

Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell

Francis Collino, Thierry Fouquet, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Francis Collino, Thierry Fouquet, Patrick Joly. Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell. [Rapport de recherche] RR-3888, INRIA. 2000. inria-00072765

HAL Id: inria-00072765

<https://hal.inria.fr/inria-00072765>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell.

F. Collino, T. Fouquet et P. Joly

N° 3888

Février 2000

_____ THÈME 4 _____



*Rapport
de recherche*

Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell.

F. Collino, T. Fouquet et P. Joly*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 3888 — Février 2000 — 66 pages

Résumé : L'objet de ce rapport est de présenter la construction et l'analyse d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell à 3 dimensions d'espace. L'idée est d'introduire à l'interface des deux maillages un courant. Ce courant est déterminé implicitement par la condition de raccord des composantes tangentielles des deux champs électriques. Ce problème peut s'écrire sous la forme d'un problème d'évolution variationnel. On discrétise ce problème de façon à garantir la stabilité par la conservation d'une énergie discrète. On applique cette méthode générale à la FDTD et pour un raffinement spatio-temporel 1-2. On obtient un schéma stable sous la CFL usuelle.

Mots-clé : Raffinement spatio-temporel, FDTD, Stabilité, Équations de Maxwell

(Abstract: pto)

* Francis.Collino@inria.fr, Thierry.Fouquet@inria.fr Patrick.Joly@inria.fr

Build of a space-time mesh refinement stable method in the FDTD approximation of the Maxwell's equation

Abstract: We build a space-time mesh refinement method for the Maxwell's equations. The idea consists in introducing a current at the interface of the two meshes. This current is determined implicitly by the gluing of the tangential components of the 2 electric fields. This problem reads as an evolution variational problem. We propose a discretization which guarantees the stability by means of a discrete energy. This method is applied to FDTD for a 1-2 refinement. A stable scheme is obtained under the usual CFL.

Key-words: Space-time refinement, FDTD, Stability, Maxwell's equations

Introduction

Dans ce rapport, nous présentons une nouvelle méthode de raffinement de maillage espace-temps pour les équations de Maxwell instationnaires à trois dimensions d'espace. Ce travail fait suite aux études que nous avons réalisées sur ce même problème mais posées à une ou deux dimensions d'espace.

Rappelons que la grande difficulté du raffinement de maillage pour les problèmes d'ondes est de marier stabilité et précision. Les schémas d'interpolation classiques, proposés dans la littérature, se révèlent instables si le pas de temps n'est pas choisi très petit. Ce phénomène a été complètement analysé à une dimension d'espace, [3]. On montre que les schémas d'interpolation sont instables lorsque la grille raffinée est un segment de taille finie avec un pas de temps trop grand. Plus précisément, la CFL, c'est à dire la condition sous laquelle on a stabilité dépend de façon très compliquée du nombre de mailles contenues dans le segment raffiné: une CFL qui marche pour un segment contenant 5 mailles raffinées ne marchera plus pour 6 et pourra remarquer pour 8! Les problèmes 2D et 3D sont encore plus complexes à analyser et il s'avère très difficile d'obtenir la dépendance entre la CFL et la géométrie de la boîte raffinée. Ces schémas n'offrent donc pas la garantie suffisante de robustesse pour être intégré dans un code de calcul industriel. Dans [4], nous avons proposé un schéma nouveau qui a la particularité d'assurer la stabilité sous la CFL usuelle. Le point clé de cette méthode est de décorrélérer les valeurs des champs aux points de raccord entre grille fine et grille grossière et de n'assurer la continuité des champs entre les deux grilles que de façon faible. En fait, ces schémas découlent très naturellement d'une formulation variationnelle où l'évolution de l'onde est décrite à l'aide de deux champs distincts, une pour chaque grille, l'une fine l'autre grossière. Ces deux champs sont couplés à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange (un courant) associé à la contrainte de continuité des champs sur la frontière commune. La présentation de cette formulation ainsi que sa discrétisation sera l'objet de la section suivante (section 2). Le schéma apparaît comme une modification du schéma de Yee, il peut donc s'intégrer dans les codes de calcul FDTD et réaliser le raffinement de

maillage. La démonstration théorique de la stabilité qui est obtenue très simplement à partir d'estimations a priori (conservation d'une énergie discrète) sera présentée dans la section 3. Dans la section 4, nous généraliserons le procédé pour les milieux contenant des conducteurs parfaits (plaques, parallélépipèdes, fils). La section 5 est consacrée à une présentation détaillée de la mise en oeuvre de la méthode et de son algorithmique. Enfin, des exemples numériques concluent le rapport.

Chapitre 1

Formulation du problème

1.1 Notations

Nous nous donnons un parallélépipède rectangle ouvert B , nous notons Σ sa frontière et $n(x)$ la normale extérieure au point x de Σ (c'est à dire celle qui pointe vers l'extérieur de B). Le couple (E_g, H_g) désignera un champ électromagnétique défini dans le domaine extérieur à B , soit B^{ext} et (E_f, H_f) un champ électromagnétique défini dans B . L'indice g faisant référence à *grossier* et f à *fin*: on anticipe ici quelque peu sur la discrétisation du problème qui va être utilisée par la suite (l'extérieur de B va être maillé de façon grossière et l'intérieur de façon raffinée). La concaténation des deux champs sera notée simplement (E, H) . Enfin, on sera amené à utiliser la masse de Dirac portée par la frontière Σ que l'on notera δ_Σ et qui est définie par

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_\Sigma \varphi(s) d\sigma(s) \quad (1.1)$$

1.2 Formulation sous forme de problème couplé

On se donne (E, H) un champ électromagnétique dans le vide, c'est à dire une solution du système de Maxwell

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E(x, t) - \text{rot} H(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3 \\ \mu_0 \partial_t H(x, t) + \text{rot} E(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \quad (1.2)$$

Les champs étant initialisés avec des conditions initiales au temps $t = 0$ appropriées (on peut également ajouter des termes sources mais on ne le fait pas ici pour alléger

la présentation). Définissons

$$J(x, t) = n(x) \wedge H_{|\Sigma}(x, t), \quad (1.3)$$

le courant électrique parcourant la frontière de la boîte B . On peut découpler le problème en deux parties suivant

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E_f(x, t) - \text{rot} H_f(x, t) = 0, & x \in B \\ \mu_0 \partial_t H_f(x, t) + \text{rot} E_f(x, t) = 0, & x \in B \\ H_f(x, t) \wedge n(x) = J(x, t), & x \in \Sigma = \partial B \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E_g(x, t) - \text{rot} H_g(x, t) = 0, & x \in B^{ext} \\ \mu_0 \partial_t H_g(x, t) + \text{rot} E_g(x, t) = 0, & x \in B^{ext} \\ H_g(x, t) \wedge n(x) = J(x, t), & x \in \Sigma = \partial B^{ext} \end{cases} \quad (1.5)$$

avec la condition de raccord

$$n(x) \wedge (E_{f|\Sigma}(x, t) \wedge n(x)) = n(x) \wedge (E_{g|\Sigma}(x, t) \wedge n(x)) \quad (1.6)$$

On peut interpréter cette formulation équivalente de la façon suivante. Pour chacun des deux domaines, on calcule la solution du système de Maxwell assujéti à un courant $\pm J$ sur leur bord (c'est à dire avec la valeur du champ magnétique tangent connu sur le bord). La valeur de ce courant est alors uniquement déterminée si l'on assure la continuité des traces tangentielles du champ électrique. Le champ électromagnétique est alors complètement déterminé. L'intérêt de cette formulation est qu'elle découple dans un premier temps ce qui se passe dans chacun des deux domaines (J étant fixé, je connais le champ dans chacun des deux domaines). Le couplage ne s'effectue qu'à travers l'égalité de contrainte qui assure le raccordement.

1.3 Formulation variationnelle

On peut facilement écrire la formulation variationnelle de ce problème couplé. On introduit les espaces fonctionnels classiques

$$\begin{cases} V_f = H^0(\text{rot}; B), & W_f = H^0(\text{div}; B), \\ V_g = H^0(\text{rot}; B^{ext}), & W_g = H^0(\text{div}; B^{ext}), \end{cases} \quad (1.7)$$

ainsi que

$$M = H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}; \Sigma), \quad M' = H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}; \Sigma), \quad (1.8)$$

où la notation $H^s(\text{op}, D)$ signifie

$$\varphi \in H^s(\text{op}, D) \Leftrightarrow \varphi \in H^s(D), \text{ op}(\varphi) \in H^s(D). \quad (1.9)$$

(on rappelle que $H^0(D) = L^2(D)$). Les espaces M et M' sont en dualités l'un vis à vis de l'autre. Ce sont les espaces naturels de traces pour les fonctions de $H(\text{rot}, B)$: $J(x, t)$ vit dans M tandis que l'égalité (1.6) a un sens dans l'espace M' , cf. [7] par exemple.

Cette formulation est aisément obtenue en multipliant chaque équation par une fonction test, puis en sommant sur le domaine où est posée l'équation. On évite les termes en rotationnel d'une fonction de $H(\text{div}, \cdot)$ grâce à la formule de Stokes : si Θ est B ou B^{ext} , on a

$$\int_{\Theta} (\text{rot} E^t \cdot H - \text{rot} H \cdot E^t) = \int_{\partial\Theta} (\nu \wedge (E_{/\partial\Theta}^t \wedge \nu)) \cdot (H_{/\partial\Theta} \wedge \nu) d\sigma, \quad (1.10)$$

où ν est $+n$ si $\Theta = B$ et $-n$ si $\Theta = B^{\text{ext}}$. La condition à la limite permet alors de remplacer la trace tangentielle du champ magnétique par la donnée J (en fait $\pm J$ si l'on tient compte de l'orientation).

Après tout calcul, la formulation du problème est alors la suivante

Trouver $E_f(t), H_f(t), E_g(t), H_g(t), J(t)$ dans $V_f \times W_f \times V_g \times W_g \times M$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f \in V_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \epsilon_0 E_f(x, t) \cdot \psi_f(x) dx - \int_B \text{rot} \psi_f(x) \cdot H_f(x, t) dx \\ = \int_{\Sigma} J(x, t) \cdot \psi_f(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_f \in W_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \mu_0 H_f(x, t) \cdot \phi_f(x) dx + \int_B \text{rot} E_f(x, t) \cdot \phi_f(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_g \in V_g, \\ \frac{d}{dt} \epsilon_0 \int_{B^{\text{ext}}} E_g(x, t) \cdot \psi_g(x) dx - \int_{B^{\text{ext}}} \text{rot} \psi_g(x) \cdot H_g(x, t) dx \\ = - \int_{\Sigma} J(x, t) \cdot \psi_g(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_g \in W_g, \\ \frac{d}{dt} \mu_0 \int_{B^{ext}} H_g(x, t) \cdot \phi_g(x) dx + \int_{B^{ext}} \text{rot} E_g(x, t) \cdot \phi_g(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall J' \in M, \int_{\Sigma} n(x) \wedge (E_{f|\Sigma}(x, t) \wedge n(x)) \cdot J'(x) d\sigma(x) = \\ \int_{\Sigma} n(x) \wedge (E_{g|\Sigma}(x, t) \wedge n(x)) \cdot J'(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Dans toutes ces égalités variationnelles, les intégrales sur Σ doivent être entendues comme un crochet de dualité entre M et M' . Enfin, ce système d'évolution variationnel est bien sûr initialisé par des conditions initiales appropriées au temps $t = 0$.

Chapitre 2

Discrétisation du problème

Dans cette section, nous présentons la démarche suivie pour la discrétisation du système d'évolution explicité dans la section précédente. La démarche est très classique. Elle consiste à choisir des espaces d'éléments finis pour l'approximation en espace (champ électromagnétique puis courant) et un schéma en temps type saute-mouton pour la discrétisation temporelle. La stabilité du schéma est analysée via l'obtention d'une loi de conservation d'une énergie discrète que nous établirons.

2.1 Espaces d'approximation

Pour discrétiser le système, on va s'appuyer sur les techniques usuelles : on utilise des espaces d'approximations classiques pour chacun des espaces de fonctions qui intervient dans la formulation variationnelle et on ajoute un ingrédient supplémentaire qui est la condensation de masse. Cette condensation permettra de rendre le schéma temporel explicite.

2.1.1 Espaces approchés pour le champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est construit sur chacun des deux domaines à partir d'un maillage constitué de parallélépipèdes identiques. On suppose que la frontière commune (la boîte) colle exactement à la frontière des deux maillages. On suppose de plus que les mailles en x , y et z , qui sont les trois coordonnées d'espace, sont deux fois plus grosses pour le maillage de l'extérieur de la boîte que pour le maillage de l'intérieur : la boîte est ainsi raffinée 2 fois par rapport à son domaine extérieur.

On notera génériquement par h le vecteur du réseau $h = (h_x, h_y, h_z)$ et par $2h$ le pas du réseau pour l'extérieur de B .

Le champ électromagnétique est approché par des éléments finis de plus bas degré de Nédelec, [8], [9], [1].

Les champs s'écrivent alors en tout point M

$$\left\{ \begin{array}{l} E_g^{2h}(M, t) = \sum_{a \in B^{ext}} (E_g)_a^{2h}(t) \hat{\phi}_a^{2h}(M) \\ H_g^h(M, t) = \sum_{f \in B^{ext}} (H_g)_f^h(t) \hat{\psi}_f^h(M) \\ E_f^h(M, t) = \sum_{a \in B} (E_f)_a^h(t) \hat{\phi}_a^h(M) \\ H_f^h(M, t) = \sum_{f \in B} (H_f)_f^h(t) \hat{\psi}_f^h(M) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où les sommations sont effectuées sur les arêtes (a) ou sur les faces (f) du maillage. Les fonctions $\hat{\phi}_a^h$ sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à une circulation de h_x , h_y ou h_z (selon l'orientation) sur l'arête numéro a et 0 sur les autres arêtes. De même, les fonctions $\hat{\psi}_f^h$ sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à un flux normal de h^2 à travers la face f et 0 pour les autres faces.

On peut préciser un peu plus. On distinguera les arêtes orientées selon x , y ou z . Si le maillage cubique est constitué des noeuds (ih_x, jh_y, kh_z) , les arêtes sont repérées par la coordonnée de leur point milieu. Par exemple, une arête en x sera associée à un point du type $(i + \frac{1}{2}h_x, jh_y, kh_z)$. On est donc amené à distinguer trois familles de fonctions de base

$$\begin{array}{l} a = \text{arête selon } x \rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h \\ a = \text{arête selon } y \rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h \\ a = \text{arête selon } z \rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h \end{array} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{array}{l} \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h = \psi_{i+\frac{1}{2}}^{h_x}(x) \phi_j^{h_y}(y) \phi_k^{h_z}(z) \hat{x} \\ \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h = \psi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \phi_k^{h_z}(z) \phi_i^{h_x}(x) \hat{y} \\ \vec{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h = \psi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \phi_i^{h_x}(x) \phi_j^{h_y}(y) \hat{z}, \end{array} \quad (2.3)$$

où $\psi_{m+\frac{1}{2}}^{h_s}(s)$ est la fonction indicatrice du segment $[mh_s, (m+1)h_s]$ et $\phi_m^{h_s}(s)$ est la fonction chapeau

$$\phi_m^{h_s}(s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ (m-1)h_s \quad mh_s \quad (m+1)h_s \quad s \end{array}$$

Chaque fonction de base a donc son support constitué par les quatre cubes qui s'appuient sur l'arête associée. Ceci n'est bien sûr vrai que pour les arêtes qui ne sont pas localisées sur la frontière commune des deux maillages. Pour ces arêtes, il faut enlever les cubes qui ne sont pas internes au domaine considéré. Dans la suite, nous noterons par \mathcal{E}_h le sous-espace engendré par les fonctions de bases construites sur le réseau infini de pas h et dont les supports intersectent le cube raffiné B et \mathcal{E}_{2h} le sous-espace engendré par les fonctions de bases construites sur le réseau de pas double $2h$ et dont les supports intersectent l'extérieur de B

Pour les fonctions de base qui engendrent l'espace d'approximation de $H(\text{div}, B)$ ou encore $H(\text{div}, B^{\text{ext}})$, on distingue trois familles de fonctions de base selon la nature de la normale à la face qui leur est associée. On repère chaque face par les coordonnées de son centre. À une face de normale orientée selon $\pm \hat{x}$ correspond un point du type $(ih_x, (j + \frac{1}{2})h_y, (k + \frac{1}{2})h_z)$. Les fonctions de bases sont alors

$$\begin{aligned} f = \text{face selon } x &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^h \\ f = \text{face selon } y &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^h \\ f = \text{face selon } z &\rightarrow \vec{\psi}_f^h = \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^h. \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^h &= \phi_i^{h_x}(x) \psi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \psi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \hat{x} \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^h &= \phi_j^{h_y}(y) \psi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \psi_{i+\frac{1}{2}}^h(x) \hat{y} \\ \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^h &= \phi_k^{h_z}(z) \psi_{i+\frac{1}{2}}^{h_x}(x) \psi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \hat{z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Chaque fonction de base a cette fois-ci son support constitué des deux cubes qui s'appuient sur la face associée, à l'exception bien sûr des fonctions de base accrochées à une face de cube localisée sur la frontière Σ pour lesquelles le support n'est constitué que d'un unique cube. De la même façon que nous avons défini \mathcal{E}_h et \mathcal{E}_{2h} les espaces d'approximation pour, respectivement, le champ électrique raffiné défini sur B et le

champ électrique sur B^{ext} , nous définissons \mathcal{H}_h et \mathcal{H}_{2h} leur correspondant pour le champ magnétique.

