



Optimisation de formes en aérodynamique sans gradient par résolution simultanée

Christophe Held

► To cite this version:

Christophe Held. Optimisation de formes en aérodynamique sans gradient par résolution simultanée. RR-3864, INRIA. 2000. inria-00072790

HAL Id: inria-00072790

<https://inria.hal.science/inria-00072790>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation de formes en aérodynamique sans gradient par résolution simultanée

Christophe Held

N° 3864

Janvier 2000

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

Optimisation de formes en aérodynamique sans gradient par résolution simultanée

Christophe Held

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 3864 — Janvier 2000 — 94 pages

Résumé : L'optimisation de formes en aérodynamique nécessite l'utilisation d'algorithmes (méthode avec état adjoint) et/ou d'outils (différentiation automatique) qui peuvent se révéler coûteux en temps (ingénieur et de calcul) ou en mémoire nécessaire à la mise en œuvre des calculs. Une première approche consiste à essayer d'améliorer leur performance, grâce notamment à l'utilisation de méthodes telles que la résolution simultanée ("One-Shot") et/ou la méthode multiniveau. Tout en conservant ces approches, nous présentons une méthode d'optimisation où une approximation du gradient de la fonctionnelle coût est calculée par différences divisées. L'algorithme ainsi obtenu est appliqué à la résolution de problèmes inverses bidimensionnels.

Mots-clés : équations d'Euler - équations de Navier-Stokes - optimisation de formes - méthode hiérarchique - méthode multiniveau - méthode One-Shot - différences divisées

Gradient-free shape optimum design in aerodynamics by simultaneous solution

Abstract: Shape optimum design in aerodynamics requires the use of algorithms (adjoint state method) and/or tools (automated differentiation) which could be proved to be expensive in (engineering and computing) time or in memory used for computations. A first approach consists in trying to improve their efficiency. The use of methods such as the simultaneous solution (One-Shot) and/or the multilevel method can improve it. While preserving these approaches, we present an optimization method in which an approximate gradient of the cost functional is computed by divided differences. The obtained algorithm is applied to solve two-dimensional inverse problems.

Key-words: Euler equations - Navier-Stokes equations - shape optimum design - hierarchical method - multilevel method - One-Shot method - divided differences

Table des matières

1	Introduction	4
2	Un problème modèle en aérodynamique	5
3	Conditions d'optimalité en continu	7
4	Discrétisation	8
4.1	Approximation	8
4.2	Algorithme de résolution	10
4.3	Géométrie discrète	11
4.4	Calcul du gradient en utilisant l'état adjoint	12
4.4.1	Calcul de la fonctionnelle coût et de ses dérivées	13
4.4.2	Calcul de l'état adjoint et du gradient	14
5	Méthode d'optimisation avec gradient	15
6	Méthode One-Shot	16
7	Méthode multiniveau	18
8	Différences divisées	22
9	Utilisation d'un pas de descente variable	26
9.1	Calcul d'un pas "optimal" pour un niveau donné	26
9.2	Variation du pas lors des changements de niveau	27
10	Validation: comparaison entre gradient exact et différences divisées	29
11	Résultats numériques avec pas de descente constant	30
11.1	Résolution complète avec état adjoint	31
11.2	Résolution simultanée avec état adjoint	32
11.3	Résolution simultanée avec différences divisées	38
12	Résultats numériques avec pas de descente variable	47
12.1	Résolution simultanée avec état adjoint	47
12.2	Résolution simultanée avec différences divisées	51
13	Conclusions préliminaires	60

14 Application à l'optimisation d'un profil	61
14.1 Paramétrisation de la forme du profil	61
14.1.1 Interpolation non uniforme	61
14.1.2 Evaluation de la précision du paramétrage	62
14.2 Formulation du problème d'optimisation	71
14.3 Problème inverse monocorps en Euler	72
14.3.1 Contexte	73
14.3.2 Résultats	73
14.4 Problème inverse en turbulent	77
14.4.1 Modèles de turbulence pour des couches limites compressibles	77
14.4.2 Contexte du calcul	84
14.4.3 Résultats	86
15 Conclusion	91

1 Introduction

L'optimisation de formes en aérodynamique représente une préoccupation technique importante dans l'industrie aéronautique depuis de nombreuses années. Le sujet motive la mise en place de programmes coopératifs technologiques tels que les programmes européens EUROPT [Beu94] et ECARP [PBC⁺98], qui ont pour but d'associer chercheurs et industriels afin de mettre au point des méthodes de plus en plus performantes et utilisables dans le milieu industriel. Les principaux problèmes abordés concernent le comportement des ailes d'avion dans les différentes phases d'un vol: les performance en régime de croisière (ces travaux d'optimisation de profils peuvent s'effectuer en présence de nacelles, qui peuvent également être optimisées), les performances au décollage en configuration d'hypersustentation (recherche de la portance maximale et d'une traînée la plus réduite possible).

Avec le progrès de la prédictivité des modèles aérodynamiques complexes, et pour certaines étapes de l'optimisation de formes, l'ingénieur souhaite désormais délaisser les modèles simplifiés (potentiel linéarisé) pour utiliser des codes Navier-Stokes pourtant beaucoup plus coûteux, en conjonction avec des démarches issues du contrôle optimal. Si cette stratégie a été proposée assez tôt par l'INRIA [Pir76], elle n'a connu de véritable essor que quelques années plus tard [Jam88]. Parallèlement, les algorithmes d'optimisation sont devenus de plus en plus sophistiqués, remplaçant l'utilisation de différences divisées utilisables pour un petit nombre de paramètres de contrôle par des méthodes de gradient utilisant un état adjoint. En particulier, depuis quelques années, l'arrivée de techniques de différentiation automatique de logiciels facilite progressivement l'utilisation de telles méthodes [Moh97]. On peut également utiliser l'approche de résolution simultanée ("One-Shot") introduite par Ta'asan [Ta'91] pour résoudre simultanément le problème d'optimisation et la résolution des équations de mécanique des fluides associées (par exemple dans [MB93]). Cette approche est intéressante car on peut obtenir la solution optimale pour un coût inférieur à N analyses, N étant le nombre de paramètres de contrôle, ce qui permet d'utiliser des analyses de plus en plus coûteuses et d'augmenter le nombre de paramètres de contrôle.

Pourtant, bien que ces méthodes soient de plus en plus utilisées, elles ne sont pas toujours pratiques. Il existe donc toujours un besoin de développer des approches "sans gradient" efficaces.

Le but du présent travail est d'évaluer les possibilités de la résolution simultanée quand on ne dispose pas d'un gradient analytique. L'enjeu est de pouvoir réaliser des calculs d'optimisation efficaces sans avoir préalablement calculé les dérivées liées à un modèle numérique. Il faut donc remplacer le gradient de la fonction coût par des différences divisées. Or l'idée de résolution simultanée suppose que l'on ne calcule pas avec précision la fonction coût au cours des itérations, mais que l'on réalise seulement quelques étapes (itératives) de son calcul.

