + \frac{i}{N-1}(x_N - x_0)$,
- Une fonction u définie sur un segment $[a,b]$, $a = x_i, b = x_{i+1}$, fonction inconnue supposée assez régulière,
- $h = b - a$, h n'est pas nécessairement petit,
- $\Pi_h u$ l'interpolation de type $\mathcal{P}_1$ de u sur chaque maille $[a,b]$ du maillage,
- On pose que $\Pi_h u(a) = u(a)$ et $\Pi_h u(b) = u(b)$.

On définit l'erreur d'approximation comme l'écart entre les solutions exactes des modèles continu et discret [3]. Elle est donnée par la formule suivante :

$$e = |u - \Pi_h u|. \tag{6}$$

On se propose de majorer cette erreur sur l'intervalle $[a, b]$. Pour x entre a et b, on sait qu'il existe une valeur t_1 comprise en 0 et 1 et dépendant de b et de cet x telle que :

$$e(a) = (u-\Pi_h u)(a) = (u-\Pi_h u)(x) + (a-x)(u-\Pi_h u)'(x) + \frac{(a-x)^2}{2}u''(x+t_1(a-x)), \quad (7)$$

On écrit de même $e = (u-\Pi_h u)$ en b, pour un x entre a et b, alors il existe un t_2 compris en 0 et 1, dépendant de b et de cet x tel que :

$$e(b) = (u-\Pi_h u)(b) = (u-\Pi_h u)(x) + (b-x)(u-\Pi_h u)'(x) + \frac{(b-x)^2}{2}u''(x+t_2(b-x)), \quad (8)$$

Majorer $e = (u - \Pi_h u)$ revient à chercher un extremum ou encore un point x tel que :

$$e'(x) = (u - \Pi_h u)'(x) = 0. \quad (9)$$

Reprenant les deux développements (7) et (8) en remarquant que $e(a) = e(b) = 0$, on a, pour ce point x précis :

$$0 = (u - \Pi_h u)(x) + \frac{(a-x)^2}{2}u''(x + t_1(a - x)), \quad (10)$$

$$0 = (u - \Pi_h u)(x) + \frac{(b-x)^2}{2}u''(x + t_2(b - x)), \quad (11)$$

Ici, t_1 et t_2 dépendent de ce x particulier. En additionnant, on a :

$$0 = 2(u - \Pi_h u)(x) + \frac{(a-x)^2}{2}u''(x + t_1(a - x)) + \frac{(b-x)^2}{2}u''(x + t_2(b - x)), \quad (12)$$

Soit encore :

$$2(u - \Pi_h u)(x) = -\frac{(a-x)^2}{2}u''(x + t_1(a - x)) - \frac{(b-x)^2}{2}u''(x + t_2(b - x)), \quad (13)$$

D'où :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{2}(|\frac{(a-x)^2}{2}| + |\frac{(b-x)^2}{2}|)M, \quad (14)$$

où M est un majorant de $|u''|$ sur I. Alors :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{2}(\frac{(a-x)^2}{2} + \frac{(b-x)^2}{2})M. \quad (15)$$

Prenons le maximum à droite :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in I}(\frac{(a-\xi)^2}{2} + \frac{(b-\xi)^2}{2}))M. \tag{16}$$

Le maximum est atteint pour $\xi_0 = \frac{(a+b)}{2}$, il vient, $\forall \xi \in I$:

$$|e(\xi)| = |(u - \Pi_h u)(\xi)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M. \tag{17}$$

2.3 Application avec la métrique optimale

2.3.1 Conditions d'optimalité en norme L^α

Au lieu de chercher un maillage adapté, nous allons chercher des métriques adaptées, avec l'espoir que les maillages les respectant sont aussi de bons maillages. Les métriques adaptées sont celles pour lesquelles les *erreurs* sont petites : *modélisons* l'erreur commise sur une métrique $\mathcal{M}$ dans le cas d'une interpolation P_1. L'analyse présentée au paragraphe précédent suggère le modèle suivant (on néglige le facteur 8):

$$|e_{\mathcal{M}}(x)| = (d_{\mathcal{M}}(x))^{-2}|u''(x)|. \tag{18}$$

où $d_{\mathcal{M}}(x)$ est la densité en nœuds du maillage, c'est à dire l'inverse de la taille de maille $m_{\mathcal{M}}(x)$. On cherche à minimiser par rapport à la métrique $\mathcal{M}$ la norme L^α $(0 < \alpha < \infty)$ de $e_{\mathcal{M}}$, ce qui revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mathcal{M}} \ (|e_{\mathcal{M}}(x)|)^\alpha_{L^\alpha} = \min_{\mathcal{M}} \ \frac{1}{2} \int_a^b (d_{\mathcal{M}}(x)^{-2}|u''(x)|)^\alpha ds. \tag{19}$$