Finalement, les solutions recherchées seront de la forme

$$\begin{aligned}
E_f^h(t) &= \sum_{i,j,k} E_f^x{}_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h + E_f^y{}_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h \\
&\quad + E_f^z{}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h \\
H_f^h(t) &= \sum_{i,j,k} H_f^x{}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h + H_f^y{}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h \\
&\quad + H_f^z{}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h
\end{aligned} \tag{2.6}$$

et,

$$\begin{aligned}
E_g^{2h}(t) &= \sum_{i,j,k} E_g^x{}_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{2h} + E_g^y{}_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{2h} \\
&\quad + E_g^z{}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{2h} \\
H_g^{2h}(t) &= \sum_{i,j,k} H_g^x{}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{2h} + H_g^y{}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{2h} \\
&\quad + H_g^z{}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{2h}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On remarquera que les composantes du champ électromagnétique sont exactement celles qui sont utilisées pour construire le schéma aux différences finies de Yee, [6]. On sera amené à faire le lien avec ce schéma dans la suite.

2.1.2 Espace approché pour le courant

L'espace $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Sigma)$ dans lequel vit le courant est un espace de champs surfaciques définis à la surface de Σ . C'est un espace de courant, c'est à dire un espace où il est possible de définir une charge en prenant la divergence surfacique du champ considéré. Cet espace est l'espace naturel pour la formulation par équations intégrales du problème de diffraction par un objet parfaitement conducteur (formulation dite Electric Field Integral Equation ou EFIE). Il est donc tentant d'utiliser les mêmes espaces d'approximation que ceux utilisés classiquement et qui ont fait leurs preuves dans la EFIE. L'espace d'approximation de Raviart Thomas [2] de plus bas degrés est l'un d'eux. Il est construit de la manière suivante. On considère la trace sur Σ du maillage volumique pour B^{ext} , c'est à dire celui correspondant au maillage dit grossier. On obtient, sur chacune des 6 faces un maillage régulier en rectangles. Sur chaque rectangle, on définit 4 demi fonctions de bases qui sont supportées par ce

rectangle, chacune d'elles étant accrochée à l'une des 4 arêtes du rectangle. L'orientation de la demi-fonction de base est constante et perpendiculaire à l'arête considérée. L'intensité est constante le long de la direction de l'arête et linéaire par rapport à la direction perpendiculaire (fonction dont le graphe est en forme de demi tente). La constante de normalisation est fixée de telle sorte que les quatre flux de chaque fonction de base à travers chacune des arêtes sont égaux à la longueur de l'arête si le flux est pris sur l'arête de la fonction de base et 0 sinon. De cette façon les degrés de liberté ne sont rien d'autre que la moyenne des flux du champ à travers chaque arête. On a donc

$$J^{2h}(x) = \sum_c \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \mathbf{1}_c(x) \vec{j}_{c,p}^{2h}(x) \quad (2.8)$$

où $j_{p,c}^{2h}(x)$ est une fonction vectorielle de direction constante et polynomiale de degré inférieur à 1 tandis que $\mathbf{1}_c$ est la fonction indicatrice du carreau c du maillage grossier. Si l'on calcule la divergence de J^{2h} , on trouve

$$\begin{cases} \operatorname{div} J^{2h}(x) = \sum_C \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \left(\operatorname{div}(j_{c,p}^{2h}) \mathbf{1}_c(x) + \vec{\nabla} \mathbf{1}_c(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \right) \\ = \sum_c \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \left(\operatorname{div}(j_{c,p}^{2h}) \mathbf{1}_c(x) + \nu_{\partial c}(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \delta_{\partial c}(x) \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

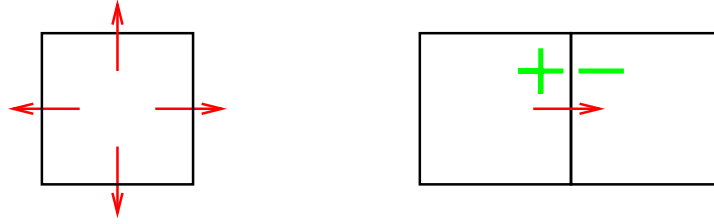
$$\nu_{\partial c}(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \delta_{\partial c}(x) = \delta_{A_{c,p}}(x) \quad (2.10)$$

où $A_{c,p}$ est l'arête du carreau c à laquelle est accrochée la p ème fonction de base. Mais, comme la masse de Dirac sur un segment n'est pas un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, on doit obligatoirement s'assurer que pour toute arête a du maillage

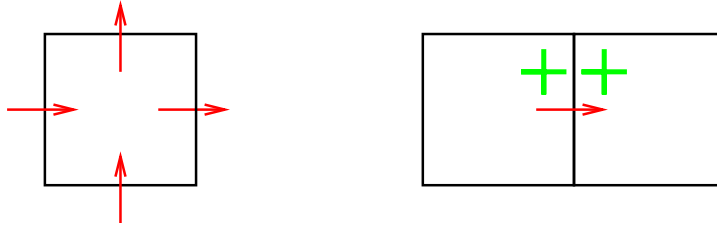
$$\forall a, \quad \sum_{c,p, / A_{c,p}=a} J_{c,p} = 0. \quad (2.11)$$

C'est la loi de Kirtchoff, il doit y avoir conservation du courant. Pour le maillage ici considéré, chaque arête appartient à exactement deux rectangles (non nécessairement sur la même face, néanmoins). On définira donc les fonctions de bases comme la concaténation de deux demi fonction de bases, l'une affectée d'un signe + l'autre d'un signe -, et cela de façon complètement arbitraire. Cette manière de faire permet de s'assurer automatiquement de (2.11).

L'approche classique consiste à choisir une orientation par carreau des demi-fonctions de base, puis de faire un choix arbitraire du signe des demi-fonctions de base lors de leur concaténation pour créer la fonction de base sur l'arête (cf. figure 2.1)

FIG. 2.1 – *choix classique pour l'orientation des fonctions de base*

D'un point de vue pratique, nous avons choisi de ne pas prendre l'orientation classique pour chaque carreau mais de prendre l'orientation suivant les indices croissants dans chaque direction. L'avantage d'opérer de la sorte réside dans la possibilité d'assurer la loi de Kirtchoff sur presque toutes les arêtes en affectant un signe $+$ au deux demi-fonctions de base. Presque, car on doit tout de même affecter un signe $-$ à l'une des deux fonctions de base pour certains degrés de liberté accrochés à 6 des 12 arêtes du cube. Notre choix, arbitraire, est décrit dans le tableau 3.1

FIG. 2.2 – *notre choix d'orientation*

2.2 Semi-discrétisation en espace

Une fois les espaces d'approximation définis, il est très facile de construire le problème semi-discrétisé en espace: il suffit de remplacer les espaces fonctionnels continus par leurs équivalents discrets dans la formulation variationnelle. Comme nous l'avons dit, ce n'est pas directement cette formulation que nous utiliserons mais plutôt une approximation de celle-ci en calculant les intégrales de façon approchée à l'aide de formules de quadrature sur chaque cube du maillage. On écrira si $\Theta = B$

ou B^{ext}

$$\int_{\Theta} \varphi(x) dx \approx \oint_{\Theta} \varphi(x) dx = \sum_{C \subset \Theta} \text{mesure}(C) \frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 \varphi(S_s^C) \quad (2.12)$$

où les S_s^C , $s = 1, \dots, 8$ sont les huit sommets du cube C . On procédera de même pour les intégrales de surface

$$\int_{\Sigma} \varphi(x) dx \approx \oint_{\Sigma} \varphi(x) dx = \sum_{C \subset \Sigma} \text{mesure}(C) \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \varphi(S_s^C) \quad (2.13)$$

où cette fois-ci les C désignent des rectangles situés à la surface de Σ et dont S_s^C , $s = 1, \dots, 4$ sont les quatre sommets. Il est bien connu que de telles formules de quadrature sont précises à l'ordre 2. Ainsi, on ne perd pas de précision à les utiliser et, comme on le verra par la suite, le problème discrétisé en temps présente alors l'immense avantage d'être explicite.

Le problème approché s'écrit:

Trouver $E_f^h(t), H_f^h(t), E_g^{2h}(t), H_g^{2h}(t), J^{2h}(t)$ dans $\mathcal{E}_h \times \mathcal{H}_h \times \mathcal{E}_{2h} \times \mathcal{H}_{2h} \times \mathcal{M}_{2h}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f^h \in \mathcal{E}_h, \\ \frac{d}{dt} \epsilon_0 \oint_B E_f^h(x, t) \cdot \psi_f^h(x) dx - \oint_B \text{rot} \psi_f^h(x) \cdot H_f^h(x, t) dx \\ = \oint_{\Sigma} J^{2h}(x, t) \cdot \psi_f^h(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_f^h \in \mathcal{H}_h, \\ \frac{d}{dt} \mu_0 \oint_B H_f^h(x, t) \cdot \phi_f^h(x) dx + \oint_B \text{rot} E_f^h(x, t) \cdot \phi_f^h(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_g^{2h} \in \mathcal{E}_{2h}, \\ \frac{d}{dt} \epsilon_0 \oint_{B^{ext}} E_g^{2h}(x, t) \cdot \psi_g^{2h}(x) dx - \oint_{B^{ext}} \text{rot} \psi_g^{2h}(x) \cdot H_g^{2h}(x, t) dx \\ = - \oint_{\Sigma} J^{2h}(x, t) \cdot \psi_g^{2h}(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_g^{2h} \in \mathcal{H}_{2h}, \\ \frac{d}{dt} \mu_0 \oint_{B^{ext}} H_g^{2h}(x, t) \cdot \phi_g^{2h}(x) dx + \oint_{B^{ext}} \text{rot} E_g^{2h}(x, t) \cdot \phi_g^{2h}(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall J^{2h} \in \mathcal{M}_{2h}, \int_{\Sigma} E_f^h(x, t) \cdot J^{2h}(x) d\sigma(x) = \\ \int_{\Sigma} E_g^{2h}(x, t) \cdot J^{2h}(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

En regroupant pour chaque temps t les valeurs des fonctions inconnues en chaque degré de liberté dans un même vecteur, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 M_E^h \frac{dE_f^h}{dt} + R^h H_f^h - (B_f^{2h})^* J^{2h} = 0 \\ \mu_0 M_H^h \frac{dH_f^h}{dt} - (R^h)^* E_f^h = 0 \\ \epsilon_0 M_E^{2h} \frac{dE_g^{2h}}{dt} + R^{2h} H_g^{2h} + (B_g^{2h})^* J^{2h} = 0 \\ \mu_0 M_H^{2h} \frac{dH_g^{2h}}{dt} - (R^h)^* E_g^{2h} = 0 \\ (B_g^{2h}) E_g^{2h} - (B_f^{2h}) E_f^h = 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où on peut reconnaître, les matrices de masse de type $M_{qqchose}$ qui correspondent au produit scalaire L^2 usuel. Les matrices de rigidité R^h et R^{2h} ainsi que leur transposée (notée avec le symbole $*$) sont obtenues par calcul avec quadrature de l'intégrale du produit scalaire entre le rotationnel d'une fonction de base de type \mathcal{E} avec une fonction de base de type \mathcal{H} . Enfin, la matrice de couplage $(-B_f^{2h}, B_g^{2h})$ et son adjoint correspondent à la forme bilinéaire liant courant et trace tangentielle du champ électrique.

On notera que dans le système différentiel (2.19), $J^{2h}(t)$ est implicitement donné et n'apparaît pas à première vue facilement accessible. Pourtant, si l'on prend l'image de la première équation de ce système par $(M_E^h)^{-1}$ puis de la troisième par $(M_E^{2h})^{-1}$ et que l'on fait la différence, on obtient après application de la contrainte (une fois dérivée en temps) : $(B_g^{2h}) \frac{dE_g^{2h}}{dt} - (B_f^{2h}) \frac{dE_f^h}{dt} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((B_g^{2h}) (M_E^{2h})^{-1} (B_g^{2h})^* + (B_f^{2h}) (M_E^h)^{-1} (B_f^{2h})^* \right) J^{2h}(t) \\ = (B_f^{2h}) (M_E^h)^{-1} R^h H_f^h(t) - (B_g^{2h}) (M_E^{2h})^{-1} R^{2h} H_g^h(t) \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Cette équation explicite la relation entre $J^{2h}(t)$ et $H^{2h}(t)$. Elle montre que $J^{2h}(t)$ s'obtient en inversant un système linéaire symétrique positif. Ce système est évidem-

ment inversible dès que

$$\text{Ker} \left(B_f^{2h} \right)^* \cap \text{Ker} \left(B_g^{2h} \right)^* = \{0\} \quad (2.21)$$

Nous montrerons plus loin que si $\text{Ker} \left(B_g^{2h} \right)^*$ n'est pas toujours réduit à 0, le noyau $\text{Ker} \left(B_f^{2h} \right)^*$ l'est toujours et le problème est alors bien posé. La raison intuitive de ce résultat est que la trace du champ électrique raffiné sur la frontière possède beaucoup plus de degrés de liberté que le courant qui lui s'appuie sur la trace de la grille grossière. En d'autres termes, la condition (2.21) est assurée dès que le paramètre de Lagrange est sous-maillé en regard des variables primales. C'est une condition classique que l'on retrouve pour tous les problèmes de points-selles.

2.3 Discrétisation en temps

On choisit Δt un pas de temps et on discrétise les champs de la façon suivante

$$\begin{aligned} H_f^h & \text{ aux pas de temps } (n + \frac{1}{2})\Delta t & \approx & H_f^{n+\frac{1}{2}} \\ E_f^h & \text{ aux pas de temps } n\Delta t & \approx & E_f^n \\ H_g^{2h} & \text{ aux pas de temps } (2n + 1)\Delta t & \approx & H_g^{2n+1} \\ E_g^{2h} & \text{ aux pas de temps } 2n\Delta t & \approx & E_g^{2n} \\ J^{2h} & \text{ aux pas de temps } (2n + 1)\Delta t & \approx & J^{2n+1} \end{aligned}$$

Le schéma en temps est basé sur une méthode de type saute-moutons. Pour le cube maillé finement, on écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f^h \in \mathcal{E}_h, \\ \epsilon_0 \int_B \frac{E_f^{n+1} - E_f^n}{\Delta t} \cdot \psi_f^h(x) dx - \int_B \text{rot} \psi_f^h(x) \cdot H_f^{n+\frac{1}{2}}(x) dx \\ = \int_{\Sigma} J^{2[\frac{n}{2}]+1}(x) \cdot \psi_f^h(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_f^h \in \mathcal{H}_h, \\ \mu_0 \int_B \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}(x) \cdot \phi_f^h(x) dx + \int_B \text{rot} E_f^n(x) \cdot \phi_f^h(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

tandis que pour l'extérieur du cube maillé grossièrement

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_g^{2h} \in \mathcal{E}_{2h}, \\ \epsilon_0 \int_{B^{ext}} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t}(x) \cdot \psi_g^{2h}(x) dx - \int_{B^{ext}} \text{rot} \psi_g^{2h}(x) \cdot H_g^{2n+1}(x) dx \\ = - \int_{\Sigma} J^{2n+1}(x) \cdot \psi_g^{2h}(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_g^{2h} \in \mathcal{H}_{2h}, \\ \mu_0 \int_{B^{ext}} \frac{H_g^{2n+1} - H_g^{2n-1}}{2\Delta t}(x) \cdot \phi_g^{2h}(x) dx + \int_{B^{ext}} \text{rot} E_g^{2n}(x) \cdot \phi_g^{2h}(x) dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Reste la contrainte que l'on choisit d'écrire de façon centrée

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall J'^{2h} \in \mathcal{M}_{2h}, \quad \int_{\Sigma} \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4}(x) \cdot J'^{2h}(x) d\sigma(x) = \\ \int_{\Sigma} \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}(x) \cdot J'^{2h}(x) d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

On peut ré-interpréter ce système variationnel en regroupant les valeurs des fonctions inconnues en chaque degré de liberté dans un même vecteur, on obtient une discrétisation par différences finies du système d'équations différentielles (2.19)

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 M_E^h \frac{E_f^{n+1} - E_f^n}{\Delta t} + R^h H_f^{n+\frac{1}{2}} - (B_f^{2h})^* J^{2[\frac{n}{2}]+1} = 0 \\ \mu_0 M_H^h \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (R^h)^* E_f^n = 0 \\ \epsilon_0 M_E^{2h} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} + R^{2h} H_g^{2n+1} + (B_g^{2h})^* J^{2n+1} = 0 \\ \mu_0 M_H^{2h} \frac{H_g^{2n+1} - H_g^{2n-1}}{2\Delta t} - (R^h)^* E_g^{2n} = 0 \\ (B_g^{2h}) \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} - (B_f^{2h}) \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} = 0 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Comme pour le problème semi-discrétisé, il n'est pas très clair a priori que le courant soit univoquement déterminé par ce système. Il nous faut donc travailler un peu pour expliciter le système linéaire qui donne le courant.