Nous considérons aussi l'utilisation d'une paramétrisation multiniveau pour l'optimisation de formes [Beu93], qui consiste à ne pas utiliser tous les paramètres de contrôle à chaque itération d'optimisation. L'utilisation d'un nombre réduit de paramètres de contrôle sur des "niveaux grossiers" permettra notamment de réduire le coût lié à l'utilisation de différences divisées pour le calcul du gradient, puisque la complexité du calcul est directement proportionnelle au nombre de paramètres de contrôle.

2 Un problème modèle en aérodynamique

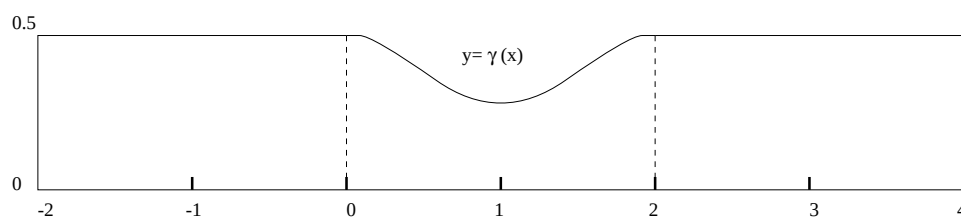


FIG. 1 – Géométrie de la tuyère.

Le problème choisi pour cette étude préliminaire contient certaines des caractéristiques importantes d'un problème d'optimisation de forme en aérodynamique: équation d'état suffisamment complexe, variation du maillage, notamment.

Il s'agit de résoudre des problèmes inverses liés à la forme d'une tuyère 2D dont la section est constante en entrée et en sortie, la section médiane étant variable (figure 1).

Des variantes de ce problème sont étudiées dans ECARP ([Beu94][MD95]).

La formulation du problème de conception optimale de formes est faite sous la forme de problème de contrôle optimal. Nous considérons donc un contrôle γ qui

définit la forme du domaine (figure 1), ainsi qu'une fonctionnelle coût à optimiser.

Soit Γ_{ad} un ensemble de paramétrisations inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^2)$. A chaque γ dans Γ_{ad} correspond un domaine régulier Ω_γ de $\mathbb{R}^2$, dont le bord est également noté γ .

Nous considérons ici la fonctionnelle:

$$\begin{aligned} J : \Gamma_{ad} \times H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, w) &\longmapsto J(\gamma, w) = \int_\gamma (P(w) - P^c)^2 d\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

où P^c est la pression obtenue sur le profil cible.

Le problème à résoudre s'écrit:

$$\text{Trouver } \gamma_0 \text{ dans } \Gamma_{ad} \text{ tel que } j(\gamma_0) = \min_{\gamma \in \Gamma_{ad}} j(\gamma) \quad (2)$$

avec

$$j(\gamma) = J(\gamma, W(\gamma)) \quad (3)$$

où J est la fonctionnelle coût à minimiser et $W(\gamma)$ désigne la solution du problème de mécanique des fluides associé au paramètre de contrôle γ . Cette solution est obtenue par résolution des équations d'Euler en variables conservatives (pour des écoulements stationnaires):

$$\Psi(\gamma, W) = 0 \quad (4)$$

où

$$\Psi(\gamma, W) = \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \text{Conditions aux bords} \quad (5)$$

avec :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix} \quad (6)$$

où ρ est la masse volumique, u et v les composantes de la vitesse selon les axes x et y , p la pression, e l'énergie totale, et H l'enthalpie. Les deux dernières quantités sont reliées par l'équation suivante :

$$H = \frac{e + p}{\rho} \quad (7)$$

On ferme le système en utilisant l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$p = (\kappa - 1)[e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)] \quad (8)$$

où κ désigne le rapport des capacités calorifiques, supposé constant (gaz caloriquement parfait), et égal à 1.4 si le gaz est diatomique. La vitesse du son s'exprime comme suit :

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} \quad (9)$$

3 Conditions d'optimalité en continu

La fonctionnelle j étant à valeurs réelles, il est possible d'exprimer son gradient à l'aide d'un état adjoint.

La dérivée *formelle* au sens de Fréchet de (3) est, dans la direction $\delta\gamma$, $\delta\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$:

$$\langle j'(\gamma), \delta\gamma \rangle = \langle \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\gamma, W), \delta\gamma \rangle + \langle \frac{\partial J}{\partial W}(\gamma, W), \frac{dW}{d\gamma}(\gamma) \delta\gamma \rangle \quad (10)$$

En utilisant la différentiation du flux $\Psi(\gamma, W)$, (10) devient :

$$\begin{aligned} \langle j'(\gamma), \delta\gamma \rangle &= \langle \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\gamma, W), \delta\gamma \rangle \\ &\quad - \langle ((\frac{\partial \Psi}{\partial W}(\gamma, W))^{-1})^* \frac{\partial J}{\partial W}(\gamma, W), \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\gamma, W) \delta\gamma \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

ou encore

$$\langle j'(\gamma), \delta\gamma \rangle = \langle \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\gamma, W), \delta\gamma \rangle - \langle \Pi, \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\gamma, W) \delta\gamma \rangle \quad (12)$$

où Π est l'*état adjoint*, solution du système:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W}(\gamma, W)\right)^* \Pi = \frac{\partial J}{\partial W}(\gamma, W) \quad (13)$$

Grâce à l'introduction d'un état adjoint, le problème d'optimisation à résoudre est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi(\gamma, W) & = 0 \\ & \text{(équation d'état)} \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial W}(\gamma, W)\right)^* \Pi & = \frac{\partial J}{\partial W}(\gamma, W) \\ & \text{(équation d'état adjoint)} \\ j'(\gamma) = \frac{\partial J}{\partial \gamma}(\gamma, W) - \langle \Pi, \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}(\gamma, W) \rangle & = 0 \\ & \text{(condition d'optimalité)} \end{array} \right. \quad (14)$$

Le problème de minimisation a donc été transformé en un système d'optimalité (14) dont les inconnues sont le contrôle optimal γ_{opt} , l'état W_{opt} et l'état adjoint Π_{opt} correspondants.

La manière dont sont calculées les dérivées partielles du système (14) est décrite dans la section suivante.

4 Discrétisation

4.1 Approximation

Pour discrétiser le bilan des flux Ψ , nous utilisons une formulation volumes finis décentrée en triangles ([FS86]), où, pour chaque noeud j , nous avons (pour une approximation spatiale du premier ordre):

$$\Psi_{Euler}(W_j^n) = \sum_{k \in V(j)} \Phi(W_j^n, W_k^n, \vec{\eta}_{jk}) + \text{Conditions aux bords} \quad (15)$$

où $V(j)$ est l'ensemble des noeuds voisins de j , ∂C_j le bord de la cellule volumes finis associée au noeud j , $\partial C_{jk} = \partial C_j \cap \partial C_k$, $\vec{\eta}_{jk} = \int_{\partial C_{jk}} \vec{n} d\sigma$ et $\vec{n}$ la normale

extérieure à ∂C_j .