Si $\mathcal{M}_{opt}$ désigne la solution de (19) sans contrainte sur la finesse du maillage, on obtient aussitôt que $\mathcal{M}_{opt}(x) = 0$, c'est à dire $d_{opt}(x) = +\infty$, $\forall x$. En effet les meilleurs maillages sont ceux qui sont infiniment fins partout et produisent donc une erreur nulle partout. Nous cherchons en fait le meilleur maillage *à nombre de points donné.* Dans notre formalisme, ceci se traduit par l'ajout d'une contrainte sur la complexité totale du maillage avec N donné :

$$C(M) = \bar{C}(d) = \int_a^b d(x)dx \leq N. \tag{20}$$

Pour simplifier, on admet que les maillages avec $C(M)$ plus petit que N, c'est-à-dire plus grossiers, sont systématiquement moins bons que le meilleur maillage de complexité N. La contrainte (20) est remplacée par une contrainte égalité et devient donc parfaitement linéaire.
La solution du problème d'optimisation (19) admet un ou plusieurs minima locaux satisfaisant la relation d'optimalité que nous allons expliciter. Si on dérive la fonctionnelle dans (19) par rapport à d, on obtient les *conditions d'optimalité* :

$$-2\alpha \int_a^b d^{-2\alpha-1} \left(|u''|\right)^\alpha \delta d \; ds \geq 0 \,, \; \forall \delta d : \int_a^b \delta d = 0. \tag{21}$$

Le seul optimum local $\mathcal{M}_{opt}$ satisfait donc l'égalité :

$$d_{opt}(x) = Cte. |u''(x)|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} \tag{22}$$

ce qui compte tenu de la contrainte $\bar{C}(d) = N$ nous donne :

$$d_{opt}(x) = \frac{N}{\int |u''|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds} \; |u''(x)|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}. \tag{23}$$

Il est intéressant pour la suite de revenir à la taille de maille m :

$$m_{opt}(x) = \frac{\int |u''|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds}{N} \; |u''(x)|^{\frac{-\alpha}{2\alpha+1}}. \tag{24}$$

Remarque : *la taille de maille optimale est inversement proportionnelle au nombre total de maille imposé, ce qui est rassurant ; elle n'est définie par (24) que si la dérivée seconde u'' ne s'annulle pas. Dans les cas pratiques, il faudra prendre de préférence un modèle d'erreur jamais nul, par exemple en remplaçant $|u''|$ par $\max(\varepsilon, |u''|)$, avec ε petit et strictement positif.*

Remarque : *L'existence d'un minimum global n'est pas vérifiée faute de compacité de la boule unité de L^1 pour une norme dans laquelle notre fonctionnelle serait suffisamment régulière. Les résultats précédents sont donc formels dans le contexte continu.*

Par ailleurs nous pouvons expliciter la valeur prise par la fonctionnelle à son optimum (contraint) :

$$(\mathcal{E}_\alpha^{opt})^\alpha \;=\; 1/2 \left(\frac{\int |u''|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds}{N} \right)^{2\alpha} \int_a^b |u''(s)|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds. \tag{25}$$

2.3.2 Exemples d'application à l'adaptation de maillage

On peut appliquer cette formule pour différentes normes :

- Dans le cas de la norme L^1:
  l'exposant α est pris égal à 1, ce qui correspond à la valeur prise généralement en imagerie ; on tire :

$$m_{opt}(x) \;=\; \frac{\int |u''|^{1/3} ds}{N} \; |u''(x)|^{-1/3} \tag{26}$$

– Dans le cas de la norme L^2:
L'option α égal à 2 est la plus naturelle lorsqu'on s'intéresse à l'approximation des équations aux dérivées partielles; on tire de manière similaire :

$$m_{opt}(x) \;=\; \frac{\int |u''|^{2/5} ds}{N} |u''(x)|^{-2/5} \;. \tag{27}$$

– Dans le cas de la norme L^∞:
on peut *formellement* faire tendre vers l'infini le paramètre α dans le résultat de l'analyse variationnelle précédente :

$$m_{opt}(x) \;=\; \frac{\int |u''|^{1/2} ds}{N} |u''(x)|^{-1/2} \;. \tag{28}$$

Remarque : *Dans le cas L^∞, il n'est pas possible de passer à la limite dans l'expression de la fonctionnelle; en revanche, l'introduction de l'expression limite pour d_{opt} :*

$$d_{opt}(x) = \frac{N}{\int |u''|^{\frac{1}{2}} ds} \; |u''(x)|^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

dans l'expression de l'erreur locale (18) donne une erreur uniforme en espace :

$$|e_{\mathcal{M}}(x)| = (d(x))^{-2} |u''(x)| = \frac{(\int |u''|^{\frac{1}{2}} ds)^2}{N^2}, \tag{30}$$

ce qui concorde bien avec la propriété d'équirépartition de l'erreur locale bien connue pour ce contexte. Il est à noter que, de manière assez contre-intuitive, c'est la norme $\mathcal{L}^{1/2}$ de la dérivée seconde qui dimensionne l'erreur optimale.

