

Le test ET : test d'adéquation d'un modèle central à une queue de distribution

Jean Diebolt, Myriam Garrido, Stéphane Girard

► **To cite this version:**

Jean Diebolt, Myriam Garrido, Stéphane Girard. Le test ET : test d'adéquation d'un modèle central à une queue de distribution. [Rapport de recherche] RR-4170, INRIA. 2001. inria-00072452

HAL Id: inria-00072452

<https://hal.inria.fr/inria-00072452>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Le test ET : test d'adéquation d'un modèle central à
une queue de distribution*

Jean Diebolt Myriam Garrido — Stéphane Girard

N° 4170

avril 2001

THÈME 4



*Rapport
de recherche*



Le test ET : test d'adéquation d'un modèle central à une queue de distribution

Jean Diebolt Myriam Garrido , Stéphane Girard

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet IS2

Rapport de recherche n° 4170 — avril 2001 — 58 pages

Résumé : Ce travail est motivé par des questions de fiabilité structurale, où les lois usuelles appartiennent au domaine d'attraction de Gumbel, DA(Gumbel). Étant donné un échantillon iid, on veut vérifier si un modèle paramétrique F_θ appartenant au DA(Gumbel) permet d'obtenir une bonne approximation de la queue de distribution, plus précisément, au-delà de l'observation maximale.

On suppose que les tests d'adéquation usuels ne rejettent pas l'hypothèse nulle $H_0 : \exists \theta, F = F_\theta$. De telles procédures testent essentiellement l'adéquation du modèle à la région centrale de l'échantillon. Le but du test ET est de vérifier l'adéquation aux observations extrêmes. Il s'agit de comparer sous H_0 deux estimateurs différents d'un quantile extrême, c'est-à-dire d'ordre $1 - p$ avec $p < 1/n$: le premier est l'estimateur paramétrique du quantile, le second est \hat{q}_{ET} , l'estimateur ET, basé sur une approximation exponentielle de la loi (possible parce que F appartient au DA(Gumbel) sous H_0) des excès au-delà d'un seuil.

En approximant le vrai quantile par son estimateur ET, on commet deux types d'erreurs : une erreur d'estimation, et une erreur d'approximation, puisque nous approximations la loi des excès par une loi exponentielle. Sous H_0 , la prise en compte de l'erreur d'approximation, ou une approximation raisonnable de celle-ci, dans les bornes de l'intervalle de confiance déduit de la loi limite de \hat{q}_{ET} , produit un intervalle de confiance approché pour le vrai quantile. Le test ET ne rejette pas H_0 lorsque l'estimateur paramétrique appartient à cet intervalle.

Nous proposons une seconde version du test ET dans laquelle nous approximations les fluctuations d'échantillonnage des estimateurs paramétrique et ET par bootstrap paramétrique. Des simulations montrent que cette version du test est nettement plus puissante.

Enfin, pour traiter le cas de lois dont les paramètres et donc les estimateurs paramétriques de quantiles sont difficiles à calculer (comme les modèles de mélange), nous proposons une version simplifiée du test ET bootstrap paramétrique.

Mots-clés : test d'adéquation, événements rares, quantiles extrêmes, queues de distribution exponentielles

The ET test: a Goodness-of-fit Test for the Distribution Tail

Abstract: This work is motivated by questions arising in the field of Structural Reliability, where the usual distributions are in Gumbel's maximum domain of attraction, $DA(\text{Gumbel})$. Given an iid sample, we wish to check that a parametric model F_θ ($F_\theta \in DA(\text{Gumbel})$) provides an acceptable approximation to the tail of the distribution in the range above the maximal observation.

We assume that at reasonable significance levels, usual goodness-of-fit tests have not rejected the null hypothesis H_0 that F has the form F_θ . Such procedures essentially test the adequacy of the model to the central range of the sample. The purpose of the ET test is to check the adequacy to the extreme range of observations. Its principle is to compare two different estimates of some extreme quantile (i.e. of order $1 - p$ with $p \leq 1/n$) under H_0 . The first one is the parametric estimate of the quantile. The second one is \hat{q}_{ET} , the ET estimate based on an exponential approximation of the excess distribution (possible since $F \in DA(\text{Gumbel})$ under H_0).

When we approximate the true quantile with its ET estimate, we make two kinds of errors: An estimation error and an approximation error, since we approximate the excess distribution with an exponential distribution. Under H_0 , adding the approximation error, or a reasonable approximation of it, to the bounds of the confidence interval based on the asymptotic distribution of \hat{q}_{ET} yields an approximate confidence interval for the true quantile. Basically, the ET goodness-of-fit test does not reject H_0 when the parametric estimate lies within this confidence interval.

We present another version of the ET test where we approximate the sampling variations of the parametric and ET estimates through parametric bootstrap. Simulations show that this version of the ET test is more powerful.

Finally, in order to deal with distributions whose parameter estimates and related quantile estimates are difficult to compute (e.g., mixtures), we study a simplified version of the parametric bootstrap version of our test.

Key-words: Goodness-of-fit Test, Rare Events, Extreme Quantiles, Exponential Distribution Tails

1 Introduction

Ce travail a pour origine les interrogations de EDF au sujet de l'estimation des queues de distribution, dans un contexte de fiabilité structurale.

Le problème est le suivant. Étant donné un échantillon X_1, \dots, X_n , nous voulons vérifier si un modèle paramétrique $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ permet d'obtenir une bonne approximation de la loi des données, particulièrement en queue de distribution.

Les tests d'adéquation classiques (Cramér-von Mises ou Anderson-Darling, par exemple) mesurent principalement l'adéquation aux données de la partie centrale de la loi, c'est-à-dire sur une partie centrale de l'intervalle où est situé l'échantillon. Or, la Direction des Études et Recherches de EDF souhaite pouvoir étudier des événements extrêmes, tout en conservant une bonne estimation de la probabilité d'événements plus courants.

Notre but est donc de développer un test d'adéquation de la queue de distribution aux données. Puisque le modèle recherché doit s'adapter aussi bien à l'ensemble de la distribution des données qu'à la queue de distribution, on s'intéresse aux modèles acceptés par un test classique (c'est-à-dire les modèles qui induisent une bonne adéquation générale de la fonction de répartition estimée aux données). On veut de plus vérifier que la fonction de répartition correspondant au modèle testé, dont les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance, par exemple, est bien adaptée en queue de distribution. Un test de ce type a déjà été envisagé par Diebolt et Girard [10]. Ce travail s'appuie sur leurs démonstrations préliminaires et en est donc une continuation.

Après quelques définitions et notations préliminaires (partie 2), nous présenterons le test ET (partie 3). Suivront des résultats asymptotiques sur le niveau de signification du test (partie 4), puis sa puissance (partie 5). Enfin, le test ET sera appliqué à des données simulées (partie 6) et réelles (partie 7).

2 Préliminaires.

On considère un échantillon x_1, \dots, x_n issu de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées X_1, \dots, X_n .

2.1 Méthode des excès pour l'estimation des quantiles extrêmes.

Notre propos ici est l'estimation d'un quantile extrême, c'est-à-dire d'un quantile qui sera généralement situé au-delà des observations. Choisissons un nombre p_n positif et inférieur à $1/n$, de façon que le quantile q_{1-p_n} correspondant soit en général supérieur à $x_{(n)}$ l'observation maximale, estimation du quantile d'ordre $1/n$. On s'intéresse plus précisément à $\hat{q}_{ET,n}$, l'estimation non paramétrique du quantile basée sur un cas particulier de la méthode des

excès, la méthode ET.

Soit u un réel suffisamment élevé appelé *seuil*. On définit les excès au-delà du seuil u comme l'ensemble des variables aléatoires $\{Y_j\} = \{X_j - u \text{ tel que } X_j > u\}$. La fonction de répartition des excès au-delà du seuil u est

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad (1)$$

où F est la fonction de répartition de la loi des données.

On se limite dans ce travail aux lois appartenant au domaine d'attraction de Gumbel, l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes. Ces domaines sont définis par le théorème suivant (cf. [8, 13, 14]).

Théorème 2.1 *Sous certaines conditions de régularité sur F , il existe $\tau \in \mathbb{R}$ et deux suites réelles α_n et β_n ($\beta_n > 0$) tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\alpha_n + \beta_n x) = H_\tau(x)$, où H_τ est la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes (EVD):*

$$H_\tau(x) = \exp \left[- (1 + \tau x)_+^{-1/\tau} \right].$$

On dit alors que F appartient au domaine d'attraction de H_τ : $F \in DA(H_\tau)$.

Ce théorème nous donne, après normalisation, la loi asymptotique du maximum de l'échantillon (de fonction de répartition F^n).

Remarque 2.1 *Le domaine d'attraction de Gumbel est alors défini de la façon suivante: $DA(\text{Gumbel}) = DA(H_0)$, où $H_0(x) = \exp(-\exp(-x))$.*

Le théorème suivant [15, 1, 2] nous permet de construire une approximation ET du quantile.

Théorème 2.2 (théorème de Pickands) *Si $F \in DA(\text{Gumbel})$,*

$$\lim_{u \rightarrow \omega(F)} \sup_{0 < y < \omega(F) - u} \left| F_u(y) - \left(1 - \exp \left(- \frac{y}{\sigma(u)} \right) \right) \right| = 0, \quad (2)$$

où $\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$ est le point terminal de la fonction de répartition F et la fonction $u \mapsto \sigma(u)$ est définie à équivalence asymptotique près¹.

Remarque 2.2 *L'une des valeurs possibles de $\sigma(u)$ est (on le déduit de [8], démonstration du théorème 1.10, et théorème 1.6)*

$$\sigma(u) = \frac{1}{1 - F(u)} \int_u^{\omega(F)} [1 - F(t)] dt.$$

1. Si $\sigma_1(u)$ est une version de $\sigma(u)$ et $\sigma_2(u)$ est telle que $\lim_{u \rightarrow \omega(F)} \sigma_1(u)/\sigma_2(u) = 1$ alors $\sigma_2(u)$ est une autre version de $\sigma(u)$.

Remarque 2.3 Pour les lois du domaine d'attraction de Gumbel, $\omega(F)$ peut être fini ou infini. Les lois usuelles du domaine d'attraction de Gumbel ont un point terminal infini (par exemple les lois normale, lognormale, de Weibull, exponentielle, gamma). On se limitera donc ici à des fonctions de répartition dont le point terminal est infini. Un exemple de loi du domaine d'attraction de Gumbel ayant un point terminal fini est donné dans [13] (exemple 3.3.22). La fonction de répartition de cette loi, à comportement exponentiel au voisinage du point terminal fini x_F , s'exprime comme $F(x) = 1 - K \exp(-\alpha/(x_F - x))$ pour $x < x_F$, $\alpha, K > 0$.

À présent, on suppose que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel; on écrit $F \in \text{DA}(\text{Gumbel})$.

Pour appliquer le théorème précédent, on choisit le seuil comme étant le quantile d'ordre $1 - m_n/n$ de la loi des données : $u_n = F^{\leftarrow}(1 - m_n/n)$, où m_n est un entier tel que $1 < m_n < n$ et F^{\leftarrow} est l'inverse généralisée de la fonction de répartition F . Pour construire une approximation ET du quantile d'ordre $1 - p_n$, on utilise la décomposition suivante :

$$p_n = P(X > q_{1-p_n}) = (1 - F(u_n))(1 - F_{u_n}(q_{1-p_n} - u_n)).$$

Or par définition de u_n , $1 - F(u_n) \leq m_n/n^2$. On approche $1 - F(u_n)$ par son majorant m_n/n , qui est en général atteint³. De plus, d'après le théorème de Pickands et puisque $F \in \text{DA}(\text{Gumbel})$, $1 - F_{u_n}(y)$ est approchée par $\exp(-y/\sigma(u_n))$, où $y = q_{ET,n} - u_n$ et $\sigma(u_n)$ est l'une des valeurs possibles de la fonction σ au point u_n , valeur qui est définie à un équivalent asymptotique près. Donc l'expression suivante définit $q_{ET,n}$:

$$p_n = \frac{m_n}{n} \exp\left(-\frac{q_{ET,n} - u_n}{\sigma(u_n)}\right).$$

On en déduit l'expression de l'approximation ET du quantile d'ordre $1 - p_n$ de la loi des données :

$$q_{ET,n} = u_n + \sigma(u_n) \ln\left(\frac{m_n}{np_n}\right). \quad (3)$$

À présent, on se trouve avec u_n , un quantile d'ordre m_n/n ($> 1/n$). Il se trouve donc généralement à l'intérieur de l'intervalle défini par l'échantillon. On l'estime simplement par la $(n - m_n)$ -ème observation ordonnée $\hat{u}_n = x_{(n-m_n)}$. Quant à $\sigma(u_n)$, qui est le paramètre de la loi exponentielle qui approche la loi des excès, on l'estime naturellement par la moyenne empirique des excès :

$$\hat{\sigma}_n = \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} Y_i. \quad (4)$$

2. Lorsque $1 - m_n/n$ est un point de continuité de F , l'égalité est vérifiée.

3. L'ensemble des points de discontinuité de F est au plus dénombrable.

On obtient donc l'estimation suivante du quantile ET [8]:

$$\widehat{q}_{ET, n} = X_{(n-m_n)} + \widehat{\sigma}_n \ln \left(\frac{m_n}{np_n} \right). \quad (5)$$

2.2 Définitions et notations.

Afin de pouvoir écrire explicitement des conditions de convergence, notre étude se restreindra à des modèles dont les fonctions de répartition appartiennent à des classes définies à partir des fonctions lisses à variations régulières définies ci-dessous.

2.2.1 Les fonctions lisses à variations régulières.

Nous utiliserons les propriétés des fonctions lisses à variations régulières, décrites dans [4]. Tout d'abord, rappelons la définition de cette classe de fonctions.

Définition 1 (Fonctions à variations lentes) Une fonction ℓ , positive, Lebesgue mesurable sur $(0, +\infty)$, est à variations lentes en $+\infty$ (noté $\ell \in \mathcal{R}_0$) si

$$\forall t > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} = 1.$$

Définition 2 (Fonctions à variations régulières) Une fonction f , positive, Lebesgue mesurable sur $(0, +\infty)$, est à variations régulières d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (noté $f \in \mathcal{R}_\rho$) si

$$\forall t > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\rho.$$

Définition 3 (Fonctions lisses à variations régulières) Une fonction f , positive, Lebesgue mesurable sur $(0, +\infty)$, est lisse à variations régulières d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (noté $f \in \mathcal{SR}_\alpha$) si la fonction h définie par $h(x) = \log(f(e^x))$ est \mathcal{C}^∞ et

$$h'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \alpha, \quad h^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n \geq 2.$$

Les propriétés de ces classes que nous utiliserons sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 2.1 (Propriétés)

1. $\mathcal{SR}_\alpha \subset \mathcal{R}_\alpha$. Donc, si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, alors $\forall t > 0$, $f(tx)/f(x) \rightarrow t^\alpha$ lorsque $x \rightarrow \infty$ c'est-à-dire $f(tx) \sim t^\alpha f(x)$ lorsque $x \rightarrow \infty$.
2. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
3. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, alors $xf'(x)/f(x) \rightarrow \alpha$ quand $x \rightarrow \infty$, et la fonction $xf'(x)/f(x)$ est continue.

4. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, alors $|f'| \in \mathcal{SR}_{\alpha-1}$, $1/f \in \mathcal{SR}_{-\alpha}$ et, lorsque f^{-1} est bien définie, on a $f^{-1} \in \mathcal{SR}_{1/\alpha}$.
5. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, alors $\forall s \ f^s \in \mathcal{SR}_{s\alpha}$.
6. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$ et $g \in \mathcal{SR}_\beta$, alors $f + g \in \mathcal{SR}_\rho$ où $\rho = \max(\alpha, \beta)$ lorsque $\alpha \neq \beta$, $fg \in \mathcal{SR}_{\alpha+\beta}$ et, si $g(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f \circ g \in \mathcal{SR}_{\alpha\beta}$.
7. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$, alors il existe une fonction $\ell \in \mathcal{R}_0$ telle que $f(x) = x^\alpha \ell(x)$.
8. Si $f \in \mathcal{SR}_\alpha$ et $x_n \sim y_n$ alors $f(x_n) \sim f(y_n)$.

2.2.2 Classes de fonctions dans le domaine d'attraction de Gumbel.

Soit $\mathcal{D} = \{F \text{ fonctions de répartition strictement croissantes, } \mathcal{C}^\infty, \text{ et telles que } \omega(F) = \infty\}$.

Remarque 2.4

- Si $F \in \mathcal{D}$, alors F est inversible (car elle est continue et strictement croissante).
- Si $F \in \mathcal{D}$ et si on pose $H = -\ln(1-F)$, alors H est définie sur tout \mathbb{R} (car $\omega(F) = \infty$), H est strictement croissante (car F l'est), H est \mathcal{C}^∞ (car F est \mathcal{C}^∞) et $H(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On considère le sous-ensemble de \mathcal{D} suivant :

$$\mathcal{E} = \{F \in \mathcal{D} \text{ telles que } -\ln(1-F) \in \mathcal{C}_\rho^1 \cup \mathcal{C}^2 \cup \mathcal{C}_\rho^3\}, \quad (6)$$

où les ensembles \mathcal{C}_ρ^1 , \mathcal{C}^2 et \mathcal{C}_ρ^3 sont définis par :

- la classe des fonctions lisses à variations régulières :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_\rho^1 = \mathcal{SR}_\rho, \text{ si } \rho > 0 \text{ et } \rho \neq 1. \\ \mathcal{C}_1^1 = \{H \in \mathcal{SR}_1 : |(H^{-1})''| \in \varepsilon \mathcal{SR}_{-1-\tau} \text{ avec } \tau \geq 0 \text{ et } \varepsilon \in \{0, 1\}\}, \end{cases}$$

où, lorsque $\varepsilon = 0$, la classe $\varepsilon \mathcal{SR}_{-1-\tau}$ désigne le singleton réduit à la fonction nulle.

- la classe des fonctions à variations rapides et lisses :
 $\mathcal{C}^2 = \{f, f^{-1} \in \mathcal{SR}_0, |(f^{-1})'| \in \mathcal{SR}_{-1}\}$.
- la classe des fonctions à variations lentes et lisses :
 $\mathcal{C}_\rho^3 = \{f, f^{-1} = \exp g, g \in \mathcal{SR}_\rho, 0 < \rho < 1\}$.

Remarque 2.5 On peut donner des exemples de lois appartenant à chacune des classes précédentes.

- Appartiennent à la classe \mathcal{C}_ρ^1 ($\rho \neq 1$) les fonctions usuelles suivantes : la loi normale ($\rho = 2$) et la loi de Weibull ($\rho = \beta$, le paramètre de forme).
- Appartiennent à la classe \mathcal{C}_1^1 la loi exponentielle ($\varepsilon = 0$) et la loi gamma ($\varepsilon = 1$ et $\tau = 1$). On peut donner comme exemples supplémentaires les fonctions $F = 1 - \exp(-H)$ avec H du type $H(x) = x/\ln x$ (donc $H^{-1}(x) \approx x \ln x$, $\varepsilon = 1$ et $\tau = 0$) ou du type $H(x) = c_1 x(1 + c_2 x^{-\theta})$ (introduit par Barbe et Diebolt [3] p. 14) où $\theta > 0$ ($\varepsilon = 1$ et $\tau = \theta > 0$).

- Pour la classe \mathcal{C}^2 , on peut donner comme exemple la loi double exponentielle telle que pour X de loi double exponentielle, $\exp X$ est de loi exponentielle.
- La loi lognormale, quant à elle, appartient à la classe \mathcal{C}_ρ^3 ($\rho = 1/2$).

Des classes similaires ont été étudiées et définies dans [16].

Les fonctions H appartenant à ces trois classes possèdent les propriétés suivantes.

Lemme 2.2

1. Si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$, $\frac{x(H^{-1})'(x)}{H^{-1}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho}$ et $\frac{x(H^{-1})''(x)}{(H^{-1})'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} - 1$.
2. Si $H \in \mathcal{C}^2$, $\frac{x(H^{-1})'(x)}{H^{-1}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ et $\frac{x(H^{-1})''(x)}{(H^{-1})'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -1$.
3. Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, $\frac{x(H^{-1})'(x)}{H^{-1}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ et $\frac{x(H^{-1})''(x)}{(H^{-1})'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

Démonstration : Elle s'appuie sur les propriétés des fonctions lisses (cf. proposition 2.1),

- Si $H \in \mathcal{SR}_\rho$, $H^{-1} \in \mathcal{SR}_{1/\rho}$ et $(H^{-1})' \in \mathcal{SR}_{1/\rho-1}$.
- Si $H \in \mathcal{C}^2$, $H^{-1} \in \mathcal{SR}_0$ et $(H^{-1})' \in \mathcal{SR}_{-1}$.
- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, $H^{-1} = \exp g$ où $g \in \mathcal{SR}_\rho$. On en déduit que $(H^{-1})' = g' \exp g$ avec $g' \in \mathcal{SR}_{\rho-1}$, et que $(H^{-1})'' = ((g')^2 + g'') \exp g$ avec $(g')^2 + g'' \in \mathcal{SR}_{2(\rho-1)}$.