Nous avons choisi pour Φ la décomposition du vecteur flux de Van Leer (voir [Fez85]):

$$\Phi(W_j^n, W_k^n, \vec{\eta}_{jk}) = \|\vec{\eta}_{jk}\| R^{-1} [F^+(\widehat{W}_j) + F^-(\widehat{W}_k)] \quad (16)$$

où nous utilisons les quantités suivantes:

$$\cos \theta = \frac{\eta_{jk}^x}{\|\vec{\eta}_{jk}\|}; \sin \theta = \frac{\eta_{jk}^y}{\|\vec{\eta}_{jk}\|} \quad (17)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_n = \rho(u \cos \theta + v \sin \theta) \\ \rho v_n = \rho(-u \sin \theta + v \cos \theta) \\ e \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$F^+(\widehat{W}) = \begin{cases} F(\widehat{W}) & \text{si } \frac{u_n}{c} \geq 1 \\ \begin{pmatrix} \frac{\rho \cdot c}{4} \left(\frac{u_n}{c} + 1 \right)^2 = F_1^+ \\ \frac{F_1^+}{\kappa} ((\kappa - 1)u_n + 2c) \\ F_1^+ \left(\frac{((\kappa - 1)u_n + 2c)^2}{2(\kappa^2 - 1)} + \frac{u_n^2}{2} \right) \end{pmatrix} & \text{si } \left| \frac{u_n}{c} \right| < 1 \\ 0 & \text{si } \frac{u_n}{c} \leq -1 \end{cases} \quad (20)$$

et avec $F^-(\widehat{W}) = F(\widehat{W}) - F^+(\widehat{W})$.

Les deux vecteurs F^- et F^+ ainsi construits possèdent les propriétés suivantes (voir la thèse de Steve [Ste88] pour plus de détails):

- a. $F = F^+ + F^-$.
- b. Les valeurs propres de F^+ (resp. F^-) sont positives (resp. négatives).
- c. F^+ et F^- sont continuellement différentiables.

Nous avons besoin de cette dernière propriété pour pouvoir calculer un état adjoint, afin d'effectuer des validations des différences divisées et des comparaisons entre les deux méthodes.

4.2 Algorithme de résolution

La solution du problème stationnaire (4) est obtenue comme limite asymptotique (le temps tend vers l'infini) d'une solution instationnaire des équations d'Euler, écrites en continu de la manière suivante:

$$\begin{cases} W_t + \Psi(W) = 0 \\ \text{Conditions initiales} \\ \text{Conditions aux bords} \end{cases} \quad (21)$$

La condition initiale peut être un écoulement uniforme ou un écoulement précédemment calculé.

Le schéma totalement implicite s'écrit, après discrétisation temporelle:

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t^n} + \Psi(W^{n+1}) = 0 \quad (22)$$

où $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ est le pas de discrétisation en temps (il peut être constant ou variable), et $W^n = W(\vec{x}, t^n)$.

La linéarisation du flux $\Psi(W)$ à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre un en temps donne, lorsque le flux est une fonction différentiable:

$$\Psi(W^{n+1}) = \Psi(W^n) + \Psi'(W^n)\delta W^{n+1} + O(\Delta t^2) \quad (23)$$

avec $\delta W^{n+1} = W^{n+1} - W^n$.

On en déduit alors la forme linéarisée du schéma implicite (22):

$$\left(\frac{Id}{\Delta t^n} + \Psi'(W^n) \right) \delta W^{n+1} = -\Psi(W^n) \quad (24)$$

Id est la matrice identité de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$. Lorsque le pas de temps est infiniment grand, l'algorithme (24) devient une méthode de Newton pour le calcul des zéros de $\Psi(W)$.

A chaque pas de temps, nous devons donc résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} M^n \delta W^{n+1} &= -\Psi(W^n) \\ W^{n+1} &= W^n + \delta W^{n+1} \end{aligned} \tag{25}$$

avec $M^n = \frac{Id}{\Delta t^n} + \Psi'(W^n)$. Ce système linéaire est résolu par des méthodes de relaxation, Jacobi ou Gauss-Seidel. Une analyse de stabilité est décrite dans [Ste88].

Remarque 1

1. Le schéma implicite linéarisé décentré d'ordre un (24) est inconditionnellement stable pour le cas scalaire linéaire ([Sto84]).
2. Le schéma (24) est précis au premier ordre en temps et en espace. En pratique, pour obtenir les solutions stationnaires, on utilise un pas de temps local et une approche MUSCL. Dans ce cas, le schéma est seulement précis à l'ordre un en temps mais la solution stationnaire obtenue est précise à l'ordre deux ([Sto84]).

4.3 Géométrie discrète

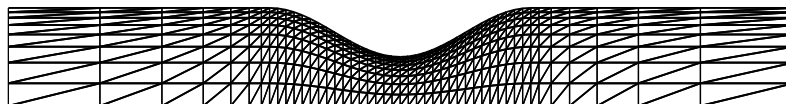


FIG. 2 – Maillage en accordéon de la tuyère avec 423 noeuds.

Nous considérons la tuyère représentée à la figure 1. La partie à optimiser se trouve dans l'intervalle $x \in [0,2]$. Dans cet intervalle, l'ordonnée y est considérée comme étant fonction de l'abscisse x . Cette dépendance est la suivante, pour le maillage représenté à la figure 2:

$$y(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{26}$$

Lorsque nous effectuons des déformations sur ce maillage, les abscisses restent fixes et les ordonnées sont uniquement modifiées pour les points de la partie $x \in [0,2]$,

de façon à obtenir un maillage "en accordéon", c'est à dire un maillage pour lequel nous avons la propriété suivante:

$$\forall i \in \{1, \dots, l\}, y_i(x) = \frac{y_i(0)}{y_l(0)} y_l(x) \quad (27)$$

où l désigne le nombre de points en abscisse dans l'intervalle $[0, 2]$, et $y_i(x)$ le i -ème point en ordonnée d'abscisse x .

Les paramètres de contrôle sont, ici, les ordonnées des noeuds qui appartiennent à la partie de la frontière à optimiser: $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$.

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto j(\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{4m} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, w) &\longmapsto J(\gamma, w) \end{aligned}$$

où l est le nombre de paramètres de contrôle et m le nombre de noeuds du maillage.