On commence par prendre la différence entre les équations (2.22) prises aux deux instants $2n + 1$ et $2n$. On remarque que les termes proportionnels aux courants qui interviennent dans ces deux équations sont identiques et donc disparaissent lors de la différence. On obtient, après multiplication par $\frac{\mu_0}{\Delta t}$

$$\mu_0 \epsilon_0 M_E^h \frac{E_f^{2n+2} - 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{\Delta t^2} + R^h \mu_0 \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0. \quad (2.28)$$

On en déduit ($c_0^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$)

$$M_E^h \frac{E_f^{2n+2} - 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{c_0^2 \Delta t^2} + R^h (M_H^h)^{-1} (R^h)^* E_f^{2n+1} = 0, \quad (2.29)$$

et, finalement,

$$\frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} = \left(Id - \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} (M_E^h)^{-1} R^h (M_H^h)^{-1} (R^h)^* \right) E_f^{2n+1}. \quad (2.30)$$

Maintenant, on a

$$E_f^{2n+1} = T_f^{2n+1} + \frac{1}{\epsilon_0} (M_E^h)^{-1} (B_f^{2h})^* J^{2n+1} \quad (2.31)$$

où T_f^{2n+1} est donné explicitement en fonction de quantités indépendantes de J^{2n+1} , à savoir E_f^{2n} , H_f^{2n+1} , ce dernier étant lié explicitement à E_f^{2n} , H_f^{2n-1} .

On procède de même pour E_g^{2n+2} , on trouve

$$\frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} = T_g^{2n+1} - \frac{1}{\epsilon_0} (M_E^{2h})^{-1} (B_g^{2h})^* J^{2n+1} \quad (2.32)$$

où, là encore, T_g^{2n+1} est fonction de quantités indépendantes de J^{2n+1} .

Finalement, l'équation de contrainte fournit la relation recherchée, à savoir

$$\begin{cases} \left((B_g^{2h}) (M_E^{2h})^{-1} (B_g^{2h})^* + (B_f^{2h}) C^h (B_f^{2h})^* \right) J^{2n+1}(t) \\ = \epsilon_0 \left((B_f^{2h}) T_f^{2n+1} - (B_g^{2h}) T_g^{2n+1} \right) \end{cases} \quad (2.33)$$

avec

$$C^h = \left((M_E^h)^{-1} - \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} (M_E^h)^{-1} R^h (M_H^h)^{-1} (R^h)^* (M_E^h)^{-1} \right) \quad (2.34)$$

La condition d'inversibilité du système est donc assurée dès que

$$\begin{cases} Ker(B_f^{2h})^* \cap Ker(B_g^{2h})^* = \{0\} \\ C_f^h \geq 0 \Leftrightarrow \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} R^h (M_H^h)^{-1} (R^h)^* \leq M_E^h \end{cases} \quad (2.35)$$

La première condition était déjà suffisante pour assurer le caractère bien posé du problème semi-discrétisé. La discrétisation en temps requiert de plus une condition supplémentaire qui porte sur le pas de temps qui ne doit pas être trop grand. On va voir dans ce qui suit que la valeur maximale du pas de temps utilisable est intimement liée à celle qui assure la stabilité des deux schémas découplés, l'une dans la grille fine, l'autre dans la grille grossière, le courant étant une donnée du problème.

2.4 Estimations d'énergie. Stabilité

La technique énergétique est une méthode qui permet d'obtenir des estimations a priori sur toute solution du schéma numérique. Cette estimation revient à la conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique. A partir de cette loi de conservation, on obtient sous certaines conditions (condition C.F.L.) une condition suffisante de stabilité du schéma.

Plaçons nous tout d'abord dans l'extérieur de B (domaine maillé grossièrement), on prend $\psi_g^{2h} = \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}$ dans (2.24) on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_{\Omega_g} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} \cdot \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} - \int_{\Omega_{xg}} rot \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \cdot H_g^{2n+1} \\ = - \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

On fait ensuite la demi-somme entre les deux équations variationnelles de type (2.25) correspondant à deux instants consécutifs. On a

$$\begin{cases} \forall \phi_g^{2h} \in \mathcal{H}_{2h}, \\ \mu_0 \int_{B^{ext}} \frac{H_g^{2n+3} - H_g^{2n-1}}{4\Delta t}(x) \cdot \phi_g^{2h}(x) dx + \int_{B^{ext}} rot \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \cdot \phi_g^{2h}(x) dx = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

d'où, en choisissant $\phi_g^{2h} = H_g^{2n+1}$

$$\frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_g} \frac{H_g^{2n+3} - H_g^{2n-1}}{2\Delta t} \cdot H_g^{2n+1} + \int_{\Omega_{xg}} rot \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \cdot H_g^{2n+1} = 0 \quad (2.38)$$

En regroupant les deux équations obtenues, les intégrales en $rot E.H$ disparaissent et il reste

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_g} (E_g^{2n+2})^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_g} (E_g^{2n})^2 \\ + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_g} H_g^{2n+3} \cdot H_g^{2n+1} - \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_g} H_g^{2n+1} \cdot H_g^{2n-1} \\ = -2\Delta t \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E^{2n+2} + E^{2n}}{2} d\sigma \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Posons

$$\mathcal{E}_g^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_g} |E_g^{2n}|^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_g} H_g^{2n+1} \cdot H_g^{2n-1}, \quad (2.40)$$

on obtient la première équation

$$\frac{\mathcal{E}_g^{2n+2} - \mathcal{E}_g^{2n}}{2\Delta t} = - \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E^{2n+2} + E^{2n}}{2} d\sigma \quad (2.41)$$

On peut bien sûr faire le même calcul pour la boîte raffinée. Si

$$\mathcal{E}_f^n = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_f} (E_f^n)^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} H_f^{n+\frac{1}{2}} H_f^{n-\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

on a

$$\frac{\mathcal{E}_f^{n+1} - \mathcal{E}_f^n}{\Delta t} = + \int_{\Sigma} J^{2[\frac{n}{2}]+1} \cdot \frac{E_f^{n+1} + E_f^n}{2} d\sigma \quad (2.43)$$

(le seul changement provient du signe $-$ devant J et le $2\Delta t$ qui est divisé par 2).

Si l'on écrit maintenant (2.42) aux deux instants $2n$ et $2n+1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_f^{2n+1} - \mathcal{E}_f^{2n}}{\Delta t} &= + \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{2} d\sigma \\ \frac{\mathcal{E}_f^{2n+2} - \mathcal{E}_f^{2n+1}}{\Delta t} &= + \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E_f^{2n+2} + E_f^{2n+1}}{2} d\sigma \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'où en effectuant la demi-somme

$$\frac{\mathcal{E}_f^{2n+2} - \mathcal{E}_f^{2n}}{2\Delta t} = + \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} d\sigma \quad (2.45)$$

C'est la seconde équation. Définissons l'énergie totale à l'instant $2n$ comme

$$\mathcal{E}_T^{2n} = \mathcal{E}_f^{2n} + \mathcal{E}_g^{2n} \quad (2.46)$$

En regroupant les deux équations obtenues on a

$$\frac{\mathcal{E}_T^{2n+2} - \mathcal{E}_T^{2n}}{2\Delta t} = \int_{\Sigma} J^{2n+1} \cdot \left[\frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} - \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right] d\sigma \quad (2.47)$$

et le second terme est nul d'après (2.26) avec $J'_{2h} = J^{2n+1} \in \mathcal{M}_{2h}$. D'où la loi de conservation

$$\mathcal{E}_T^{2n+2} = \mathcal{E}_T^{2n} \quad (2.48)$$

Le schéma en temps retenu pour la contrainte, c'est à dire (2.26), se révèle ainsi le schéma qui donne précisément la conservation de l'énergie discrète. Cela justifie, a posteriori, notre choix.

À partir de la conservation de l'énergie discrète, il est plus ou moins facile de trouver une condition suffisante de stabilité. La démarche est toujours un peu la même. On utilise l'identité remarquable

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} H_f^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_f^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} \left| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 \\ - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\Delta t^2}{4\epsilon_0\mu_0} \int_{\Omega_f} \left| \mu_0 \left(\frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) \right|^2 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Le but de ce qui suit est de contrôler le terme négatif par la partie en E de l'énergie. En appliquant successivement l'égalité variationnelle (2.23) à $\phi_f^h = \frac{\mu_0}{\Delta t}(H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}})$ puis $\phi_f^h = \text{rot}(E_f^n) \in \mathcal{H}_h$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} H_f^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_f^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} \left| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 \\ - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \int_{\Omega_f} |\text{rot} E_f^n|^2 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Maintenant, on a

$$\int_{\Omega_f} |\text{rot} E_f^n|^2 = \sum_{C \subset \Omega_f} \frac{\text{measure}(C)}{8} \sum_{s=1}^8 |\text{rot} E_f^n|_C^2 (S_s^C) \quad (2.51)$$

Pour chaque cube du maillage, $\sum_s |rot E_f^n|_C^2 (S_s^C)$ ne fait intervenir que douze degrés de liberté (qui ne sont autres que ceux rattachés aux douze arêtes du cube). Cette fonction peut donc s'interpréter comme une forme quadratique positive dans un espace à 12 dimensions. La matrice associée à cette forme quadratique est diagonalisable et a une valeur propre maximale. On a calculé cette valeur propre en annexe. On montre que

$$\frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 |rot E_f^n|_C^2 (S_s^C) \leq 4 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \left(\frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 |E_f^n|_C^2 (S_s^C) \right) \quad (2.52)$$

On en déduit la majoration

$$\int_{\Omega_f} |rot E_f^n|^2 \leq 4 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \int_{\Omega_f} |E_f^n|^2 \quad (2.53)$$

et, en particulier

$$\begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} H_f^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_f^{n-\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} \left| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 \\ -c_0^2 \Delta t^2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_f} |E_f^n|^2 \end{cases} \quad (2.54)$$

D'où l'estimation

$$(1 - \alpha^2) \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_f} |E_f^{2n}|^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_f} \left| \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 \leq E \frac{0}{T} \quad (2.55)$$

avec

$$\alpha = c_0 \Delta t \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}} \quad (2.56)$$

On peut procéder de la même façon pour l'énergie dans la grille grossière et on obtient

$$(1 - \alpha^2) \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_g} |E_g^{2n}|^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_{\Omega_g} \left| \frac{H_g^{2n+1} + H_g^{2n-1}}{2} \right|^2 \leq E \frac{0}{T}. \quad (2.57)$$

Ces deux estimations fournissent un contrôle de la norme L^2 des solutions du schéma en fonction de la norme L^2 des conditions initiales (l'énergie à l'instant 0) dès que α

est plus petit que 1. On a donc stabilité du schéma dès que Δt est assez petit pour satisfaire la condition, dite condition CFL, (2.56).

Il est bien connu que la condition $\alpha < 1$ est la condition classique pour assurer la stabilité du schéma de Yee. Le fait d'avoir raffiné à la fois en espace et en temps implique que chacun des deux schémas, pris indépendamment de tout couplage entre eux, est stable sous cette même condition. Ce que nos calculs montrent ici c'est que le couplage des grilles n'a pas d'incidence sur la condition de stabilité commune aux deux schémas, et cela quelle que soit la taille de la boîte raffinée. C'est un résultat fort qui assure une grande maîtrise des phénomènes d'instabilités.

Les calculs qui précèdent permettent de s'assurer de la stabilité du schéma sous la CFL usuelle. Toutefois, si on regarde un peu attentivement les calculs précédents, on s'aperçoit qu'une hypothèse a été faite implicitement, à savoir l'existence du courant J^{2n+1} pour tout n . Or, nous avons vu précédemment que l'existence du courant n'était assurée que si la matrice C^h , dont l'expression est donnée en (2.34), a le bon goût d'être définie positive. Il nous faut donc en toute rigueur vérifier que si la CFL usuelle est vérifiée alors cette matrice C^h est bien définie positive. Pour cela, il suffit de changer légèrement le point de vue que nous avons adopté pour faire les calculs d'énergie. Ces calculs sont basés sur l'écriture variationnelle des équations. On peut de la même façon écrire les choses sous forme matricielle en faisant tous les calculs à partir de la formulation (2.27). L'énergie s'écrit

$$\begin{cases} \mathcal{E}_g^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} (M_E^{2h} E_g^{2n}, E_g^{2n}) + \frac{\mu_0}{2} (M_H^{2h} H_g^{2n+1}, H_g^{2n-1}), \\ \mathcal{E}_f^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} (M_E^h E_f^{2n}, E_f^{2n}) + \frac{\mu_0}{2} (M_H^h H_f^{2n+\frac{1}{2}}, H_f^{2n-\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad (2.58)$$

Et l'équivalent de (2.50) devient

$$\begin{cases} \frac{\mu_0}{2} (M_H^h H_f^{2n+\frac{1}{2}}, H_f^{2n-\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_0}{2} \left(M_H^h \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2}, \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \left((M_H^h)^{-1} (R_h)^* E_f^{2n}, (R_h)^* E_f^{2n} \right) \end{cases} \quad (2.59)$$

tandis que (2.53) s'écrit

$$R_h (M_H^h)^{-1} (R_h)^* \leq 4 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) M_E^h \quad (2.60)$$

Cette inégalité permet d'assurer que la CFL usuelle entraîne l'inégalité écrite en (2.35) et par voie de conséquence l'existence du courant J^{2n+1} pour tout n . Évidemment, pour être tout à fait complet, il faudrait travailler encore un peu pour avoir des estimations du courant (afin d'être sûr que J^{2n+1} n'explose pas avec n et n'entache pas le résultat du calcul). Nous ne le ferons pas ici.

Chapitre 3

Assemblage du schéma numérique

3.1 Construction des matrices

L'avantage de la discrétisation du champ électromagnétique sur un maillage régulier est de pouvoir utiliser la technique de condensation de masse. Comme nous l'avons dit, celle-ci a consisté à user d'une formule de quadrature, exacte pour toute fonction linéaire, dont les points d'appuis coïncident avec les degrés de liberté pour évaluer les intégrales intervenant dans les expressions des coefficients matriciels. On montre que cette manière d'approcher les intégrales ne fait pas perdre de précision (le schéma reste d'ordre 2).

3.1.1 Matrice de masse

Cette méthode permet d'obtenir des matrices de masse diagonales comme le montre les expressions suivantes

$$M_E^h = h_x h_y h_z \frac{Nc^a}{4}; \quad M_H^h = h_x h_y h_z \frac{Nc^f}{2} \quad (3.1)$$

où les matrices diagonales Nc^a et Nc^f ont pour éléments diagonaux le nombre de cubes appartenant au domaine B et qui contiennent l'arête (respectivement la face) considérée.