■

Lemme 2.3

$$\frac{(H^{-1})'}{H^{-1}} \in \begin{cases} \mathcal{SR}_{-1} & \text{si } H \in \mathcal{C}_\rho^1 \text{ ou } \mathcal{C}^2 \\ \mathcal{SR}_{\rho-1} & \text{si } H \in \mathcal{C}_\rho^3 \end{cases} \quad (7)$$

et de même

$$\left| \frac{(H^{-1})''}{(H^{-1})'} \right| \in \begin{cases} \mathcal{SR}_{-1} & \text{si } H \in \mathcal{C}_\rho^1, \rho \neq 1, \text{ ou } \mathcal{C}^2 \\ \varepsilon \mathcal{SR}_{-1-\tau} & \text{si } H \in \mathcal{C}_1^1 \\ \mathcal{SR}_{\rho-1} & \text{si } H \in \mathcal{C}_\rho^3 \end{cases} \quad (8)$$

Démonstration : On utilise les mêmes propriétés que précédemment pour les fonctions H^{-1} et $(H^{-1})'$, plus le fait que

- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^1 = \mathcal{SR}_\rho$, pour $\rho \neq 1$, $|(H^{-1})''| \in \mathcal{SR}_{1/\rho-2}$, et si $\rho = 1$, $|(H^{-1})''| \in \varepsilon \mathcal{SR}_{-1-\tau}$.
- Si $H \in \mathcal{C}^2$, $|(H^{-1})''| \in \mathcal{SR}_{-2}$.
- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, $(H^{-1})'' = ((g')^2 + g'') \exp g$, où $(g')^2 + g'' \in \mathcal{SR}_{2(\rho-1)}$.

■

Lemme 2.4 Les lois correspondant à $H \in \mathcal{C}_\rho^1$, $H \in \mathcal{C}^2$ et $H \in \mathcal{C}_\rho^3$ appartiennent toutes au domaine d'attraction de Gumbel.

La démonstration de ce lemme se trouve dans [11] (proposition 1).

Lemme 2.5 Si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$, $H \in \mathcal{C}^2$ ou $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, l'une des expressions possibles de $\sigma(u)$ est $\sigma(u) = 1/H'(u)$.

Ce lemme est démontré dans [11] (lemme 6), ainsi que dans [16].

3 Présentation du test ET: test d'adéquation d'un modèle central à une queue de distribution.

On considère un modèle $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ dont l'adéquation générale aux données a été acceptée par un test classique. Le test développé ici permet de vérifier l'adéquation aux données de la queue de distribution de la loi $F_{\hat{\theta}_n}$, dont les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les hypothèses du test se ramènent donc à

$$\mathcal{H}_0 : F = F_{\hat{\theta}_n} \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : F \neq F_{\hat{\theta}_n}. \quad (9)$$

Le résultat du test s'appuie sur la comparaison de deux estimateurs (l'un paramétrique, l'autre non paramétrique) d'un quantile extrême de la loi des données. L'estimateur non paramétrique du quantile est le quantile ET (5).

On se limite aux modèles pour lesquels la loi des excès tend vers une loi exponentielle ("Exponential Tail"), c'est-à-dire des lois appartenant au domaine d'attraction de Gumbel. Cette condition n'est pas trop restrictive, puisque la plupart des lois qui nous intéressent en fiabilité structurale appartiennent au domaine d'attraction de Gumbel.

Trois versions différentes de ce test ont été construites. Tout d'abord, on présente au paragraphe 3.1 une version du test basée sur la loi asymptotique de l'estimateur ET du quantile extrême. Mais on vérifie en pratique que cette loi n'est approchée de manière satisfaisante que pour de très grandes tailles d'échantillon. Nous proposons donc au paragraphe 3.2 d'utiliser la méthode du bootstrap paramétrique pour simuler les fluctuations d'échantillonnage. Une première version de cette méthode, paragraphe 3.2.2, utilise le bootstrap paramétrique sur les deux estimateurs du quantile extrême. Enfin, cette méthode du bootstrap paramétrique pouvant se révéler lourde en calculs pour certaines lois complexes (certaines lois de mélange par exemple, et en général toute loi pour laquelle le calcul des estimateurs du maximum de vraisemblance est long), on propose au paragraphe 3.2.3 une version simplifiée du test bootstrap.

3.1 Test ET: version basée sur la loi asymptotique de $\hat{q}_{ET,n}$, l'estimateur ET d'un quantile.

Choisissons un nombre p_n positif et inférieur à $1/n$. On peut estimer les quantiles d'ordre $1 - p_n$ de la loi des données de deux façons :

- Estimation paramétrique. En utilisant le modèle paramétrique accepté en partie centrale, dont on veut tester l'adéquation en queue de distribution, on obtient l'estimateur paramétrique

$$\hat{q}_{\text{param}, n} = F_{\hat{\theta}_n}^{-1}(1 - p_n), \quad (10)$$

où $\widehat{\theta}_n$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres de la fonction de répartition F_θ du modèle paramétrique accepté en partie centrale.

- Estimation non paramétrique. Il s'agit de $\widehat{q}_{ET, n}$, l'estimateur ET, défini en (5).

L'idée est de construire un intervalle de confiance pour le quantile de la loi des données à partir de $\widehat{q}_{ET, n}$ l'estimateur ET (5), puis de regarder si $\widehat{q}_{\text{param}, n}$, l'estimateur paramétrique de ce quantile (10), appartient à cet intervalle.

Le principe de construction de l'estimateur ET du quantile d'ordre $1-p_n$ de la loi des données introduit une erreur d'approximation entre le vrai quantile et son approximation ET (3), ainsi qu'une erreur d'estimation entre l'approximation ET du quantile et son estimateur (5). On peut donc décomposer l'erreur entre q_{1-p_n} et $\widehat{q}_{ET, n}$ de la façon suivante

$$q_{1-p_n} - \widehat{q}_{ET, n} = \underbrace{q_{1-p_n} - q_{ET, n}}_{\text{biais d'approximation } \delta_n} + \underbrace{q_{ET, n} - \widehat{q}_{ET, n}}_{\text{erreur d'estimation}}.$$

Remarque 3.1 *On peut montrer [12, 16] que sous certaines conditions, l'erreur d'approximation relative δ_n/q_{1-p_n} tend vers 0.*

Pour l'erreur d'estimation, Barbe et Diebolt [3] ont donné la loi asymptotique de $\widehat{q}_{ET, n}$ (voir aussi de Haan et Rootzen [7] et Davis et Resnick [6]).

Théorème 3.1 *On suppose que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel et que $m_n \rightarrow \infty$ avec $m_n/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $J(u) = F^{-1}(1-u)$, $0 < u < 1$. On suppose aussi que pour tout intervalle compact $K \subset]0, \infty[$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{m_n} \sup_{x \in K} \left| \frac{J(c_n x) - J(c_n)}{J(c_n/e) - J(c_n)} - \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right| = 0, \quad (11)$$

où $c_n = m_n/n$. Alors

$$\sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET, n} - \tilde{q}_{ET, n}}{\theta_n \ln r_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (12)$$

où $r_n = c_n/p_n$, $\theta_n = J(c_n/e) - J(c_n)$ et $\tilde{q}_{ET, n} = u_n + \theta_n \ln r_n$.

A présent, nous allons donner des conditions explicites sur m_n pour obtenir (11), dans le cas où F appartient à la classe des fonctions que nous allons maintenant considérer (\mathcal{E}).

Remarque 3.2 *Soit $F \in \mathcal{E}$. Notons $H = -\ln(1-F)$. Alors la condition (11) est vérifiée dès que $m_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que m_n vérifie les conditions suivantes (cf. annexe B.1) :*

- si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$, $\rho \neq 1$, ou \mathcal{C}^2 : $m_n = o((\ln n)^2)$.

- si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon = 0$: $m_n = o(n)$.
- si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon \neq 0$: $m_n = O((\ln n)^{2(1+\tau)-\delta}) \forall \delta > 0$ arbitrairement petit.
- si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$: $m_n = O((\ln n)^{2(1-\rho)-\delta}) \forall \delta > 0$ arbitrairement petit.

Dans le cas de fonctions de répartition appartenant à la classe \mathcal{E} , on peut énoncer un résultat de convergence pour l'erreur d'estimation.

Proposition 3.1 *On considère une fonction de répartition $F \in \mathcal{E}$. On suppose que m_n satisfait les conditions de la remarque 3.2. Alors*

$$\sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - q_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{où} \quad A_n = 1 + \ln^2 c_n. \quad (13)$$

La démonstration se trouve dans l'annexe B.2.

On en déduit un intervalle de confiance pour $q_{ET,n}$ qui, par translation de δ_n , nous donne l'intervalle de confiance théorique suivant pour q_{1-p_n} :

$$IC_{th,n} = \left[\widehat{q}_{ET,n} + \delta_n \pm \sigma(u_n) \sqrt{\frac{A_n}{m_n}} z_{1-\alpha/2} \right], \quad (14)$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée et réduite. De façon théorique, on peut construire un test (ET version 0) dans lequel on rejette l'hypothèse H_0 si $\widehat{q}_{param,n} \notin IC_{th,n}$. Mais, puisque la vraie loi F est inconnue, les quantités δ_n et $\sigma(u_n)$ le sont aussi. Ce test est donc inutilisable en pratique, mais il présente un intérêt théorique : déterminer la méthode permettant de montrer des résultats asymptotiques.

On a calculé une valeur approchée (au premier ordre) d_n du biais d'approximation δ_n , qui s'exprime en fonction de la loi des données F et de ses paramètres, du seuil u_n , de la taille de l'échantillon n , du nombre d'excès m_n et de l'ordre du quantile $1 - p_n$ (cf. [9]). Ici la vraie loi F est inconnue. Mais sous H_0 , on peut utiliser $F_{\widehat{\theta}_n}$ qui en est une bonne approximation. D'autre part, au lieu de $\sigma(u_n)$, on utilise $\widehat{\sigma}_n$ qui est une estimation naturelle de ce terme. L'intervalle de confiance que l'on va utiliser en pratique s'écrit donc

$$IC_{re,n} = \left[\widehat{q}_{ET,n} + d_n \pm \widehat{\sigma}_n \sqrt{\frac{A_n}{m_n}} z_{1-\alpha/2} \right]. \quad (15)$$

Le test que l'on utilise en pratique est donc le suivant :

Test ET (version 1) On rejette l'hypothèse H_0 si $\widehat{q}_{param,n} \notin IC_{re,n}$.

3.2 Test ET: version basée sur la théorie du bootstrap paramétrique.

Au paragraphe précédent, on a utilisé la loi asymptotique de $\widehat{q}_{ET,n}$ pour construire un intervalle de confiance pour le quantile de la loi des données. Or, on a remarqué sur simulations que cette loi asymptotique n'était bien approchée que pour de très grandes tailles d'échantillon. Pour un nombre modéré de données, on va donc chercher à approcher la loi de $\widehat{q}_{ET,n}$ d'une autre manière.

3.2.1 Intervalle de confiance bootstrap

Sous H_0 , le modèle est $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$, et on estime θ par son maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$.

On veut simuler les fluctuations d'échantillonnage de l'estimateur $\widehat{q}_{ET,n}$ qui nous intéresse. Pour cela, on utilise la théorie du bootstrap paramétrique :

- On se place sous l'hypothèse H_0 et on estime la distribution des données F par $F_{\widehat{\theta}_n}$.
- On génère N échantillons indépendants entre eux, iid, de loi $F_{\widehat{\theta}_n}$, de taille n . Pour chacun de ces échantillons, on calcule l'estimateur $\widehat{q}_{ET,n}^*$ de $q_{ET,n}$ associé.
- D'autre part, pour chacun de ces échantillons, on calcule un estimateur $\widehat{\theta}_n^*$ des paramètres de la loi de l'échantillon. Ceci nous permet d'évaluer le quantile $\widehat{q}_{\text{param},n}^*$ d'ordre $1 - p_n$ de la loi $F_{\widehat{\theta}_n^*}$.

On dispose ainsi de N valeurs $\widehat{q}_{ET,n}^*$ et de N valeurs $\widehat{q}_{\text{param},n}^* = F_{\widehat{\theta}_n^*}^{-1}(1 - p_n)$, ce qui nous permet de calculer N estimateurs $\widehat{\delta}_n^* = \widehat{q}_{\text{param},n}^* - \widehat{q}_{ET,n}^*$ de l'erreur d'approximation.

De cet échantillon de $\widehat{\delta}_n^*$, on déduit un intervalle de confiance pour l'erreur d'approximation δ_n . Par exemple, pour un intervalle de confiance à 90%, on ordonne l'échantillon des N valeurs $\widehat{\delta}_n^*$, puis on ôte 5% des valeurs les plus à gauche et 5% des plus à droite. On appelle la plus petite valeur de l'échantillon restant $\widehat{\delta}_{\min,n}^*$ et la plus grande $\widehat{\delta}_{\max,n}^*$.

L'intervalle de confiance bootstrap (à 90% par exemple) pour l'erreur d'approximation $\delta_n = q_{1-p_n} - q_{ET,n}$ est alors

$$IC_{\delta,BP,n} = [\widehat{\delta}_{\min,n}^*, \widehat{\delta}_{\max,n}^*]. \quad (16)$$

3.2.2 Deuxième version du test

A partir de l'échantillon initial, on calcule $\widehat{q}_{ET,n}$ et $\widehat{q}_{\text{param},n}$, estimateurs de q_{1-p_n} , le quantile de la vraie loi des données.

On construit alors un test d'adéquation en queue de distribution de la loi acceptée par un test central en regardant si $\widehat{\delta}_n = \widehat{q}_{\text{param},n} - \widehat{q}_{ET,n}$ appartient à $IC_{\delta,BP,n}$. Si ceci est vérifié,

on peut raisonnablement supposer que le modèle accepté en partie centrale s'ajuste aussi assez bien en queue de distribution. La version du test ET basée sur la méthode du bootstrap paramétrique est donc la suivante :

Test ET (version 2, test ET-BP): On rejette l'hypothèse H_0 si $\widehat{\delta}_n \notin IC_{\delta, BP, n}$.

3.2.3 Version simplifiée du test avec bootstrap paramétrique

Les variations d'échantillonnage de $\widehat{q}_{\text{param}, n}$ sont petites par rapport à celles de $\widehat{q}_{ET, n}$, car m_n est petit devant n . On décide donc ici de ne plus bootstrapper l'estimation paramétrique du quantile.

Alors, il n'est plus utile d'ôter $\widehat{q}_{\text{param}, n}$ (qui reste maintenant constant) de $q_{ET, n}$ ni de $\widehat{q}_{ET, n}$, car cela revient seulement à traduire $q_{ET, n}$ et son intervalle de confiance de la même façon. Il suffit de construire un intervalle de confiance pour $q_{ET, n}$, et de regarder s'il contient ou non $\widehat{q}_{ET, n}$.

Pour cela, on ordonne l'échantillon des N valeurs $\widehat{q}_{ET, n}^*$, puis (pour un intervalle à 90% par exemple) on ôte 5% des données les plus à gauche et 5% des plus à droite. On appelle la plus petite valeur de l'échantillon restant $\widehat{q}_{ET, \min, n}^*$ et la plus grande $\widehat{q}_{ET, \max, n}^*$. L'intervalle de confiance bootstrap (à 90% par exemple) pour $q_{ET, n}$ est alors⁴

$$IC_{ET, BP, n} = [\widehat{q}_{ET, \min, n}^*, \widehat{q}_{ET, \max, n}^*]. \quad (17)$$

Il s'ensuit la dernière version du test ET :

Test ET (version 3, test ET-BP simplifié): On rejette l'hypothèse H_0 si $\widehat{q}_{ET, n} \notin IC_{ET, BP, n}$.

Remarque 3.3 Notre hypothèse est que les données sont de loi F_θ . On l'utilise bien évidemment lorsque l'on calcule $\widehat{q}_{\text{param}, n}$ et les $\widehat{q}_{\text{param}, n}^*$. Mais, cette hypothèse intervient aussi dans le calcul des $\widehat{q}_{ET, n}^*$.

En effet, on estime $\widehat{q}_{ET, n}$ à partir d'un échantillon tiré selon la loi $F_{\widehat{\theta}_n}$. C'est lorsqu'on tire cet échantillon que l'on utilise l'hypothèse H_0 . Si les données de départ ne sont pas de loi F_θ , c'est-à-dire si notre hypothèse est fautive, les échantillons de loi $F_{\widehat{\theta}_n}$ que l'on va tirer auront une forte probabilité d'être très différents de l'échantillon de départ. Ainsi, les $\widehat{q}_{ET, n}^*$ seront, avec une forte probabilité, assez différents de $\widehat{q}_{ET, n}$ pour que celui-ci soit à l'extérieur de l'intervalle de confiance qu'ils permettent de construire.

4. On peut envisager de comparer numériquement les intervalles $IC_{re, n}$ (p. 11) et $IC_{ET, BP, n}$, car tous les deux sont des intervalles de confiance pour $q_{ET, n}$.

4 Niveau de signification du test ET.

4.1 Niveau de signification du test ET version 1.

On veut tout d'abord explorer le niveau de signification du test ET version 1 dans le cas où l'hypothèse nulle est simple, du type $\mathcal{H}_0 : F = F_0$, la fonction F_0 étant entièrement déterminée et appartenant au domaine d'attraction de Gumbel. On suppose que $F_0 \in \mathcal{E}$ et on note $H_0 = -\ln(1 - F_0)$. On note :

- l'approximation ET du quantile sous \mathcal{H}_0 : $q_{ET,n} = u_n + \sigma(u_n) \ln(m_n/np_n)$ avec $u_n = (1 - F_0)^{-1}(m_n/n)$ et $\sigma(u_n) = 1/H_0'(u_n)$.
- l'estimation paramétrique du quantile sous \mathcal{H}_0 : $\hat{q}_{\text{param},n} = F_0^{-1}(1 - p_n)$.

Malgré son intérêt uniquement théorique, nous nous proposons tout d'abord d'étudier le niveau asymptotique du test ET version 0 dans le but de déterminer dans un cas simple la méthode que nous utiliserons pour étudier le niveau asymptotique des autres versions du test.

Théorème 4.1 (niveau du test ET version 0 ($IC_{th,n}$))

On suppose que m_n vérifie les conditions de la remarque 3.2 et que l'on utilise l'intervalle de confiance théorique (14) de degré de confiance $1 - \alpha$ pour le quantile q_{1-p_n} . Le niveau de signification du test ET version 0 tend alors vers α lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : L'erreur entre le vrai quantile et son estimation ET s'écrit

$$q_{1-p_n} - \hat{q}_{ET,n} = q_{1-p_n} - q_{ET,n} + q_{ET,n} - \hat{q}_{ET,n}.$$

Or, lorsque m_n vérifie les conditions de la remarque 3.2, on a (voir proposition 3.1)

$$\sqrt{m_n} \frac{\hat{q}_{ET,n} - q_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On en déduit que $q_{1-p_n} - \hat{q}_{ET,n} = \delta_n + \sigma(u_n)\sqrt{(A_n/m_n)} \xi_n$ où $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Posons $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \text{Niveau} &= \text{P}(\text{rejeter } \mathcal{H}_0 \mid F = F_0) \\ &= \text{P}(q_{1-p_n} \notin [\hat{q}_{ET,n} + \delta_n \pm \sigma(u_n)B_n z_{1-\alpha/2}] \mid F = F_0) \\ &= \text{P}(\hat{q}_{ET,n} + \delta_n + \sigma(u_n)B_n \xi_n \notin [\hat{q}_{ET,n} + \delta_n \pm \sigma(u_n)B_n z_{1-\alpha/2}]) \\ &= \text{P}(\xi_n \notin [\pm z_{1-\alpha/2}]) \rightarrow \alpha \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

On pose $a_n = -\ln(m_n/n)$ et $b_n = -\ln p_n$. De plus, on suppose que a_n et b_n sont de la forme

$$a_n = p \ln n + q \ln \ln n \quad \text{et} \quad b_n = p' \ln n + q' \ln \ln n, \quad (18)$$

avec $p \leq 1$ et $q \leq 0$ si $p = 1$ ou q quelconque si $p < 1$, et $p' \geq 1$ et $q' \geq 0$ si $p' = 1$ ou q' quelconque si $p' > 1$. Ceci implique que $p_n = n^{-p'}(\ln n)^{-q'}$ et $m_n = n^{1-p}(\ln n)^{-q}$.

Lemme 4.1 Soit $F \in \mathcal{E}$, $H = -\ln(1 - F)$,

$$D_n = \sqrt{m_n} \frac{\delta_n}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} \quad \text{et} \quad C_n = \sqrt{m_n} \frac{d_n - \delta_n}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}}. \quad (19)$$

On suppose que a_n et b_n sont donnés par (18). Alors, des conditions suffisantes pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$ sont :

- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$ ($\rho \neq 1$) ou $H \in \mathcal{C}^2$: $p = p' = 1$ et $|q| < 2$.
- Si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon = 0$: aucune condition supplémentaire.
- Si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon \neq 0$: $p = p' = 1$ et $|q| < 2(1 + \tau)$.
- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$: $p = p' = 1$ et $|q| < 2(1 - \rho)$.

De plus, sous les mêmes conditions, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$.

La démonstration du lemme 4.1 se trouve dans l'annexe C.

Théorème 4.2 (niveau du test ET version 1 ($IC_{re,n}$))

Pour le test, on utilise l'intervalle de confiance réel (15) de degré de confiance $1 - \alpha$ pour le quantile q_{1-p_n} . Sous les conditions du lemme 4.1, le niveau du test ET version 1 tend vers α quand n tend vers l'infini.