Si on prend la racine α-ième de l'expression en (25), on obtient :

$$\mathcal{E}_\alpha^{opt} \;=\; 1/2 \left(\frac{\int |u''|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds}{N} \right)^2 \; (\int_0^1 |u''(s)|^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}} ds)^{1/\alpha}, \tag{31}$$

soit à la limite à nouveau :

$$\mathcal{E}_\infty^{opt} \;=\; \frac{1}{N^2} \left(\int |u''|^{\frac{1}{2}} ds \right)^2 . \tag{32}$$

Remarque : *L'exposant de la dérivée seconde est donc plus grand pour une norme plus sévère, avec un plafond à 1/2. Si on prend l'hypothèse d'une interpolation plus précise, d'ordre κ, cet exposant prend une valeur plus faible, $\frac{\alpha}{\kappa\alpha+1}$, avec une valeur plafond de $1/\kappa$.*

3 Le cas 2D

Les erreurs commises en 2D par interpolation linéaire dépendent de la finesse du maillage dans les différentes directions géométriques. Nous nous proposons dans les paragraphes ci-dessous de décrire la relation qui lie la métrique à l'erreur d'interpolation en partant de l'article [1].

3.1 Définitions et formulations

3.1.1 Principales notations

Soit u une fonction deux fois continûment dérivable d'un domaine régulier Ω de R^2 dans R.

À toute triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω correspond une interpolation $\mathcal{P}^1$ de u, que nous noterons $\Pi_h u$.

Pour l'analyse locale d'erreur:

- On considère $K = [a, b, c]$, un triangle tout sauf petit (si h_{max} est le diamètre de K, h_{max} ne tend pas vers zéro),
- On considère u, fonction de R^2 dans R de classe $\mathcal{C}^2$, supposée assez régulière,
- On note $\Pi_h u$, l'interpolée linéaire de u sur K,
- On suppose que u et $\Pi_h u$ sont identiques en a, b et c.

Par la suite, K est la maille analysée, u est la solution inconnue du problème étudié et $\Pi_h u$ est la solution P^1 calculée. Le but est, comme en une dimension, de majorer l'erreur e définie par $e = u - \Pi_h u$ sur $K = [a, b, c]$.

3.1.2 Matrice hessienne $\mathcal{H}$

Si on effectue un développement standard de u à l'aide de la formule de Taylor, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u(\vec{x} + \delta\vec{x}) &= u(\vec{x}) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}).\delta\vec{x} && (33) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}).\delta\vec{x}.\delta\vec{x} + \ldots && (34) \end{aligned}$$

avec les notations :

$$\delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{x}).\delta\vec{x}.\delta\vec{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma \\ \zeta \end{pmatrix} = (a.\alpha + b.\beta)\,.\gamma + (b.\alpha + c.\beta)\,.\zeta \tag{36}$$

On observe que le produit des produits des trois composants ci-dessus donne un scalaire. On définit le hessien comme la matrice dont les éléments sont les dérivées secondes de la fonction u étudiée. On obtient la matrice suivante :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \tag{37}$$

A partir du hessien $\mathcal{H}$, on va construire la métrique d'un maillage adapté à la fonction u. Sachant que $\mathcal{H}$ est diagonalisable, $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} * \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} * \mathcal{R}^{-1} \tag{38}$$

Sachant que $\mathcal{R}$ est la matrice de rotation permettant de passer du repère de coordonnées (x, y) au repère de coordonnées (ξ, η). On peut écrire la matrice hessienne comme suit :

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{R}\widehat{\mathcal{H}}\mathcal{R}^{-1}. \tag{39}$$

Cela signifie que :

$$\lambda_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{40}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{41}$$

3.2 Métrique $\mathcal{M}$

Pour le cas 2D, une métrique $\mathcal{M}$ est une matrice symétrique et définie positive, contenant les dérivées partielles du "senseur" utilisé. En tout point (x, y) la métrique s'écrit à l'aide des matrices de passage $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$:

$$\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_\xi}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_\eta}^2 \end{pmatrix} \mathcal{R}, \tag{42}$$

où $\mathcal{R}, m_\xi, m_\eta$ dépendent de x et y.

Les coefficients m_ξ, et m_η sont les *tailles de maille locales* dans les deux directions principales ξ et η définies par la rotation $\mathcal{R}$.

Comme en une dimension, la longueur $L_{\vec{u}}$ du vecteur $\vec{u}$ dans la métrique $\mathcal{M}$ est définie comme suit :

$$L_{\vec{u}} = \int_0^1 \sqrt{\vec{u}.\mathcal{M}.\vec{u}}\ \ ds. \tag{43}$$

Les quantités $\frac{1}{m_\xi}$ et $\frac{1}{m_\eta}$ représentent respectivement le nombre de mailles par mètre suivant l'axe ξ et η.

3.3 Complexité $C(\mathcal{M})$

Tout comme dans le cas 1D, on associe à une métrique $\mathcal{M}$, la complexité $C(\mathcal{M})$. Elle se détermine à partir de ε, m_ξ et m_η, sur une surface de ε^2 m^2. On a :

$$C(\mathcal{M}) = \int_\Omega \sqrt{\mathcal{M}} ds = \int_\Omega \frac{1}{m_\xi}\frac{1}{m_\eta}\, dxdy. \quad (44)$$

Soit $d(\xi, \eta)$ la densité locale de nœuds pour la métrique $\mathcal{M}$. Elle est égale à $\frac{1}{m_\xi}.\frac{1}{m_\eta}$. On peut donc reprendre le même type de calcul que dans le cas à une dimension.