Le problème d'optimisation continu (2) devient alors:

$$\text{Trouver } \gamma_0 \text{ dans } \mathbb{R}^l \text{ tel que } j(\gamma_0) = \min_{\gamma \in \mathbb{R}^l} j(\gamma) \quad (28)$$

4.4 Calcul du gradient en utilisant l'état adjoint

Dans ce document, nous nous plaçons dans le cadre de la résolution de problèmes inverses. Cela consiste à retrouver un profil "cible" (désigné par γ_c), pour lequel nous connaissons la distribution de pression (appelée P^c), à partir d'un profil différent. Cette approche nous permet de valider notre méthode car nous connaissons à l'avance la valeur optimale de la fonctionnelle coût (elle doit être nulle) et le profil optimal. Pour résoudre un tel problème d'optimisation, nous définissons $j(\gamma)$ par:

$$j(\gamma) = \int_{\Gamma} (P - P^c)^2 d\sigma$$

où P désigne la pression sur le profil courant, P^c la pression désirée et Γ le profil.

4.4.1 Calcul de la fonctionnelle coût et de ses dérivées

La discrétisation de la fonctionnelle coût s'effectue de la façon suivante:

$$j(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} (P - P^c)^2 d\sigma \quad (29)$$

où n est le nombre de noeuds qui définissent le profil.

Ce qui donne:

$$j(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (P - P^c)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (30)$$

En utilisant la formule du trapèze pour calculer l'intégrale, nous obtenons:

$$j(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \|\vec{\eta}_i\| ((P_{i+1} - P_{i+1}^c)^2 + (P_i - P_i^c)^2) \quad (31)$$

où $\vec{\eta}_i$, la normale extérieure à Γ_i , est la seule quantité qui dépend explicitement de γ . Donc:

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_k}(\gamma, W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} ((P_{i+1} - P_{i+1}^c)^2 + (P_i - P_i^c)^2) \frac{\partial \|\vec{\eta}_i\|}{\partial \gamma_k} \quad (32)$$

Comme nous considérons un maillage en accordéon, défini par la relation (27), il vient, en posant:

$$G_i = \frac{1}{2} ((P_{i+1} - P_{i+1}^c)^2 + (P_i - P_i^c)^2) \frac{y_{i+1} - y_i}{\|\vec{\eta}_i\|} \quad (33)$$

que

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_k}(\gamma, W) = G_{k-1} - G_k \quad (34)$$

Pour calculer la dérivée partielle de J par rapport à W , il faut d'abord écrire J sous la forme:

$$J(\gamma, W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\vec{\eta}_i\| (P_i - P_i^c)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n+1} \|\vec{\eta}_{i-1}\| (P_i - P_i^c)^2 \quad (35)$$

En posant $a_0 = a_{n+1} = 0$ et $a_i = \|\vec{\eta}_i\|$ pour $i = 1, \dots, n$, on obtient:

$$J(\gamma, W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (a_i + a_{i-1})(P_i - P_i^c)^2 \quad (36)$$

Ce qui donne finalement, pour la dérivée:

$$\frac{\partial J}{\partial W_k}(\gamma, W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (a_i + a_{i-1})(P_i - P_i^c) \frac{\partial P_i}{\partial W_k} \quad (37)$$

en sachant que:

$$\frac{\partial P}{\partial W} = (\kappa - 1) \begin{pmatrix} \frac{u^2 + v^2}{2} \\ -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

4.4.2 Calcul de l'état adjoint et du gradient

Pour calculer l'état adjoint, il faut résoudre le système linéaire suivant:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial W}(\gamma, W)\right)^* \Pi = \frac{\partial J}{\partial W}(\gamma, W) \quad (39)$$

où la matrice $\frac{\partial \Psi}{\partial W}$ a déjà été calculée lors de la résolution des équations d'Euler, et peut donc être directement déduite de l'équation (24).

Pour obtenir j' , il reste à calculer la matrice $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}$. Ce calcul est fait en même temps que l'évaluation du flux Ψ , lors du calcul de l'état, car les seules quantités dépendant explicitement des paramètres de contrôle sont les normales $(\vec{\eta}_{jk})$ dans l'équation (16). Les dérivées de ces normales sont faciles à calculer du fait des propriétés du maillage en accordéon (équation (27)).

5 Méthode d'optimisation avec gradient

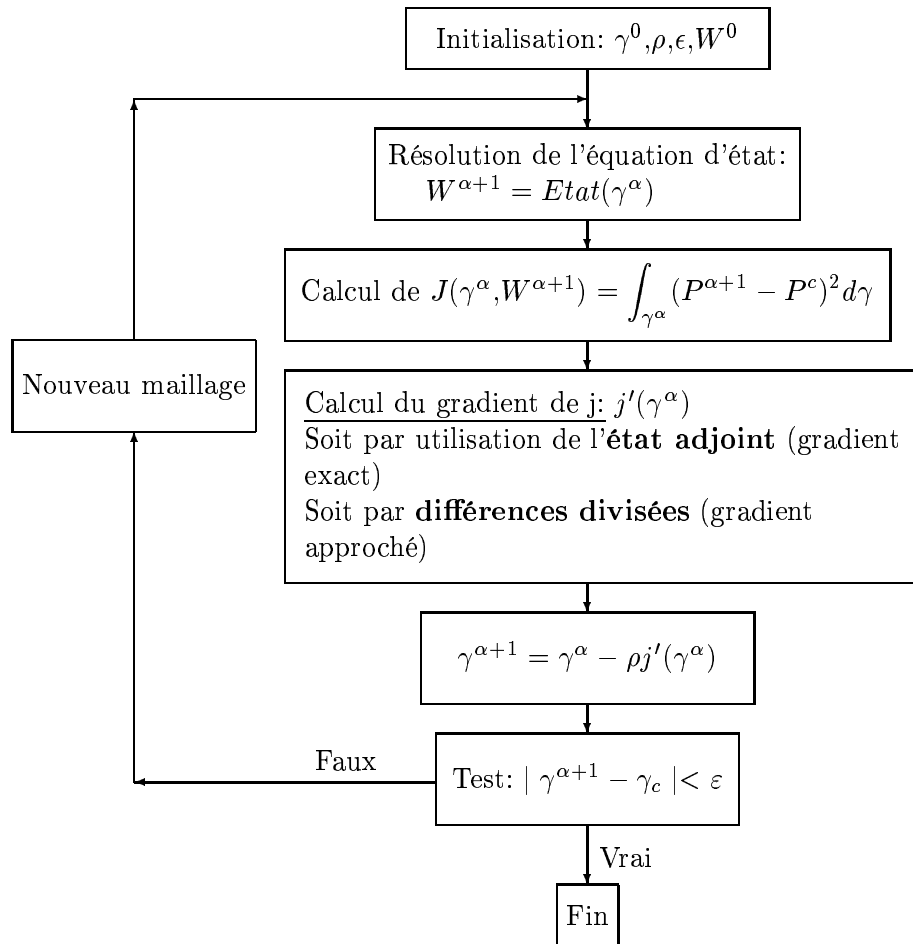


FIG. 3 – Description de l'algorithme d'optimisation de référence.

Nous présentons à la figure 3 ce que nous considérons comme notre algorithme d'optimisation de référence.