Pour être plus précis, si l'on considère par exemple une ligne de M_E^h correspondant à une arête $i + \frac{1}{2}, j, k$ strictement interne au domaine B (on évite les bords

pour simplifier), utilisant les expressions (2.3) on trouve

$$\begin{aligned}
 (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j',k'}^h) &= \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{j,j'}^y \Xi_{k,k'}^z \\
 (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'}^h) &= 0 \\
 (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i',j',k'+\frac{1}{2}}^h) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{m,m'}^s &= \int \psi_{m+\frac{1}{2}}^{h_s}(s) \psi_{m'+\frac{1}{2}}^{h_s}(s) ds = h_s \delta_m^{m'} \\
 \Xi_{m,m'}^s &= \int \phi_m^{h_s}(s) \phi_{m'}^{h_s}(s) ds = \sum_k \int_{kh_s}^{(k+1)h_s} \phi_m^{h_s}(s) \phi_{m'}^{h_s}(s) ds
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\delta_m^{m'}$ vaut 1 si $m = m'$ et 0 sinon.

Le terme $\Xi_{m,m'}^s$ est toujours nul sauf si $|m' - m| \leq 1$ auquel cas

$$\Xi_{m,m}^s = \frac{2}{3} h_s, \quad \Xi_{m,m\pm 1}^s = \frac{1}{6} h_s. \tag{3.4}$$

Si l'on en reste là, la matrice de masse M_E^h n'est pas diagonale puisqu'elle couple les noeuds du plan ih_x aux noeuds des plans voisins immédiats. Mais si l'on substitue au calcul exact de l'intégrale la formule de quadrature

$$\int_{kh_s}^{(k+1)h_s} f(s) ds \rightarrow \frac{h_s}{2} (f((k+1)h_s) + f(kh_s)) \tag{3.5}$$

on trouve

$$\Xi_{m,m'}^s = h_s \delta_m^{m'}, \text{ et } (M_E \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j',k'}^h) = h_x h_y h_z \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \tag{3.6}$$

En procédant de même avec les autres fonctions de base, on montre que M_E^h et M_H^h deviennent des matrices diagonales grâce à la condensation.

3.1.2 Matrice du rotationnel discret

De la même façon, la matrice R^h va devenir beaucoup plus creuse. Par exemple, partant des expressions (2.3), on a pour une arête strictement interne au domaine de calcul,

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h &= \frac{1}{h_z} \psi_{i+\frac{1}{2}}^x(x) \phi_j^y(y) (\psi_{k-\frac{1}{2}}^z(z) - \psi_{k+\frac{1}{2}}^z(z)) \hat{y} \\
 &\quad - \frac{1}{h_y} \psi_{i+\frac{1}{2}}^x(x) \phi_k^z(z) (\psi_{j-\frac{1}{2}}^y(y) - \psi_{j+\frac{1}{2}}^y(y)) \hat{z}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(la dérivée d'une fonction chapeau est la différence de deux fonctions indicatrices).
D'où les expressions

$$\begin{aligned}
\left((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\psi}_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'+\frac{1}{2}}^h \right) &= 0 \\
\left((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\psi}_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'+\frac{1}{2}}^h \right) &= -\frac{1}{h_z} \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{j,j'}^y (\Lambda_{k+1,k'}^z - \Lambda_{k,k'}^z) \\
\left((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'+\frac{1}{2}}^h \right) &= \frac{1}{h_y} \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{k,k'}^z (\Lambda_{j+1,j'}^y - \Lambda_{j,j'}^y)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Là encore la condensation est utilisée, ce qui permet d'écrire $\Xi_{m,m'}^s = \Lambda_{m,m'}^s = h_s \delta_m^{m'}$.
Finalement l'arête $i+\frac{1}{2}, j, k$ n'est couplée par A_h qu'aux quatre faces qui la contient.
Après tous calculs on trouve si E est décomposé suivant (2.6)

$$\begin{aligned}
\left((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h \right) &= h_x h_z (E_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^z - E_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z) \\
&\quad - h_x h_y (E_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^y - E_{i,j+\frac{1}{2},k}^y)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\left((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h \right) &= h_x h_y (E_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^x - E_{i+\frac{1}{2},j,k}^x) \\
&\quad - h_y h_z (E_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^z - E_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\left((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h \right) &= h_y h_z (E_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^y - E_{i,j+\frac{1}{2},k}^y) \\
&\quad - h_x h_z (E_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^x - E_{i+\frac{1}{2},j,k}^x)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On reconnaît, au facteur $h_x h_y h_z$ près, le rotationnel discret qui est utilisé dans le schéma de Yee classique (cf [6]): le schéma variationnel avec condensation de masse sur grille régulière s'avère coïncider avec ce schéma aux différences finies. Cette remarque est importante car elle permet de coupler des techniques type différences finies avec d'autres adaptées aux éléments finis.

Tout ceci est jusqu'ici très classique. Le point un peu nouveau vient des degrés de libertés situés à la frontière de chacun des deux domaines. Les calculs sont un peu fastidieux quoique élémentaires. Le résultat trouvé est une modification des expressions (3.9)-(3.11) pour les fonctions de base $\vec{\psi}_{\dots}^h$ de \mathcal{H}^h localisées sur une face frontière. Cette modification consiste à supprimer les degrés de liberté (les E_{\dots}) attachés à des arêtes localisées hors du domaine de calcul considéré puis à ajouter un facteur $\frac{1}{2}$ devant les degrés de libertés attaché à des arêtes localisées sur la face frontière.

3.1.3 Matrice de couplage

La technique de condensation de masse est également utilisée pour le calcul des intégrales de surface définies sur Σ . Ces calculs nous donnent les matrices de couplage B_g^{2h} et B_f^{2h} qui raccordent l'intérieur et l'extérieur de la boîte en liant le courant aux champs électriques de chaque grille. Il s'agit de calculer

$$\begin{cases} (B_g^{2h})_{a_g,a} &= \int_{\Sigma} \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{J}_a^{2h} d\sigma \\ (B_f^{2h})_{a_f,a} &= \int_{\Sigma} \vec{\phi}_{a_f}^h \cdot \vec{J}_a^{2h} d\sigma \end{cases} \quad (3.12)$$

où a, a_g sont des arêtes du maillage grossier (a étant localisée sur la frontière de la boîte), a_f une arête du maillage fin.

Dans ces expressions, on a noté \vec{J}_a^{2h} la fonction de base de \mathcal{M}_{2h} associée à l'arête a (fonction de base pour le courant) et $\phi_{a_g}^{2h}, \phi_{a_f}^h$ les fonctions de base de $\mathcal{E}_{2h}, \mathcal{E}_h$ associées aux arêtes a_g et a_f . D'après ce qui précède, la fonction de base J_a^{2h} est la somme (à un signe près) de deux demi-fonctions de base. Chacune de ces deux demi-fonctions de base est associée à l'un des deux carreaux de Σ ayant a comme arête commune. Notons c_a^+ et c_a^- les deux carreaux, $\epsilon_a^+, \epsilon_a^- (= \pm 1)$ les signes et $p_a^\pm (= 1, 2, 3 \text{ ou } 4)$ l'indice dans la numérotation locale liée à c^\pm de l'arête coïncidant avec a ($A_{c^\pm, p_a^\pm} = a$). On a

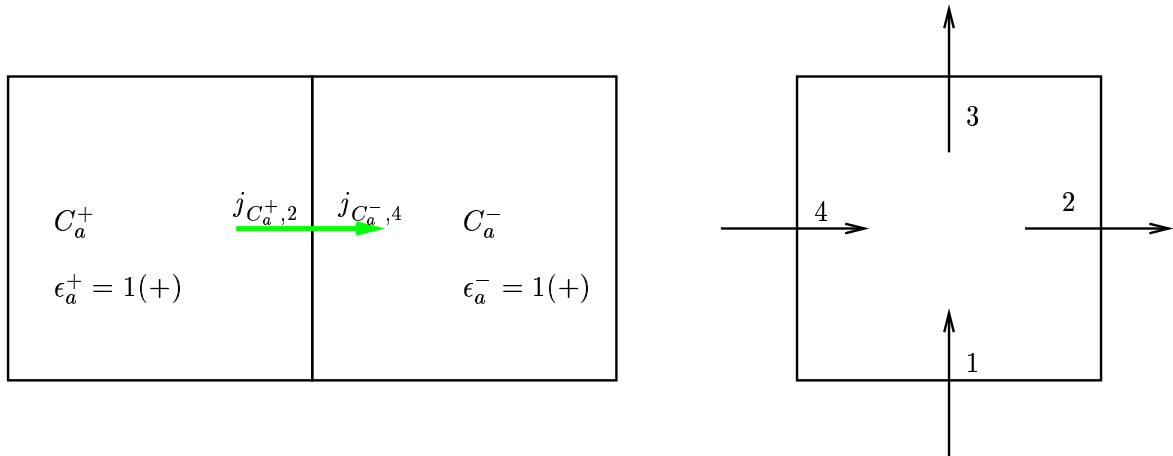


FIG. 3.1 – schéma des fonctions de base sur un carreau

$$\begin{cases} (B_g^{2h})_{a_g,a} &= \epsilon_a^+ \int_{c_a^+} \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^+,p_a^+}^{2h} d\sigma + \epsilon_a^- \int_{c_a^-} \vec{\phi}_b^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^-,p_a^-}^{2h} d\sigma \\ (B_f^{2h})_{a_f,a} &= \epsilon_a^+ \int_{c_a^+} \vec{\phi}_b^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^+,p_a^+}^{2h} d\sigma + \epsilon_a^- \int_{c_a^-} \vec{\phi}_c^h \cdot \vec{j}_{c_a^-,p_a^-}^{2h} d\sigma \end{cases} \quad (3.13)$$

les $\vec{j}_{c,p}^{2h}$ étant les demi-fonctions de base décrites précédemment (fonctions vectorielles supportées par c et dont la direction est constante, normale à l'arête $A_{c,p}$, leur variation est constante le long de la direction parallèle à $A_{c,p}$, et linéaire le long de la direction normale). Chacune des 4 intégrales est très facile à obtenir. Pour la grille grossière on a

$$\int_c \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma = \frac{\text{Aire}(c)}{4} \text{ si } a_g = a_g^1(c,p) \text{ ou } a_g^2(c,p) \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (3.14)$$

où $a_g^1(c,p)$ et $a_g^2(c,p)$ sont les deux arêtes du carreau c perpendiculaires à l'arête numéroté localement p . Pour la grille fine le calcul est un petit peu plus compliqué.

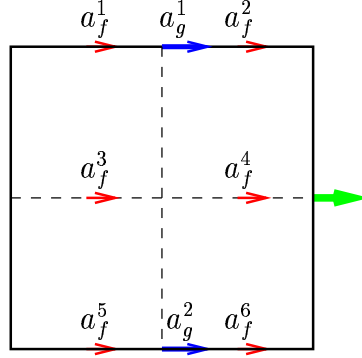


FIG. 3.2 – Positionnement des champs induit par un courant sur une maille

Il y a 6 arêtes de la grille fine qui vont être couplées à chaque demi-fonction de base

$$\begin{aligned}
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{\text{Aire}(c)}{8} \text{si } a_f = a_f^1(c, p) \text{ ou } a_f^5(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{3\text{Aire}(c)}{8} \text{si } a_f = a_f^2(C, p) \text{ ou } a_f^6(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{\text{Aire}(c)}{4} \text{si } a_f = a_f^3(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{3\text{Aire}(c)}{4} \text{si } a_f = a_f^4(c, p)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

les $a_f^\ell(c, p)$ étant les 6 arêtes du maillage fin localisées sur c et qui sont perpendiculaires à l'arête A_p (cf Fig. 3.2).

De ces expressions, on déduit facilement que le noyau de $(B_f^{2h})^*$ est réduit à $\{0\}$. En effet, supposons J tel que $(B_f^{2h})^* J = 0$. Pour tout carreau du maillage surfacique, toutes les composantes du champ électrique $(B_f^{2h})^* J$ doivent être nulles. En particulier cela doit être pour les deux composantes relatives aux deux arêtes centrales notées a_f^3 et a_f^4 sur la figure 3.2. Il est facile de vérifier que ces deux valeurs sont une combinaison linéaire des deux courants accrochés à deux arêtes parallèles de part et d'autre du carreau (l'une des composante du courant est représentée sur la figure, l'autre est son symétrique à gauche). On obtient ainsi un système 2×2 dont la matrice associée est à un facteur $\text{Aire}(C)$ près égale à $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Comme cette matrice est inversible, on déduit que les deux courants doivent être nuls. En réitérant cette analyse sur chaque carreau et pour chacune des deux directions, on déduit que J est nul.

Remarquons que ce résultat n'est pas forcément vrai pour $(B_g^{2h})^*$. Si le nombre de mailles dans chaque direction est paire, on peut obtenir un champ grossier nul à partir d'un courant valant alternativement 1 et -1 sur les arêtes consécutives.

3.2 Les équations du schéma

Une fois les matrices assemblées, on reconnaît, pour les les degrés de liberté localisés strictement à l'intérieur de chaque grille, le schéma classique de Yee. Il y a en plus un petit miracle (qui est dû à la quadrature numérique) qui fait que les équations donnant les champs magnétiques au cours des itérations sont inchangées même pour les champs localisés sur l'interface (pour eux, la matrice de masse est divisée par 2

mais la matrice du rotationnel aussi). On donne ici les équations supplémentaires pour les champs électriques localisés sur l'interface.

La grille fine étant un parallélépipède rectangle, l'interface est composée de 12 arêtes et de 6 faces, qu'on nomme X^- , X^+ , Y^- , Y^+ , Z^- et Z^+ , le symbole A^\pm désignant le vecteur normal sortant $\pm\hat{A}$ à la face considérée. On ne donnera pas ici la liste exhaustive de toutes les équations mais seulement des prototypes à partir desquels il est facile de reconstruire l'ensemble du schéma. Dans la suite, on a omis les indices f et g des champs (pour fin et grossier) lorsque aucune confusion n'était possible, ceci, afin d'alléger les notations.

3.2.1 Schéma pour la grille grossière

On considère dans un premier temps les solutions des équations du schéma en l'absence de courant ($J^{2n+1} \equiv 0$). On note \tilde{E} ces solutions intermédiaires. Puis on calcule les champs électriques en ajoutant la contribution du courant J^{2n+1} à \tilde{E} . Cette opération est licite puisque les équations sont linéaires.

On donne ci-dessous, l'équation actualisant la composante \tilde{E}_x sur la face Y^- (hors arêtes).

$$\epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{-2(H_z)_{(2i+1,2j-1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} + \frac{(H_y)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} - (H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z} \quad (3.16)$$

tandis que pour Y^+

$$\epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(2i+1,2j+1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} + \frac{(H_y)_{(2i+1,2j,2k-1)}^{2n+1} - (H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z} \quad (3.17)$$

D'une façon plus générale, la règle est la suivante: on part du schéma de Yee, on supprime les degrés de liberté situés en dehors de la grille et on double le poids de ceux situés strictement à l'intérieur.

Sur les arêtes, la situation diffère du cas général par deux aspects. D'une part, le terme diagonal de la matrice de masse (M_E^{2h}) est augmenté (des 4 cubes associés à l'arête, 3 sont localisés dans le domaine grossier au lieu de 2). D'autre part, plus

de degrés de libertés interviennent. On donne par exemple l'équation pour l'arête intersection des faces Y^- et Z^-

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} &= \frac{\frac{4}{6}(H_z)_{(2i+1,2j+1,2k)}^{2n+1} - \frac{4}{3}(H_z)_{(2i+1,2j-1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} \\ &+ \frac{\frac{4}{3}(H_y)_{(2i+1,2j,2k-1)}^{2n+1} - \frac{4}{6}(H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La règle pour les autres arêtes est la suivante: on part du schéma de Yee, on affecte d'un poids $\frac{4}{3}$ les degrés de liberté de type H localisé entièrement dans la grille grossière et d'un poids $\frac{4}{6}$ ceux situés sur l'interface.