Démonstration : Les conditions de la remarque 3.2 sont impliquées par celles du lemme 4.1. Donc, comme précédemment, puisque les conditions de la remarque 3.2 sont vérifiées, on a la propriété $q_{1-p_n} - \hat{q}_{ET,n} = \delta_n + \sigma(u_n)\sqrt{(A_n/m_n)} \xi_n$ où $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Posons $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$ et $z = z_{1-\alpha/2}$. Par définition, le niveau s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Niveau} &= \text{P}(\text{rejeter } \mathcal{H}_0 \mid F = F_0) \\ &= \text{P}(q_{1-p_n} \notin [\hat{q}_{ET,n} + d_n \pm \hat{\sigma}_n B_n z] \mid F = F_0) \\ &= \text{P}(\hat{q}_{ET,n} + \delta_n + \sigma(u_n) B_n \xi_n \notin [\hat{q}_{ET,n} + d_n \pm \hat{\sigma}_n B_n z]) \\ &= \text{P}\left(\xi_n \notin \left[C_n \pm \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} z\right]\right). \end{aligned}$$

A présent, posons

$$\text{Int}_n = \left[C_n \pm \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} z \right], \quad (20)$$

et montrons que $\text{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \rightarrow 1 - \alpha$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On sait (Davis et Resnick [6]) que lorsque $m_n \rightarrow \infty$ et $m_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors

$$\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Ceci signifie que

$$\forall \eta > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} - 1 \right| > \eta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Remarquons que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} - 1 \right| > \eta \right) = \mathbb{P} \left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} - 1 > \eta \right) + \mathbb{P} \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} > \eta \right).$$

La probabilité du membre de gauche tendant vers zéro, on en déduit que les probabilités à droite de l'égalité tendent vers zéro. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P} \left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} > 1 + \eta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P} \left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} < 1 - \eta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Avec la notation $I_{1,n} = [C_n \pm z(1 + \eta)]$, on en déduit que $\forall \eta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Int}_n \subset I_{1,n}) &= \mathbb{P} \left(\left[\pm \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} \right] \subset [\pm(1 + \eta)] \right) = \mathbb{P} \left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} \leq 1 + \eta \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma(u_n)} > 1 + \eta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque sous les conditions du lemme 4.1, $C_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, on peut écrire : $\forall c > \eta, \exists N_0(c) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0(c), \quad I_{1,n} \subset [\pm z(1 + c)].$$

Si on prend $c = 2\eta$, on a : $\forall n \geq N_0(2\eta)$,

$$\mathbb{P}(\text{Int}_n \subset I_{1,n}) \leq \mathbb{P}(\text{Int}_n \subset [\pm z(1 + 2\eta)]).$$

Donc $\mathbb{P}(\text{Int}_n \subset [\pm z(1 + 2\eta)]) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui signifie que

$$\forall \nu_1 > 0, \exists N_1(\nu_1, \eta) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_1(\nu_1, \eta), \quad \mathbb{P}(\text{Int}_n \not\subset [\pm z(1 + 2\eta)]) < \nu_1.$$

Alors, on a : $\forall n \geq N_1(\nu_1, \eta)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) &= \mathbb{P}((\xi_n \in \text{Int}_n) \cap (\text{Int}_n \subset [\pm z(1 + 2\eta)])) \\ &\quad + \mathbb{P}((\xi_n \in \text{Int}_n) \cap (\text{Int}_n \not\subset [\pm z(1 + 2\eta)])) \\ &\leq \mathbb{P}(\xi_n \in [\pm z(1 + 2\eta)]) + \mathbb{P}(\text{Int}_n \not\subset [\pm z(1 + 2\eta)]) \\ &\leq \mathbb{P}(\xi_n \in [\pm z(1 + 2\eta)]) + \nu_1. \end{aligned} \tag{21}$$

D'autre part, on sait que $\forall \nu_2 > 0, \exists C(\nu_2) > 0$ et $N_2(\nu_2)$ tels que

$$\forall \eta \in]0, C(\nu_2) \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2(\nu_2), \quad |\mathbb{P}(\xi_n \in [\pm z(1 + 2\eta)]) - (1 - \alpha)| < \nu_2,$$

ce qui implique que

$$\forall \nu_2 > 0 \text{ et } \forall \eta \in]0, C(\nu_2)], \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n \in [\pm z(1 + 2\eta)]) \leq 1 - \alpha + \nu_2.$$

Puisque $\mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \leq \mathbb{P}(\xi_n \in [\pm z(1 + 2\eta)]) + \nu_1$ pour $n \geq N_1(\nu_1, \eta)$ (cf. (21)), on en déduit que $\forall \nu_1, \nu_2 > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \leq 1 - \alpha + \nu_1 + \nu_2.$$

Avec le même type de raisonnement, on peut montrer que $\forall \nu_1, \nu_2 > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \geq 1 - \alpha - \nu_1 - \nu_2.$$

Il s'ensuit que $\forall \nu_1, \nu_2 > 0$,

$$1 - \alpha - \nu_1 - \nu_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n) \leq 1 - \alpha + \nu_1 + \nu_2$$

Comme on peut prendre ν_1 et ν_2 aussi petits que l'on veut, on en déduit que la limite inférieure et la limite supérieure de $\mathbb{P}(\xi_n \in \text{Int}_n)$ sont égales toutes les deux à $1 - \alpha$. Donc la limite existe, et vaut $1 - \alpha$.

■

4.2 Niveau de signification des test ET-BP complet et simplifié.

Dans ce paragraphe, on veut étudier à distance finie, c'est-à-dire à n fixé, le niveau de signification des deux tests ET-BP. Malheureusement, il n'existe pas, à notre connaissance, d'éléments permettant de mener cette étude complètement. Pour obtenir malgré tout un idée approximative des résultats auxquels on peut s'attendre, nous proposons de démontrer deux énoncés en nous plaçant dans un cadre simplifié : au lieu de travailler avec des échantillons bootstrap issus de $F_{\hat{\theta}_n}$, nous allons supposer que ces échantillons bootstrap sont issus de la vraie loi sous \mathcal{H}_0 . Il s'agit alors de simulation par Monte-Carlo.

On explore tout d'abord le niveau de signification du test ET-BP complet dans le cas où l'hypothèse nulle est simple, $\mathcal{H}_0 : F = F_0$, la fonction F_0 étant supposée entièrement déterminée, et appartenant au domaine d'attraction de Gumbel.

Proposition 4.1 (niveau du test ET-BP, version complète)

On note H_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\hat{\delta}_n = q_{1-p_n}(\hat{\theta}_n) - \hat{q}_{ET,n}$, qui est l'estimation de l'erreur d'approximation δ sous \mathcal{H}_0 , où $q_{1-p_n}(\hat{\theta}_n)$ est l'estimation paramétrique du quantile d'ordre $1 - p_n$ sous \mathcal{H}_0 , et $\hat{q}_{ET,n}$ l'estimation ET de ce même quantile. On suppose que pour tout n , la fonction H_n est continue et strictement croissante, donc inversible. Alors, quelle que soit la taille n de l'échantillon, le niveau de signification du test ET-BP complet tend vers α lorsque le nombre N d'échantillons bootstrap tend vers l'infini.

Ensuite, on explore le niveau de signification du test ET-BP simplifié dans le même cadre.

Proposition 4.2 (niveau du test ET-BP, version simplifiée)

On note G_n la fonction de répartition de la variable $\widehat{q}_{ET,n}$ et on suppose que pour tout n cette fonction est continue et strictement croissante, donc inversible. Alors quelle que soit la taille n de l'échantillon, le niveau de signification du test ET-BP simplifié tend vers α lorsque le nombre N d'échantillons bootstrap tend vers l'infini.

Pour simplifier la présentation, nous commençons par la démonstration la plus simple, celle de la proposition 4.2.

Démonstration de la proposition 4.2 : On suppose que l'échantillon initial

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est de loi F_0 . Puis on tire N échantillons indépendants

$\mathbf{X}^{*(j)} = (X_1^{*(j)}, \dots, X_n^{*(j)})$ de loi F_0 . Par conséquent, les N variables aléatoires $\widehat{q}_{ET,n}^{*(j)}$,

$1 \leq j \leq N$ obtenues à partir de ces N échantillons bootstrap sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune G_n . Par conséquent, les quantiles empiriques associés (relatifs aux réplifications bootstrap) d'ordre $\alpha/2$ et $1 - \alpha/2$, respectivement, convergent presque sûrement lorsque $N \rightarrow \infty$ vers les quantiles correspondants de la fonction de répartition G_n . De plus, on note $\mathbb{X} = (\mathbf{X}^{*(1)}, \dots, \mathbf{X}^{*(N)})$ l'ensemble des échantillons bootstrap. Par suite, $\forall n$ fixé,

$$\begin{aligned}
\text{Niveau} &= \mathbb{P}(\text{rejeter } \mathcal{H}_0 | F = F_0) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{q}_{ET,n} \notin [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*] | F = F_0) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{I}(\widehat{q}_{ET,n} \notin [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*]) | F = F_0] \\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\mathbb{I}(\widehat{q}_{ET,n} \notin [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*]) | \mathbb{X}] | F = F_0\} \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\widehat{q}_{ET,n} \notin [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*] | \mathbb{X}) | F = F_0] \\
&\rightarrow \alpha \quad \text{quand } N \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{22}$$

d'après le théorème de convergence dominée, car

$$\mathbb{P}(\widehat{q}_{ET,n} \notin [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*] | \mathbb{X}) \xrightarrow{p.s.} \alpha \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \tag{23}$$

et puisque ces probabilités conditionnelles restent entre 0 et 1.

■

Démonstration de la proposition 4.1 : Elle est essentiellement analogue à la démonstration précédente. Mais cette fois-ci, on calcule l'estimateur $\widehat{\theta}_n^{*(j)}$ de θ calculé à partir de $\mathbf{X}^{*(j)}$, $1 \leq j \leq N$, et on forme

$$\widehat{\delta}_n^{*(j)} = q_{1-p_n}(\widehat{\theta}_n^{*(j)}) - \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Comme les $\widehat{\delta}_n^{*(j)}$, $1 \leq j \leq N$, sont indépendants et identiquement distribués, de loi commune H_n , on conclut comme ci-dessus.

■

Ces résultats et leurs démonstrations permettent de mieux comprendre pourquoi on peut espérer que le niveau à distance finie des tests ET-BP soit très proche du niveau cherché α .

La situation est beaucoup plus compliquée dans le cas du vrai bootstrap paramétrique, lorsque les $\mathbf{X}^{*(j)}$ sont simulés selon $F_{\hat{\theta}_n}$. L'égalité (22) reste vraie, mais (23) ne l'est plus.

En effet, à n fixé, puisque les $X_i^{*(j)}$ sont issus de $F_{\hat{\theta}_n}$, et non de F_0 , les quantiles $\hat{q}_{ET, \min, n}^*$ et $\hat{q}_{ET, \max, n}^*$ convergent presque sûrement quand $N \rightarrow \infty$ vers les quantiles correspondants des lois G_n^* et H_n^* au lieu de G_n et H_n , où G_n^* est la loi commune des $\hat{q}_{ET, n}^{*(j)}$, c'est-à-dire d'estimateurs ET du quantile d'ordre $1 - p_n$ calculés à partir d'échantillons de loi $F_{\hat{\theta}_n}$ et non F_0 , et de même, H_n^* est la loi commune des $\hat{\delta}_n^{*(j)}$.

Pour pouvoir conclure, il faudrait pouvoir évaluer précisément l'écart entre les quantiles extrêmes de G_n (resp. H_n) et ceux de G_n^* (resp. H_n^*), donc connaître précisément l'écart entre G_n (resp. H_n) et G_n^* (resp. H_n^*), en particulier en queue de distribution. Même dans le cas ET-BP simple, on a

$$\hat{q}_{ET, n}^{*(j)} = X_{n-m_n}^{*(j)} + \left(\frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} Y_k^{*(j)} \right) \ln \left(\frac{m_n}{np_n} \right),$$

où les $Y_k^{*(j)}$ sont les excès au-dessus de $X_{(n-m_n)}^{*(j)}$ de l'échantillon $\mathbf{X}^{*(j)}$, les variables aléatoires $X_i^{*(j)}$ étant indépendantes et identiquement distribuées de loi $F_{\hat{\theta}_n}$. Par conséquent, chaque $Y_k^{*(j)}$ admet pour fonction de répartition

$$K^*(y) = \frac{F_{\hat{\theta}_n}(X_{n-m_n}^{*(j)} + y) - F_{\hat{\theta}_n}(X_{n-m_n}^{*(j)})}{1 - F_{\hat{\theta}_n}(X_{n-m_n}^{*(j)})}$$

au lieu de la fonction de répartition

$$K(y) = \frac{F_0(X_{n-m_n} + y) - F_0(X_{n-m_n})}{1 - F_0(X_{n-m_n})}$$

pour les excès initiaux Y_j .

L'étude de la différence $K^*(y) - K(y)$ paraît insurmontable, et, finalement, ce sont les simulations présentées dans la partie 6 qui indiquent le mieux la qualité de l'approximation du niveau α à distance finie.

5 Puissance du test ET.

5.1 Puissance du test ET version 1.

On explore tout d'abord la puissance du test ET version 1 dans le cas où les hypothèses sont simples, du type $\mathcal{H}_0 : F = F_0$ contre $\mathcal{H}_1 : F = F_1$, les fonctions F_0 et F_1 étant entièrement déterminées et appartenant au domaine d'attraction de Gumbel. On suppose que $F_0 \in \mathcal{E}$ et $F_1 \in \mathcal{E}$, et on note $H_0 = -\ln(1 - F_0)$ et $H_1 = -\ln(1 - F_1)$. Pour $i \in \{0, 1\}$, on introduit :

- l'approximation ET du quantile sous \mathcal{H}_i , soit $q_{ET, n}(F_i) = u_n^{(i)} + \sigma_n^{(i)} \ln(m_n/np_n)$ avec $u_n^{(i)} = (1 - F_i)^{-1}(m_n/n)$ et $\sigma_n^{(i)} = 1/H_i'(u_n^{(i)})$;
- l'estimation paramétrique du quantile sous \mathcal{H}_i , soit $\hat{q}_{\text{param}, n}(F_i) = q_{i, n} = F_i^{-1}(1 - p_n)$.

Posons

$$\rho_n = \sqrt{m_n} \frac{q_{ET, n}(F_1) - q_{ET, n}(F_0)}{\sigma_n^{(1)} \sqrt{A_n}} \quad \text{et} \quad \zeta_n = \frac{\sigma_n^{(0)}}{\sigma_n^{(1)}}, \quad (24)$$

où $A_n = 1 + (\ln(m_n/n))^2$. On définit aussi

$$K_i(a_n) = \frac{a_n(H_i^{-1})'(a_n)}{H_i^{-1}(a_n)} \quad \text{pour } i \in \{0, 1\} \quad \text{et} \quad K_{01}(a_n) = \frac{H_0^{-1}(a_n)}{H_1^{-1}(a_n)}, \quad (25)$$

où $a_n = -\ln(m_n/n)$ est défini par (18), ainsi que $b_n = -\ln p_n$.

Lemme 5.1 *Lorsque $n \rightarrow \infty$ et $m_n \rightarrow \infty$, on a*

$$\rho_n \sim \sqrt{m_n} \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} \left(\frac{1}{K_{01}(a_n)} - 1 \right) + \frac{K_1(a_n)}{K_{01}(a_n)} - K_0(a_n) \right]. \quad (26)$$

De plus, on a

$$\zeta_n = \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} K_0(a_n). \quad (27)$$

La démonstration de ce lemme se trouve dans l'annexe D.

Lemme 5.2 *On considère les cas où les fonctions H_0 et H_1 appartiennent aux classes suivantes:*

- $H_0 \in \mathcal{C}_{\beta_0}^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\beta_1}^1$ avec $0 < \beta_0 < \beta_1$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\rho}^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\beta}^1$ avec $\beta > 0$ et $0 < \rho < 1$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\beta}^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}^2$ avec $\beta > 0$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\rho}^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}^2$ avec $0 < \rho < 1$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\rho_0}^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\rho_1}^3$ avec $0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$.

Alors $\rho_n \rightarrow -\infty$ et $\zeta_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, avec $\zeta_n = o(|\rho_n|)$.

Les conditions du lemme 5.2 sélectionnent les cas où F_0 est à queue plus lourde que F_1 . Les autres cas sont étudiés dans le lemme 5.3.

Lemme 5.3 *On considère les cas restants, où les fonctions H_0 et H_1 appartiennent aux classes suivantes :*

- $H_0 \in \mathcal{C}_{\beta_0}^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\beta_1}^1$ avec $0 < \beta_1 < \beta_0$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\beta}^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\rho}^3$ avec $\beta > 0$ et $0 < \rho < 1$;
- $H_0 \in \mathcal{C}^2$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\beta}^1$ avec $\beta > 0$;
- $H_0 \in \mathcal{C}^2$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\rho}^3$ avec $0 < \rho < 1$;
- $H_0 \in \mathcal{C}_{\rho_0}^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\rho_1}^3$ avec $0 < \rho_0 < \rho_1 < 1$.

Alors $\rho_n \rightarrow +\infty$ et $\zeta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On démontre le lemme 5.2 dans l'annexe D. La démonstration du lemme 5.3 est analogue.

Bien que la version 0 du test soit inutilisable en pratique, nous nous proposons d'étudier sa puissance asymptotique dans le but de déterminer dans un cadre simple la méthode que nous utiliserons pour étudier les autres versions du test.

Théorème 5.1 (puissance du test ET version 0 ($IC_{th,n}$))

On utilise pour le test l'intervalle de confiance théorique (14) de degré de confiance $1 - \alpha$ pour le quantile q_{1-p_n} . Sous les conditions de la remarque 3.2 et les hypothèses des lemmes 5.2 et 5.3, la puissance du test ET version 0 tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration : La statistique de test est construite sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , donc l'intervalle de confiance théorique pour le quantile q_{1-p_n} de niveau $1 - \alpha$ utilisé pour le test ET version 0 est

$$IC_{th,n}(\mathcal{H}_0) = \left[\widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} \pm \sigma_n^{(0)} \sqrt{\frac{A_n}{m_n}} z_{1-\alpha/2} \right],$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et $\delta_{0,n} = q_{0,n} - q_{ET,n}(F_0)$ est l'erreur d'approximation sous \mathcal{H}_0 . De plus, on peut écrire :

$$\begin{aligned} q_{0,n} - \widehat{q}_{ET,n} &= q_{0,n} - q_{ET,n}(F_0) + q_{ET,n}(F_0) - \widehat{q}_{ET,n} \\ &= \delta_{0,n} + q_{ET,n}(F_0) - q_{ET,n}(F_1) + q_{ET,n}(F_1) - \widehat{q}_{ET,n}. \end{aligned}$$

On sait (proposition 3.1) que lorsque les conditions de la remarque 3.2 sont vérifiées, on a

$$\sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - q_{ET,n}(F_1)}{\sigma_n^{(1)} \sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

et on en déduit que

$$q_{0,n} = \widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} + q_{ET,n}(F_0) - q_{ET,n}(F_1) + \sigma_n^{(1)} \sqrt{\frac{A_n}{m_n}} \xi_n, \quad (28)$$

où $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Posons $\Delta_n = q_{ET,n}(F_1) - q_{ET,n}(F_0)$, $z_{1-\alpha/2} = z$ et $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$. Par définition, la puissance du test s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Puissance} &= 1 - \text{P}(\text{accepter } \mathcal{H}_0 \mid F = F_1) \\ &= \text{P}\left(q_{0,n} \notin \left[\widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} \pm \sigma_n^{(0)} B_n z\right] \mid F = F_1\right) \\ &= \text{P}\left(\widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} - \Delta_n + \sigma_n^{(1)} B_n \xi_n \notin \left[\widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} \pm \sigma_n^{(0)} B_n z\right]\right) \\ &= \text{P}\left(\xi_n \notin \underbrace{[\rho_n \pm \zeta_n z]}_{J_n}\right), \end{aligned}$$

où ρ_n et ζ_n sont définis par (24).

Les bornes de l'intervalle J_n sont donc : $s_n = \rho_n - \zeta_n z$ et $t_n = \rho_n + \zeta_n z$. On veut montrer que $\text{P}(\xi_n \notin [s_n, t_n]) \rightarrow 1$, ou, de façon équivalente, que $\text{P}(\xi_n \in [s_n, t_n]) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Les lemmes 5.2 et 5.3 montrent que l'on doit considérer deux cas.

- Dans un premier cas (cf. lemme 5.2), on a $\rho_n \rightarrow -\infty$ et $\zeta_n \rightarrow +\infty$ avec $\zeta_n = o(|\rho_n|)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors on montre que $t_n \rightarrow -\infty$ (puisque $\zeta_n z = o(|\rho_n|)$) et $s_n \rightarrow -\infty$ (puisque $s_n < t_n$) lorsque $n \rightarrow \infty$. A présent, si on note F_n la fonction de répartition de ξ_n , on a $0 \leq \text{P}(\xi_n \in [s_n, t_n]) = F_n(t_n) - F_n(s_n) \leq F_n(t_n)$. Or, si on note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(t_n) &= \Phi(t_n) + F_n(t_n) - \Phi(t_n) \leq \Phi(t_n) + |F_n(t_n) - \Phi(t_n)| \\ &\leq \Phi(t_n) + \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)|. \end{aligned}$$

On sait que $\Phi(t_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, puisqu'alors $t_n \rightarrow -\infty$. De plus, d'après le théorème de Polya [17] (p. 120), puisque $F_n \rightarrow \Phi$ lorsque $n \rightarrow \infty$, Φ étant une fonction continue, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit que $F_n(t_n) \rightarrow 0$, et donc que $\text{P}(\xi_n \in [s_n, t_n]) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- Dans le second cas (cf. lemme 5.3), on a $\rho_n \rightarrow +\infty$ et $\zeta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors on montre que $s_n \rightarrow +\infty$ et $t_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Maintenant, on a $0 \leq \text{P}(\xi_n \in [s_n, t_n]) = F_n(t_n) - F_n(s_n) \leq 1 - F_n(s_n)$. Or,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - F_n(s_n) &= 1 - \Phi(s_n) - (F_n(s_n) - \Phi(s_n)) \\ &\leq 1 - \Phi(s_n) + |F_n(s_n) - \Phi(s_n)| \\ &\leq 1 - \Phi(s_n) + \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)|. \end{aligned}$$

On sait que $1 - \Phi(s_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, puisqu'alors $s_n \rightarrow +\infty$. Par le même argument que précédemment, on en déduit que $1 - F_n(s_n) \rightarrow 0$, et donc que $\text{P}(\xi_n \in [s_n, t_n]) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On a donc montré que dans les deux cas la puissance tend vers 1.