6 Méthode One-Shot

La méthode One-Shot a été introduite par Ta'asan ([Ta'91]). Dans sa présentation, la méthode One-Shot est appliquée à des problèmes de contrôle optimal liés à des équations aux dérivées partielles elliptiques, ou à des systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Elle a ensuite été étendue à des problèmes d'optimisation de profils d'ailes dans [KTS94].

La variante à laquelle nous nous référons dans ce document est due à Marco et Beux ([MB93]) et consiste en l'itération simultanée sur les états par relaxation, et sur la variable de contrôle par un simple pas de (pseudo) gradient. Le terme pseudo est employé ici pour rappeler que l'expression manipulée ne sera rigoureusement le gradient de la fonctionnelle coût qu'au terme de la convergence de l'algorithme One-Shot.

Cette variante, dont l'algorithme est présenté à la figure 4, diffère essentiellement de la méthode présentée dans [KTS94] au niveau du calcul du pas de descente à chaque itération d'optimisation.

En effet, nous avons utilisé, dans un premier temps, un pas de descente (ρ dans la figure 4) constant au cours des itérations d'optimisation, alors que Ta'asan calcule un pas optimal à chaque itération, en utilisant une approximation BFGS [Fle85] de la Hessienne de la fonctionnelle coût (c'est à dire la matrice des dérivées secondes de la fonctionnelle coût par rapport aux paramètres de contrôle). Le choix que nous avons effectué nécessite donc des tests préalables au calcul d'optimisation, afin d'obtenir un pas constant "optimal", c'est à dire un pas constant qui permette d'obtenir une convergence aussi rapide que possible.

Mais ces calculs préliminaires représentent un pré-traitement pouvant être très important en terme de temps. C'est pourquoi, dans une seconde phase, nous avons décidé d'utiliser un pas de descente variable au cours des itérations d'optimisation. La stratégie que nous employons pour la variation du pas de descente est exposée dans la suite du document.

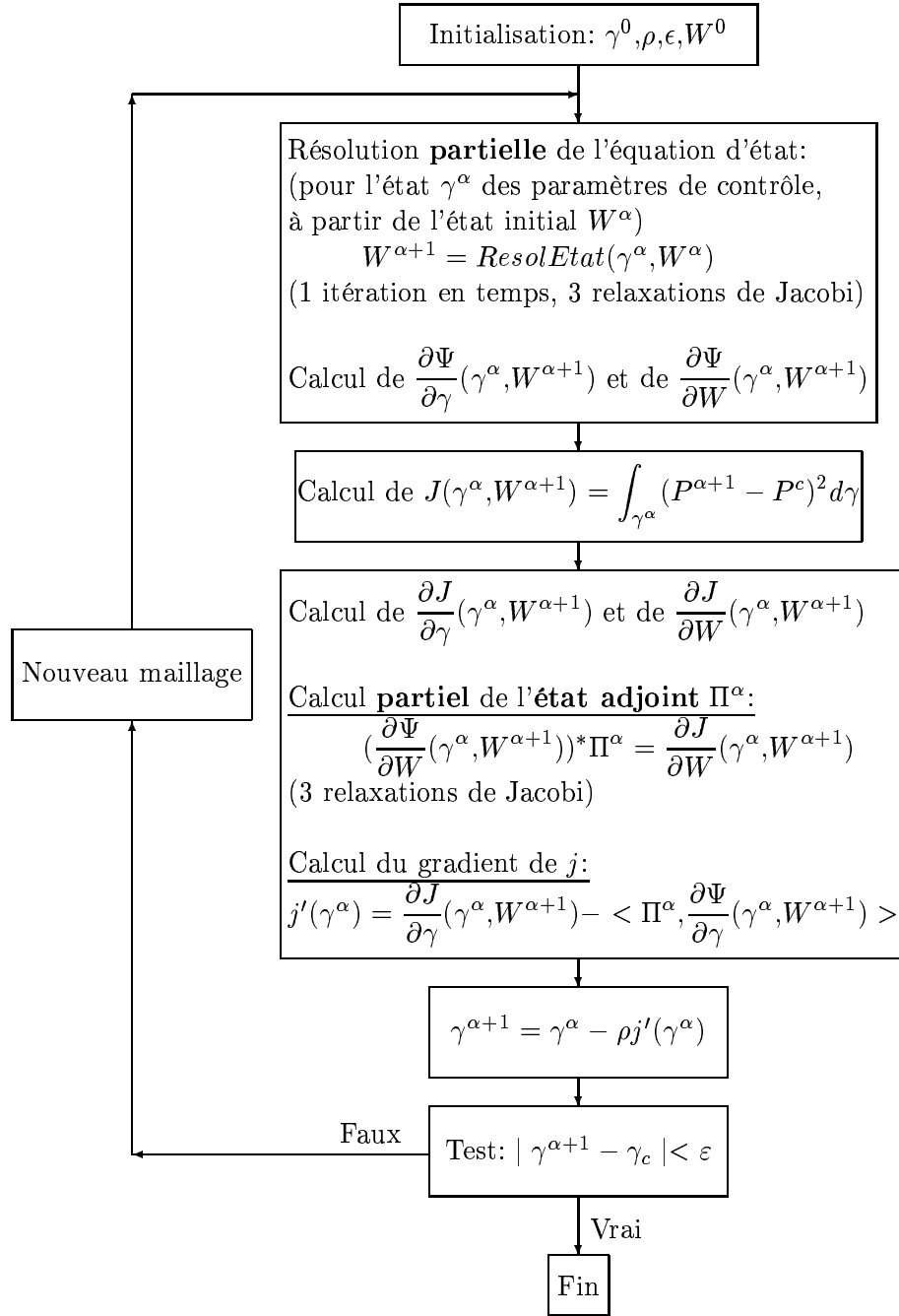


FIG. 4 – Description de l'algorithme d'optimisation One-Shot avec gradient.

7 Méthode multiniveau

Dans de nombreux cas, la vitesse de convergence et le coût de l'algorithme d'optimisation, que l'on utilise la méthode One-Shot ou pas, dépendent fortement du nombre de paramètres de contrôle. Avec peu de paramètres de contrôle, la convergence est rapide et les différences divisées sont abordables, mais les solutions correspondant à des formes assez éloignées des formes optimales. Avec beaucoup de paramètres, la convergence est lente, les différences divisées coûteuses, mais les formes obtenues précises.

Dans cette partie, nous envisageons une méthode multiniveau faisant varier le nombre de paramètres de contrôle. Dans cette méthode, initiée dans [Beu93], où les niveaux multiples portent uniquement sur le contrôle (un seul niveau pour l'état et l'état adjoint).

Le système (14) est résolu alternativement sur ces différents niveaux, en fonction du type d'alternance choisi (voir figure 5).