La seconde étape consiste à modifier le champ \tilde{E} par ajout du courant. Par exemple, pour la composante E_x sur la face Y^- (hors voisinage d'arêtes), on a

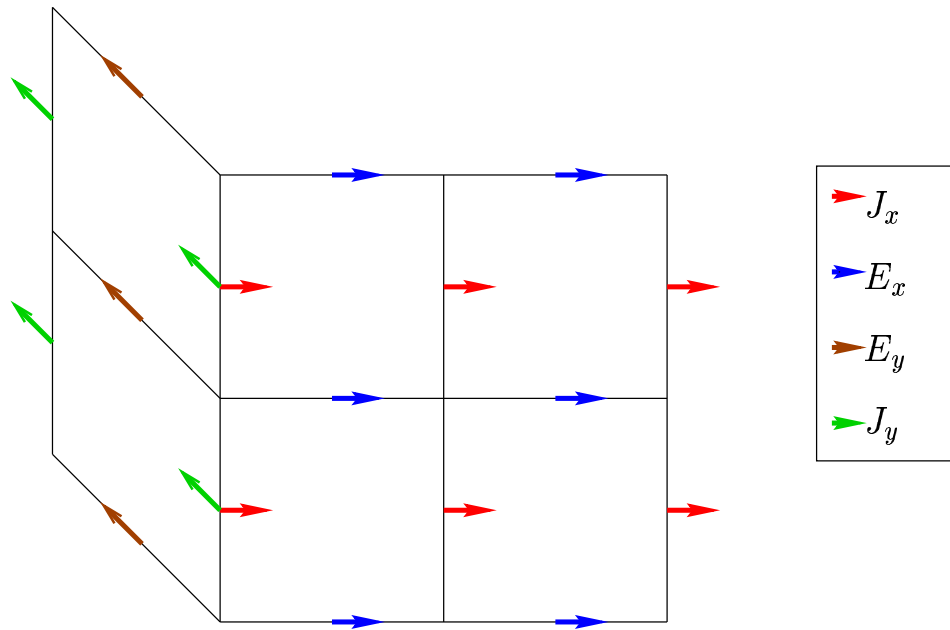
$$\begin{aligned} (E_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} &= (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0 \Delta y} \\ &\left(-(J_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i,2j,2k-1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le coefficient devant les courants provient de la matrice $\frac{2\Delta t}{\epsilon_0} (M_E^{2h})^{-1} (B_g^{2h})^*$ (cf. formule (2.27)).

Lorsque le champ considéré se trouve à une demi-maille d'une arête, deux des courants à ajouter se trouvent alors sur l'arête. Dans ce cas, on doit prendre en compte le signe devant chaque demi-fonction de base pour le courant. Avec les conventions retenues et décrites en (2.1.2), cela revient à un changement de signe dans la formule. Par exemple, lorsque le degré de liberté se trouve sur l'arête intersection des faces Y^- et X^- (voir fig. 3.3), l'orientation est déterminée par la face Y^- , il vient donc un signe $-$ sur la face X^- . Le schéma pour le champ E_x sera alors donné par

$$\begin{aligned} (E_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} &= (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0 \Delta y} \\ &\left((J_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} + (J_x)_{(2i,2j,2k-1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dans le cas où le champ E est situé sur une arête, on doit prendre en compte le fait que la masse est différente. On donne ici à titre d'exemple le schéma pour un champ E_x situé sur l'intersection des faces Y^- et Z^- . On notera également que

FIG. 3.3 – schéma des champs J et E sur une arête

arête	Face déterminante	signe pour le carreau localisé sur la Face déterminante	Signe pour l'autre carreau
$Y^- - X^-$	Y^-	+	-
$Y^- - Z^+$	Y^-	+	+
$X^- - Y^+$	X^-	+	+
$X^- - Z^+$	X^-	+	+
$Z^+ - Y^+$	Z^+	+	-
$Z^+ - X^+$	Z^+	+	-
$X^+ - Z^-$	X^+	+	+
$X^+ - Y^-$	X^+	+	+
$Z^- - Y^-$	Z^-	+	-
$Z^- - X^-$	Z^-	+	-
$Y^+ - X^+$	Y^+	+	-
$Y^+ - Z^-$	Y^+	+	+

TAB. 3.1 – tableau de référence des arêtes

deux degrés de liberté liés au courant sont sur la face Y^- et deux autres sur Z^- .

$$(\mathbf{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} = (\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{3\epsilon_0\Delta y} \left(-(\mathbf{J}_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (\mathbf{J}_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} - (\mathbf{J}_x)_{(2i,2j+1,2k)}^{2n+1} - (\mathbf{J}_x)_{(2i+2,2j+1,2k)}^{2n+1} \right) \quad (3.21)$$

Remarque: De la même façon que précédemment, si un degré de liberté du courant se trouve sur une arête, le signe peut changer suivant le tableau 3.1

3.2.2 Schéma pour la grille fine

Dans la grille fine, on procède de la même façon. On commence par calculer la solution relative à un courant nul ($\tilde{\mathbf{E}}$), puis on ajoute la contribution du courant.

Comme exemple de l'actualisation d'une composante de champ localisée sur une face (hors arête) on donne l'équation pour la composante $\tilde{\mathbf{E}}_x$ de la face Y^- :

$$\epsilon_0 \frac{(\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (3.22)$$

ainsi que celle relative à la face Y^+

$$\epsilon_0 \frac{(\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{-2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (3.23)$$

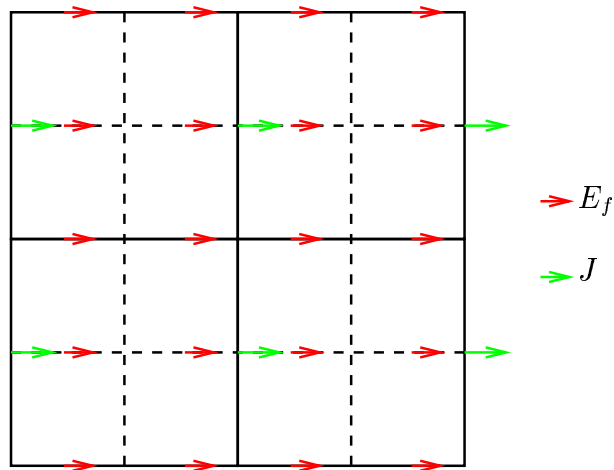
La règle est identique à celle relative à la grille grossière. On écrit le schéma de Yee, on élimine les composantes des champs magnétiques localisées à l'extérieur de la grille fine et on double la contribution des champs magnétiques strictement intérieurs.

Sur les arêtes le schéma est différent, par exemple pour l'arête intersection des faces Y^- et Z^-

$$\epsilon_0 \frac{(\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{\mathbf{E}}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{-2(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (3.24)$$

La règle est la suivante: on élimine les composantes du champ magnétiques inexistantes dans la grille fine et on double la contribution des composantes restantes.

Reste ensuite à ajouter le courant. Comme on le voit sur la figure 3.4 un champ électrique fin peut être affecté par deux ou quatre degrés de liberté de courant

FIG. 3.4 – schéma des champs J et E_f sur une maille

suivant s'il se trouve à l'intérieur strict ou non d'une maille. De plus, la valeur des produits de fonctions de bases variant d'un champ à l'autre, les coefficients issus de la formule de quadrature pour le calcul des intégrales, ne sont pas les mêmes pour tous les champs fins (voir figure 3.5).

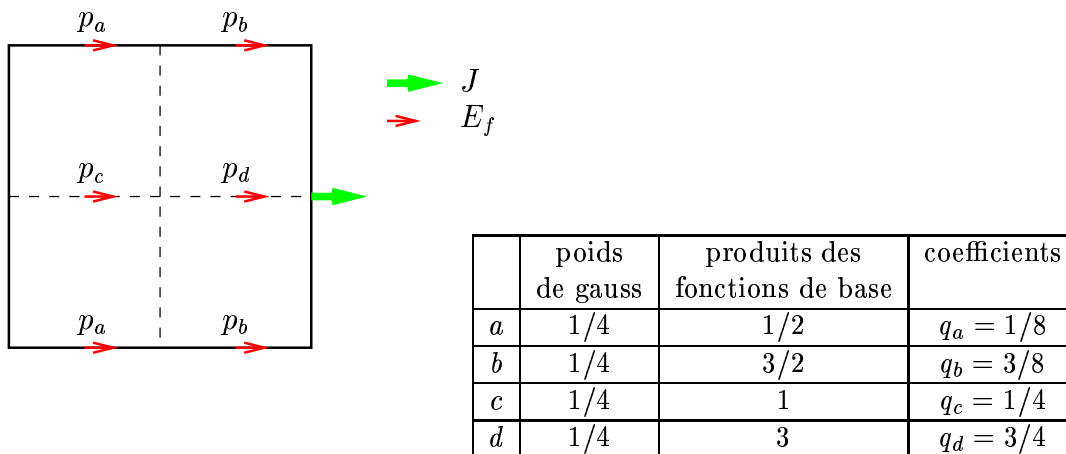


FIG. 3.5 – poids pour les champs fins

On présente par exemple ci-dessous le schéma obtenu à l'itération $2n + \ell$, $\ell = 1, 2$ pour la composante E_x sur la face Y^- .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} \\
 \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(q_c (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_d (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\
 (E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} \\
 \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(q_d (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_c (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\
 (E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} \\
 \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right. \\
 \quad \quad \left. + q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+3)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+3)}^{2n+1} \right) \\
 (E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} \\
 \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right. \\
 \quad \quad \left. + q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+3)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+3)}^{2n+1} \right)
 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

On remarque que les formules sont identiques que l'instant soit $2n + 1$ ou $2n + 2$, puisque l'on a choisi $J^{2n+\frac{1}{2}} = J^{2n+\frac{3}{2}} = J^{2n+1}$

De la même façon que dans le cas de la grille grossière, si un courant considéré se situe sur une arête le signe peut changer suivant le tableau 3.1.

Lorsque le champ électrique se situe sur une arête, on doit prendre en compte que la masse est différente, de plus la formule fait intervenir des courants de deux faces différentes. On donne ici à titre d'exemple le schéma pour un champ E_x situé sur l'intersection des faces Y^- et Z^- .

$$\left\{ \begin{array}{l}
(E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} \\
\quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left(q_a (J_x)_{(2i+2, 2j+1, 2k)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j+1, 2k)}^{2n+1} \right) \\
\quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(+q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\
(E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} \\
\quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left(q_b (J_x)_{(2i+2, 2j+1, 2k)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j+1, 2k)}^{2n+1} \right) \\
\quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left(q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right)
\end{array} \right. \quad (3.26)$$

Ici encore, si le schéma fait intervenir un courant situé sur une arête, le signe de sa contribution sera déterminé par le tableau 3.1

Les équations présentées permettent donc de calculer les champs électriques grossiers et fins à l'interface dès que le courant est connu.

3.2.3 Résolution. Détermination du Courant

Afin de calculer le courant J^{2n+1} à l'interface, on décompose le champ électrique en deux parties, la première correspond au champ électrique en l'absence de courant (\tilde{E}). Ce champ se calcule explicitement à l'aide de quantités connues car calculées à des instants antérieurs. La seconde correspond à la contribution due au courant seul. On utilise cette décomposition pour écrire la relation de conservation d'énergie à l'interface, qui revient à écrire une égalité de flux de champs électriques,

$$\Phi_x^g = (B_g^{2h}) \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} = (B_f^{2h}) \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} = \Phi_x^f \quad (3.27)$$

La linéarité des équations nous permet alors d'écrire une relation entre les flux provenant des champs électriques sans courant et les flux induits par ce courant (2.33). On obtient ainsi un système linéaire dont l'inversion nous donne le courant.

Le second membre provient de flux électriques de chaque grille. Les schémas indiqués ici proviennent de la condensation de masse des matrices indiquées en 2.3. La discrétisation choisie pour résoudre le problème conduit à prendre les flux dans les mêmes espaces d'approximation que les courants.

On décompose le calcul des flux en deux parties une induite par les champs électriques grossier à l'interface et l'autre par les champs fins

Exemple pour le calcul de flux grossier Φ_x^g sur la face Y^-)

$$(\Phi_x^g)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = -\Delta x \Delta z \delta_{2\Delta t} \left\{ (E_x)_{(2i-1,2j,2k)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k)} \right. \\ \left. + (E_x)_{(2i-1,2j,2k+2)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k+2)} \right\} \quad (3.28)$$

Le signe $\delta_{2\Delta t}$ signifie que l'on effectue la moyenne des quantités aux instants $2n$ et $2n + 2$.

Lorsque le flux se situe sur une arête, sa fonction de base étant la concaténation de deux demi-fonctions de base issues de deux faces différentes, la formule diffère pour plusieurs raisons. Les deux demi-fonctions de base n'ayant pas la même direction, ce sont deux composantes différentes du champ E qui interviennent dans le calcul du flux. Ces deux fonctions de bases n'ayant plus des supports égaux, les coefficients de pas d'espace intervenant sont différents. D'autre part, en raison du choix de l'orientation de la fonction de base sur l'arête, le signe de la contribution du champ est déterminé par le tableau 3.1.

Par exemple, le schéma pour le calcul du flux sur l'arête intersection des faces Y^- et X^- fait intervenir la composante E_x de la face Y^- et la composante E_y de la face X^- avec un signe $-$ puisque l'on a choisi de déterminer le signe de cette arête par la face Y^- .

$$(\Phi_x^g)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = -\delta_{2\Delta t} \left\{ \Delta x \Delta z \left[(E_x)_{(2i+1,2j,2k)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k+2)} \right] \right. \\ \left. - \Delta y \Delta z \left[(E_y)_{(2i,2j+1,2k)} - (E_y)_{(2i,2j+1,2k+2)} \right] \right\} \quad (3.29)$$

La partie du flux provenant de la grille fine fait intervenir la somme de 12 champs électriques fins, pondérée par les poids définis figure 3.5. On donne ici la formule

pour la Face Y^-

$$\begin{aligned}
(\Phi_x^f)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = \Delta x \Delta z \delta_{\Delta t} \left\{ \right. \\
& p_a \left[(E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k+2} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+2} \right] \\
& + p_b \left[(E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k+2} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+2} \right] \\
& + p_d \left[(E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k+1} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+1} \right] \\
& \left. + p_c \left[(E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k+1} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+1} \right] \right\} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

$$\text{où } \delta_{\Delta t} A = \frac{A^{2n+2} + 2A^{2n+1}A^{2n}}{4}$$

De la même façon que précédemment, la formule sera modifiée si le flux se situe sur une arête, faisant intervenir les champs de deux faces différentes ainsi que les éléments de surface correspondants. Par exemple, pour l'intersection des faces Y^- et X^- on aura

$$\begin{aligned}
(\Phi_x^f)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = \delta_{\Delta t} \left\{ \right. \\
& p_a \left[\Delta x \Delta z \left((E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \Delta y \Delta z \left((E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k} + (E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k+2} \right) \right] \\
& + p_b \left[\Delta x \Delta z \left((E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \Delta y \Delta z \left((E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k} + (E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k+2} \right) \right] \\
& + p_d \left[\Delta x \Delta z (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+1} + \Delta y \Delta z (E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k+1} \right] \\
& \left. + p_c \left[\Delta x \Delta z (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+1} + \Delta y \Delta z (E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k+1} \right] \right\} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Le calcul du second membre étant effectué, il nous reste à présenter la construction de la matrice liant le courant aux flux pour que le schéma soit complet.

La décomposition du champ électrique à l'interface en un champ électrique calculé sans courant et un champ dû uniquement au courant conduit à la même décomposition pour les flux. Pour chaque vecteur courant défini à l'interface on

peut calculer le flux qu'il va induire. Une façon simple de construire la matrice est donc de calculer le flux induit par chaque vecteur unitaire de la base des courants. Chaque flux calculé correspondra alors à une colonne de la matrice liant le courant au flux.

3.2.4 Propriétés de la matrice

La matrice ainsi construite, a pour dimension le nombre d'arêtes sur l'interface, elle est très creuse et bien conditionnée.

Chaque colonne de la matrice correspond aux flux induits par un courant situé sur l'arête correspondant au numéro de la colonne. Comme on le voit sur les figures 3.6 et 3.7 le nombre de flux induits par un courant est limité. Dans le cas général, le courant n'induit que neuf flux grossiers et vingt cinq flux fins. La matrice étant donc très creuse elle sera stockée en morse.