Lemme: Si un maillage à $N+1$ points dans chaque direction respecte idéalement la métrique $\mathcal{M}$ alors :

$$\int_0^1 m_\xi^{-1}.m_\eta^{-1}\,(s)\,ds = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} d\,(s)\,ds = \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N (1) = N^2. \quad (45)$$

3.4 Une majoration brutale

On écrit $(u - \Pi_h u)$ en a développé par rapport à un x quelconque du triangle K :

$$(u - \Pi_h u)(a) = (u - \Pi_h u)(x) + < \vec{xa}, \nabla(u - \Pi_h u)(x) > + \frac{1}{2} < \vec{ax}, H_u(x + t_1\vec{xa})\vec{ax} >, \quad (46)$$

signifiant qu'il existe t_1 entre 0 et 1, dépendant de x et de a, réalisant cette égalité (on note $< \vec{v}, H(.)\vec{v} >$ le produit scalaire pour l'expression $H(.)$). De même, pour b et c, et toujours sur x, on trouve :

$$(u - \Pi_h u)(b) = (u - \Pi_h u)(x) + < \vec{xb}, \nabla(u - \Pi_h u)(x) > + \frac{1}{2} < \vec{bx}, H_u(x + t_2\vec{xb})\vec{bx} >, \quad (47)$$

$$(u - \Pi_h u)(c) = (u - \Pi_h u)(x) + < \vec{xc}, \nabla(u - \Pi_h u)(x) > + \frac{1}{2} < \vec{cx}, H_u(x + t_3\vec{xc})\vec{cx} > . \quad (48)$$

On cherche à majorer $e = (u - \Pi_h u)$, donc on cherche un point x où l'extremum est atteint. Si x est dans K (l'autre situation étant brièvement décrite plus bas), alors x est tel que :

$$\nabla(u - \Pi_h u)(x) = 0, \quad (49)$$

soit encore :

$$< v\vec{e}c, \nabla(u - \Pi_h u)(x) >= 0, \quad (50)$$

pour tout $v\vec{e}c$ dans R^2 ou dans K.

Reprenant les trois développements ci-dessus et comme $e(a) = e(b) = e(c) = 0$, on obtient pour ce point précis et pour les t_i correspondants :

$$
\begin{aligned}
0 &= (u-\Pi_h u)(x) + \frac{1}{2} < \vec{ax}, H_u(x+t_1\vec{xa})\vec{ax} >, &(51)\\
0 &= (u-\Pi_h u)(x) + \frac{1}{2} < \vec{bx}, H_u(x+t_2\vec{xb})\vec{bx} >, &(52)\\
0 &= (u-\Pi_h u)(x) + \frac{1}{2} < \vec{cx}, H_u(x+t_3\vec{xc})\vec{cx} > . &(53)
\end{aligned}
$$

En additionnant, on a :

$$
\begin{aligned}
0 &= 3(u-\Pi_h u)(x) &(54)\\
&+\frac{1}{2} < \vec{ax}, H_u(x+t_1\vec{xa})\vec{ax} > &(55)\\
&+\frac{1}{2} < \vec{bx}, H_u(x+t_2\vec{xb})\vec{bx} > &(56)\\
&+\frac{1}{2} < \vec{cx}, H_u(x+t_3\vec{xc})\vec{cx} > . &(57)
\end{aligned}
$$

Soit M tel que :

$$M = \max_{x\in K}\left(\max_{v\vec{e}c\in R^2} \frac{|v\vec{e}c, H_u(x)v\vec{e}c|}{||v\vec{e}c||^2}\right). \quad (58)$$

Alors :

$$|(u-\Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{6}\left(||\vec{ax}||^2 + ||\vec{bx}||^2 + ||\vec{cx}||^2\right) M. \quad (59)$$

Par définition, on a :

$$x = \lambda_a a + \lambda_b b + \lambda_c c, \quad (60)$$

avec :

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 1. \quad (61)$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\vec{ax} &= \lambda_b\vec{ab} + \lambda_c\vec{ac}, &(62)\\
\vec{bx} &= \lambda_c\vec{bc} + \lambda_a\vec{ba}, &(63)\\
\vec{cx} &= \lambda_a\vec{ca} + \lambda_b\vec{cb}. &(64)
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
||\vec{ax}||^2 + ||\vec{bx}||^2 + ||\vec{cx}||^2 &\leq (\lambda_a^2+\lambda_b^2)||\vec{ab}||^2 &(65)\\
&+ (\lambda_a^2+\lambda_c^2)||\vec{ac}||^2 &(66)
\end{aligned}
$$

$$+ \quad (\lambda_b^2 + \lambda_c^2)||\vec{bc}||^2 \tag{67}$$
$$+ \quad 2(\lambda_a\lambda_b)| < \vec{ca}, \vec{cb} > | \tag{68}$$
$$+ \quad 2(\lambda_a\lambda_c)| < \vec{ba}, \vec{bc} > | \tag{69}$$
$$+ \quad 2(\lambda_b\lambda_c)| < \vec{ab}, \vec{ac} > |. \tag{70}$$

Notons L la longueur de l'arête la plus grande, alors :

$$||\vec{ax}||^2 + ||\vec{bx}||^2 + ||\vec{cx}||^2 \leq 2(\lambda_a^2 + \lambda_b^2 + \lambda_c^2 + \lambda_a\lambda_b + \lambda_a\lambda_c + \lambda_b\lambda_c)L^2. \tag{71}$$