■

Théorème 5.2 (puissance du test ET version 1 ($IC_{re,n}$))

On utilise pour le test l'intervalle de confiance réel (15) de degré de confiance $1 - \alpha$ pour le quantile q_{1-p_n} . Sous les conditions des lemmes 4.1, 5.2 et 5.3, la puissance du test ET version 1 tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration : Pour alléger les notations, de même que dans la démonstration du théorème 5.1, on pose $\Delta_n = q_{ET,n}(F_1) - q_{ET,n}(F_0)$, $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$ et $z = z_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. La statistique de test est construite sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , donc l'intervalle de confiance réel pour le quantile q_{1-p_n} de degré de confiance $1 - \alpha$ utilisé pour le test ET version 1 est le suivant :

$$IC_{re,n}(\mathcal{H}_0) = \left[\widehat{q}_{ET,n} + d_{0,n} \pm \widehat{\sigma}_n \sqrt{B_n z} \right],$$

où $d_{0,n}$ est l'approximation au premier ordre de $\delta_{0,n}$, l'erreur d'approximation sous \mathcal{H}_0 .

On suppose à présent que $F = F_1$. On peut alors écrire (cf. (28))

$$q_{0,n} = \widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} - \Delta_n + \sigma_n^{(1)} \sqrt{B_n} \xi_n,$$

où $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Par définition, la puissance du test s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Puissance} &= 1 - \text{P}(\text{accepter } \mathcal{H}_0 \mid F = F_1) \\ &= \text{P}(q_{0,n} \notin [\widehat{q}_{ET,n} + d_{0,n} \pm \widehat{\sigma}_n B_n z] \mid F = F_1) \\ &= \text{P}\left(\widehat{q}_{ET,n} + \delta_{0,n} - \Delta_n + \sigma_n^{(1)} B_n \xi_n \notin [\widehat{q}_{ET,n} + d_{0,n} \pm \widehat{\sigma}_n B_n z]\right) \\ &= \text{P}\left(\xi_n \notin \left[C_n^{(0)} \zeta_n + \rho_n \pm \frac{\widehat{\sigma}_n}{\sigma_n^{(1)}} z \right]\right) \end{aligned}$$

où ρ_n et ζ_n sont définis par (24) et $C_n^{(0)}$ est définie de façon analogue à (19). On veut donc montrer que $\text{P}(\xi_n \notin J'_n) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, où

$$J'_n = \left[C_n^{(0)} \zeta_n + \rho_n \pm \frac{\widehat{\sigma}_n}{\sigma_n^{(1)}} z \right].$$

Sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 , on sait (Davis et Resnick [6]) que si $m_n \rightarrow \infty$ et $m_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $\widehat{\sigma}_n/\sigma_n^{(1)} \xrightarrow{P} 1$. De même que dans la démonstration de la proposition 4.2, on montre que si on note

$$I_n = \left[C_n^{(0)} \zeta_n + \rho_n \pm z(1 + \eta) \right],$$

cela implique que $\forall \eta > 0$, $P(J'_n \subset I_n) \rightarrow 1$, donc que $P(J'_n \not\subset I_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, sous les conditions du lemme 4.1, on sait que $C_n^{(0)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, d'après les lemmes 5.2 et 5.3, on sait que $\zeta_n = o(|\rho_n|)$. Il s'ensuit que $C_n^{(0)}\zeta_n = o(|\rho_n|)$, et donc que

$$I_n = [\rho_n(1 + \epsilon_n) \pm z(1 + \eta)],$$

où $\epsilon_n = C_n^{(0)}\zeta_n/\rho_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (ϵ_n étant de signe quelconque).

Comme dans la preuve de la proposition 5.2, on en déduit que $\forall \eta > 0$, $P(\xi_n \notin I_n) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, car $\rho_n \rightarrow \pm\infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Si on remarque que

$$\begin{aligned} P(\xi_n \notin I_n) &= P\{(\xi_n \notin J'_n) \cap (J'_n \subset I_n)\} + P\{(\xi_n \notin J'_n) \cap (J'_n \not\subset I_n)\} \\ &\leq P(\xi_n \notin J'_n) + P(J'_n \not\subset I_n), \end{aligned}$$

cela implique que $1 \geq P(\xi_n \notin J'_n) \geq P(\xi_n \notin I_n) - P(J'_n \not\subset I_n) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit donc que $P(\xi_n \notin J'_n)$, et donc la puissance, tend vers 1.

■

5.2 Puissance des tests ET-BP complet et simplifié.

Dans ce paragraphe, on étudie la puissance des deux tests ET-BP. Ici encore, on ne peut pas espérer des résultats complets, pour les mêmes raisons que dans le paragraphe 4.2. De la même manière, nous allons étudier le cas où H_0 et H_1 sont des hypothèses simples.

Proposition 5.1 (puissance du test ET-BP, version simplifiée)

Sous les conditions de la remarque 3.2 et les hypothèses des lemmes 5.2 et 5.3, la puissance du test ET-BP simplifié pour tester une hypothèse simple $\mathcal{H}_0 : F = F_0$ contre une alternative simple $\mathcal{H}_1 : F = F_1$ tend vers 1 lorsque N , puis n , tendent vers l'infini.

Démonstration : On suppose que l'échantillon initial $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est de loi F_1 . On tire N échantillons indépendants $\mathbf{X}^{*(j)} = (X_1^{*(j)}, \dots, X_n^{*(j)})$ de loi F_0 , et on note $\mathbb{X} = (\mathbf{X}^{*(1)}, \dots, \mathbf{X}^{*(N)})$ l'ensemble des échantillons bootstrap. De même que pour (22), on montre que

$$\begin{aligned} \text{Puissance} &= P(\text{rejeter } \mathcal{H}_0 \mid F = F_1) \\ &= E \left[P(\hat{q}_{ET,n} \notin [\hat{q}_{ET,\min,n}^*, \hat{q}_{ET,\max,n}^*] \mid \mathbb{X}) \mid F = F_1 \right] \\ &= E \left[P(dq_n^0 \notin [dq_{\min,n}^{*(0)}, dq_{\max,n}^{*(0)}] \mid \mathbb{X}) \mid F = F_1 \right], \end{aligned}$$

où

$$dq_n^0 = \sqrt{m_n} \frac{\hat{q}_{ET,n} - q_{ET,n}(F_0)}{\sigma_n^{(0)} \sqrt{A_n}},$$

et, comme dans la preuve de la proposition 4.2,

$$dq_{\min, n}^{*(0)} = \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET, \min, n} - q_{ET, n}(F_0)}{\sigma_n^{(0)} \sqrt{A_n}} \xrightarrow{ps} (G_n^{(0)})^{-1}(\alpha/2) \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

et

$$dq_{\max, n}^{*(0)} = \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET, \max, n} - q_{ET, n}(F_0)}{\sigma_n^{(0)} \sqrt{A_n}} \xrightarrow{ps} (G_n^{(0)})^{-1}(1 - \alpha/2) \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

De même, on pose

$$dq_n^1 = \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET, n} - q_{ET, n}(F_1)}{\sigma_n^{(1)} \sqrt{A_n}} \sim G_n^{(1)},$$

et on obtient

$$dq_n^0 = \frac{dq_n^1 + \rho_n}{\zeta_n},$$

où ρ_n et ζ_n sont donnés par (24). Par conséquent, à n fixé,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Puissance} = 1 &+ G_n^{(1)} [-\rho_n + \zeta_n (G_n^{(0)})^{-1}(1 - \alpha/2)] \\ &- G_n^{(1)} [-\rho_n + \zeta_n (G_n^{(0)})^{-1}(\alpha/2)] \end{aligned} \quad (29)$$

Ceci donne, pour chaque n fixé, une approximation de la puissance quand on choisit N grand. Nous voulons maintenant montrer que le membre de droite de (29) tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. On utilise le fait que les fonctions de répartition $G_n^{(0)}$ et $G_n^{(1)}$ convergent uniformément vers Φ , fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite, quand $n \rightarrow \infty$ (sous les hypothèses de la remarque 3.2) d'après la proposition 3.1. Donc $(G_n^{(0)})^{-1}(1 - \alpha/2) \rightarrow z_{1-\alpha/2}$ et $(G_n^{(0)})^{-1}(\alpha/2) \rightarrow z_{\alpha/2}$. Par conséquent, ces deux suites sont bornées. Puisque $\zeta_n = o(|\rho_n|)$, on en déduit que $\zeta_n (G_n^{(0)})^{-1}(\alpha/2) = o(|\rho_n|)$ et $\zeta_n (G_n^{(0)})^{-1}(1 - \alpha/2) = o(|\rho_n|)$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors, en raisonnant comme dans la preuve du théorème 5.1, on en déduit que la puissance tend vers 1 quand n et N tendent vers l'infini.

■

Remarque 5.1 (puissance du test ET-BP, version simplifiée)

1. Cette démonstration montre que la puissance du test ET-BP simplifié étudiée ci-dessus, comme celle du test version 1, est directement reliée à la quantité $|\rho_n|$ (cf. (24)) et au fait qu'elle tend vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$. La puissance est donc principalement liée à l'écart entre les approximations ET des quantiles d'ordre $1 - p_n$ des fonctions de répartition F_0 et F_1 .
2. Il ne nous semble pas possible d'établir un résultat analogue pour tester une hypothèse composite $\mathcal{H}_0 : F \in \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ contre une alternative $\mathcal{H}_1 : F = F_1$. En effet, dans ce cas, il faut estimer θ sous \mathcal{H}_0 . Lorsque l'échantillon initial est issu de la loi F_1 , on ne connaît pas les propriétés de la suite $(\widehat{\theta}_n)_n$. Tout au plus peut-on dire que puisque

dans ρ_n , $q_{ET,n}(F_1) - q_{ET,n}(F_0)$ serait remplacé par $q_{ET,n}(F_1) - q_{ET,n}(F_{\hat{\theta}_n})$, on peut espérer que la puissance du test tend vers 1 pourvu que

$$\inf_{\theta \in \Theta} \sqrt{m_n} \frac{|q_{ET,n}(F_1) - q_{ET,n}(F_\theta)|}{\sigma_n^{(1)} \sqrt{A_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (30)$$

Notons aussi que $\sigma_n^{(0)}$ devrait être remplacé par $\sigma_n(F_{\hat{\theta}_n})$, quantité que l'on ne maîtrise pas. Mais on peut conjecturer que, de façon analogue au cas précédent, le rapport correspondant à ζ_n reste négligeable devant (30).

Remarque 5.2 (puissance du test ET-BP, version complète)

De même que pour le niveau d'une part, et pour le test ET-BP simplifié d'autre part, on rencontre des difficultés insurmontables pour étudier la puissance du test ET-BP complet dans le cas d'une hypothèse composite. Même dans le cas d'une hypothèse simple, la présence dans les bornes bootstrap de l'intervalle de confiance $IC_{\delta, BP}$ des quantités $q_{1-p, n}(F_{\hat{\theta}_n^{*(j)}})$ nous empêche d'utiliser une démonstration analogue au cas simplifié. La simplification qui consiste à remplacer l'estimation du quantile paramétrique $q_{1-p, n}(F_{\hat{\theta}_n^{*(j)}})$ par la vraie valeur $q_{1-p, n}(F_0)$ pour les échantillons bootstrap nous permet d'achever la démonstration dans ce cas particulier puisque l'on retombe exactement sur le cas du test ET-BP simplifié. Une fois encore, pour les cas plus complexes, nous sommes obligés d'avoir recours à des simulations pour comparer les puissances des différentes versions du test ET.

Dans la partie suivante, nous allons mettre numériquement en évidence des propriétés des différents tests qu'il n'a pas été possible d'établir théoriquement.

6 Données simulées.

Pour les différents modèles envisagés, on cherche à savoir quelles valeurs de m_n utiliser en fonction de n , p et de la version du test ET pour qu'en pratique le niveau et la puissance de ce test restent corrects. On applique donc les trois versions du test ET à des données tirées selon l'un des modèles étudiés, avec différentes tailles d'échantillon, différents nombres d'excès et différents ordres de quantiles. L'exemple de la loi gamma pour des échantillons de taille 100 est présenté en section 6.1. On ne retiendra que les nombre d'excès pour lesquels le niveau expérimental (ou le pourcentage d'échantillons acceptés à raison) atteint ou dépasse le niveau réel. Ces valeurs de m_n sont celles que l'on conseille d'utiliser, dans le paragraphe 6.3, pour appliquer le test ET.

D'autre part, on peut aussi calculer la puissance expérimentale (pourcentage d'échantillons rejetés à raison) pour différentes alternatives et différentes valeurs de n , m_n et p . Un exemple est donné dans le paragraphe 6.2 pour des données issues d'une loi de Weibull proche de la loi exponentielle et une hypothèse nulle d'exponentialité. Ceci nous permet de contrôler jusqu'à quel point les différentes versions du test discriminent des lois proches.

6.1 Niveau des versions du test ET.

Afin d'explorer le niveau expérimental des différentes versions du test ET, on simule un grand nombre de jeux de données selon l'une des lois que nous étudions (normale, lognormale, exponentielle, gamma ou Weibull), et nous calculons le pourcentage d'acceptation du modèle correspondant par le test ET (version 1, 2 ou 3 successivement). On obtient donc le pourcentage d'acceptation à raison du modèle testé. Le pourcentage de rejet à tort du modèle correspond à un niveau expérimental pour le test appliqué. On a calculé le niveau expérimental, ou plus précisément le pourcentage d'acceptation à raison, pour chacune des trois versions du test et pour chacun des modèles normal, lognormal, exponentiel, gamma et Weibull.

On ne présente ici, à titre d'exemple, que le cas du modèle gamma pour les trois versions du test ET. On simule 500 jeux de données de loi gamma(3, 3) et de taille 100 pour calculer les pourcentages d'acceptation du modèle gamma pour différents quantiles d'ordre $1 - p$, différentes valeurs de m_n et différents niveaux de signification α pour les tests. On déconseille l'utilisation des valeurs de m_n pour lesquelles le pourcentage d'acceptation calculé sur l'applications du test à 500 échantillons est inférieur au pourcentage théorique $100(1 - \alpha)$. Nous conseillons aussi, bien entendu, que le pourcentage expérimental ne dépasse pas trop cette valeur théorique.

Remarque 6.1

- * *On constate expérimentalement que les résultats du calcul du pourcentage d'acceptation ne dépend pas des paramètres des lois normale et lognormale, ni des paramètres d'échelle, (resp.) λ , θ et α , des lois (resp.) gamma, exponentielle, et de Weibull, ni des paramètres de forme, (resp.) a et β , (resp.) des lois gamma et de Weibull pour autant que ces paramètres de forme soient suffisamment grands ($a \gg 1$ et $\beta \gg 1$).*
- * *En théorie, on démontre (annexe E) que*
 - *les résultats des trois tests sont indépendants des paramètres d'échelle et de position à distance finie (pour les lois étudiées ici).*
 - *les résultats des trois tests sont approximativement indépendants du paramètre $\beta \gg 1$ de la loi de Weibull à distance finie.*

Pour la plupart des lois, ceci permet de limiter à un seul le nombre de cas pour lesquels on fera les essais.

A ces jeux de données de taille 100 et de loi gamma(3, 3), on applique tout d'abord le test ET version 1, basé sur la loi asymptotique de \hat{q}_{ET} (tableau 1). On constate sur ce tableau que le pourcentage d'acceptation du modèle gamma pour le test ET version 1 n'est que rarement proche du niveau attendu. En fait, lorsque celui-ci est atteint, il est aussitôt dépassé. Pour ne pas se restreindre à trop peu de valeurs de m_n , on conseille d'utiliser toutes les valeurs de m_n pour lesquelles le pourcentage d'acceptation expérimental présenté dans le tableau dépasse le pourcentage d'acceptation théorique déduit du niveau théorique du test. Ce pourcentage théorique étant parfois largement dépassé, cela risque de réduire la puissance du test ET

version 1.

TAB. 1 – *Pourcentage d'acceptation du test ET version 1 pour des échantillon de loi gamma.*

α	$p = 10^{-2}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$		$p = 10^{-5}$		$p = 10^{-6}$	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
$m_n = 5$	92	87.4	92	90	94.4	90.6	94.6	90.8	93.4	92.4
$m_n = 10$	94.6	92.4	96.6	95	98	95.2	97.4	96.4	97.8	95.2
$m_n = 20$	98.2	95.8	98.8	96.4	99.4	97	99.6	98	99.6	99
$m_n = 30$	98.8	97.8	99.2	97	99.8	96.2	99.4	94	99.4	92.6
$m_n = 40$	99.8	98	100	94.6	99.8	92.6	99	84.4	98.8	86
$m_n = 50$	99.6	95.2	99	92.6	96.8	82.4	96.2	74.8	94	65.8
$m_n = 60$	99.4	93.6	96	78.8	91.4	66.2	85.6	57.8	82	46
$m_n = 70$	98.8	87.8	91.4	60	76.4	40	71.2	10.8	50.6	7.2
$m_n = 80$	93.8	67.8	66.6	32.8	44	14.2	19.6	0.8	9.6	0.4

On applique ensuite le test ET-BP complet (version 2). Le tableau 2 présente les résultats obtenus. Cette fois-ci, le pourcentage d'acceptation expérimental est proche du pourcentage d'acceptation théorique pour un nombre relativement élevé de valeurs de m_n . De plus, ce pourcentage théorique est peu dépassé. Le niveau expérimental du test ET-BP est donc très proche du niveau théorique, contrairement au cas du test ET version 1. On peut donc supposer que la puissance du test ET-BP complet sera meilleure que celle du test ET version 1.

TAB. 2 – *Pourcentage d'acceptation du test ET-BP complet pour des échantillon de loi gamma.*

α	$p = 10^{-2}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
$m_n = 5$	99	95	99.6	94.8	99.6	95.6	99.6	96	99.8	96.2
$m_n = 10$	98.4	94.2	98.6	93.6	98.6	93.4	98.8	93.4	98.8	93.2
$m_n = 20$	99.4	94.6	99.4	95.2	99.4	95.4	99.4	95.4	99.4	95.4
$m_n = 30$	99.2	96.8	99.4	96.8	99.2	96.8	99.2	96.8	99.2	96.8
$m_n = 40$	98.6	94.6	98.6	95	98.8	95	98.8	95	98.8	95.2
$m_n = 50$	99.2	95.2	99.4	95.6	99.4	95.4	99.4	95.6	99.4	95.4
$m_n = 60$	98.4	94.8	98.6	95	98.6	95.4	98.6	95.4	98.8	95.6
$m_n = 70$	99.6	96.8	99.6	96.8	99.6	96.8	99.6	97	99.6	97.2
$m_n = 80$	99.4	96	99.6	96.2	99.6	96.6	99.6	96.8	99.4	97
$m_n = 90$	98.6	95.8	98.8	95.8	98.8	96.4	98.8	96.4	98.8	96.6

En dernier lieu, on applique le test ET-BP simplifié (version 3). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3. Pour cette dernière version du test, on constate que lorsque le pourcentage d'acceptation théorique est atteint en pratique, il est souvent très largement dépassé. On conseille donc d'utiliser les valeurs de m_n pour lesquelles le niveau expérimental est le plus proche du niveau théorique. On peut supposer que la puissance de cette version du test sera moins bonne que celle du test ET-BP complet.

TAB. 3 – Pourcentage d'acceptation du test ET-BP simplifié pour des échantillon de loi gamma.

α	$p = 10^{-2}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$		$p = 10^{-5}$		$p = 10^{-6}$	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
$m_n = 5$	99.8	98.4	99.4	98.2	99.8	96	99.4	97.2	98.8	94.8
$m_n = 10$	100	99	99.8	98	100	97.4	99.6	97.6	99.6	95.8
$m_n = 20$	100	98.8	100	98.8	99.8	98	100	98.4	99.6	98.4
$m_n = 30$	100	100	100	99.6	99.6	98.8	100	98.8	99.8	99
$m_n = 40$	100	99.8	99.8	100	100	99.6	100	99.8	99.8	99.2
$m_n = 50$	100	100	100	99.6	100	100	100	99.6	100	99.6
$m_n = 60$	100	100	100	100	100	100	100	99.8	100	99.8
$m_n = 70$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$m_n = 80$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Les pourcentages calculés dans les tableaux précédents sont expérimentaux. On cherche donc à donner un intervalle de confiance pour la valeur effective. Pour cela, il suffit d'estimer l'écart-type par la formule suivante, liée à la loi binomiale : si on fait 500 répétitions et que la fréquence est $f \in [0, 1]$, l'écart-type est approximativement $\sigma_f = \sqrt{f(1-f)/500}$. Par exemple, pour les pourcentages d'acceptation qui nous intéressent, on obtient les écarts-types présentés dans le tableau suivant.

TAB. 4 – Table des écarts-types pour 500 répétitions.