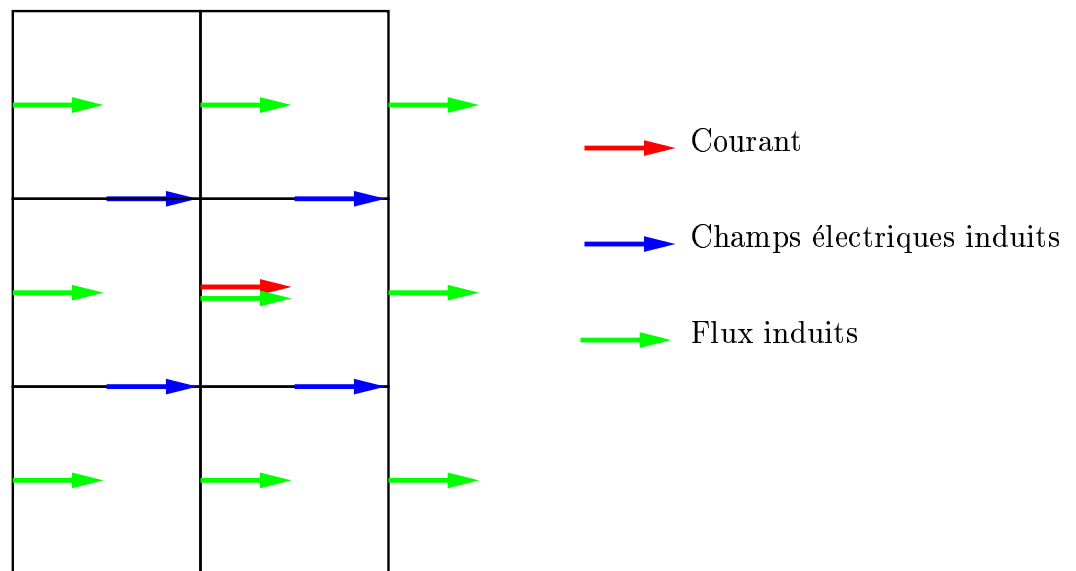
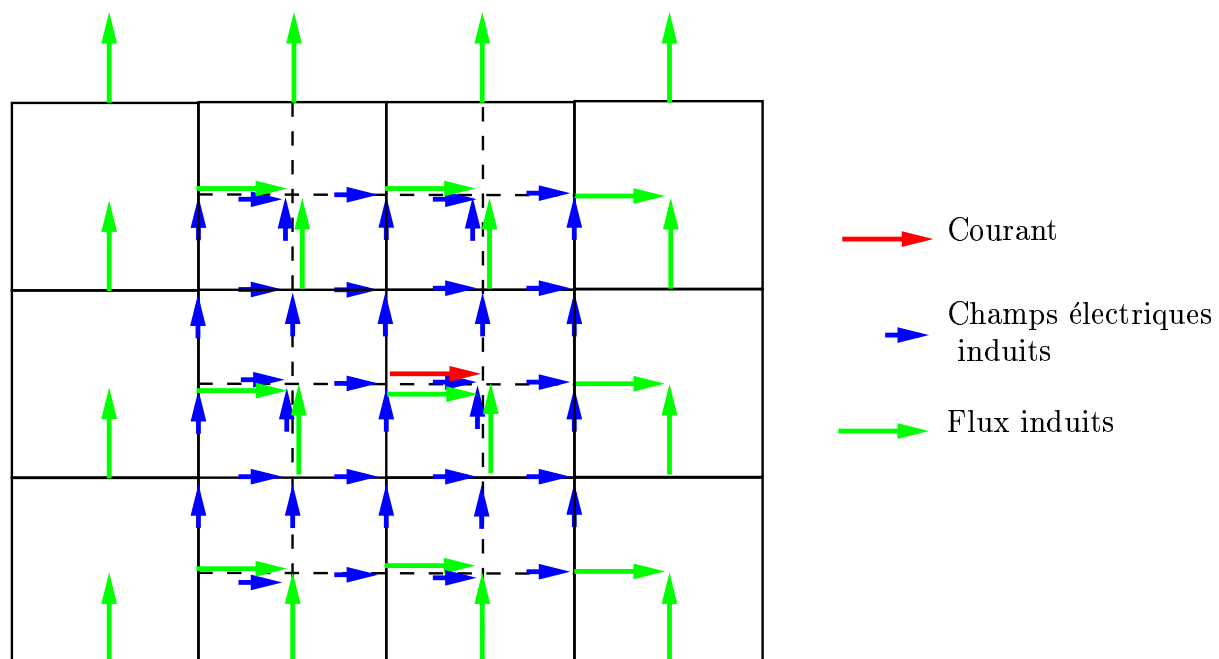


FIG. 3.6 – *influence du courant sur les flux grossiers*

Le calcul numérique du conditionnement de la matrice fait apparaître un bon conditionnement puisqu'il est compris entre 20 et 30. La résolution du système se fait par gradient conjugué. La méthode converge en à peu près 30 itérations vers la précision machine.

FIG. 3.7 – *influence du courant sur les flux fins*

On présente, par exemple, figure 3.8 le cas d'une boîte raffinée de dimension $10 \times 12 \times 8$, le nombre de degré de liberté vaut alors 1184, le nombre de points non nuls est 30104 soit moins de 26 points non nuls par ligne, mais le nombre de réels stockés sera de 15644 puisque la matrice est symétrique. Une estimation du conditionnement vaut 27.8.

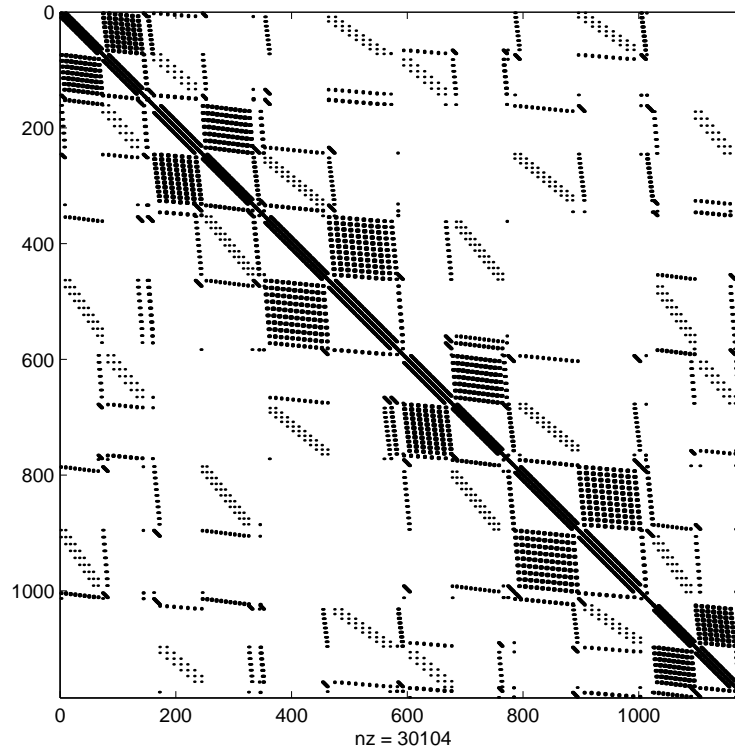


FIG. 3.8 – *Squelette de la matrice de Courant pour une boîte vide*

On a présenté dans cette section les schémas permettant le raccord entre la grille fine et la grille grossière avec une notation “différences finies”. L’avantage de cette présentation est de fournir des schémas plus clairs qu’avec une présentation “éléments finis”, mais il devient difficile de conserver cette méthode dans le cas où des degrés de liberté sont inexistant par exemple en présence de conducteurs. On choisira alors d’adopter une présentation plus adaptée à un maillage non structuré.

Ceci n'est qu'une présentation différente des calculs, ces derniers étant bien sûr identiques.

Chapitre 4

Extension de la méthode en présence de conducteurs parfaits

4.1 Position du problème

Nous nous intéressons dans cette section à la prise en compte de conducteurs parfaits à l'intérieur du domaine de propagation. Rappelons que c'est là l'un des intérêts du raffinement de maillage : le pas d'espace étant plus petit, le raffinement permet de mieux prendre en compte la géométrie des conducteurs. Il est donc crucial que la méthode permette cette incorporation. Nous verrons que celle-ci s'obtient facilement en modifiant les espaces pour le champ électrique (on met la condition de conducteur parfait dans l'espace) et surtout pour le courant circulant à la surface de la boîte raffinée.

4.2 Description des conducteurs. Modification des espaces

La géométrie des conducteurs est supposée coïncider avec un ensemble fini de surfaces planes. On notera \mathcal{C} cet ensemble. On distinguera \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les conducteurs respectivement inclus dans la boîte raffinée ou hors de celle-ci.

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \cap B, \quad \mathcal{C}_g = \mathcal{C} \cap B^{ext} \quad (4.1)$$

Un ensemble qui va jouer un rôle important est l'intersection des conducteurs avec la surface de la boîte raffinée Σ . On a

$$\mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{C} \cap \Sigma = \mathcal{C}_f \cap \Sigma = \mathcal{C}_g \cap \Sigma \quad (4.2)$$

Cet ensemble peut être constitué par des surfaces ou encore par des segments.

Une fois décrites les hypothèses sur les conducteurs, on passe maintenant à la modification des espaces fonctionnels induite par la prise en compte des conducteurs. La condition

$$\vec{n} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) = 0, \text{ sur } \mathcal{C} \quad (4.3)$$

est incorporée dans l'espace \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{E} \in H(\text{rot}, \Omega), \vec{n} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) = 0 \text{ sur } \mathcal{C} \right\} \quad (4.4)$$

L'espace des traces tangentielles sur Σ des éléments de \mathcal{E} est

$$H_{oo}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma) = \left\{ \Phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma), n_c \wedge \Phi = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_\Sigma \right\} \quad (4.5)$$

où n_c est la normale à \mathcal{C}_Σ . On a vu que le courant J appartenait au dual de l'espace des traces tangentielles des champs électriques. On aura donc $J \in \mathcal{M}$ avec

$$\mathcal{M} = \left(H_{oo}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma) \right)'. \quad (4.6)$$

Une fois, ces espaces construits et modifiés, le système de Maxwell dans un milieu avec conducteurs est obtenu simplement en reprenant le système variationnel constitué des équations (1.11) à (1.15).

4.3 Discrétisation

Dans la suite, on supposera que les conducteurs coïncident toujours avec des mailles soit fines soit grossières. On peut remarquer que cette hypothèse implique que la trace des conducteurs sur Σ coïncide avec un ensemble de mailles grossières. Remarquons que ceci n'est possible que parce que l'on a supposé que le maillage fin était un sous maillage du maillage grossier. On a donc

$$\mathcal{C}_g = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_g} M_\ell^{2h}, \quad \mathcal{C}_f = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_f} M_\ell^h, \quad \mathcal{C}_\Sigma = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_\Sigma} M_\ell^{2h}, \quad (4.7)$$

Cette hypothèse permet de construire très facilement un espace d'approximation pour \mathcal{E} : il suffit simplement de supprimer les degrés de liberté qui sont localisés sur les conducteurs. Cela revient à annuler les composantes électriques tangentes aux conducteurs.

Pour le courant, c'est un peu plus délicat. C'est un espace de fonctions définies sur le complémentaire de \mathcal{C}_Σ . On note \mathcal{O}_Σ ce domaine. Le départ est identique à ce que nous avons présenté pour le cas sans conducteur: la restriction du courant à chaque maille de \mathcal{O}_Σ est approchée par une combinaison des 4 demi-fonctions de base rattachées à la maille. La différence réside dans le recollement des demi-fonctions de base. On donne ci-dessous la description et le traitement des différentes situations qui peuvent se présenter.

- l'arête n'est localisée ni à l'intérieur, ni à la frontière d'un conducteur. Dans ce cas, la loi de Kirtchoff s'applique: on a un unique degré de liberté sur l'arête.
- L'arête est complètement interne à un conducteur. Dans ce cas, il n'y a pas de courant accroché à cette arête.
- L'arête est localisée à la frontière d'un conducteur, auquel cas deux situations se présentent:
 1. L'une des deux mailles entourant l'arête est incluse entièrement dans un conducteur. Alors, la demi-fonction de base définie sur l'autre maille devient l'unique fonction de base associée à cette arête.
 2. Aucune des deux mailles entourant l'arête n'est incluse dans un conducteur. Ceci correspond au cas où la trace sur Σ du conducteur est réduit à un segment. Dans ce cas, on doit dédoubler le degré de liberté associé à l'arête. En effet la loi de Kirtchoff ne peut s'appliquer au travers d'un conducteur, puisqu'il n'y a aucune raison de conserver la divergence du courant au travers d'un conducteur (il existe une justification mathématique de ceci mais comme on devine le lecteur très occupé, celle-ci lui sera épargnée). Dans cette configuration, on a donc deux degrés de liberté associés à l'arête. Les deux demi-fonctions de base deviennent fonction de base.

La prise en compte de conducteurs peut donc conduire à une diminution ou une augmentation du nombre de degrés de liberté. Nous montrons figure 4.1 un maillage du courant dans l'exemple d'une boîte traversée par une plaque fine, les degrés

de liberté indiqués en rouge ont été dédoublés. Nous verrons dans les applications numériques que cette façon de procéder donne de bons résultats.

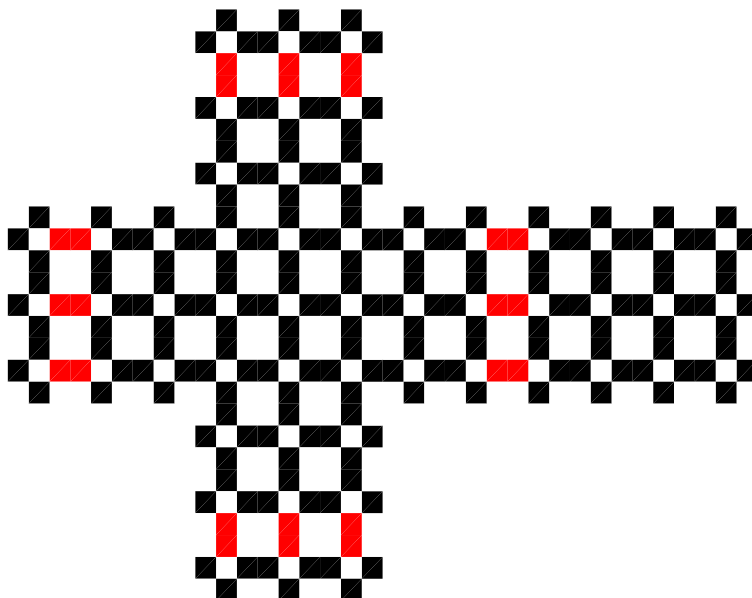


FIG. 4.1 – *Éclatement du maillage du Courant sur l'interface en présence d'une plaque*

4.4 Autres extensions de la méthode

La méthode permet donc l'utilisation en champ total du raffinement avec existence de conducteurs parfaits dans le vide. Plusieurs extensions de la méthode sont possibles, certaines ne posent aucun problème de méthode et nécessiteraient uniquement un effort de programmation, d'autres demanderaient une adaptation de la méthode elle-même. On présente ici les extensions dont nous avons étudié la possibilité, par ordre croissant de difficulté.

La première concerne le passage en champ diffracté, il suffirait pour cela, d'introduire l'opposé du champ incident sur les conducteurs de la grille fine. L'extension au cas d'une boîte raffinée enfouie dans le sol ou à moitié enfouie se traite de manière complètement équivalente; il suffit de coder le schéma de Yee adéquat dans la grille raffinée et à l'interface grille fine - grille grossière.

Certaines extensions seraient un peu plus difficiles à coder mais toujours compatibles avec la méthode. Le raffinement d'une boîte dans une boîte déjà raffinée nécessiterait d'utiliser pleinement la récursivité du Fortran 90. Il serait cependant préférable que la deuxième boîte se situe à au moins deux mailles de l'interface afin d'éviter que les matrices définies à l'interface ne soient couplées ce qui entraînerait une difficulté supplémentaire mais pas insurmontable.

On pourrait également imaginer des grilles raffinées non rectangulaires, ce qui permettrait d'adapter la forme de la grille fine au détail géométrique, par exemple dans le cas d'une plaque oblique, la grille fine suivrait le conducteur de manière oblique également. Ceci permettrait un gain au niveau du nombre de points à raffiner mais nécessite d'adopter un codage éléments finis de la méthode.

Enfin, la dernière extension étudiée sans modification significative de la méthode concerne le raffinement 1-n. Une implémentation en deux dimensions a été réalisée, elle montre que l'importance des ondes parasites dans la grille fine croît avec n jusqu'à ne plus être négligeable. Ce phénomène diminue si l'on diminue le pas de temps mais il nous paraît tout de même plus judicieux d'utiliser des boîtes imbriquées de raffinement 1-2 que de passer directement à une grille raffinée n fois.