Il est facile de voir que l'extremum est atteint en

$$\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \frac{1}{3} \tag{72}$$

Par suite, le résultat cherché est :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{2}{9} L^2 M. \tag{73}$$

Ce résultat suggère la forme de la majoration cherchée en toute dimension. Soit d la dimension, on trouve :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{1+d}\left(\frac{d(d+1)}{(d+1)^2} + 2\frac{d(d-1)}{2}\frac{d+1}{d+1}^2\right) L^2 M = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1+d}\right)^2 L^2 M. \tag{74}$$

Revenons au cas où l'extremum n'est pas atteint dans K. Alors, nécessairement, il correspond à une arête de K, supposons que ce soit l'arête ab. Le gradient s'annule donc selon $\vec{ab}$ et par suite, on a :

$$\begin{aligned} 0 = 2(u - \Pi_h u)(x) \quad &+ \quad \frac{1}{2} < \vec{ax}, H_u(x + t_1\vec{xa})\vec{ax} > \\ &+ \quad \frac{1}{2} < \vec{bx}, H_u(x + t_2\vec{xb})\vec{bx} > . \end{aligned} \tag{75}$$

Soit M tel que :

$$M = \max_{x \in \vec{ab}} \left(\max_{v\vec{e}c \in ab} \frac{| < v\vec{e}c, H_u(x)v\vec{e}c > |}{||v\vec{e}c||^2} \right). \tag{76}$$

Alors :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{4}\left(||\vec{ax}||^2 + ||\vec{bx}||^2\right) M. \tag{77}$$

Comme $x = \lambda_a a + \lambda_b b$, on retrouve la majoration établie en une dimension :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{8}\left(||\vec{ab}||^2\right) M. \tag{78}$$

Et donc :

$$|(u - \Pi_h u)(x)| \leq \frac{1}{8} L^2 M. \tag{79}$$

Ce résultat est évidemment meilleur que celui de la formule (73).

Le résultat trouvé suscite, pour le moins, deux remarques importantes. En premier lieu, M est pratiquement impossible ou délicat à trouver (Cf. le cas de la dimension un). En second lieu, la nature de l'expression reste isotrope. Par suite, il est nécessaire d'analyser plus finement la méthode d'estimation. Compte tenu de la nature isotrope du résultat, l'exploitation de cette forme d'estimateurs peut conduire à un maillage inutilement fin. Selon (73), imposer un écart de e, donne pour L :

$$L^2 \leq \frac{9e}{2M}, \tag{80}$$

en remarquant que si M est nul, toute valeur de L convient. Par suite, selon la valeur de h_{max}, le diamètre de K par rapport à cette valeur de L, on peut savoir si le triangle K est acceptable, trop petit ou trop grand. En conséquence et selon le cas, une adaptation peut être envisagée. En pratique, la difficulté réside, comme en une dimension, dans l'évaluation de M. Plusieurs techniques permettent une telle évaluation, rendant ainsi cette approche opérationnelle. Néanmoins, compte tenu de la nature isotrope du résultat, l'exploitation de cette forme d'estimateur peut conduire à un maillage inutilement fin. En effet, M est la plus grande des valeurs propres de H_u (en tout point de K) et par suite L est la taille liée à cette valeur. En conséquence, un phénomène anisotrope sera traité de manière isotrope en imposant, dans toutes les directions, une taille égale à la plus petite des tailles liées aux valeurs propres.

3.5 Une majoration de nature anisotrope

Suite aux observations ci-dessus, il est nécessaire d'affiner l'analyse afin d'exhiber des informations directionnelles. On suppose que a est le *site* de x (i.e., x est plus près de a que de b ou c) le point où l'écart maximum est atteint. On suppose de plus que x est dans K (et donc non atteint sur une arête, cf. ci-dessous). On note alors a' le point d'intersection de ax avec l'arête opposée à a, c'est-à-dire l'arête bc de K. On développe e en a à partir de x en utilisant le reste intégral :

$$\begin{aligned} e(a) &= (u - \Pi_h u)(a) = && (81)\\ &\quad (u - \Pi_h u)(x) + < \vec{xa}, \nabla(u - \Pi_h u)(x) > + && (82)\\ &\quad \int_0^1 (1-t) < \vec{xa}, H_u(x + t\vec{xa})\vec{ax} > dt. && (83) \end{aligned}$$

Comme a est le *site* de x, le λ, tel que $\vec{ax} = \lambda \vec{aa'}$, est plus petit que $\frac{2}{3}$ et on a :

$$|e(x)| = |\int_0^1 (1-t)\lambda^2 < \vec{aa'}, H_u(a + t\vec{xa})\vec{aa'} > dt|, \tag{84}$$

$$|e(x)| \leq \frac{4}{9}|\int_0^1 (1-t) < \vec{aa'}, H_u(a + t\vec{xa})\vec{aa'} > dt|, \tag{85}$$

$$|e(x)| \quad \leq \quad \frac{4}{9}|\int_0^1 (1-t)dt| \max_{t\in[0,1]} | < a\vec{a}', H_u(a+tx\vec{a})a\vec{a}' > |, \tag{86}$$

donc :

$$|e(x)| \leq \frac{2}{9}| \max_{y\in a\vec{a}'} |a\vec{a}', H_u(y)a\vec{a}' > |, \tag{87}$$

ou encore :

$$|e(x)| \leq \frac{2}{9}| \max_{y\in K} |a\vec{a}', H_u(y)a\vec{a}' > |. \tag{88}$$