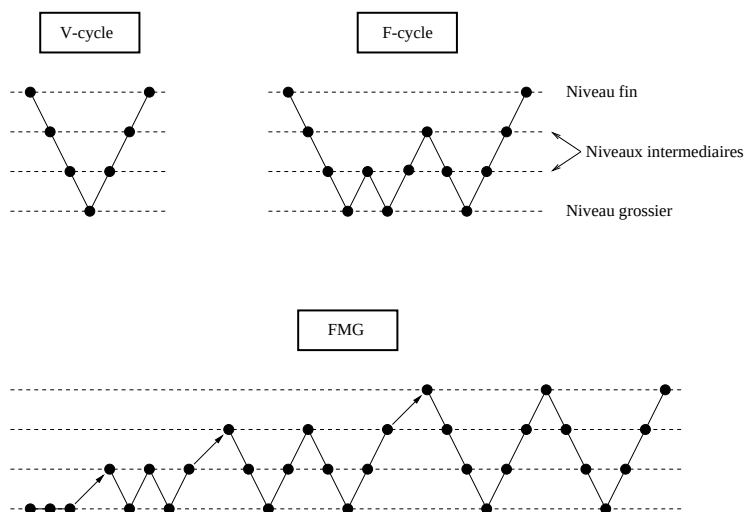


FIG. 5 – Présentation des trois types de cycles utilisés pour la méthode multiniveau: V-cycle, F-cycle et FMG avec V-cycles.

Pour une paramétrisation emboîtée de la forme, représentée à la figure 6, nous avons besoin de définir un opérateur de prolongement d'un niveau grossier (1 à 15 paramètres de contrôle) vers le niveau fin (que nous avons choisi à 31 paramètres

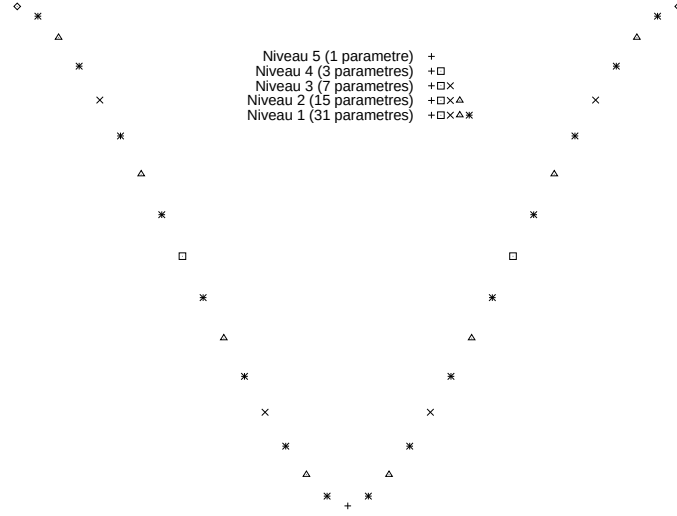


FIG. 6 — Schéma de paramétrisation de la forme γ . Au niveau 3, par exemple, 7 points sont contrôlés, les autres étant interpolés en deux phases: construction des points désignés par des triangles, puis construction des points désignés par des doubles croix.

de contrôle, c'est à dire le nombre de points du maillage sur la forme à optimiser). Pour cela, nous utilisons un polynôme d'interpolation P de degré 3 (polynôme de Hermite), défini sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par:

$$\begin{cases} P(x_i) = \gamma_i \\ P(x_{i+1}) = \gamma_{i+1} \\ P'(x_i) = \gamma'_i \\ P'(x_{i+1}) = \gamma'_{i+1} \end{cases} \quad (40)$$

où la dérivée γ'_i est calculée par une différence finie centrée d'ordre deux (pour le cas de la tuyère, les paramètres de contrôle sont équidistants):

$$\gamma'_i = \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad (41)$$

En notant x_j le point milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$, et $(P\gamma)_j$ l'interpolé en ce point, nous avons ([Beu94]):

$$(P\gamma)_j = \frac{9}{16}(\gamma_{i+1} + \gamma_i) - \frac{1}{16}(\gamma_{i+2} + \gamma_{i-1}) \quad (42)$$

pour tous les segments composant le profil à optimiser (le traitement des segments aux extrémités de la partie à optimiser fait en sorte que les dérivées γ' soient nulles). Pour un niveau grossier, seuls quelques points sont de véritables paramètres de contrôle pour l'algorithme d'optimisation, les autres points étant interpolés via (42), en commençant par créer la grille immédiatement plus fine, puis la suivante, et ainsi de suite pour obtenir la grille la plus fine, c'est à dire celle qui possède le même nombre de points que la partie du profil à optimiser.

A la figure 6, nous avons commencé avec le niveau le plus grossier (1 paramètre de contrôle), puis nous avons construit successivement les niveaux plus fins par itérations successives du processus. Ceci permet d'obtenir des courbes discrètes lisses (voir [DD89] et [DGL91]) selon une théorie d'interpolation subdivisée.

A la figure 7, nous présentons l'algorithme de la méthode d'optimisation multi-niveau, avec calcul du gradient exact de la fonctionnelle coût.