Un cas d'extension qui réclame des études plus poussées de la méthode concerne la traversée de l'interface par des fils. Il est possible d'étendre la méthode de raffinement de maillage en utilisant la formulation variationnelle présentée dans [5], il s'agit d'un modèle filaire de type Holland. Par contre le modèle de Holland utilisé dans Gorf n'utilise pas la discrétisation en temps permettant la conservation d'une

énergie discrète et ne permet donc pas d'étendre directement les techniques utilisées. Deux possibilités sont donc offertes

- Coder le modèle flaire variationnel [5] puis intégrer le raffinement de maillage.
- Appliquer directement le modèle de Holland mais sans pouvoir garantir la stabilité.

Chapitre 5

Algorithmique

Deux Algorithmes différents sont possibles pour la gestion de l'interface grille fine-grille grossière. Le premier suit pas à pas la méthode décrite et permet la vérification de la conservation de l'énergie tandis que le deuxième est une version plus rapide.

5.1 Une implémentation pas à pas

Dans cette implémentation, à chaque itération grossière, on commence par calculer les inconnues sans courant. Ainsi dans un premier temps, on calcule le champs électrique grossier tangent \tilde{E}^{2n+2} à l'interface puis les flux électriques grossiers qu'il induit. Dans la grille fine l'opération est un peu plus longue puisqu'il faut calculer les champs électriques et magnétiques dans toutes la grille fine et sur l'interface sur deux pas de temps (\tilde{E}^{2n+1} et \tilde{E}^{2n+2}) à l'aide du schéma de Yee. Pour chaque champ calculé, on soustrait aux flux grossiers les flux fins qu'il induit. A la suite de cette opération, le calcul du flux total permet d'inverser le système linéaire donnant le courant.

La phase suivante consiste à mettre à jour les champs électromagnétiques par prise en compte du courant. Pour le champ grossier, l'opération est simple, il suffit d'ajouter au champ électrique \tilde{E}^{2n+2} la contribution du courant $(B_g^{2h})J^{2n+1}$. Pour le champ électromagnétique dans la grille fine, cette correction est plus délicate car elle nécessite de reprendre le calcul à partir des champs initiaux E^{2n} et $H^{2n-\frac{1}{2}}$, au moins au voisinage du bord. Une manière de faire est de stocker ces 2 champs avant le calcul sans le courant puis de redémarrer le calcul à partir de ces valeurs dès que le courant est connu. On intègre donc, et à nouveau sur deux pas de temps fins, le

schéma de Yee mais en ajoutant le courant au champ électrique à chaque pas de temps.

Le gros avantage de cette méthode est qu'elle permet le calcul de l'énergie électromagnétique dans la grille fine. En effet la mise à jour du courant se faisant par itération du schéma de Yee, on dispose des valeurs des champs électromagnétiques intermédiaires de la grille fine nécessaires au calcul de l'énergie fine et des flux. Ceci permet de tester la validité du programme en vérifiant une propriété du schéma valide en l'absence de termes sources : la variation entre deux pas de temps grossiers des énergies de chaque grille doit être égale à la valeur commune, au signe près, des flux électriques à travers l'interface. Ceci induit la conservation de l'énergie totale.

5.2 Une implémentation un peu optimisée

Une optimisation possible de l'implémentation précédente réside dans la manière de mettre à jour les champs électromagnétiques fins, elle présuppose d'avoir stocké une matrice creuse donnant directement les champs électriques induits par un courant après deux itérations du schéma de Yee. Cette matrice est calculée lors de la phase d'initialisation. Lorsque que l'on construit la matrice liant les flux électriques aux courants, il suffit de stocker également les champs électriques et magnétiques induits.

Cette implémentation ne permet pas de procéder à la vérification de la conservation de l'énergie, puisque les champs électromagnétiques intermédiaires ne sont pas calculés.

5.3 Calcul des Matrices

Comme nous l'avons dit nous devons construire la matrice permettant de calculer le courant à partir des flux électriques. Pour cela, on a adopté une procédure numérique très simple. Pour chaque degré de liberté, on simule le champ électromagnétique induit par le courant qui vaut 1 sur l'arête associée et 0 ailleurs, et cela pendant 1 pas de temps grossier en partant d'un état nul. Le calcul du flux électrique total à travers la boîte donne directement une colonne de la matrice. On optimise cet algorithme en n'effectuant la simulation que dans une boîte de quelques mailles autour de l'arête associée au degré de liberté. Notons, que l'on peut faire un calcul analytique de cette matrice au moins dans le cas d'une boîte non traversée par les conducteurs. Les calculs deviennent vite inextricables pour les situations avec traversée de conducteurs.

Les champs électromagnétiques fins $E_f^{n=2}$ et $H_f^{n=\frac{3}{2}}$ induits correspondent précisément aux colonnes des deux matrices qui permettent la mise à jour des champs électromagnétiques fins une fois le courant connu. Cette matrice est réutilisée lors des itérations de l'algorithme optimisé (cf. 5.2).

5.4 Compléments sur les conducteurs

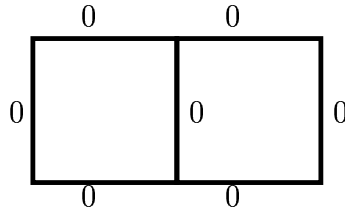
En l'absence de conducteur, la construction du maillage d'éléments finis pour le courant consiste à choisir une numérotation des mailles et des arêtes localisées sur l'interface, puis à construire deux tableaux

- Le tableau de correspondance entre chaque carreau et les 4 numéros de ses arêtes
- Le tableau donnant les coordonnées du carreau. En pratique, comme on travaille avec une grille structurée, il suffit d'associer à chaque carreau 4 informations (les 3 indices dans la grille grossière d'un de ses 4 coins et l'orientation de la face frontière à laquelle il appartient).

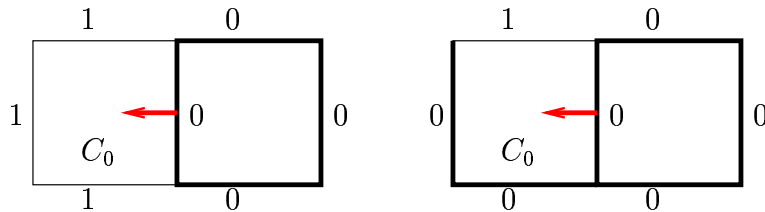
Avec les conducteurs, c'est un peu plus compliqué. On a vu que leur présence entraînait qu'à chaque arête, on pouvait adjoindre de 0 à 2 degrés de liberté. Afin de discriminer les situations, on doit détecter, pour chaque maille, la présence d'un conducteur sur une de ses arêtes. Une des manières de faire consiste à initialiser les champs électriques grossiers sur l'interface à 1, puis à appeler la procédure traitant les conducteurs, c'est à dire annulant les composantes de champs électriques qui leurs sont tangents.

Pour chaque arête, on distingue alors plusieurs cas.

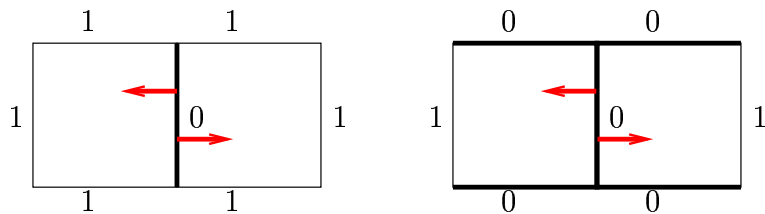
- L'arête n'est pas localisée sur un conducteur, auquel cas on ajoute un degré de liberté que l'on associe aux deux carreaux dont elle est l'arête commune (c'est exactement ce que l'on fait dans le cas où il n'y a pas de conducteur).
- L'arête est traversée par un conducteur, on compte pour chacun des deux carreaux voisins, le nombre d'arêtes annulées. Trois cas sont alors possibles
 - Les deux carreaux ont toutes leurs arêtes annulées. On ne rajoute pas de degré de liberté: l'arête est complètement interne au conducteur.
 - Un seul des deux carreaux, soit C_0 , a au moins une de ses arêtes non annulée. Cette arête est localisée à la frontière d'un conducteur et sépare

FIG. 5.1 – *arête interne au conducteur*

une zone entièrement conductrice (d'au moins une maille) d'une zone vide. On crée un nouveau degré de liberté associé à l'arête que l'on référence au carreau C_0 .

FIG. 5.2 – *arête frontière*

- Les deux carreaux ont au moins une arête non annulée. C'est le cas par exemple si les conducteurs intersectent la boîte en un segment où se situe précisément l'arête. On peut imaginer des situations plus exotiques (une double encoche tête-bêche filiforme en son milieu par exemple). On crée alors deux nouveaux degrés de liberté associés à cette arête, chacun étant référencé par l'un des deux carreaux.

FIG. 5.3 – *trace filaire*

Chapitre 6

Validation à travers quelques expériences numériques

Le code de raffinement de maillage est validé à l'aide d'expériences numériques. On montre que le raffinement n'induit pas d'erreur supplémentaire significative et que, dans certain cas, le raffinement apporte une amélioration dans la prise en compte de conducteurs.

Pour chaque expérience, nous effectuons plusieurs simulations, l'une avec un maillage grossier, l'autre avec un maillage fin ($\frac{h}{2}$), une avec un raffinement de grille local ($\frac{h}{2}$), enfin une expérience avec une grille très fine nous permet d'obtenir une solution de référence.

6.1 Une boîte raffinée dans le vide

On effectue ici une simulation de la propagation d'un champ incident dans le vide, avec un raffinement local. On effectue des enregistrements en divers points du maillage grossier, afin de mesurer l'influence de la grille fine, plus exactement afin de comparer l'erreur due au raffinement seul, à celle du schéma classique.

Le résultat de ces expériences est présenté figure 6.1. La figure du haut montre les solutions pour la grille grossière, la grille fine et la grille raffinée localement. Cette figure montre que la grille fine n'a pas provoqué d'erreur supplémentaire significative. La figure du bas montre les différences de ces résultats avec la solution de référence.

Pour des discrétisations généralement utilisées, (environ 20 points par longueur d'onde), l'erreur due au raffinement est bien que d'ordre 1, négligeable devant l'erreur

due au schéma classique sans raffinement qui elle est pourtant d'ordre 2 (dans le cas général, car le programme utilisé ici n'est pas d'ordre 2).

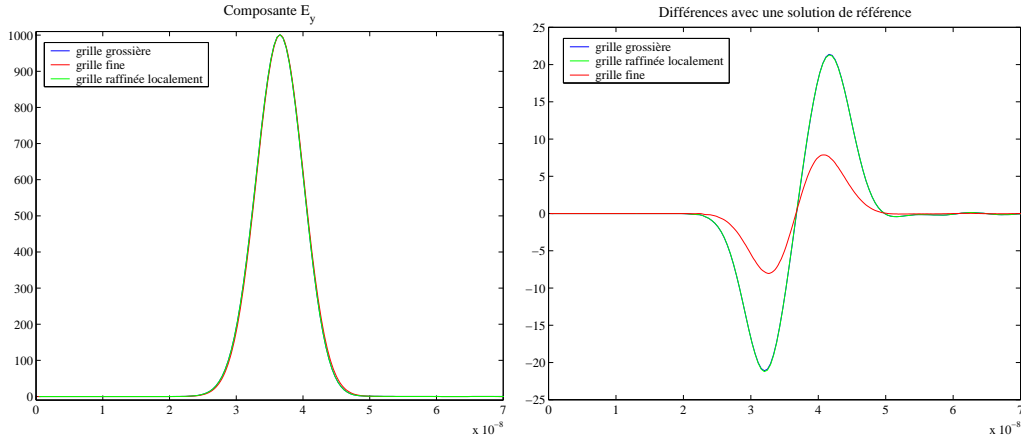


FIG. 6.1 – résultats de l'expérience 1

6.2 Une boîte raffinée coupant une plaque horizontale

Cette expérience sert à valider la méthode dans le cas où des conducteurs coupent l'interface. On simule la propagation d'un champ incident en présence d'une plaque métallique perpendiculaire à la direction de propagation du champ incident. La plaque métallique est positionnée sur des points du maillage grossier.

Les résultats présentés figure 6.3 montrent que la prise en compte de conducteurs à l'intérieur de la grille fine et sur l'interface avec la grille grossière ne génère pas d'erreur supplémentaire, puisque les résultats pour la grille grossière (courbe bleu) sont identiques à ceux obtenus en raffinant le maillage (courbe verte).

6.3 Une boîte raffinée intersectant un cube biseauté

Cette expérience vise à montrer la meilleure prise en compte d'un plan incliné par une grille raffinée. On simule donc la diffraction d'une onde plane sur un objet biseauté. La partie de l'objet inclinée est incluse dans une grille maillée plus finement, le dispositif est décrit figure 6.4.

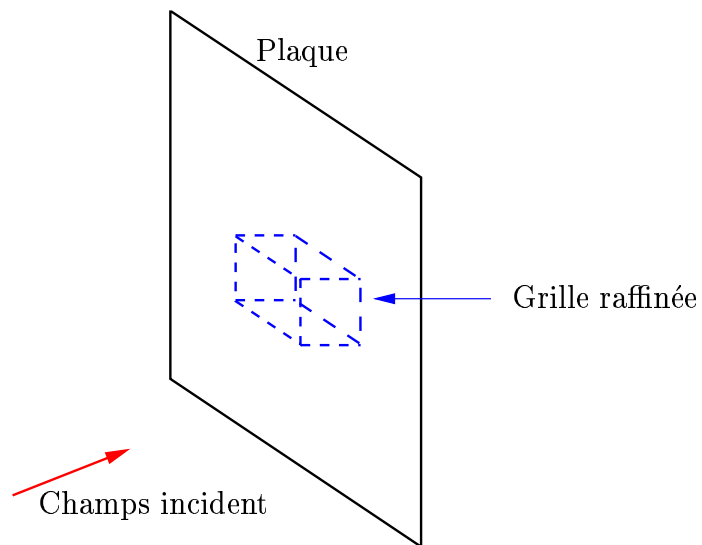


FIG. 6.2 – Schéma de l'expérience 2

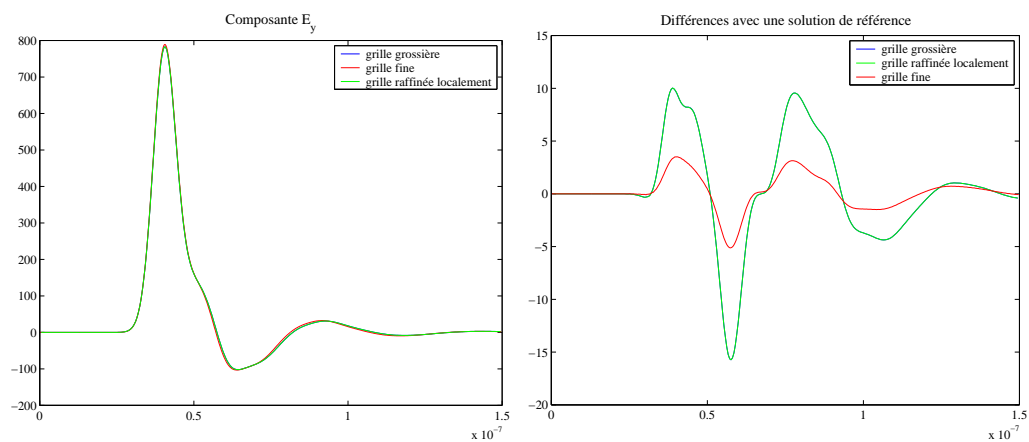


FIG. 6.3 – résultats de l'expérience 2

Un inconvénient de la méthode dans un tel cas, vient du fait que la grille fine est rectangulaire et ne peut donc suivre localement la plaque inclinée ce qui oblige à prendre une grille raffinée assez importante.