$100f$	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	87%	88%	89%
$100\sigma_f$	1.79	1.75	1.72	1.68	1.64	1.6	1.55	1.5	1.45	1.4
$100f$	90%	99%	92%	93%	94%	95%	96%	97%	98%	99%
$100\sigma_f$	1.34	1.28	1.21	1.14	1.06	0.97	0.88	0.76	0.63	0.44

Les pourcentages calculés dans le paragraphe suivant sont, eux aussi, obtenus par simulation. On se servira donc encore du tableau 6.1 des écarts-types pour construire des intervalles de confiance pour les pourcentages de rejet.

6.2 Puissance des versions du test ET.

On veut, par des simulations, donner une idée de la puissance des différentes versions du test ET. Des simulations, dont les résultats seront présentés succinctement au paragraphe 6.3, ont été réalisées pour étudier la puissance des trois versions du test ET pour des hypothèses et des alternatives appartenant aux modèles étudiés : normal, lognormal, gamma et Weibull (le modèle exponentiel pouvant être considéré comme un cas particulier des modèles gamma ou Weibull, on ne l'a pas intégré dans ces essais). Ces modèles sont dans la plupart des cas assez éloignés les uns des autres pour que l'on puisse espérer en général une bonne puissance des trois versions du test quand il s'agit de les discriminer.

Dans ce paragraphe, on va étudier un cas plus critique, pour lequel la loi hypothèse et la vraie loi sont proches. On veut ainsi savoir si, dans ce cas que l'on a voulu extrême, les différents tests ET sont capables de discriminer les modèles choisis. On se place dans un cas simple : on tire des échantillons de taille 100, de loi de Weibull $W(1, 0.7)$ (proche de la loi exponentielle puisque le paramètre de forme est proche de 1) et on teste la loi exponentielle sur de tels échantillons. Les tableaux de ce paragraphe présentent les pourcentages d'acceptation de la loi exponentielle (hypothèse nulle) alors que les échantillons sont de loi de Weibull.

Tout d'abord, on étudie la puissance du test ET version 1, basé sur la convergence en loi de $\hat{q}_{ET, n}$. La puissance de ce test est très mauvaise dans ce cas. La puissance maximale est en effet de 2% de discrimination, et, dès que $p < 10^{-2}$, la puissance est toujours nulle. Les lois réelles et hypothèses sont proches, il est donc plus difficile de les différencier. Cette première version du test ET ne parvient donc pas à discriminer deux lois proches. On verra (paragraphe 6.3) qu'elle se comporte mieux pour deux lois éloignée, bien que sa puissance soit plus faible que celle des deux versions du test basées sur la méthode du bootstrap paramétrique.

On calcule ensuite la puissance expérimentale du test ET-BP version complète. Le tableau 5 présente les résultats obtenus. Au contraire du test ET version 1, la puissance du test ET-BP complet est très satisfaisante, étant donné la proximité des lois de simulation et hypothèse. En effet, on peut rejeter (à raison) la loi hypothèse dans 80 à 90% des cas.

Enfin, le tableau 6 présente la puissance expérimentale du test ET-BP version simplifiée. On trouve dans ce cas des puissances bien meilleures que pour la première version du test ET, mais un peu moins bonnes que pour le test ET-BP complet (de l'ordre de 65 – 75% de discrimination). Ces résultats semblent aussi assez satisfaisants, étant donné la proximité des lois réelles et hypothèses et donc la difficulté de les discriminer.

TAB. 5 – Puissance expérimentale du test ET-BP version complète pour une hypothèse H_0 exponentielle contre une loi de Weibull $W(1, 0.7)$.

α	$p = 10^{-2}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$		$p = 10^{-5}$		$p = 10^{-6}$	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
$m_n = 5$	45	67.6	30.4	51.4	27.4	45.6	26.2	43.4	25.8	42
$m_n = 10$	54.2	73.6	47	66.8	43	63.8	41.8	62.4	41	61.6
$m_n = 15$	64.4	79.6	59.6	73.8	57	72.2	56.2	71.6	55.6	71.4
$m_n = 20$	67.8	83.4	63.6	80.6	61.2	78.6	60.2	78	60	77.4
$m_n = 25$	70.4	85.8	67.2	81.2	66.8	81	66	80.4	65.4	80.4
$m_n = 30$	76.2	88.6	73	86.4	71.4	86	70.6	85.6	70	85.6
$m_n = 35$	80	90.4	78.2	89.6	77.6	89.4	77.4	89.4	77	89.4
$m_n = 40$	82.6	93	81.4	92.6	80.6	92.2	80.2	91.6	80	91.6

TAB. 6 – Puissance expérimentale du test ET-BP version simplifiée pour une hypothèse H_0 exponentielle contre une loi de Weibull $W(1, 0.7)$.

α	$p = 10^{-2}$		$p = 10^{-3}$		$p = 10^{-4}$		$p = 10^{-5}$		$p = 10^{-6}$	
	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05
$m_n = 5$	37.8	60	29	50	27.6	46.6	25.6	44.2	25.6	43.2
$m_n = 10$	40.8	64	40	60	38.8	58.4	38.2	57.6	37.8	57.2
$m_n = 15$	44.8	67.8	44.8	66	44.8	65.8	45	65	45	64.4
$m_n = 20$	45.2	68.6	46.8	69.4	48	69.4	48.4	69.4	48.8	69.2
$m_n = 25$	44.6	72	49.8	74.4	50.2	75.2	50.4	75.2	50.6	75.2
$m_n = 30$	42	72.8	48	75.2	50.2	77.2	51.2	77	51.8	77.2
$m_n = 35$	37.2	69.8	43.6	75.6	44.6	77	46	78	47	77.8
$m_n = 40$	29.4	68.2	38.2	73.2	41.8	75.2	43	76.6	43.6	76.8

6.3 Conseils sur le nombre d'excès à utiliser.

Les valeurs de m_n à utiliser lorsque l'on veut appliquer le test ET sont celles pour lesquelles le niveau expérimental de la version du test utilisée est proche du niveau théorique, et pour lesquelles la puissance expérimentale sera en général bonne.

On se base principalement sur les résultats concernant le niveau des différentes versions du test (cf. paragraphe 6.1), car selon l'alternative considérée, les valeurs de m_n préconisées pour obtenir une bonne puissance expérimentale sont différentes. Il peut arriver pour certaines alternatives que la puissance expérimentale contredise le niveau obtenu par simulation quant aux valeurs de m_n semblant adéquates, ou que la discrimination entre l'hypothèse et l'alternative soit si faible que l'on ne puisse conseiller aucune valeur de m_n .

Les valeurs de m_n que l'on doit utiliser dépendent de la version du test ET que l'on applique, du modèle testé, de l'ordre $1 - p$ du quantile utilisé pour construire l'intervalle de confiance du test, et du niveau du test.

6.3.1 Test ET version 1 (basé sur la loi asymptotique de \hat{q}_{ET}).

De tableaux du même type que ceux présentés au paragraphe 6.1 pour la loi gamma, on déduit les valeurs de m_n à utiliser pour chaque type d'hypothèse nulle. Ces valeurs de m_n sont celles pour lesquelles le niveau expérimental dépasse le niveau théorique du test appliqué. Le tableau 7 présente les valeurs de m_n à utiliser pour des hypothèses nulles de type normale, exponentielle, gamma et Weibull. Les simulations sont faites pour la loi normale $\mathcal{N}(6, 1)$, la loi de Weibull $Weib(3, 3)$, la loi exponentielle $Exp(3)$, et la loi gamma $\Gamma(3, 3)$. D'après la remarque 6.1, les résultats obtenus sont valables pour toute loi normale, toute loi exponentielle, tout paramètre d'échelle pour les lois de Weibull (α) et gamma (λ), puisque ce sont des paramètres de position ou d'échelle. On peut aussi utiliser le tableau 6.1 pour des lois gamma et de Weibull dont le paramètres de forme est supérieur à 2 (cas de paramètres de forme grands par rapport à 1).

Attention : Pour les lois gamma et de Weibull, on a constaté expérimentalement que le test n'est applicable que lorsque le paramètre de forme est supérieur à 1, puisque sinon le niveau théorique n'est jamais effectivement atteint, ni même suffisamment approché. Le tableau 6.1 n'est donc valable, pour les lois gamma et de Weibull, que lorsque le paramètre de forme est supérieur à 1. On constate le même phénomène pour la loi lognormale, quels que soient ses paramètres. Le point commun de ces lois est une queue de distribution relativement lourde. Le test ET version 1 ne semble donc pas applicable aux lois à queue lourde (cf. figure 6.3.1).

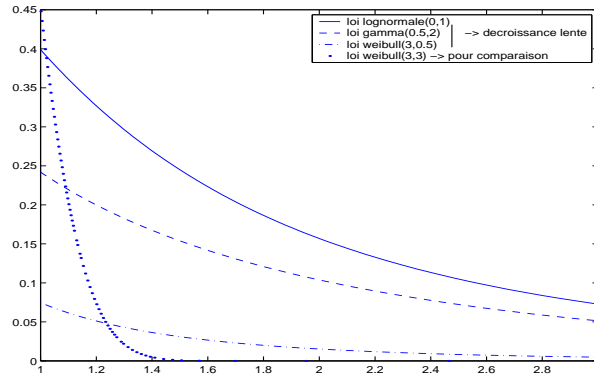


FIG. 1 – Exemple de queues de distributions lourdes, fonctions de survies. – trait plein : loi lognormale $\mathcal{LN}(0, 1)$, tirets : loi gamma $\Gamma(0.5, 2)$, discontinu : loi de Weibull $Weib(3, 0.5)$ (distributions à queue lourde), pointillés : loi de Weibull $Weib(3, 3)$ (pour comparaison).

TAB. 7 – Valeurs de m_n à utiliser pour le test ET version 1.

n	p	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$Weib(\alpha, \beta)$ ($\beta \geq 2$)	$Exp(\lambda)$	$\Gamma(\alpha, \lambda)$ ($\alpha \geq 2$)
20	10^{-2}	[6, 14]	[8, 16]	[8, 10]	[12, 16]
	10^{-3}	[6, 10]	[8, 14]	[10, 12]	[10, 14]
	10^{-4}	[6, 10]	[8, 14]	[10, 12]	[10, 14]
	10^{-5}	[6, 8]	[8, 14]	[10, 12]	[10, 12]
	10^{-6}	[6, 8]	[10, 14]	10	[10, 12]
50	10^{-2}	[10, 25]	[10, 30]	[15, 25]	[20, 30]
	10^{-3}	[10, 15]	[10, 25]	[15, 25]	[20, 25]
	10^{-4}	[10, 15]	[10, 20]	[15, 25]	20
	10^{-5}	10	[10, 20]	[20, 25]	20
	10^{-6}	10	[15, 20]	[20, 25]	20
100	10^{-2}	[15, 40]	[10, 50]	[25, 35]	[30, 50]
	10^{-3}	[10, 20]	[15, 30]	[30, 40]	[20, 40]
	10^{-4}	[10, 20]	[20, 30]	[30, 40]	[20, 30]
	10^{-5}	10	[20, 30]	[30, 50]	[20, 30]
	10^{-6}	10	[20, 30]	[40, 50]	20
500	10^{-3}	[20, 50]	[20, 70]	[30, 100]	[40, 75]
	10^{-4}	[20, 35]	[20, 60]	[50, 80]	[35, 60]
	10^{-5}	[20, 30]	[25, 50]	[60, 90]	[30, 50]
	10^{-6}	20	[30, 50]	[60, 80]	[30, 40]

On souhaite à présent donner une idée de la puissance du test. Le tableau 8 présente un encadrement de la puissance expérimentale (pourcentage de rejets justifiés de la loi hypothèse) calculée pour chacun des modèles hypothèses et pour les alternatives classiques (ces mêmes modèles). Ce tableau est déduit de résultats du type de ceux du paragraphe 6.2. Dans ce dernier tableau, on précise aussi, lorsque c'est utile, les valeurs de m_n et de p à utiliser pour obtenir une meilleure puissance.

On constate que la loi gamma est très bien discriminée par cette première version du test ET. La loi normale est aussi assez bien rejetée lorsqu'il le faut, sauf dans le cas où l'on a simulé selon une loi de Weibull $Weib(3, 3)$. Mais alors, les lois estimées pour les modèles normal et Weibull sont quasiment confondues, ce qui explique l'acceptation par le test. Enfin, la loi de Weibull est très mal discriminée. La souplesse de la loi de Weibull, due à son paramètre de forme, explique le grand nombre d'acceptations par le test ET. En premier lieu, elle implique souvent une grande proximité entre la vraie loi et le modèle de Weibull estimé. De plus, le moindre changement de ce paramètre de forme donne des quantiles estimés différents. Cela implique que les intervalles bootstrap calculés pour la loi de Weibull sont étendus, et ont

donc tendance à souvent accepter la loi de Weibull, en particulier à tort. Cela explique la mauvaise discrimination de la loi de Weibull, due à la souplesse qu'implique son paramètre de forme.

TAB. 8 – Puissance du test ET version 1 pour les lois classiques.

hypothèse		normale	de Weibull	gamma
simulation	n			
normale $\mathcal{N}(6, 1)$	20	×	[0, 38.4]	100
	50	×	[0, 36.8]	100
	100	×	[0, 42.2]	100
	500	×	[2.8, 47]	100
	m_n	×	petit	–
	p	×	(1)	–
lognormale $\mathcal{LN}(0, 1)$	20	[0, 45.2]	[0, 4.2]	[0, 35.4]
	50	[0, 84.6]	0	[32, 85.8]
	100	[0, 99]	[0, 0.4]	[71, 100]
	500	[99.8, 100]	[31.4, 99.2]	100
	m_n	grand	grand	grand
	p	(2)	(3)	(4)
de Weibull $Weib(3, 3)$	20	[0, 8.6]	×	[0.2, 64]
	50	[0, 5.8]	×	[5.2, 82.6]
	100	[0, 5.6]	×	[0.6, 96.8]
	500	[0, 17]	×	[0, 81]
	m_n	grand	×	grand
	p	(5)	×	(6)
gamma $\Gamma(3, 3)$	20	[0, 60.6]	[0, 1.8]	×
	50	[0, 62.2]	[0, 1]	×
	100	[0, 71.6]	[0, 13.8]	×
	500	[44.4, 100]	[0, 55.6]	×
	m_n	grand	grand	×
	p	(7)	(8)	×

- (1) : p petit ($n = 20$ ou 50) ou grand ($n = 100$ ou 500)
(2) : p petit ($n = 20$) ou moyen ($n = 50$ ou 100)
(3) : p petit ($n = 20$) ou moyen ($n = 500$)
(4) : p petit ($n = 20$) ou grand ($n = 50$ ou 100)
(5) : p petit ($n = 20$), moyen ($n = 50$ ou 100) ou grand ($n = 500$)
(6) : p moyen ($n = 20$) ou grand ($n = 50, 100$ ou 500)
(7) : p petit ($n = 20$ ou 50), moyen ($n = 100$) ou grand ($n = 500$)
(8) : p petit ($n = 20, 50$ ou 100) ou grand ($n = 500$)

6.3.2 Test ET-BP complet (version 2).

On veut maintenant donner les valeurs de m_n à utiliser lorsque l'on applique la version 2 du test ET. Ces valeurs, déduites de tableaux du même type que du paragraphe 6.1, seront celles pour lesquelles le niveau expérimental dépasse le niveau théorique du test ET-BP complet appliqué. Ceci étant vérifié pour un grand nombre de valeurs de m_n , on se restreint aux valeurs pour lesquelles le niveau expérimental est le plus proche du niveau théorique.

Le tableau 9 présente les valeurs de m_n à utiliser pour des hypothèses nulles de type normale, lognormale, exponentielle, gamma et Weibull. Les lois de simulations sont les mêmes que pour le test ET version 1, sauf pour le modèle normal. Dans ce cas, on simule des jeux de données de loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$. D'après la remarque 6.1, les résultats obtenus sont valables pour toute loi normale, toute loi exponentielle, toute loi de Weibull et toute loi gamma, à condition pour les lois gamma et Weibull que leur paramètre de forme soit supérieur à 2.

TAB. 9 – Valeurs de m_n à utiliser pour le test ET-BP complet.

n	p	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	Weib(α, β) ($\beta \geq 2$)	Exp(λ)	$\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$	$\Gamma(\alpha, \lambda)$ ($\alpha \geq 2$)
20	10^{-2}	[6, 12]	[2, 8]	[2, 6]	×	[6, 14]
	10^{-3}	[6, 12]	[2, 8]	[2, 6]	[10, 14]	[6, 14]
	10^{-4}	[6, 10]	[2, 6]	[2, 6]	[6, 8]	[6, 14]
	10^{-5}	[4, 6]	[2, 6]	[2, 6]	[4, 6]	[6, 14]
	10^{-6}	[4, 6]	[2, 6]	[2, 6]	[2, 4]	[6, 14]
50	10^{-2}	[10, 30]	[2, 16]	[2, 8]	×	[2, 16]
	10^{-3}	[10, 25]	[2, 16]	[2, 8]	[30, 32]	[2, 16]
	10^{-4}	[10, 25]	[2, 12]	[2, 8]	[16, 20]	[2, 16]
	10^{-5}	[10, 25]	[2, 12]	[2, 8]	[8, 12]	[2, 16]
	10^{-6}	[10, 25]	[2, 12]	[2, 8]	[4, 6]	[2, 16]
100	10^{-2}	[5, 65]	[5, 30]	[5, 15]	×	[25, 60]
	10^{-3}	[5, 55]	[5, 25]	[5, 20]	[70, 75]	[25, 60]
	10^{-4}	[5, 50]	[5, 25]	[5, 20]	[35, 45]	[25, 60]
	10^{-5}	[5, 30]	[5, 25]	[5, 25]	[20, 30]	[25, 60]
	10^{-6}	[5, 30]	[5, 25]	[5, 25]	[10, 15]	[25, 60]
500	10^{-3}	[150, 350]	[10, 110]	[20, 80]	[430, 440]	[40, 130]
	10^{-4}	[80, 250]	[30, 90]	[10, 70]	[330, 350]	[40, 130]
	10^{-5}	[80, 220]	[40, 90]	[10, 70]	[200, 230]	[40, 130]
	10^{-6}	[80, 220]	[40, 90]	[10, 70]	[100, 140]	[40, 130]

Le tableau 10, déduit de résultats du type de ceux du paragraphe 6.2, présente un encadrement de la puissance expérimentale du test ET-BP complet, calculée pour chacun des modèles hypothèses et pour les alternatives classiques (ces mêmes modèles). Dans ce tableau,

on précise aussi, lorsque c'est utile, les valeurs de m_n et de p à utiliser pour obtenir une meilleure puissance.

TAB. 10 – Puissance du test ET-BP complet pour les lois classiques.

hypothèse		normale	lognormale	de Weibull	gamma
simulation	n				
normale $\mathcal{N}(5, 1)$	20	×	[92.8, 100]	[0, 2.6]	100
	50	×	[99.8, 100]	[0, 5]	100
	100	×	100	[0.2, 4]	100
	500	×	100	[0, 11.6]	100
	m_n	×	–	(1)	–
	p	×	–	(2)	–
lognormale $\mathcal{LN}(0, 1)$	20	[0.6, 61]	×	[1, 21.8]	[42.2, 76]
	50	[3.8, 93.6]	×	[11.4, 50.6]	[31.6, 76.2]
	100	[8.8, 100]	×	[33.4, 71.6]	[64.8, 82.6]
	500	[28, 100]	×	[89, 100]	[95.6, 98.8]
	m_n	petit	×	(4)	(5)
	p	(3)	×	grand	(6)
de Weibull $Weib(3, 3)$	20	[0.2, 6.4]	[6.4, 76.8]	×	100
	50	[0.4, 7.6]	[5.6, 87]	×	100
	100	[0, 7.6]	[10.8, 98.6]	×	100
	500	[1.6, 18.8]	[73.4, 100]	×	100
	m_n	(7)	grand	×	–
	p	grand	grand	×	–
gamma $\Gamma(3, 3)$	20	[0.4, 19]	[2.2, 24.8]	[0.6, 7.4]	×
	50	[1, 46.2]	[4, 32.4]	[1.8, 12.6]	×
	100	[1, 75.8]	[2.4, 35.6]	[5, 20]	×
	500	[1.6, 100]	[0, 69.4]	[22.8, 59.2]	×
	m_n	petit	petit	moyen	×
	p	(8)	(9)	grand	×

- (1) : m_n grand ($n = 50$) ou petit ($n = 100$ ou 500)
(2) : p moyen ($n = 20$ ou 50) ou grand ($n = 100$ ou 500)
(3) : p petit ($n = 500$), moyen ($n = 50$) ou grand ($n = 100$)
(4) : m_n moyen ($n = 20, 50$ ou 100) ou grand ($n = 500$)
(5) : m_n grand ($n = 50$ ou 100) ou petit ($n = 500$)
(6) : p grand ($n = 20, 50$ ou 100) ou petit ($n = 500$)
(7) : m_n petit ($n = 20$) ou moyen ($n = 50, 100$ ou 500)
(8) : p petit ($n = 20$) ou grand ($n = 50, 100$ ou 500)
(9) : p grand ($n = 20, 50$ ou 100) ou moyen ($n = 500$)

La puissance de cette version du test est généralement meilleure que pour la version 1. On constate à nouveau que la loi gamma est très bien discriminée, alors que la loi de Weibull l'est assez mal. Cette fois-ci, on peut appliquer le test pour la loi lognormale, qui est relativement bien discriminée.

6.3.3 Test ET-BP simplifié (version 3).

De même que pour les deux précédentes versions du test, en s'appuyant sur des tableaux résultats du type de ceux du paragraphe 6.1, on veut donner les valeurs de m_n à utiliser lorsque l'on applique la version 3 du test ET. Comme pour la version 2, parmi les valeurs de m_n pour lesquelles le niveau expérimental dépasse le niveau théorique du test appliqué, on se restreint aux valeurs pour lesquelles le niveau expérimental est le plus proche du niveau théorique.