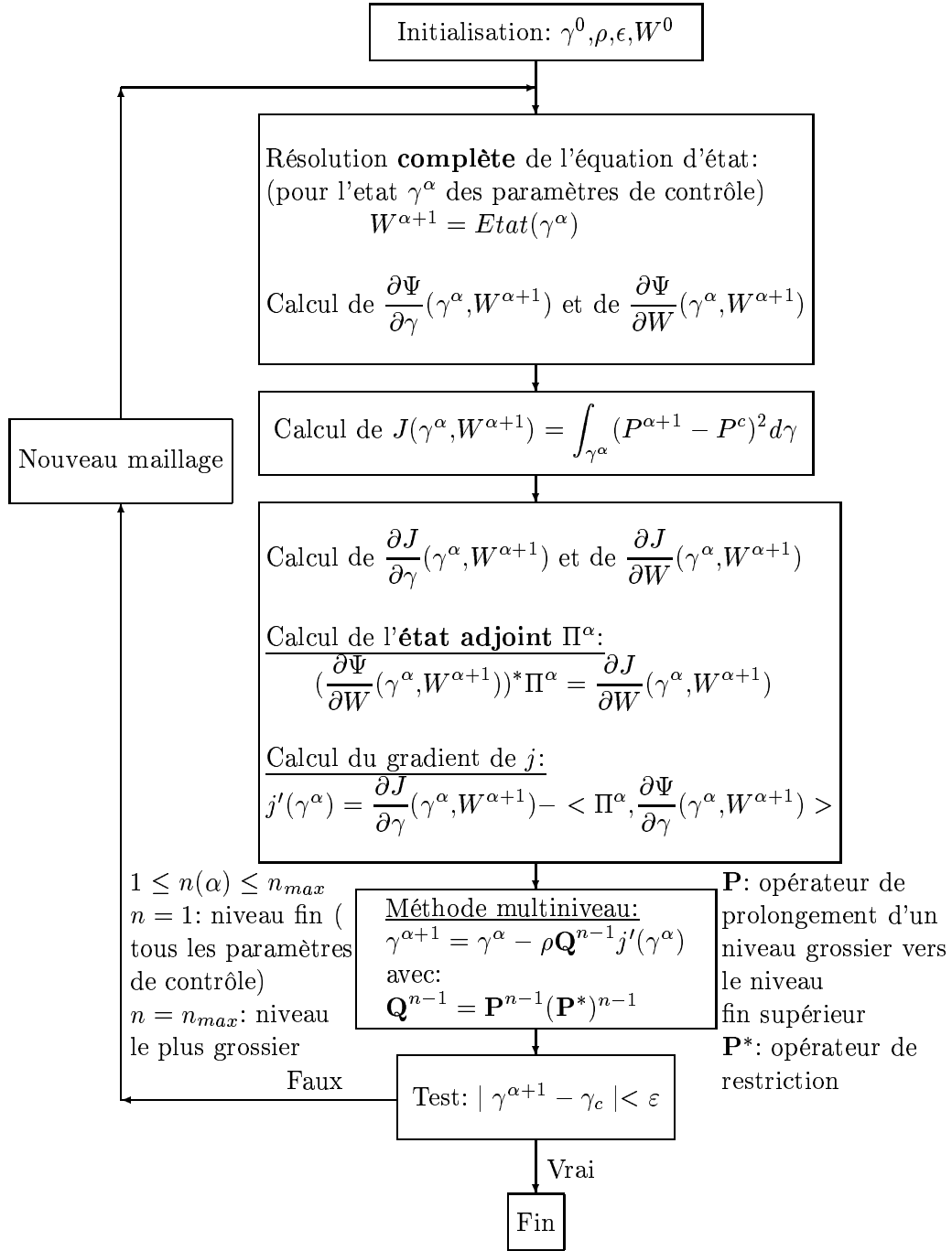


FIG. 7 – Description de l'algorithme d'optimisation multiniveau avec gradient.

8 Différences divisées

Dans la perspective d'une utilisation des différences divisées, il est utile de rappeler comment ces différences sont classiquement utilisées.

Un algorithme de gradient avec pas constant et différences divisées pour la résolution du problème de minimisation (2) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \gamma^\alpha, W^\alpha, \sigma, \rho \in]0,1[\\
 (b) \quad & \text{pour } i \text{ variant de 1 au nombre de paramètres de contrôle:} \\
 & \quad W_i^\alpha = \text{Etat}(\gamma^\alpha + \sigma.e_i) \\
 & \quad \delta j_i^\alpha = (J(\gamma^\alpha + \sigma.e_i, W_i^\alpha) - J(\gamma^\alpha, W^\alpha))/\sigma \\
 (c) \quad & \gamma^{\alpha+1} = \gamma^\alpha - \rho.\delta j^\alpha \\
 & \quad W^{\alpha+1} = \text{Etat}(\gamma^{\alpha+1}) \\
 (d) \quad & \text{si le critère d'arrêt n'est pas vérifié, retour à (a)}
 \end{aligned} \tag{43}$$

où γ^α désigne l'état des paramètres de contrôle à l'itération α , e_i le vecteur de base lié au i -ème paramètre de contrôle, ρ le pas de descente, σ le "petit" paramètre lié aux différences divisées, et où le critère d'arrêt peut porter sur la norme du gradient approché (qui tend vers 0) ou sur la fonctionnelle (si, par exemple, celle-ci doit être nulle pour le minimum).

Nous proposons d'étudier numériquement un algorithme de résolution simultanée où la résolution complète de l'état est remplacée par la *résolution itérative partielle* du problème fluide pour les paramètres de contrôle $\gamma_{\alpha+1}$ en utilisant comme état initial W_α . Dans le cas où cette résolution partielle se réduit à un seul pas de temps, nous ne recalculons pas la matrice M^n (voir équation (25)) pour chaque composante du pseudo gradient, car elles résultent toutes du même champ initial, à de très petites déformations de maillage près. Plus exactement, nous calculons par différences divisées le gradient d'une fonctionnelle approchée:

$$j_{app}^\alpha(\gamma^\alpha) = J(\gamma^\alpha, W_{app}^\alpha) \tag{44}$$

où $W_{app}^\alpha = \text{ResolEtat}(\gamma^\alpha, W^\alpha)$. Cet algorithme est présenté à la figure 8.

Dans cette option, prendre un σ trop petit rend le calcul de l'état insensible aux variations du contrôle dès les premières itérations. En revanche, à convergence, le

paramètre σ doit être petit pour obtenir les conditions d'optimalité (convergence des différences divisées vers le gradient). Il est donc naturel d'ajouter σ à la liste des variables itérées par l'algorithme. On pose donc $\sigma = \sigma^\alpha$ dont l'évolution vers zéro s'effectue en fonction de la norme du pseudo gradient de la façon suivante:

$$\sigma^{\alpha+1} = \rho \|\delta j^\alpha\|/2 \quad (45)$$

Mais l'utilisation de la méthode One-Shot n'est pas suffisante. En effet, l'utilisation des différences divisées implique une complexité du calcul du gradient proportionnelle au nombre de paramètres de contrôle utilisé, contrairement à une méthode utilisant un état adjoint (complexité indépendante du nombre de paramètres de contrôle). C'est pourquoi nous combinons maintenant la méthode One-Shot à la méthode multiniveau présentée à la section 7. Cela permet de travailler à certains moments sur des niveaux grossiers, donc de réduire notablement le coût du calcul du gradient. L'algorithme de la méthode One-Shot multiniveau avec différences divisées est présenté à la figure 9.