Notons que la formule de récurrence suggérée plus haut apparait ici plus directement. La constante d'erreur est en effet :

$$\lambda^2|\int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d+1}\right)^2. \tag{89}$$

Le cas où x est sur une arête, par exemple l'arête ab, conduit à la même majoration :

$$|e(x)| \leq \frac{1}{8}\max_{y\in ab} | < \vec{ab}, H_u(y)\vec{ab} > |, \tag{90}$$

qui peut, formellement, s'écrire comme ci-dessus (avec $a' = b$ et en notant que $\frac{1}{8} < \frac{2}{9}$).

3.6 Minimisation de l'erreur d'interpolation (I)

Penchons-nous d'abord sur la recherche de métriques optimales dans le cas de maillages *isotropes*, c'est à dire sans étirement.

On s'intéresse donc à des maillages dont la finesse locale est définie par un seul paramètre, la taille de maille $m(x,y)$ ou la densité de nœuds par unité de surface $d(x,y) = 1/m^2(x,y)$. La complexité d'un tel maillage est donnée par:

$$C(\mathcal{M}) = \int_\Omega d(x,y)\ dxdy. \tag{91}$$

Par ailleurs, compte tenu de l'estimation "brutale" précédente, nous proposons de modéliser l'erreur locale d'interpolation comme suit:

$$e_{\mathcal{M}}(x,y) \ = m^2(x,y)M(x,y) \ = \ d^{-1}(x,y)M(x,y)\ . \tag{92}$$

où M, introduit plus haut, est la valeur absolue de la plus grande valeur propre en valeur absolue du Hessien local de u.

On se propose de minimiser la norme dans $\mathcal{L}^\alpha$ de cette erreur sous la contrainte d'une complexité fixée à N^2:

$$\min_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} M^{\alpha} \; d^{-\alpha} \; dxdy \tag{93}$$

$$\text{sous la contrainte } C(\mathcal{M}) = N^2 \ . \tag{94}$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent en fonction de d:

$$-\alpha \int_{\Omega} M^{\alpha} \; d^{-\alpha-1} \; \delta d \; dxdy \; \leq \; 0 \tag{95}$$

$$\text{pour tout } \delta d \text{ tel que} \int_{\Omega} \delta d \; dxdy = 0 \ , \tag{96}$$

ce qui compte tenu de la contrainte nous donne :

$$d_{opt}(x) = \frac{N^2}{\int_{\Omega} M^{\frac{\alpha}{-\alpha-1}} dxdy} \; M(x,y)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \tag{97}$$

Remarque : *On constate à nouveau avec satisfaction que le cas $\alpha = +\infty$ aboutit à $d = M$ et à l'isorépartition de l'erreur locale.*

Il est intéressant pour la suite de revenir à la taille de maille m:

$$m_{opt}(x) = \frac{(\int_{\Omega} M^{\frac{\alpha}{-\alpha-1}} ds)^{1/2}}{N} \; M(x,y)^{\frac{-\alpha}{2\alpha+2}}. \tag{98}$$

Pour $\alpha = 2$, l'exposant dans (98) est $1/3$.

3.7 Minimisation de l'erreur d'interpolation (II)

Considérons maintenant le cas *anisotrope*, en revenant aux notations des paragraphes 3.1, 3.2, 3.3 dans tout leur généralité.

3.7.1 Critère d'optimisation

On suppose que la fonction u est de dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bornées. Compte tenu de l'analyse précédente de l'erreur d'interpolation dans le cas anisotrope, nous cherchons seulement des métriques $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}_{x,y} = \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{-1} \begin{pmatrix} (m_\xi)^{-2} & 0 \\ 0 & (m_\eta)^{-2} \end{pmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{M}} \tag{99}$$

qui soient *déja alignées* avec la valeur absolue du Hessien de u, c'est à dire que :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \;\; = \;\; \mathcal{R}_u \ , \tag{100}$$

où $\mathcal{R}_u$ est la rotation qui diagonalise le Hessien de u:

$$\mathcal{H}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \mathcal{R} * \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} * \mathcal{R}^{-1} \tag{101}$$

Comme auparavant et pour simplifier, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ sont supposées de valeurs absolues strictement positives.
Dans ce contexte, et compte tenu de l'estimation anisotrope précédente, nous proposons donc le *modèle d'erreur anisotrope* suivant:

$$\mathcal{E}_\alpha = \int \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.m_\xi^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|.m_\eta^2 \right)^\alpha \; dxdy \; . \tag{102}$$