Le tableau 11 présente les valeurs de m_n à utiliser sous les mêmes hypothèses que pour le test ET-BP complet.

TAB. 11 – Valeurs de m_n à utiliser pour le test ET-BP simplifié.

n	p	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$Weib(\alpha, \beta)$ ($\beta \geq 2$)	$Exp(\lambda)$	$\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$	$\Gamma(\alpha, \lambda)$ ($\alpha \geq 2$)
20	10^{-2}	[2, 14]	[2, 6]	[2, 6]	[8, 12]	[2, 6]
	10^{-3}	[2, 8]	[2, 6]	[2, 6]	10	[2, 6]
	10^{-4}	[2, 6]	[2, 6]	[2, 6]	10	[2, 6]
	10^{-5}	[2, 6]	[2, 6]	[2, 4]	10	[2, 6]
	10^{-6}	[2, 6]	[2, 6]	[2, 4]	10	[2, 6]
50	10^{-2}	[5, 20]	[5, 20]	[5, 20]	[5, 30]	[5, 10]
	10^{-3}	[5, 15]	[5, 20]	[5, 20]	[5, 20]	[5, 10]
	10^{-4}	[5, 15]	[5, 20]	[5, 10]	[5, 15]	[5, 10]
	10^{-5}	[10, 20]	[5, 10]	[5, 10]	[10, 20]	[5, 10]
	10^{-6}	[10, 20]	[5, 10]	[5, 10]	[10, 20]	[5, 10]
100	10^{-2}	[5, 50]	[5, 90]	[5, 50]	[10, 50]	[5, 25]
	10^{-3}	[5, 30]	[5, 25]	[5, 50]	[10, 50]	[5, 25]
	10^{-4}	[15, 30]	[5, 25]	[5, 40]	[25, 50]	[5, 25]
	10^{-5}	[10, 40]	[5, 25]	[5, 25]	[35, 50]	[5, 25]
	10^{-6}	[10, 20]	[5, 25]	[5, 25]	[35, 50]	[5, 25]
500	10^{-3}	[10, 150]	[10, 100]	[10, 200]	[10, 200]	[10, 100]
	10^{-4}	[10, 150]	[10, 100]	[10, 150]	[50, 200]	[10, 100]
	10^{-5}	[10, 100]	[10, 100]	[50, 150]	[100, 200]	[10, 50]
	10^{-6}	[10, 100]	[10, 100]	[50, 150]	[150, 200]	[10, 50]

Le tableau 12, déduit de résultats du type de ceux du paragraphe 6.2, présente un encadrement de la puissance expérimentale du test ET-BP simplifié calculée pour chacun des modèles hypothèses et pour les alternatives classiques (ces mêmes modèles). Dans ce tableau, on précise aussi, lorsque c'est utile, les valeurs de m_n et de p à utiliser pour obtenir une meilleure puissance.

TAB. 12 – Puissance du test ET-BP simplifié pour les lois classiques.

hypothèse		normale	lognormale	de Weibull	gamma
simulation	n				
normale $\mathcal{N}(5, 1)$	20	×	[0.2, 3.2]	[0, 3]	100
	50	×	[0.4, 14.6]	[0, 8.4]	100
	100	×	[2.8, 27.2]	[0.4, 66.6]	100
	500	×	[51.6, 95.8]	[1.8, 47.8]	100
	m_n	×	petit	grand	–
	p	×	petit	(1)	–
lognormale $\mathcal{LN}(0, 1)$	20	[0.4, 51.4]	×	[0, 7.4]	100
	50	[2.4, 90]	×	[0, 22.2]	100
	100	[4, 99.6]	×	[0, 41.6]	100
	500	[96, 100]	×	[77.4, 99.6]	100
	m_n	petit	×	(3)	–
	p	(2)	×	petit	–
de Weibull $Weib(3, 3)$	20	[0, 4]	[0.4, 8.4]	×	[99.2, 100]
	50	[0, 3.4]	[2.2, 37]	×	100
	100	[0, 6]	[16.6, 72]	×	100
	500	[0, 6]	[99.4, 100]	×	100
	m_n	petit	(4)	×	–
	p	petit	petit	×	–
gamma $\Gamma(3, 3)$	20	[0, 16]	[0, 1.8]	[0, 4.8]	×
	50	[0.4, 36.2]	[0, 9.4]	[0, 6.8]	×
	100	[1.4, 60.2]	[1.2, 20.6]	[0, 10]	×
	500	[65, 100]	[55.8, 95]	[7.2, 44.8]	×
	m_n	(5)	(7)	(9)	×
	p	(6)	(8)	petit	×

(1) : p petit ($n = 20$), moyen ($n = 50$) ou grand ($n = 100$ ou 500)

(2) : p petit ($n = 20$) ou moyen ($n = 50$)

(3) : m_n petit ($n = 20, 50$ ou 100) ou moyen

(4) : m_n moyen ($n = 50$) ou petit ($n = 100$ ou 500)

(5) : m_n petit ($n = 20$ ou 50) ou grand ($n = 500$)

(6) : p petit ($n = 500$)

(7) : m_n petit ($n = 50$ ou 100) ou moyen ($n = 500$)

- (8) : p petit ($n = 20$ ou 50) ou moyen ($n = 100$)
 (9) : m_n petit ($n = 20, 50$ ou 100) ou moyen

La puissance de cette dernière version du test est généralement meilleure que la puissance de la première version, mais moins bonne que la puissance de la version complète du test ET-BP. Cette fois encore, on constate que la loi gamma est très bien discriminée, alors que la loi de Weibull l'est assez mal. On peut aussi appliquer cette version du test pour la loi lognormale qui est relativement bien discriminée, principalement pour de grandes tailles d'échantillons.

7 Données réelles.

Le jeu de données, de taille $n = 24$, concerne le nombre moyen de transitoires thermiques (variations rapides et importantes de la température de l'eau) auxquels sont soumises certaines tuyauteries qui transportent de l'eau dans les centrales nucléaires. Ces transitoires dégradent la résistance des tuyaux et peuvent provoquer des fissures, et donc des fuites. La connaissance du nombre de transitoires par cycle (par exemple par an) est donc un élément important pour évaluer l'état des tuyaux. L'histogramme des données, ainsi que les graphes des densités des différentes lois ajustées aux données, sont présentés dans la figure 2.

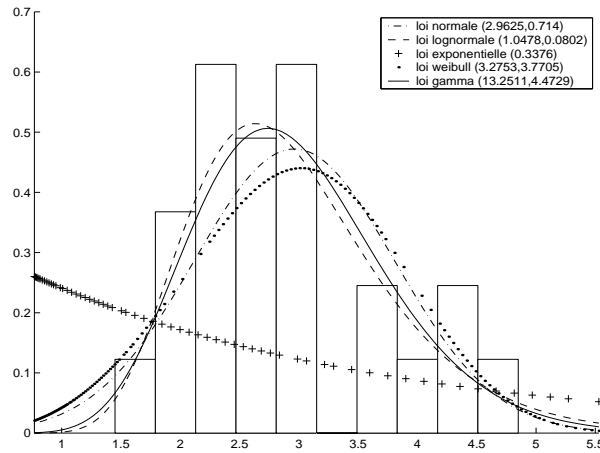


FIG. 2 – Histogramme des données et densités des lois estimées – discontinu : loi normale $\mathcal{N}(2.9625, 0.714)$, tirets : loi lognormale $\mathcal{LN}(1.0478, 0.0802)$, croix : loi exponentielle $Exp(0.3376)$, pointillés : loi de Weibull $Weib(3.2753, 3.7705)$, trait plein : loi gamma $\Gamma(13.5211, 4.4729)$.

7.1 Le test d'Anderson-Darling

Tout d'abord, nous appliquons un test classique (le test d'Anderson-Darling) avec plusieurs niveaux de significations.

TABLEAU 13 – Test d'Anderson-Darling sur données réelles

niveau	Normale	Exponentielle	Weibull	Lognormale	Gamma
0.25	rejetée	rejetée	rejetée	acceptée	acceptée
0.1	acceptée	rejetée	rejetée	acceptée	acceptée
0.05	acceptée	rejetée	acceptée	acceptée	acceptée
0.025	acceptée	rejetée	acceptée	acceptée	acceptée
0.01	acceptée	rejetée	acceptée	acceptée	acceptée

Les lois qui semblent le plus en adéquation avec les données sont celles qui sont acceptées pour tous les niveaux de signification : les lois lognormale et gamma. Ensuite, en ordre décroissant d'adéquation aux données, on trouve les lois normale, de Weibull, et enfin la loi exponentielle, qui est toujours rejetée.

Même si l'application du test avec différents niveaux de signification nous pousse à préférer les lois lognormale et gamma, on ne peut pas discriminer ces deux lois. De plus, aux niveaux de signification les plus utilisés, seule la loi exponentielle est rejetée. Le test ET est utile ici pour discriminer des lois qu'un test classique n'a pu différencier. Dans les cas où le test central désigne une seule loi, le test ET nous permet de déterminer si cette loi convient pour modéliser des événements extrêmes.

7.2 Les différentes versions du test ET.

On applique les différentes versions du test pour les valeurs de m_n et de p donnant la meilleure puissance d'après les tableaux du paragraphe 6.3. En particulier, on applique le test ET version 1 pour p petit i.e. $p = 10^{-6}$, le test ET-BP complet pour p grand i.e. $p = 0.01$, et le test ET-BP simplifié pour p petit i.e. $p = 10^{-6}$. Le nombre d'excès que l'on utilise dépend de la version du test appliqué et de la loi hypothèse. On précise donc dans chaque cas la valeur de m_n utilisée. On présente les résultats obtenus dans le tableau 14. On se fie davantage au test ET-BP complet qu'au test ET-BP simplifié, pour lequel la puissance est plus faible. On peut donc considérer que les données sont de loi lognormale.

Il semble que le test basé sur la loi asymptotique de \hat{q}_{ET} ne soit pas fiable sur un aussi petit échantillon. En effet, il continue à accepter toutes les lois, alors que les quantiles paramétriques calculés sont parfois très différents (la loi exponentielle et la loi lognormale sont visiblement assez éloignées des autres lois).

TAB. 14 – Résultats des différentes versions du test ET pour $p = 1/n$, $\alpha = 0.05$

test ET version 1 (basé sur la loi asymptotique de \widehat{q}_{ET})				
loi	m_n	résultat	intervalle de confiance	$\widehat{q}_{\text{param}, n}$
normale	8	acceptée	[5.9753 , 20.3393]	6.979
exponentielle	10	acceptée	[17.5043 , 65.1655]	40.9285
Weibull	10	acceptée	[6.2797 , 18.2654]	6.572
lognormale	12	acceptée	[10.5854 , 23.3058]	10.9555
gamma	12	acceptée	[7.5985 , 20.3189]	8.5372
test ET version 2 (test ET-BP complet)				
loi	m_n	résultat	intervalle de confiance	$\widehat{\delta}_n$
normale	6	rejetée	[-0.5492 , 1.2258]	1.4943
exponentielle	4	rejetée	[-5.6372 , 7.4693]	-8.0844
Weibull	6	rejetée	[-0.3886 , 1.0767]	1.5117
lognormale	10	acceptée	[-0.5917 , 1.242]	0.2686
gamma	10	rejetée	[-0.3707 , 1.3889]	0.6024
test ET version 3 (test ET-BP simplifié)				
loi	m_n	résultat	intervalle de confiance	$\widehat{\delta}_n$
normale	2	acceptée	[-2.2642 , 8.6678]	0.5369
exponentielle	2	rejetée	[-31.0601 , 49.8202]	-33.4125
Weibull	2	acceptée	[-1.7488 , 7.3296]	0.9439
lognormale	10	acceptée	[-2.6451 , 7.9922]	1.6849
gamma	4	acceptée	[-2.805 , 8.453]	2.7776

On constate aussi la grande différence de résultats entre les versions complète et simplifiée du test ET-BP sur un petit échantillon comme celui-ci. Le test complet pousse à choisir la loi lognormale, et apporte une information supplémentaire par rapport aux tests centraux, alors que le test simplifié ne discrimine pas plus que ceux-ci.

A Paramétrage des lois utilisées.

On note par f les densités et par F les fonctions de répartition des différents modèles.

Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Loi Exponentielle $\text{Exp}(\theta)$: $1 - F(x) = e^{-x/\theta}$ si $x \geq 0$.

Loi de Weibull $\text{Weib}(\alpha, \beta)$: $1 - F(x) = \exp(-x^\beta/\alpha)$ pour $x > 0$.

Loi Lognormale $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ si $x > 0$.

Loi Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$: $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$ si $x > 0$, où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Loi Double Exponentielle $\text{DExp}(\theta)$: $1 - F(x) = \exp(-e^x/\theta)$.

B Démonstrations de la partie décrivant le test ET.

Nous nous proposons de montrer les affirmations de la partie 3 qui n'ont pas été prouvées. Tout d'abord, nous allons démontrer la remarque 3.2 à l'aide de deux lemmes énoncés au paragraphe B.1. Le paragraphe B.2 contient la démonstration de la proposition 3.1.

B.1 Preuve de la remarque 3.2.

Ce premier lemme sera utile dans plusieurs autres démonstrations.

Lemme B.1 *On suppose que $H \in \mathcal{C}_\rho^1$ ($\rho > 0$), $H \in \mathcal{C}^2$ ou $H \in \mathcal{C}_\rho^3$ ($0 < \rho < 1$), et que le rapport $\ln x / \ln \xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow 0$. Alors, pour $\xi \rightarrow 0$,*

$$\frac{(H^{-1})''(\theta_2 - \ln \xi - \theta_3(\theta_2 + \theta_1 \ln x))}{(H^{-1})'(\theta_2 - \ln \xi)} \sim \frac{(H^{-1})''(-\ln \xi)}{(H^{-1})'(-\ln \xi)}, \quad \forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 1].$$

Démonstration: Notons $-\ln \xi' = \theta_2 - \ln \xi$ et $-\ln \xi'' = \theta_2 - \ln \xi - \theta_3(\theta_2 + \theta_1 \ln x)$. On peut remarquer que, puisque $\xi \rightarrow 0$, que θ_1, θ_2 , et θ_3 restent bornés, et que $\ln x$ est infiniment petit devant $\ln \xi$, on a $\ln \xi' \sim \ln \xi$ et $\ln \xi'' \sim \ln \xi$. À présent, considérons deux cas :

- Si H appartient à \mathcal{C}_ρ^1 ($\rho > 0$), ou à $H \in \mathcal{C}^2$, alors $(H^{-1})'$ et $(H^{-1})''$ sont des fonctions à variations lisses et le résultat est la conséquence du lemme 2.1 (8) (pour $H \in \mathcal{C}_1^1$, lorsque $\varepsilon = 0$, $(H^{-1})''$ n'est pas à variations lisses, mais $(H^{-1})''/(H^{-1})' = 0$ et dans ce cas on a même l'égalité des deux termes de l'équivalence).
- Supposons que $H \in \mathcal{C}_\rho^3$ ($0 < \rho < 1$). On a donc $H = \exp g$ où $g \in \mathcal{SR}_\rho$. On veut montrer que

$$\frac{(H^{-1})''(-\ln \xi'')}{(H^{-1})'(-\ln \xi')} \frac{(H^{-1})'(-\ln \xi)}{(H^{-1})''(-\ln \xi)} \sim 1.$$

Les preuves de $(H^{-1})''(-\ln \xi'')/(H^{-1})''(-\ln \xi) \sim 1$ et $(H^{-1})'(-\ln \xi)/(H^{-1})'(-\ln \xi') \sim 1$ sont similaires. Considérons par exemple le premier des deux termes :

$$\begin{aligned} \frac{(H^{-1})''(-\ln \xi'')}{(H^{-1})''(-\ln \xi)} &= \frac{(g'' + g'^2)(-\ln \xi'')}{(g'' + g'^2)(-\ln \xi)} \exp(g(-\ln \xi'') - g(-\ln \xi)) \\ &\sim \exp(g(-\ln \xi'') - g(-\ln \xi)), \end{aligned}$$

puisque $g'' + g'^2 \in SR_{2\rho-2}$ et que $-\ln \xi'' \sim -\ln \xi$ (cf. lemme 2.1 (8)). Un développement de Taylor de g montre qu'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$\frac{(H^{-1})''(-\ln \xi'')}{(H^{-1})''(-\ln \xi)} \sim \exp(\ln(\xi/\xi'')g'(-\ln \xi'' - \theta \ln(\xi/\xi''))).$$

A présent, remarquons que $\ln(\xi/\xi'') = \theta_2 - \theta_3(\theta_2 + \theta_1 \ln x)$ est indépendant de ξ , et que $-\ln \xi'' \rightarrow \infty$ lorsque $\xi \rightarrow 0$. On en déduit que $g'(-\ln \xi'' - \theta \ln(\xi/\xi'')) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow 0$, puisque g' est une fonction à variations lisses avec un indice négatif (cf. lemme 2.1 (2)).

■

Lemme B.2 Soient $F \in \mathcal{E}$, $H = -\ln(1 - F)$ et $c_n = m_n/n$. On suppose que m_n satisfait l'une des conditions suivantes :

- si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$ ($\rho > 0$, $\rho \neq 1$) ou $H \in \mathcal{C}^2$: $m_n = o((\ln n)^2)$.
- si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon = 0$: $m_n = o(n)$.
- si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon = 1$: $m_n = O((\ln n)^{2(1+\tau)-\delta}) \forall \delta > 0$ arbitrairement petit.
- si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$: $m_n = O((\ln n)^{2(1-\rho)-\delta}) \forall \delta > 0$ arbitrairement petit.

Alors,

$$\sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration :

- D'après le lemme 2.2, on sait que si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$, $x(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \rightarrow 1/\rho - 1$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Donc, si $\rho \neq 1$, on a $(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \sim (1/\rho - 1)/x$. Alors,

$$\sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \sim \sqrt{m_n} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \frac{1}{-\ln c_n} \sim \sqrt{m_n} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Si $H \in \mathcal{C}_1^1$, d'après le lemme 2.3, on sait que $(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \in \varepsilon SR_{-1-\tau}$. Si $\varepsilon = 0$, il s'ensuit que

$$\sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} = 0.$$

Sinon, on a, pour une fonction L à variations lentes,

$$\begin{aligned} \sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} &\sim \sqrt{m_n} (-\ln c_n)^{-1-\tau} L(-\ln c_n) \\ &\sim \sqrt{m_n} (\ln n)^{-1-\tau} L(\ln n) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

– De même, si $H \in \mathcal{C}^2$, on montre que $(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \sim -1/x$. On en déduit que

$$\sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \sim \left(\frac{-\sqrt{m_n}}{-\ln c_n} \right) \sim -\frac{\sqrt{m_n}}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

– Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, on sait que $(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \in \mathcal{SR}_{\rho-1}$ (cf. lemme 2.3). On en déduit que $(H^{-1})''(x)/(H^{-1})'(x) \sim x^{\rho-1}L(x)$ où L est une fonction à variations lentes. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} &\sim \sqrt{m_n} (-\ln c_n)^{\rho-1} L(-\ln c_n) \\ &\sim \sqrt{m_n} (\ln n)^{\rho-1} L(\ln n) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Démonstration de la remarque 3.2: Pour tout $x \in K$ intervalle compact inclus dans $(0, \infty)$, on considère la quantité

$$R_n(x) = \left(\frac{J(c_n x) - J(c_n)}{J(c_n/e) - J(c_n)} - \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

où $J(u) = H^{-1}(-\ln u)$. Alors,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{H^{-1}(-\ln c_n - \ln x) - H^{-1}(-\ln c_n)}{H^{-1}(-\ln c_n + 1) - H^{-1}(-\ln c_n)} - \ln \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= -\ln x \frac{(H^{-1})'(-\ln c_n - \theta_n^{(1)} \ln x)}{(H^{-1})'(-\ln c_n + \theta_n^{(2)})} - \ln \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{où } \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)} \in [0, 1] \\ &= -\ln x \left(\frac{(H^{-1})'(-\ln c_n - \theta_n^{(1)} \ln x) - (H^{-1})'(-\ln c_n + \theta_n^{(2)})}{(H^{-1})'(-\ln c_n + \theta_n^{(2)})} \right) \\ &= \ln x (\theta_n^{(1)} \ln x + \theta_n^{(2)}) \frac{(H^{-1})''(\theta_n^{(2)} - \ln c_n + \theta_n^{(3)} (\theta_n^{(2)} + \theta_n^{(1)} \ln x))}{(H^{-1})'(\theta_n^{(2)} - \ln c_n)} \\ &\sim \ln x (\theta_n^{(1)} \ln x + \theta_n^{(2)}) \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \quad (\text{d'après le lemme B.1}). \end{aligned}$$

Soit C_K une constante telle que $\sup_{x \in K} |\ln x (\theta_n^{(1)} \ln x + \theta_n^{(2)})| \leq C_K$. Il s'ensuit que

$$\sqrt{m_n} \sup_{x \in K} |R_n(x)| \leq C_K \sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'après le lemme B.2.

■

B.2 Preuve de la proposition 3.1.