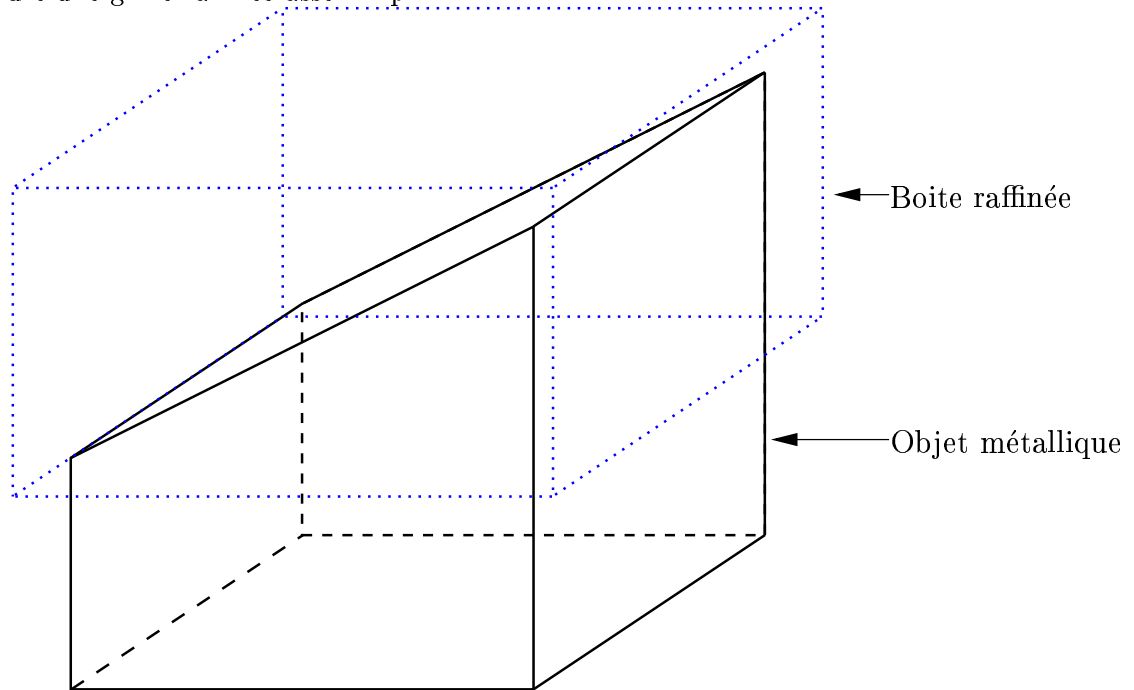


FIG. 6.4 – Schéma de l'expérience 3

Les résultats de cette expérience sont assez délicats à analyser puisque plusieurs phénomènes interagissent lorsque l'on raffine, notamment une meilleure prise en compte du plan incliné mais également une meilleure discrétisation des singularités apparaissant à la frontière de l'obstacle. L'amélioration due au raffinement variera fortement en fonction du point d'enregistrement suivant qu'il se trouve près d'une singularité ou du plan incliné.

La figure 6.5 présente les résultats pour un point d'enregistrement situé à l'avant de l'obstacle (vu du champ incident) et relativement éloigné du plan éloigné. On constate que le raffinement de grille apporte une amélioration des résultats sans toutefois obtenir la précision obtenue avec une grille raffinée dans tout le domaine.

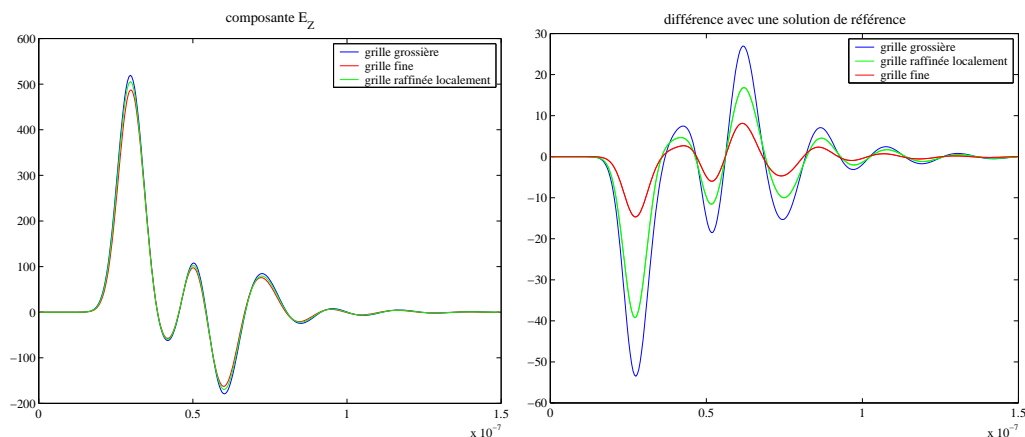


FIG. 6.5 – résultats de l'expérience 3

La figure 6.6 présente les résultats pour un point d'enregistrement situé derrière l'obstacle (vu du champs incident) à proximité du sommet du biseau c'est à dire là où la singularité est la plus forte.

On constate que le raffinement local a nettement amélioré les résultats puisqu'ils sont voisins de ceux d'une grille raffinée totalement.

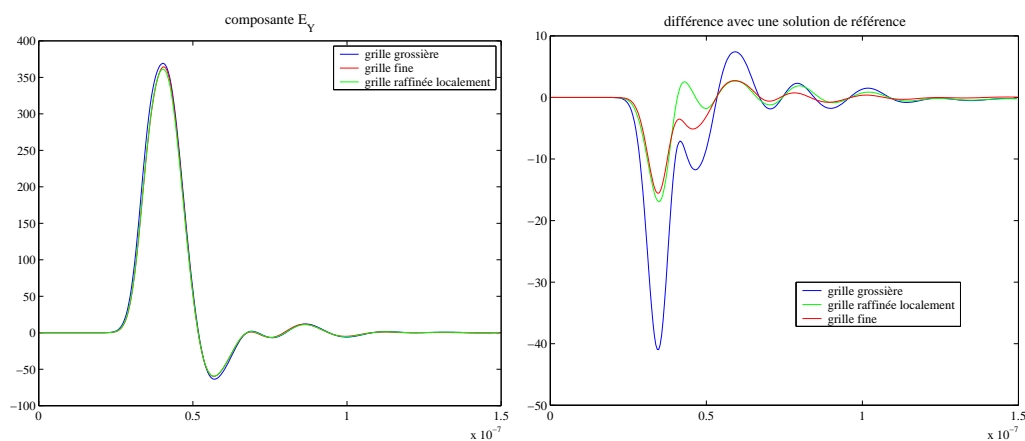


FIG. 6.6 – résultats de l'expérience 3

6.4 Une boîte raffinée autour d'une ouverture percée dans un cube

Le dernier exemple est une simulation en présence d'un obstacle dont la géométrie provoque localement des singularités difficilement prises en compte avec un maillage grossier. Nous considérons un conducteur cubique creux avec une ouverture de taille petite devant la longueur d'onde (λ) du champ incident (figure 6.7). Nous enregistrons ensuite les valeurs du champ électrique en un point à l'intérieur du cube.

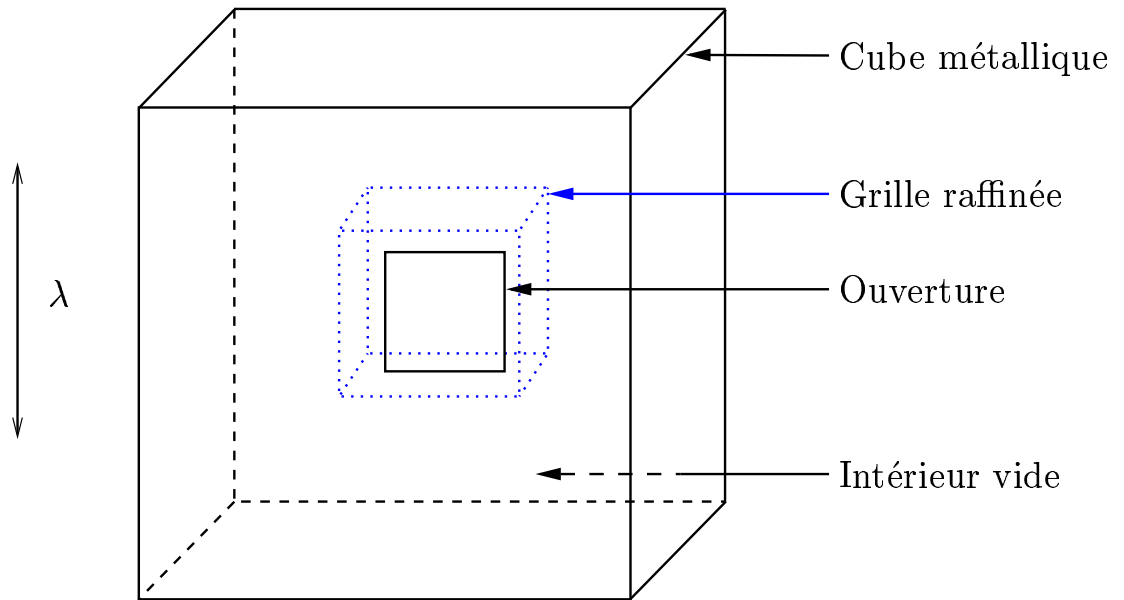


FIG. 6.7 – Schéma de l'expérience 4

Les résultats sont présentés sur la figure 6.8. Ils montrent pleinement l'utilité d'un raffinement de grille, puisque, en présence d'une grille fine, l'erreur due à la géométrie de l'obstacle est équivalente à l'erreur obtenue en raffinant tout le domaine, alors que le temps de calcul pour effectuer le raffinement local n'a augmenté que de 40% contre 800% pour la grille raffinée partout.

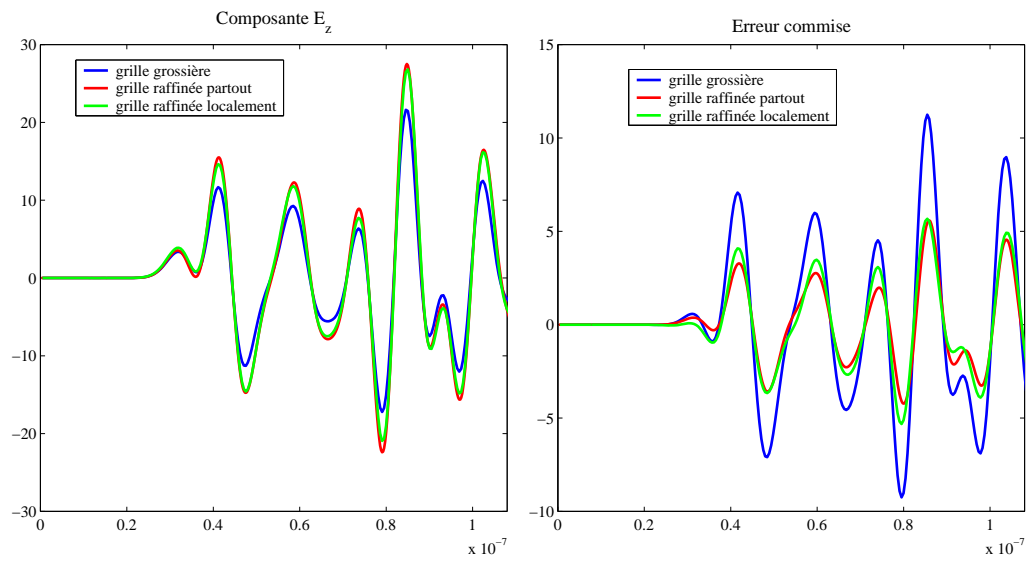


FIG. 6.8 – résultats de l'expérience 4

.1 Annexe : Calcul des valeurs propres de la matrice associée à l'énergie

Nous présentons dans cette annexe le calcul effectué grâce à Maple des valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique $|rotE|^2$ restreinte à une maille du domaine. La fonction $|rotE|^2$ définie sur un cube dépend des valeurs des champs électriques définis sur les douze arêtes du cube.

On commence par définir $|rotv|^2$ sur une maille

```
> f:= v -> 1/2*( ( (v[11]-v[9])/dx- (v[2]-v[1])/dz )^2 +
> ( (v[12]-v[10])/dx- (v[4]-v[3])/dz )^2 +
> ( (v[12]-v[11])/dy- (v[8]-v[6])/dz )^2 +
> ( (v[10]-v[9])/dy- (v[7]-v[5])/dz )^2 +
> ( (v[8]-v[7])/dx- (v[4]-v[2])/dy )^2 +
> ( (v[6]-v[5])/dx- (v[3]-v[1])/dy )^2 );
```

$$f := v \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{v_{11} - v_9}{dx} - \frac{v_2 - v_1}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{12} - v_{10}}{dx} - \frac{v_4 - v_3}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{12} - v_{11}}{dy} - \frac{v_8 - v_6}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{10} - v_9}{dy} - \frac{v_7 - v_5}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_8 - v_7}{dx} - \frac{v_4 - v_2}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_6 - v_5}{dx} - \frac{v_3 - v_1}{dy} \right)^2$$

En se servant du fait que les éléments d'une matrice M associée à une forme quadratique Q peuvent être calculés

$$M(i, j) = \frac{1}{4} (Q(e_i + e_j) - Q(e_i - e_j)) \quad (1)$$

on peut construire la matrice M

```
> M:=array(1..12,1..12);
> for i from 1 to 12 do
>   ei:=array(1..12,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]):
>   ei[i]:=1:
>   for j from 1 to 12 do
>     ej:=array(1..12,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]):
>     ej[j]:=1:
>     v:=array(1..12);v:=ei+ej : v2:=ei-ej:
>     M[i,j]:=1/4*f(evalm(v))-1/4*f(evalm(v2)):
>   od:
> od:
le calcul des valeurs propres se fait alors simplement
> eigenvals(M);
```

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2 dy^2}, \frac{dy^2 + dz^2}{dz^2 dy^2}, \frac{dx^2 + dz^2}{dz^2 dx^2}, \frac{dx^2 dz^2 + dy^2 dz^2 + dy^2 dx^2}{dx^2 dy^2 dz^2},$$

$$\frac{dx^2 dz^2 + dy^2 dz^2 + dy^2 dx^2}{dx^2 dy^2 dz^2}$$

La plus grande valeur propre étant $\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}$ on en déduit la majoration
(2.52)

Bibliographie

- [1] A. Bossavit. Simplicial finite elements for scattering problems in electromagnetism. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 76:299–316, 1989.
- [2] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. . Springer Series in Computational Mathematics (15). Springer Verlag, 1991.
- [3] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Analyse numérique d’une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l’équation des ondes. Technical Report 3474, INRIA, Aout 1998.
- [4] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour le système de maxwell en dimension un. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328:263–268, 1999.
- [5] F. Collino and F. Millot. Fils et méthodes d’éléments finis pour les équations de maxwell. le modèle de holland revisité. Technical Report 3472, INRIA, Aout 1998.
- [6] S. D. Gedney and F. Lansing. *Computational electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method*, chapter Explicit Time-Domain Solution of Maxwell’s Equations Using Nonorthogonal and Unstructured Grids, pages 343–393. A. Taflove, Artech house boston london edition, 1995.
- [7] Y. Goldman, P. Joly, and M. Kern. The electric field in the conductive half space as a model in mining and petroleum prospecting. *Math. Methods Appl. Sci.*, 11(3):373–401, 1989.
- [8] J.C. Nedelec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Num. Math.*, 35:315–341, 1980.
- [9] J.C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Num. Math.*, 50:57–81, 1986.

Table des matières

1	Formulation du problème	5
1.1	Notations	5
1.2	Formulation sous forme de problème couplé	5
1.3	Formulation variationnelle	6
2	Discrétisation du problème	9
2.1	Espaces d'approximation	9
2.1.1	Espaces approchés pour le champ électromagnétique	9
2.1.2	Espace approché pour le courant	12
2.2	Semi-discrétisation en espace	14
2.3	Discrétisation en temps	17
2.4	Estimations d'énergie. Stabilité	20
3	Assemblage du schéma numérique	26
3.1	Construction des matrices	26
3.1.1	Matrice de masse	26
3.1.2	Matrice du rotationnel discret	27
3.1.3	Matrice de couplage	29
3.2	Les équations du schéma	31
3.2.1	Schéma pour la grille grossière	32
3.2.2	Schéma pour la grille fine	35
3.2.3	Résolution. Détermination du Courant	38
3.2.4	Propriétés de la matrice	41
4	Extension de la méthode en présence de conducteurs parfaits	45
4.1	Position du problème	45
4.2	Description des conducteurs. Modification des espaces	45

4.3	Discrétisation	46
4.4	Autres extensions de la méthode	49
5	Algorithmique	51
5.1	Une implémentation pas à pas	51
5.2	Une implémentation un peu optimisée	52
5.3	Calcul des Matrices	52
5.4	Compléments sur les conducteurs	53
6	Validation à travers quelques expériences numériques	55
6.1	Une boîte raffinée dans le vide	55
6.2	Une boîte raffinée coupant une plaque horizontale	56
6.3	Une boîte raffinée intersectant un cube biseauté	56
6.4	Une boîte raffinée autour d'une ouverture percée dans un cube	60
.1	Annexe : Calcul des valeurs propres de la matrice associée à l'énergie	62



Unit e de recherche INRIA Lorraine, Technop le de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS L ES NANCY
Unit e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit e de recherche INRIA Rh ne-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

 diteur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399