On cherche donc à déterminer la métrique optimale minimisant la fonctionnelle $\mathcal{E}_\alpha$ sous la contrainte $C(\mathcal{M}) = N^2$, N^2 donné, soit :

$$\min_{\mathcal{M}} \int \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.m_\xi^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|.m_\eta^2 \right)^\alpha \; dxdy \tag{103}$$

$$\text{sous la contrainte} \int m_\xi{}^{-1} m_\eta{}^{-1} \; dxdy = N^2. \tag{104}$$

Le système d'optimalité s'écrit comme suit :

$$\mathcal{E}'_\alpha(\mathcal{M})\delta\mathcal{M} \;=\; 0, \tag{105}$$

$$\forall \delta\mathcal{M}, \;\; C'(\mathcal{M}_{opt}).\delta\mathcal{M} \;=\; 0. \tag{106}$$

La seconde équation nous permet d'écrire une relation qui relie $\mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$:

$$C'(\mathcal{M}_{opt}).\delta\mathcal{M} \;=\; 0, \tag{107}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{-1}{m_\xi}.\frac{\delta m_\eta}{m_\eta^2} + \frac{-1}{m_\eta}.\frac{\delta m_\xi}{m_\xi^2} \;=\; 0,$$

$$\Updownarrow \tag{108}$$

$$\int \frac{1}{m_\xi}.\delta m_\eta + \frac{1}{m_\eta}.\delta m_\xi \;=\; 0. \tag{109}$$

On peut écrire l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta m_\xi \\ \delta m_\eta \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} -m_\xi \\ m_\eta \end{pmatrix}. \tag{110}$$

L'équation (105) sera donc vraie pour tout couple $(\delta m_\xi, \delta m_\eta)$ tel que (110) a lieu pour au moins une fonction scalaire ζ de (x, y).

Développons l'Équation (105) :

$$\int \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|m_\xi^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|.m_\eta^2 \right)^{\alpha-1} \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|m_\xi \delta m_\xi + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|m_\eta \delta m_\eta \right) dxdy = 0. \tag{111}$$

L'égalité (110) permet de remplacer δm_ξ et δm_η :

$$\int \left(\left| |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|m_\xi^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|.m_\eta^2 \right|^{\alpha-1} \right) \zeta \left(-|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|m_\xi m_\xi + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|m_\eta m_\eta \right) dxdy = 0\,. \tag{112}$$

Pour que ceci soit nul quelle que soit la fonction ζ, et sachant que m_η, m_ξ et les dérivées secondes de u sont non nuls, il faut :

$$|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.m_\xi^2 = |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|.m_\eta^2. \tag{113}$$

D'où le rapport entre m_ξ et m_η

$$\frac{m_\xi}{m_\eta} = \sqrt{\frac{|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)|}{|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)|}} \tag{114}$$

(on contrôle avec satisfaction que pour une erreur grande en ξ, la taille de maille m_ξ doit être petite).

Pour poursuivre le calcul, il va être plus simple d'exprimer la métrique $\mathcal{M}$ en fonction de densité de point par unité de surface d et du rapport local de forme μ :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{d}\, \mathcal{R}_\mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \mathcal{R}_\mathcal{M}\ , \tag{115}$$

il s'agit plus précisément de poser $m_\xi = \sqrt{\frac{\mu}{d}}$ et $m_\eta = \sqrt{\frac{1}{\mu d}}$. La contrainte (107) devient :

$$\int \delta d = 0. \tag{116}$$

La condition (105) s'écrit cette fois:

$$\int \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|\frac{\mu}{d} + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu d} \right)^{\alpha-1}. \tag{117}$$

$$\left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|(\frac{\delta\mu}{d} - \frac{\mu\delta d}{d^2}) - |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{d\delta\mu + \mu\delta d}{\mu^2 d^2} \right) = 0, \tag{118}$$

$$\forall \delta d \, tel\, que \int \delta d = 0 \, et \, \forall \delta\mu. \tag{119}$$

On développe les termes en fonction de $\delta\mu$ et δd. Pour $\delta\mu$:

$$\int (*)^{\alpha-1} . \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|\frac{1}{d} - |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu^2 d} \right) \delta\mu \ = \ 0 \ \ \forall \delta\mu \ , \tag{120}$$

où $(*)$ désigne $|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|\frac{\mu}{d} + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu d}$ qui est supposé n'être jamais nul. D'oú nous tirons:

$$|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|\frac{1}{d} - |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu^2 d} = 0. \tag{121}$$

On en déduit :

$$\mu = \left(\frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|}{|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|} \right)^{1/2} \tag{122}$$

ce qui n'est autre que (114). Pour δd :

$$\int (*)^{\alpha-1} . \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|\frac{-\mu}{d^2} + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{-1}{\mu d^2} \right) \delta d \ = \ 0 \ . \tag{123}$$

Ceci permet d'écrire l'égalité suivante :

$$(*)^{\alpha-1} \frac{1}{d^2} \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|(\mu) + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu} \right) = Cte. \tag{124}$$

soit :

$$\frac{1}{d^{\alpha+1}} \ \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|(\mu) + |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|\frac{1}{\mu} \right)^{\alpha} = Cte. \tag{125}$$

On remplace μ par sa valeur :

$$d^{\alpha+1} = Cte \ \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}| \right)^{\frac{\alpha}{2}} . \tag{126}$$