Démonstration de la proposition 3.1 : Remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_n}{\sigma(u_n)} - 1 &= \frac{J(c_n/e) - J(c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} - 1 \\
&= \frac{H^{-1}(-\ln(c_n/e)) - H^{-1}(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} - 1 \\
&= \frac{H^{-1}(-\ln c_n + 1) - H^{-1}(-\ln c_n) - (H^{-1})'(-\ln c_n)}{(H^{-1})'(-\ln c_n)} \\
&= \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n + \kappa_n)}{2(H^{-1})'(-\ln c_n)} \quad \text{où } \kappa_n \in [0, 1] \\
&\sim \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{2(H^{-1})'(-\ln c_n)} \quad (\text{d'après le lemme B.1}).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3, dans tous les cas, $(H^{-1})''/(H^{-1})' \in \mathcal{SR}_\alpha$ avec $\alpha < 0$, donc tend vers 0. On en déduit que $\theta_n/\sigma(u_n) - 1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ c'est-à-dire que $\theta_n/\sigma(u_n) \sim 1$. De plus, d'après la remarque 3.2, on montre aussi que

$$\sqrt{m_n} \left(\frac{\theta_n}{\sigma(u_n)} - 1 \right) \sim \sqrt{m_n} \frac{(H^{-1})''(-\ln c_n)}{2(H^{-1})'(-\ln c_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (31)$$

D'autre part, puisque $m_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $np_n < 1$, $\ln(m_n/np_n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$\frac{\ln r_n}{\sqrt{A_n}} = \frac{\ln(m_n/np_n)}{\sqrt{1 + \ln^2(m_n/np_n)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\ln^2(m_n/np_n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (32)$$

A présent, remarquons que

$$\sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - q_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} = \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - \widetilde{q}_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} + \sqrt{m_n} \frac{\widetilde{q}_{ET,n} - q_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}}$$

Les deux termes de la somme vont être étudiés séparément. Le premier terme,

$$\begin{aligned}
\sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - \widetilde{q}_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} &= \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - \widetilde{q}_{ET,n}}{\theta_n \ln r_n} \frac{\theta_n}{\sigma(u_n)} \frac{\ln r_n}{\sqrt{A_n}} \\
&\sim \sqrt{m_n} \frac{\widehat{q}_{ET,n} - \widetilde{q}_{ET,n}}{\theta_n \ln r_n},
\end{aligned}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$, d'après le théorème 3.1. Quant au second terme,

$$\sqrt{m_n} \frac{\widetilde{q}_{ET,n} - q_{ET,n}}{\sigma(u_n)\sqrt{A_n}} = \sqrt{m_n} \frac{\theta_n - \sigma(u_n)}{\sigma(u_n)} \frac{\ln r_n}{\sqrt{A_n}},$$

il tend vers 0 quand n tend vers l'infini, grâce à (31) et (32).

■

C Démonstrations de la partie sur le niveau de signification.

Il s'agit ici de montrer la convergence de la quantité D_n , c'est-à-dire de l'erreur d'approximation $\delta_n = q_{1-p_n} - q_{ET,n}$ correctement normalisée.

Démonstration du lemme 4.1 : On note $\epsilon_n = (q_{1-p_n} - q_{ET,n})/q_{1-p_n}$ l'erreur d'approximation relative, et e_n son approximation au premier ordre. On a :

$$\delta_n = q_{1-p_n} \epsilon_n = q_{1-p_n} e_n \frac{\epsilon_n}{e_n} = q_{1-p_n} e_n (1 + o(1)) \sim q_{1-p_n} e_n.$$

Si, de plus, on remarque que $\sqrt{A_n} \sim a_n - b_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$D_n \sim \sqrt{m_n} \frac{q_{1-p_n} e_n}{\sigma(u_n) \sqrt{A_n}} \sim \sqrt{m_n} \frac{H^{-1}(b_n) e_n}{(H^{-1})'(a_n)(a_n - b_n)}.$$

D'autre part, on peut montrer (cf. [12] lemme 3) que

$$e_n = \frac{1}{2} (a_n - b_n)^2 \frac{(H^{-1})''(\tau_n)}{H^{-1}(b_n)} \quad \text{où } \tau_n \in [b_n, a_n].$$

Il s'ensuit que lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$D_n \sim \frac{\sqrt{m_n}}{2} (a_n - b_n)^2 \frac{(H^{-1})''(\tau_n)}{H^{-1}(b_n)} \frac{H^{-1}(b_n)}{(H^{-1})'(a_n)} \frac{1}{a_n - b_n} \sim \frac{\sqrt{m_n}}{2} (a_n - b_n) \frac{(H^{-1})''(\tau_n)}{(H^{-1})'(a_n)}.$$

Il nous faut à présent distinguer deux cas :

* Si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon = 0$, $D_n = 0$. Il n'y a donc pas de condition supplémentaire à $m_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

* Sinon, on suppose $p = p' = 1$. On peut écrire $\tau_n = a_n + \theta(b_n - a_n)$ avec $\theta \in [0, 1]$. En choisissant $\theta_2 = 2$, $\theta_3 = 1$, $\theta_1 = 1$, $x = p_n/c_n$, et $a_n = -\ln \xi$, on obtient que $\ln x / \ln \xi = 1 - b_n/a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, d'après le lemme B.1,

$$D_n \sim \frac{\sqrt{m_n}}{2} (a_n - b_n) \frac{(H^{-1})''(a_n)}{(H^{-1})'(a_n)} \sim \frac{\sqrt{m_n}}{2} \frac{a_n - b_n}{a_n} \frac{a_n (H^{-1})''(a_n)}{(H^{-1})'(a_n)}.$$

• Si $H \in \mathcal{C}_\rho^1$ ($\rho > 0$, $\rho \neq 1$) ou $H \in \mathcal{C}^2$, on suppose que $|q| < 2$. D'après le lemme 2.2 (1) et puisque $a_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{a_n (H^{-1})''(a_n)}{(H^{-1})'(a_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} cte (\neq 0).$$

On en déduit que

$$D_n \sim \frac{1}{2} \frac{a_n - b_n}{a_n} \sqrt{m_n} = \frac{1}{2} (\ln \ln n) (\ln n)^{|q|/2-1}.$$

Donc, puisque l'on suppose que $|q| < 2$, $D_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- Si $H \in \mathcal{C}_1^1$ avec $\varepsilon \neq 0$, on suppose que $|q| < 2(1 + \tau)$. Or on sait d'après le lemme 2.3 que $(H^{-1})''/(H^{-1})' \in \mathcal{SR}_{-1-\tau}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} D_n &\sim \sqrt{m_n} (a_n - b_n) a_n^{-1-\tau} L(a_n) \\ &\sim \sqrt{m_n} (\ln \ln n) a_n^{-1-\tau} L(a_n) \\ &\sim (\ln \ln n) (\ln n)^{|q|/2-1-\tau} L(\ln n), \end{aligned}$$

où L est une fonction à variations lentes. Il s'ensuit que $D_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- Si $H \in \mathcal{C}_\rho^3$, on suppose que $|q| < 2(1 - \rho)$. Or d'après le lemme 2.3 (1), on a

$$\frac{a_n(H^{-1})''(a_n)}{(H^{-1})'(a_n)} \in \mathcal{SR}_\rho.$$

Il s'ensuit que

$$D_n \sim \sqrt{m_n} \frac{a_n - b_n}{a_n} a_n^\rho L(a_n) \sim (\ln \ln n) (\ln n)^{|q|/2-1+\rho} L(a_n)$$

où L est une fonction à variations lentes, et $D_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

D'autre part, on a : $d_n - \delta_n = q_{1-p_n}(e_n - \varepsilon_n) = q_{1-p_n} e_n(1 - \varepsilon_n/e_n) = q_{1-p_n} e_n o(1)$. On en déduit que $C_n = D_n o(1)$, et donc que $C_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

■

D Démonstrations de la partie sur la puissance.

Les trois lemmes dont les démonstrations suivent nous permettent de prouver que la puissance du test ET tend vers 1 (ceci pour toutes les versions du test).

Démonstration du lemme 5.1. On remarque que

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{\sqrt{m_n} \left[(1 - F_1)^{-1}(\frac{m_n}{n}) - (1 - F_0)^{-1}(\frac{m_n}{n}) + (\sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(0)}) \ln(\frac{m_n}{np_n}) \right]}{\sigma_n^{(1)} \sqrt{A_n}} \\ &= \frac{\sqrt{m_n} \left[H_1^{-1}(a_n) - H_0^{-1}(a_n) + [(H_1^{-1})'(a_n) - (H_0^{-1})'(a_n)] (a_n - b_n) \right]}{(H_1^{-1})'(a_n) \sqrt{1 + (a_n - b_n)^2}} \end{aligned}$$

On sait que $np_n < 1$. Il s'ensuit que $m_n/np_n \rightarrow \infty$, et donc que $a_n - b_n = \ln(m_n/np_n) \rightarrow \infty$. Ceci implique que pour $n \rightarrow \infty$, $\sqrt{1 + (a_n - b_n)^2} \sim a_n - b_n$. D'où

$$\rho_n \sim \sqrt{m_n} \left[\frac{H_1^{-1}(a_n) - H_0^{-1}(a_n)}{(H_1^{-1})'(a_n)(a_n - b_n)} + 1 - \frac{(H_0^{-1})'(a_n)}{(H_1^{-1})'(a_n)} \right].$$

On en déduit que

$$\rho_n \sim \sqrt{m_n} \left[\left(\frac{1}{K_1(a_n)} - \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} \right) \frac{a_n}{a_n - b_n} + 1 - \frac{K_{01}(a_n)K_0(a_n)}{K_1(a_n)} \right].$$

Pour ζ_n , on a

$$\zeta_n = \frac{\sigma_n^{(0)}}{\sigma_n^{(1)}} = \frac{(H_0^{-1})'(a_n)}{(H_1^{-1})'(a_n)} = \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} K_0(a_n).$$

■

Démonstration du lemme 5.2.

- Supposons que $H_0 \in \mathcal{C}_{\beta_0}^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\beta_1}^1$ avec $0 < \beta_0 < \beta_1$. D'après le lemme 2.2, lorsque $n \rightarrow \infty$, $K_0(a_n) \sim 1/\beta_0$ et $K_1(a_n) \sim 1/\beta_1$. D'autre part, $K_{01} \in SR_{1/\beta_0 - 1/\beta_1}$ où $1/\beta_0 - 1/\beta_1 > 0$. On en déduit que $K_{01}(a_n) \rightarrow \infty$. Il s'ensuit que

$$\rho_n \sim -\sqrt{m_n} \beta_1 K_{01}(a_n) \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} + \frac{1}{\beta_0} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{et} \quad \zeta_n \sim \frac{\beta_1}{\beta_0} K_{01}(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

avec $\zeta_n = o(|\rho_n|)$.

- Supposons que $H_0 \in \mathcal{C}_\rho^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}_\beta^1$ avec $\beta > 0$ et $0 < \rho < 1$. D'après le lemme 2.2, lorsque $n \rightarrow \infty$, $K_1(a_n) \sim 1/\beta$ et $K_0(x) = xg'(x) \in SR_\rho$, donc $K_0(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \infty$. Enfin, on a $K_{01}(a_n) = \exp(g(a_n))/H_1^{-1}(a_n) \rightarrow +\infty$. Il s'ensuit que

$$\rho_n \sim -\beta \sqrt{m_n} K_{01}(a_n) K_0(a_n) \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} \frac{1}{K_0(a_n)} + 1 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

et

$$\zeta_n \sim \beta K_0(a_n) K_{01}(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{avec} \quad \zeta_n = o(|\rho_n|).$$

- Supposons que $H_0 \in \mathcal{C}_\beta^1$ et $H_1 \in \mathcal{C}^2$ avec $\beta > 0$. D'après le lemme 2.2, lorsque $n \rightarrow \infty$, $K_0(a_n) \sim 1/\beta$ et $K_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Enfin, on a $K_{01}(a_n) = H_0^{-1}(a_n)/H_1^{-1}(a_n) \rightarrow +\infty$ car K_{01} appartient à $SR_{1/\beta}$. Il s'ensuit que

$$\rho_n \sim -\sqrt{m_n} \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} + \frac{1}{\beta} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{et} \quad \zeta_n \sim \frac{K_{01}(a_n)}{\beta K_1(a_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

avec $\zeta_n = o(|\rho_n|)$.

- Supposons que $H_0 \in \mathcal{C}_\rho^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}^2$ avec $0 < \rho < 1$. On a déjà vu que $H_0 \in \mathcal{C}_\rho^3$ implique que $K_0(a_n) \rightarrow +\infty$ et $H_1 \in \mathcal{C}^2$ implique que $K_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. D'autre part, $K_{01}(x) = \exp(g(x))/H_1^{-1}(x)$ où $g \in SR_\rho$ et $H_1^{-1} \in SR_0$. On en déduit que $K_{01}(a_n) \rightarrow +\infty$. Il s'ensuit que

$$\rho_n \sim -\sqrt{m_n} \frac{K_{01}(a_n)}{K_1(a_n)} \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} + K_0(a_n) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

et

$$\zeta_n \sim \frac{K_{01}(a_n) K_0(a_n)}{K_1(a_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{avec} \quad \zeta_n = o(|\rho_n|).$$

- Supposons que $H_0 \in \mathcal{C}_{\rho_0}^3$ et $H_1 \in \mathcal{C}_{\rho_1}^3$ avec $0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$. On a déjà vu que $H_i \in \mathcal{C}_{\rho_i}^3$ signifie que $H_i^{-1}(x) = \exp(g_i(x))$ où $g_i \in SR_{\rho_i}$ ($i \in \{0, 1\}$). On en déduit que $K_i(x) = xg_i'(x) \in SR_{\rho_i} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \infty$. D'autre part, $K_{01}(x) = \exp(g_0(x) - g_1(x))$, où $g_0 - g_1 \in SR_{\rho}$ avec $\rho = \max(\rho_0, \rho_1) = \rho_0 > 0$, implique que $K_{01}(a_n) \rightarrow +\infty$. De plus, $K_0(a_n)/K_1(a_n) \in SR_{\rho_0 - \rho_1} \rightarrow +\infty$. D'où $K_{01}(a_n)K_0(a_n)/K_1(a_n) \rightarrow +\infty$. Il s'ensuit que

$$\rho_n \sim -\sqrt{m_n} \frac{K_{01}(a_n)K_0(a_n)}{K_1(a_n)} \left[\frac{a_n}{b_n - a_n} \frac{1}{K_0(a_n)} + 1 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

et

$$\zeta_n = \frac{K_{01}(a_n)K_0(a_n)}{K_1(a_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{avec} \quad \zeta_n = o(|\rho_n|).$$

■

E Démonstrations de la partie sur les simulations.

On se propose de montrer que le résultat des différentes versions du test ET est indépendant de la valeur de certains des paramètres de la loi des données. Cela signifie que la probabilité que $\hat{q}_{\text{param}, n}$, l'estimateur paramétrique du quantile d'ordre $1 - p$, soit à l'intérieur de son intervalle de confiance, est indépendante de la valeur de ces paramètres. Pour montrer cela, il suffit de prouver que les signes des différences entre $\hat{q}_{\text{param}, n}$ et les bornes de l'intervalle de confiance sont indépendants des paramètres considérés.

E.1 Version 1 du test ET.

On montre tout d'abord l'indépendance des résultats de la première version du test par rapport à des paramètres de position et d'échelle (ou par rapport au paramètre d'échelle si la loi ne possède pas de paramètre de position).

Scholie 1 Soit $F_{a,b}$ la fonction de répartition d'une loi admettant un paramètre de position a et un paramètre d'échelle b , i.e. il existe deux réels a et b et une fonction de répartition $F_{0,1}$ tels que $F_{a,b}(x) = F_{0,1}((x - a)/b)$. On veut tester l'adéquation de la famille de lois à laquelle appartient la vraie loi des données. Alors, le résultat du test ET version 1 est indépendant des paramètres de position (le paramètre a) et d'échelle (le paramètre b) (ou simplement du paramètre d'échelle lorsque l'on n'a pas de paramètre de position) pour les lois normale, lognormale, exponentielle, gamma et Weibull.

Remarque E.1 De la même façon, on peut montrer que le choix de m_n pour la version 1 du test ET est indépendant des paramètres de position et d'échelle. En effet, le choix de m_n est conditionné par la proportion de fois où $\hat{q}_{\text{param}, n}$ se trouve à l'intérieur de son intervalle de confiance pour ET. Pour que l'on ait toujours les mêmes valeurs optimales de m_n , il suffit que $\hat{q}_{\text{param}, n}$ ait la même probabilité d'appartenir à son intervalle de confiance, quelles

que soient les valeurs de a et b . Cette propriété découle d'une justification analogue à celle qui suit.

Justification: On s'intéresse à l'intervalle de confiance de la version 1 du test. On veut montrer que, quelles que soient les valeurs des paramètres a et b , la différence entre la borne inférieure (resp.supérieure) de l'intervalle $IC_{re, n}$ et $\hat{q}_{\text{param}, n}$ est toujours du même signe. Cette différence s'exprime de la façon suivante :

$$D_n = b_{inf} - \hat{q}_{\text{param}, n} = \hat{q}_{ET} - \hat{q}_{\text{param}, n} + d_n - \hat{\sigma}_n B_n z,$$

où z , le quantile approprié d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$, avec $A_n = 1 + (\ln(m_n/np))^2$, sont indépendants des paramètres de la loi testée.

On va donc réexprimer en fonction de a et b les quantités qui permettent de calculer D_n . Pour cela, on pose $X_i^0 = (X_i - a)/b$ (s'il n'y a qu'un paramètre d'échelle, on prend $a = 0$). Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} - \hat{\sigma}_n &= (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)} - X_{(n-m_n)} = b\hat{\sigma}_n^0, \text{ où } \hat{\sigma}_n^0 = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)}^0 \\ &\quad - X_{(n-m_n)}^0; \\ - \hat{q}_{ET, n} &= \hat{u}_n + \hat{\sigma}_n \ln(m_n/(np_n)) = a + b\hat{q}_{ET, n}^0, \text{ où } \hat{q}_{ET, n}^0 = \hat{u}_n^0 + \hat{\sigma}_n^0 \ln(m_n/(np_n)), \text{ avec} \\ &\quad \hat{u}_n^0 = X_{(n-m_n)}^0. \end{aligned}$$

D'autre part, on suppose que $F_{a, b}(x) = F_{0, 1}((x - a)/b)$, que $1 - F_{a, b}(x) = \exp(-H_{a, b}(x))$ et que $1 - F_{0, 1}(x) = \exp(-H_{0, 1}(x))$. On en déduit que $F_{a, b}^{-1}(x) = a + bF_{0, 1}^{-1}(x)$, $H_{a, b}(x) = H_{0, 1}((x - a)/b)$, $H_{a, b}^{-1}(x) = a + bH_{0, 1}^{-1}(x)$, $(H_{a, b}^{-1})'(x) = b(H_{0, 1}^{-1})'(x)$ et $(H_{a, b}^{-1})''(x) = b(H_{0, 1}^{-1})''(x)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} - \hat{q}_{\text{param}, n} &= F_{\hat{a}_n, \hat{b}_n}^{-1}(1 - p) = \hat{a}_n + \hat{b}_n q_{1-p}^0, \text{ où } q_{1-p}^0 = F_{0, 1}^{-1}(1 - p); \\ - d_n &= (1/2) \ln^2(m_n/(np_n))(H_{a, b}^{-1})''(\theta_n) = b d_n^0, \text{ où } \theta_n \in [a_n; b_n] \text{ et} \\ &\quad d_n^0 = (1/2) \ln^2(m_n/(np_n))(H_{0, 1}^{-1})''(\theta_n). \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer que

$$D_n = b \left[\frac{a - \hat{a}_n}{b} - \frac{\hat{b}_n}{b} q_{1-p}^0 + (\hat{q}_{ET, n}^0 + d_n^0 - \sigma_n^0 B_n z) \right],$$

où $\hat{q}_{ET, n}^0$, q_{1-p}^0 , d_n^0 et σ_n^0 sont indépendants de a et b .

Pour la loi normale (et donc pour la loi lognormale car les calculs sont alors faits sur $\ln X$ de loi normale), remarquons que

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \hat{b}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{a}_n)^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\hat{a}_n - a}{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\hat{b}_n}{b} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - a}{b} - \frac{\hat{a}_n - a}{b} \right)^2},$$

où $(X_i - a)/b = X_i^0 \sim F_{0,1}$. On en déduit que ces quantités sont elles aussi indépendantes de a et b . Ceci montre que D_n est indépendant de a , et que le signe de D_n est indépendant de la valeur de b , qui est toujours positif.

Pour la loi exponentielle, on a (avec par convention $a = 0$ et $\hat{a}_n = 0$) $\hat{b}_n = \bar{X}$, d'où $\hat{b}_n/b = \bar{X}^0$. De même, on en déduit que D_n est indépendant de la valeur du paramètre d'échelle b .

Pour la loi gamma, on a (avec $a = 0$ et $\hat{a}_n = 0$) $\hat{b}_n = 1/\hat{\lambda}_n = \bar{X}/\hat{\alpha}_n$ (cf. D'Agostino [5]). Or, $\hat{\alpha}_n$ est défini par l'équation

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \ln \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i^0 - \ln \bar{X}^0 = \psi(\hat{\alpha}_n) - \ln \hat{\alpha}_n,$$

où ψ est la fonction digamma, et est donc indépendant de b . On en déduit que $\hat{b}_n/b = \bar{X}^0/\hat{\alpha}_n$ est aussi indépendant de b . Il s'ensuit donc que D_n est indépendant de la valeur de b .