On obtient donc :

$$d = C_\alpha \ \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}| \right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+2}} . \tag{127}$$

où la constante C_α est donnée par

$$C_\alpha \ = \ \left(\int \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}| \right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+2}} \ dxdy \right)^{-1} \ N^2 \ . \tag{128}$$

Au total les carrés des tailles de mailles sont donnés par :

$$m_\xi^2 = C_\alpha^{-1} |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|^{\frac{-2\alpha+1}{2(\alpha+1)}} |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \quad ; \quad m_\eta^2 = C_\alpha^{-1} |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|^{\frac{-2\alpha+1}{2(\alpha+1)}} \tag{129}$$

soit une métrique $\mathcal{M}_{opt}$ définie par :

$$\mathcal{M}_{opt} = C_\alpha^{-1} \left(|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|.|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}| \right)^{\frac{-\alpha}{2\alpha+2}} \mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|}{|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|} \right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{|\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|}{|\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|} \right)^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{R} \ . \tag{130}$$

Dans le cas de la norme $\mathcal{L}^2$, nous obtenons :

$$\mathcal{M}_{opt,2} = C_2^{-1} \ \mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|^{-5/6} |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|^{1/6} & 0 \\ 0 & |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|^{-5/6} |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|^{1/6} \end{pmatrix} \mathcal{R} \ . \tag{131}$$

Le cas de la norme $\mathcal{L}^\infty$ s'écrit en passant à la limite :

$$\mathcal{M}_{opt,\infty} = C_\infty^{-1} \ \mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} |\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|^{-1} & 0 \\ 0 & |\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{R} \ . \tag{132}$$

ce qui revient bien à isorépartir l'intégrande de (104).

4 Conclusions

Ce travail propose une formalisation de la représentation des maillages pour leur adaptation à une fonction donnée à interpoler.

Le maillage est remplacé par une fonction continue, la *métrique continue*, à partir de laquelle on sait évaluer le coût du maillage virtuel équivalent, et l'erreur résultant de son usage pour l'interpolation de la fonction initiale.

Cette formulation permet de donner une réponse au problème de l'adaptation optimale. Cette réponse, qui n'est pas nécessairement la seule possible, est en tous cas mathématiquement rigoureuse, et met en évidence les choix *a priori* à effectuer pour poser un tel problème; un des choix essentiels concerne celui de la norme de l'erreur.

Ce type d'analyse pourra être utile pour deux familles d'applications:

- *en calcul scientifique* bien sûr.

- *en compression d'image*, il s'agit exactement du problème d'interpolation ou représentation d'une fonction sur un maillage ; cependant, il faut sans doute reconsidérer le choix de la norme fonctionnelle (l'œil humain est particulièrement sensible aux contrastes, c'est à dire aux singularités).

En ce qui concerne les suites possibles:

Le cas d'une *fonction non régulière* doit donner lieu à des adaptations qui devraient prendre en compte notamment des travaux sur les performancs maximales en isotrope et anisotrope (cf. [7]).

L'extension à *l'approximation d'équations aux dérivées partielles* peut s'envisager de deux manières :

(1) Si en éléments finis Galerkin, on conserve l'estimation *a priori* classique, le problème se ramène à une erreur d'interpolation, le traitement de l'anisotropie se reconduit sans difficulté.

(2) Si on cherche à utiliser les erreurs *a posteriori*, celles-ci se modélisent aussi de manière continue et devraient permettre de proposer des métriques optimales dans le cas *isotrope*. Il nous semble aussi possible de proposer (enfin) des techniques *a posteriori* pour l'anisotrope grâce au contexte continu décrit dans ce travail et au prix de quelques simplifications dans la modélisation. Mais ceci est une autre histoire (à paraître bientôt).

Remerciements

Merci à Hervé Guillard pour avoir relu soigneusement une partie de ce travail.

Références

[1] H. Borouchaki, D. Chapelle, P.L. George, et P. Laug. Estimateurs d'erreurs et adaptation de maillages. *Méthodes numériques. Maillage et adaptation, Série Mécanique et Ingénierie des Matériaux*, Hermès, 2001.

[2] P.J Frey et P.L. George. *Maillages, applications aux éléments finis.* Hermès, 1999.

[3] R.G. Barrenechea Adaptation des maillages pour un problème d'advection-diffusion 3d. Technical report, INRIA Rocquencourt, 1998.

[4] H. Borouchaki et P.L. George Maillage de surfaces paramétriques. partie i: Aspects théoriques. Rapport de recherche no 2928, 1996.

[5] H. Borouchaki et P.L. George Maillage de surfaces paramétriques. partie ii: Exemples d'applications. Rapport de recherche *no* 2944, 1996.

[6] B. Palmerio. Coupling mesh and flow in viscous fluid calculations on unstructured triangular finite element. *Computuational Fluid Dynamics*, 6:275–290, 1996.

[7] B. Palmerio. Remarks concerning asymptotic behavior of interpolation error when using isotropic mesh adaptation. Technical report, INRIA Sophia-Antipolis, 1998.

[8] B. Palmerio and A. Dervieux. Multimesh and multiresolution analysis for mesh adaptive interpolation. *Applied Numerical Mathematics*, 22:477–493, 1996.

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399