Pour la loi de Weibull, on a (avec $a = 0$ et $\hat{a}_n = 0$) d'après D'Agostino [5],

$$\ln \hat{b}_n = \frac{\ln \hat{\alpha}_n}{\hat{\beta}_n} = -\frac{1}{\hat{\beta}_n} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-T_i \hat{\beta}_n) \right],$$

où $T_i = -\ln X_i = -\ln X_i^0 - \ln b$. On en déduit que

$$\ln(\hat{b}_n/b) = -\frac{1}{\hat{\beta}_n} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-\hat{\beta}_n \ln X_i^0) \right].$$

D'autre part, on sait que $\hat{\beta}_n$ est défini par l'équation

$$\frac{1}{\hat{\beta}_n} = \bar{T} - \frac{\sum_{i=1}^n T_i \exp(-T_i \hat{\beta}_n)}{\sum_{i=1}^n \exp(-T_i \hat{\beta}_n)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i^0 + \frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i^0 \exp(\hat{\beta}_n \ln X_i^0)}{\sum_{i=1}^n \exp(\hat{\beta}_n \ln X_i^0)}.$$

Ceci montre que $\hat{\beta}_n$ est indépendant de b , et donc \hat{b}_n/b aussi. Il s'ensuit que D_n est indépendant de la valeur de b .

Scholie 2 On veut tester l'adéquation de la famille des lois de Weibull $Weib(\alpha, \beta)$. Pour β grand devant 1 ($\beta \gg 1$), le résultat du test ET version 1 est approximativement indépendant de la valeur de β .

Remarque E.2 Comme précédemment, on peut aussi montrer que le choix de m_n pour la version 1 du test ET est approximativement indépendant du paramètre de forme de la loi de Weibull, à condition que celui-ci soit grand devant 1.

Justification : Cette justification est heuristique : on utilise des approximations au premier ordre.

Pour simplifier cette justification, on suppose que l'échantillon des X_i est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 1$ et de paramètre de forme β , et qu'on n'estime pas le paramètre d'échelle. On s'intéresse à l'intervalle de confiance de la version 1 du test. On veut montrer que, quelles que soient les valeurs de β , la différence entre la borne inférieure (resp. supérieure) de l'intervalle $IC_{re, n}$ et $\hat{q}_{\text{param}, n}$ est toujours du même signe. Cette différence s'exprime de la façon suivante :

$$D_n = b_{inf} - \hat{q}_{\text{param}, n} = \hat{q}_{ET} - \hat{q}_{\text{param}, n} + d_n - \hat{\sigma}_n B_n z,$$

où z , le quantile approprié d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ainsi que $B_n = \sqrt{A_n/m_n}$, sont indépendants des paramètres de la loi testée.

On va donc réexprimer en fonction de β les quantités qui permettent de calculer D_n . Pour cela, on pose $X_i^0 = X_i^\beta \sim \text{Exp}(1)$. Pour x fixé et pour $\beta \gg \ln x$, on utilise l'approximation $x^{1/\beta} \simeq 1 + \ln x/\beta$. Cette approximation est aussi valable pour $\hat{\beta}_n$, puisque $\hat{\beta}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \beta$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il s'ensuit que :

- $\hat{q}_{\text{param}, n} = (-\ln p)^{1/\hat{\beta}_n} \simeq 1 + \ln q_p^0/\hat{\beta}_n$, où $q_p^0 = -\ln p$;
- $\hat{\sigma}_n = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)} - X_{(n-m_n)} \simeq \hat{\sigma}_n^0/\beta$, où $\hat{\sigma}_n^0 = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} \ln(X_{(n-m_n+j)}^0) - \ln(X_{(n-m_n)}^0)$;
- $\hat{q}_{ET, n} = \hat{u}_n + \hat{\sigma}_n \ln(m_n/(np_n)) \simeq 1 + \hat{q}_{ET, n}^0/\beta$, où $\hat{q}_{ET, n}^0 = \ln(\hat{u}_n^0) + \hat{\sigma}_n^0 \ln(m_n/(np_n))$, avec $\hat{u}_n^0 = X_{(n-m_n)}^0$;
- $d_n = (\ln n)^{1/\hat{\beta}_n} (\eta_n - \eta'_n)^2 (1 - \hat{\beta}_n)/2\hat{\beta}_n^2 \simeq -(2\hat{\beta}_n)^{-1} (\eta_n - \eta'_n)^2$.

Ceci signifie que

$$D_n \simeq \frac{1}{\beta} \left[\hat{q}_{ET, n}^0 \frac{\beta}{\hat{\beta}_n} - \ln(q_{1-p}^0) - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\hat{\beta}_n} (\eta_n - \eta'_n)^2 + \sigma_n^0 \right],$$

où $\hat{q}_{ET, n}^0$, q_{1-p}^0 et σ_n^0 sont indépendants de β .

On sait que $\hat{\beta}_n$ satisfait l'équation du maximum de vraisemblance qui, lorsque $\alpha = 1$, s'exprime (cf. [5])

$$\frac{1}{\hat{\beta}_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{\sum_{i=1}^n T_i \exp(-T_i \hat{\beta}_n)}{\sum_{i=1}^n \exp(-T_i \hat{\beta}_n)},$$

avec $T_i = -\ln X_i = -(1/\beta) \ln X_i^0$. Si on pose $S_i = \ln X_i^0$, cette équation devient

$$\frac{1}{\widehat{\beta}_n} = -\frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^n S_i + \frac{1}{\beta} \frac{\sum_{i=1}^n S_i \exp(-S_i \widehat{\beta}_n / \beta)}{\sum_{i=1}^n \exp(-S_i \widehat{\beta}_n / \beta)}.$$

Soit $\widehat{\gamma} = \widehat{\beta}_n / \beta$. Alors, $\widehat{\gamma}$ est solution de l'équation

$$\widehat{\gamma} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i + \frac{\sum_{i=1}^n S_i \exp(-S_i \widehat{\gamma})}{\sum_{i=1}^n \exp(-S_i \widehat{\gamma})},$$

et est donc indépendant de β . Ceci montre que pour β assez grand, on peut considérer que le signe de D_n est indépendant de la valeur de β , qui est toujours positive.

■

E.2 Les deux versions du test ET-BP basées sur le bootstrap paramétrique.

Scholie 3 Soit $F_{a,b}$ la fonction de répartition définie ci-dessus. On teste l'adéquation de la famille de lois à laquelle appartient la vraie loi des données. Le résultat du test ET version 3 (bootstrap paramétrique complet), ainsi que celui du test ET version 2 (bootstrap paramétrique simplifié), est approximativement indépendant du paramètre de position (le paramètre a) et du paramètre d'échelle (le paramètre b), pour les lois normale, lognormale, exponentielle, gamma et Weibull.

Remarque E.3 Comme précédemment, on peut aussi montrer que le choix de m_n pour les deux versions du test ET-BP est indépendant des paramètres de position et d'échelle.

Justification: On s'intéresse tout d'abord à l'intervalle de confiance de la version 3 du test, $IC_{\delta, BP} = [\widehat{\delta}_{\min, n}^*, \widehat{\delta}_{\max, n}^*]$. On veut montrer que, quelles que soient les valeurs des paramètres a et b , la différence entre la borne inférieure (resp. supérieure) de l'intervalle $IC_{\delta, BP}$ et $\widehat{\delta}_n$ est toujours du même signe. Cette différence s'exprime comme

$$D_1 = \widehat{\delta}_{\min, n}^* - \widehat{\delta}_n = \widehat{q}_{ET, n}^{*(j)} - \widehat{q}_{\text{param}, n}^{*(j)} - (\widehat{q}_{ET, n} - \widehat{q}_{\text{param}, n}).$$

On va donc réexprimer en fonction de a et b les quantités qui permettent de calculer cette différence. Pour cela, on pose $X_i^0 = (X_i - a)/b$ et $X_i^{*(j)0} = (X_i^{*(j)} - \widehat{a}_n)/\widehat{b}_n$. De même que pour la version 1 du test,

$$\begin{aligned} - \widehat{\sigma}_n &= b \widehat{\sigma}_n^0, \text{ où } \widehat{\sigma}_n^0 = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)}^0 - X_{(n-m_n)}^0; \\ - \widehat{\sigma}_n^{*(j)} &= \widehat{b}_n \widehat{\sigma}_n^{*(j)0}, \text{ où } \widehat{\sigma}_n^{*(j)0} = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)}^{*(j)0} - X_{(n-m_n)}^{*(j)0}; \\ - \widehat{q}_{ET, n} &= a + b \widehat{q}_{ET, n}^0, \text{ où } \widehat{q}_{ET, n}^0 \text{ est indépendant de } a \text{ et } b; \end{aligned}$$

$$- \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)} = \widehat{a}_n + \widehat{b}_n \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0}, \text{ où } \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0} = \widehat{u}_n^{*(j)0} + \widehat{\sigma}_n^{*(j)0} \ln(m_n/(np_n)), \text{ avec } \widehat{u}_n^{*(j)0} = X_{(n-m_n)}^{*(j)0}.$$

D'autre part, comme précédemment, on a $F_{a,b}^{-1}(x) = a + bF_{0,1}^{-1}(x)$, $(H_{a,b}^{-1})'(x) = b(H_{0,1}^{-1})'(x)$ et $(H_{a,b}^{-1})''(x) = b(H_{0,1}^{-1})''(x)$. Il s'ensuit de même que

$$\begin{aligned} - \widehat{q}_{\text{param},n} &= F_{\widehat{a}_n, \widehat{b}_n}^{-1}(1-p) = \widehat{a}_n + \widehat{b}_n q_{1-p}^0, \text{ où } q_{1-p}^0 = F_{0,1}^{-1}(1-p); \\ - \widehat{q}_{\text{param},n}^{*(j)} &= F_{\widehat{a}_n^{*(j)}, \widehat{b}_n^{*(j)}}^{-1}(1-p) = \widehat{a}_n^{*(j)} + \widehat{b}_n^{*(j)} q_{1-p}^0. \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer que

$$D_1 = b \left(\frac{\widehat{a}_n - a}{b} + \frac{\widehat{b}_n \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0}}{b} - \widehat{q}_{ET,n}^0 - \frac{\widehat{a}_n^{*(j)} - \widehat{a}_n}{\widehat{b}_n} \frac{\widehat{b}_n}{b} - \frac{\widehat{b}_n^{*(j)} - \widehat{b}_n}{\widehat{b}_n} \frac{\widehat{b}_n}{b} q_{1-p}^0 \right),$$

où $\widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0}$, $\widehat{q}_{ET,n}^0$ et q_{1-p}^0 sont indépendants de a et b .

Comme précédemment, on remarque, par exemple pour la loi normale que

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{a}_n - a}{b} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^0, \quad \frac{\widehat{b}_n}{b} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i^0 - \frac{\widehat{a}_n - a}{b} \right)^2}, \\ \frac{\widehat{a}_n^{*(j)} - \widehat{a}_n}{\widehat{b}_n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{*(j)0} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{b}_n^{*(j)}}{\widehat{b}_n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i^{*(j)0} - \frac{\widehat{a}_n^{*(j)} - \widehat{a}_n}{\widehat{b}_n} \right)^2}. \end{aligned}$$

Puisque $X_i^0 \sim F_{0,1}$ et que $X_i^{*(j)0} \sim F_{0,1}$, ces quantités sont elles aussi indépendantes de a et b . Ceci montre que D_1 est indépendant de a , et que le signe de D_1 est indépendant de la valeur de b , qui est toujours positive pour le cas de la loi normale (et la loi lognormale qui s'y ramène). De même, on démontre l'indépendance de D_1 par rapport à la valeur de b pour les lois exponentielle, gamma et Weibull. On en déduit que la proposition 3 est vérifiée pour le test ET-BP complet (version 3).

On s'intéresse maintenant à l'intervalle de confiance de la version 2 du test $IC_{ET,BP,n} = [\widehat{q}_{ET,\min,n}^*, \widehat{q}_{ET,\max,n}^*]$. On veut montrer que, quelles que soient les valeurs des paramètres a et b , la différence entre la borne inférieure (resp. supérieure) de l'intervalle $IC_{ET,BP}$ et $\widehat{q}_{ET,n}$ est toujours du même signe. Cette différence s'exprime comme $D_2 = \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)} - \widehat{q}_{ET,n}$. Or, on a déjà montré que $\widehat{q}_{ET,n}^{*(j)} = \widehat{a}_n + \widehat{b}_n \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0}$ et $\widehat{q}_{ET,n} = a + b \widehat{q}_{ET,n}^0$. En utilisant les expressions de l'estimateur du maximum de vraisemblance de b pour les différentes lois envisagées, on en déduit que le signe de $D_2 = b[(\widehat{b}_n/b) \widehat{q}_{ET,n}^{*(j)0} - \widehat{q}_{ET,n}^0]$ est indépendant de la valeur de b qui

est toujours positif pour les lois normale, lognormale, exponentielle, gamma et Weibull.

■

Scholie 4 *On suppose que l'on teste l'adéquation de la famille des lois de Weibull $Weib(\alpha, \beta)$. Alors, pour β grand devant 1 ($\beta \gg 1$), le résultat du test ET version 3 (bootstrap paramétrique complet), ainsi que celui du test ET version 2 (bootstrap paramétrique simplifié), peuvent être considérés comme indépendants du paramètre de forme β .*

Remarque E.4 *Comme précédemment, on peut aussi montrer que le choix de m_n pour les deux versions du test ET-BP est approximativement indépendant du paramètre de forme de la loi de Weibull, à condition que celui-ci soit grand devant 1.*

Justification : Pour simplifier, on suppose que l'échantillon des X_i est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 1$ et de paramètre de forme β .

On s'intéresse tout d'abord à l'intervalle de confiance de la version 3 du test. La différence entre la borne inférieure (resp. supérieure) de l'intervalle $IC_{\delta, BP}$ et $\hat{\delta}_n$ est

$$D_1 = \hat{\delta}_{\min, n}^* - \hat{\delta}_n = \hat{q}_{ET, n}^{*(j)} - \hat{q}_{\text{param}, n}^{*(j)} - (\hat{q}_{ET, n} - \hat{q}_{\text{param}, n}).$$

Posons $X_i^0 = X_i^\beta \sim Exp(1)$. On a, comme précédemment :

- $\hat{\sigma}_n \simeq \hat{\sigma}_n^0 / \beta$, où $\hat{\sigma}_n^0 = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} \ln(X_{(n-m_n+j)}^0) - \ln(X_{(n-m_n)}^0)$;
- $\hat{\sigma}_n^{*(j)} = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} X_{(n-m_n+j)}^{*(j)} - X_{(n-m_n)}^{*(j)} \simeq \hat{\sigma}_n^{*(j)0} / \hat{\beta}_n$, où $\hat{\sigma}_n^{*(j)0} = (1/m_n) \sum_{j=1}^{m_n} \ln(X_{(n-m_n+j)}^{*(j)0}) - \ln(X_{(n-m_n)}^{*(j)0})$;
- $\hat{q}_{ET, n} \simeq 1 + \hat{q}_{ET, n}^0 / \beta$, où $\hat{q}_{ET, n}^0 = \ln(\hat{u}_n^0) + \hat{\sigma}_n^0 \ln(m_n / (np_n))$;
- $\hat{q}_{ET, n}^{*(j)} = \hat{u}_n^{*(j)} + \hat{\sigma}_n^{*(j)} \ln(m_n / (np_n)) \simeq 1 + \hat{q}_{ET, n}^{*(j)0} / \hat{\beta}_n$, où $\hat{q}_{ET, n}^{*(j)0} = \ln(\hat{u}_n^{*(j)0}) + \hat{\sigma}_n^{*(j)0} \ln(m_n / (np_n))$, avec $\hat{u}_n^{*(j)0} = X_{(n-m_n)}^{*(j)0}$;
- $\hat{q}_{\text{param}, n} = (-\ln p)^{1/\hat{\beta}_n} \simeq 1 + \ln q_p^0 / \hat{\beta}_n$, où $q_p^0 = -\ln p$;
- $\hat{q}_{\text{param}, n}^{*(j)} = (-\ln p)^{1/\hat{\beta}_n^{*(j)}} \simeq 1 + \ln q_p^0 / \hat{\beta}_n^{*(j)}$, où $q_p^0 = -\ln p$.

D'où

$$D_1 \simeq \frac{1}{\beta} \left[\hat{q}_{ET, n}^{*(j)0} + \ln q_p^0 \frac{\beta}{\hat{\beta}_n} - \hat{q}_{ET, n}^0 - \ln q_p^0 \frac{\beta}{\hat{\beta}_n} \frac{\hat{\beta}_n}{\hat{\beta}_n^{*(j)}} \right],$$

où $\hat{q}_{ET, n}^{*(j)0}$, q_p^0 et $\hat{q}_{ET, n}^0$ sont indépendants de β . On a montré plus haut que si $\hat{\beta}_n$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de β , alors le rapport $\beta / \hat{\beta}_n$ est indépendant de β . Dans notre cas, il en résulte que $\hat{\beta}_n / \hat{\beta}_n^{*(j)}$ est indépendant de $\hat{\beta}_n$. Ceci montre que pour β assez grand, le signe de D_1 est approximativement indépendant de la valeur de β . On en déduit que la proposition 4 est vérifiée pour le test ET version 3. Le cas du test ET version 2 est analogue.

■

Références

- [1] Balkema (A.) et de Hann (L.). – Limit distributions for order statistics. i. *SIAM Theory of Probability and its Applications*, vol. 23, n1, 1978, pp. 77–92.
- [2] Balkema (A.) et de Hann (L.). – Limit distributions for order statistics. ii. *SIAM Theory of Probability and its Applications*, vol. 23, n2, 1978, pp. 341–358.
- [3] Barbe (P.) et Diebolt (J.). – Empirical process of excesses above random thresholds. – soumis pour publication.
- [4] Bingham (N.H.), Goldie (C.M.) et Teugels (J.L.). – *Regular variation*. – Cambridge University Press, 1997, *Encyclopedia of Mathematics and its application*, volume 27.
- [5] D’Agostino (R.B.) et Stephens (M.A.). – *Goodness-of-fit Techniques*. – 1986, *Statistics textbooks and monographs*, volume 68.
- [6] Davis (R.) et Resnick (S.). – Tail estimates motivated by extreme value theory. *The Annals of Statistics*, vol. 12, n4, 1984, pp. 1467–1487.
- [7] de Haan (L.) et Rootzen (H.). – On the estimation of high quantiles. *J. Stat. Plann. Inference*, vol. 35, n1, 1993, pp. 1–13.
- [8] Diebolt (J.) et El Aroui (M.A.). – *Modélisation des queues de distributions et estimation de quantiles extrêmes (1)*. – Rapport de contrat INRIA-EDF, 1997.
- [9] Diebolt (J.) et Garrido (M.). – *Les différentes versions du test ET, test d’adéquation à la queue de distribution*. – Rapport de contrat INRIA-EDF, 1999.
- [10] Diebolt (J.) et Girard (S.). – *Modélisation des queues de distributions et estimation de quantiles extrêmes (2)*. – Rapport de contrat INRIA-EDF, 1998.
- [11] Diebolt (J.) et Girard (S.). – *Consistency of the ET method and smooth variations*. – Rapport de Recherche n98-08, université Montpellier 2, 1999.
- [12] Diebolt (J.) et Girard (S.). – Consistency of the ET method and smooth variations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, vol. 329, 1999, pp. 821–826.
- [13] Embrechts (P.), Klüppelberg (C.) et T. (Mickosh). – *Modelling Extremal Events*. – Springer-Verlag, 1997, *Applications of Mathematics*, volume 33.
- [14] Galambos (J.). – *The asymptotic theory of extreme order statistics*. – R.E. Krieger publishing compagny, 1987.
- [15] Pickands (J.). – Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, vol. 3, 1975, pp. 119–131.
- [16] Ramdany-Worms (R.). – *Vitesse de convergence pour l’approximation des queues de distributions*. – Thèse de PhD, Université de Marne-la-Vallée, decembre 2000.
- [17] Rao (C.R.). – *Linear Statistical inference and its applications*. – J. Wiley and sons, 1973, *Wiley series in probability and mathematical statistics*.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires.	3
2.1	Méthode des excès pour l'estimation des quantiles extrêmes.	3
2.2	Définitions et notations.	6
2.2.1	Les fonctions lisses à variations régulières.	6
2.2.2	Classes de fonctions dans le domaine d'attraction de Gumbel.	7
3	Présentation du test ET: test d'adéquation d'un modèle central à une queue de distribution.	9
3.1	Test ET: version basée sur la loi asymptotique de $\hat{q}_{ET,n}$, l'estimateur ET d'un quantile.	9
3.2	Test ET: version basée sur la théorie du bootstrap paramétrique.	12
3.2.1	Intervalle de confiance bootstrap	12
3.2.2	Deuxième version du test	12
3.2.3	Version simplifiée du test	13
4	Niveau de signification du test ET.	14
4.1	Niveau de signification du test ET version 1.	14
4.2	Niveau de signification des test ET-BP complet et simplifié.	17
5	Puissance du test ET.	20
5.1	Puissance du test ET version 1.	20
5.2	Puissance des tests ET-BP complet et simplifié.	24
6	Données simulées.	26
6.1	Niveau des versions du test ET.	27
6.2	Puissance des versions du test ET.	30
6.3	Conseils sur le nombre d'excès à utiliser.	31
6.3.1	Test ET version 1 (basé sur la loi asymptotique de \hat{q}_{ET}).	32
6.3.2	Test ET-BP complet (version 2).	35
6.3.3	Test ET-BP simplifié (version 3).	37
7	Données réelles.	39
7.1	Le test d'Anderson-Darling	40
7.2	Les différentes versions du test ET.	40
A	Paramétrage des lois utilisées.	42
B	Démonstrations de la partie décrivant le test ET.	42
B.1	Preuve de la remarque 3.2.	42
B.2	Preuve de la proposition 3.1.	45

C	Démonstrations de la partie sur le niveau de signification.	46
D	Démonstrations de la partie sur la puissance.	47
E	Démonstrations de la partie sur les simulations.	49
E.1	Version 1 du test ET.	49
E.2	Les deux versions du test ET-BP basées sur le bootstrap paramétrique. . . .	53



Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes
655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399