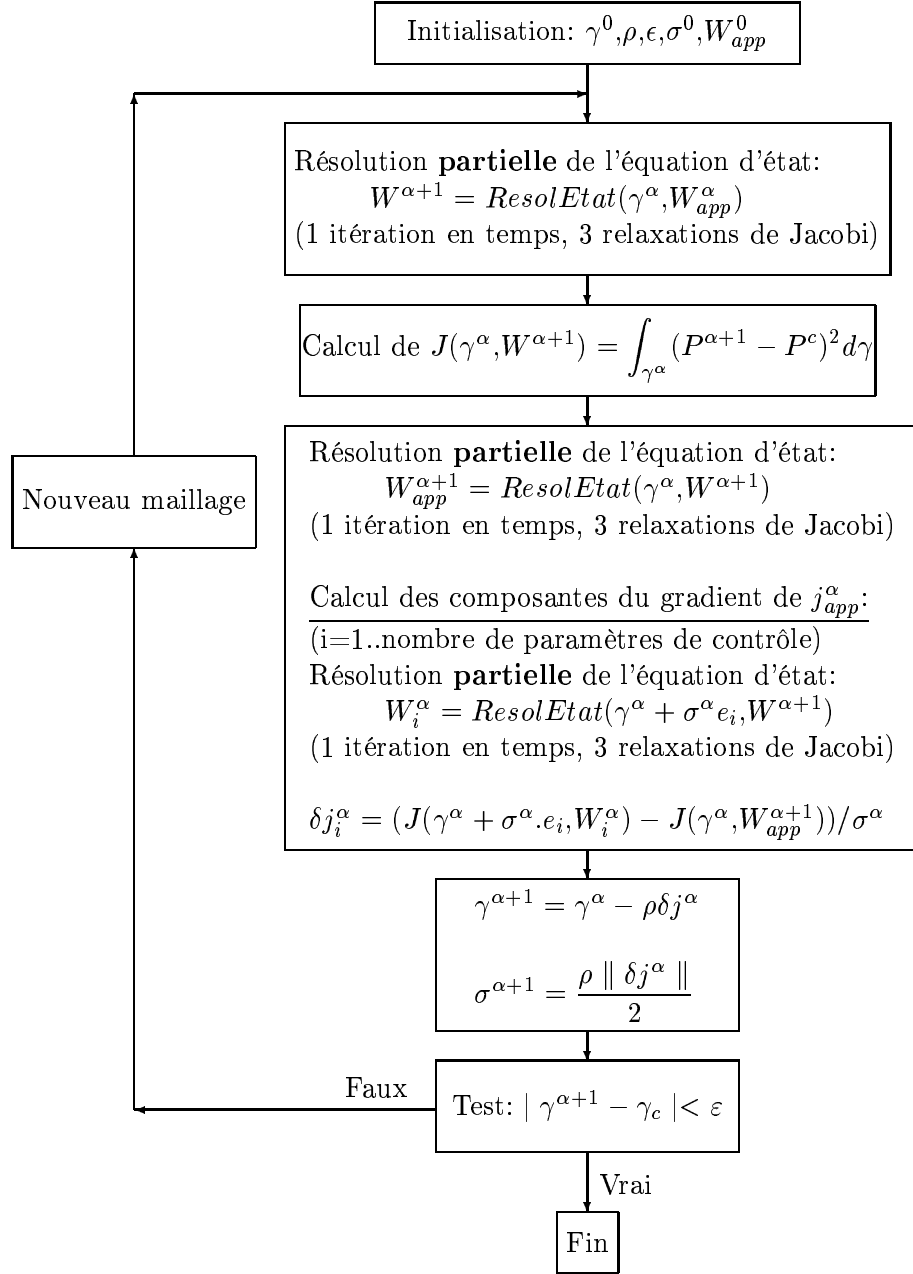


FIG. 8 – Description de l'algorithme d'optimisation One-Shot en différences divisées.

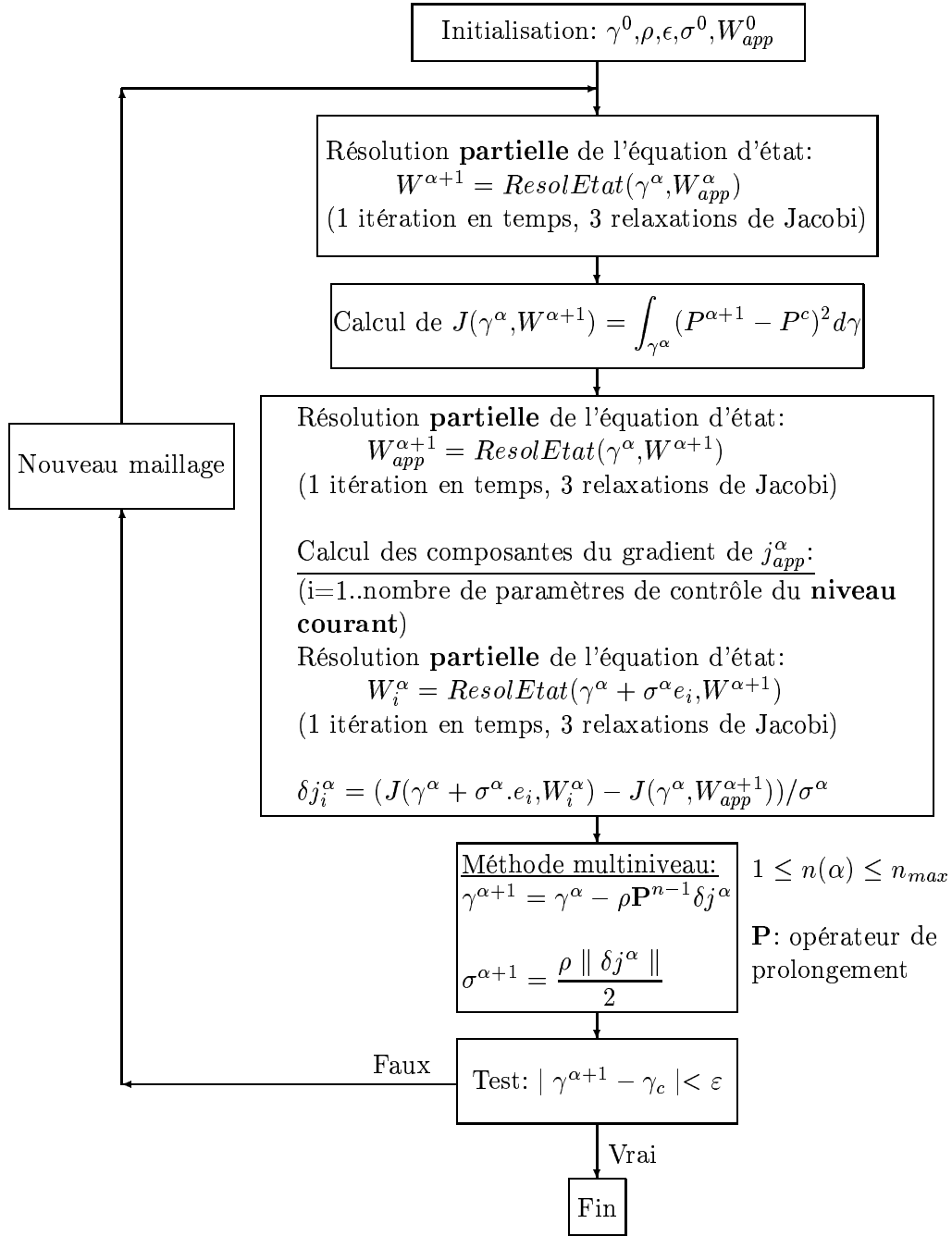


FIG. 9 – Description de l'algorithme d'optimisation One-Shot multiniveau en différences divisées.

9 Utilisation d'un pas de descente variable

Tous les algorithmes que nous avons décrits utilisent un pas de descente constant. Cette méthode demande un certain nombre de calculs préalables pour fixer la "bonne" valeur de ce pas, c'est à dire une valeur qui permet de faire converger le calcul en un temps raisonnable. L'introduction d'un pas de descente variable a pour objectif de se dispenser de ces essais préalables.

Nous présentons ci-dessous notre méthode de variation du pas de descente.

9.1 Calcul d'un pas "optimal" pour un niveau donné

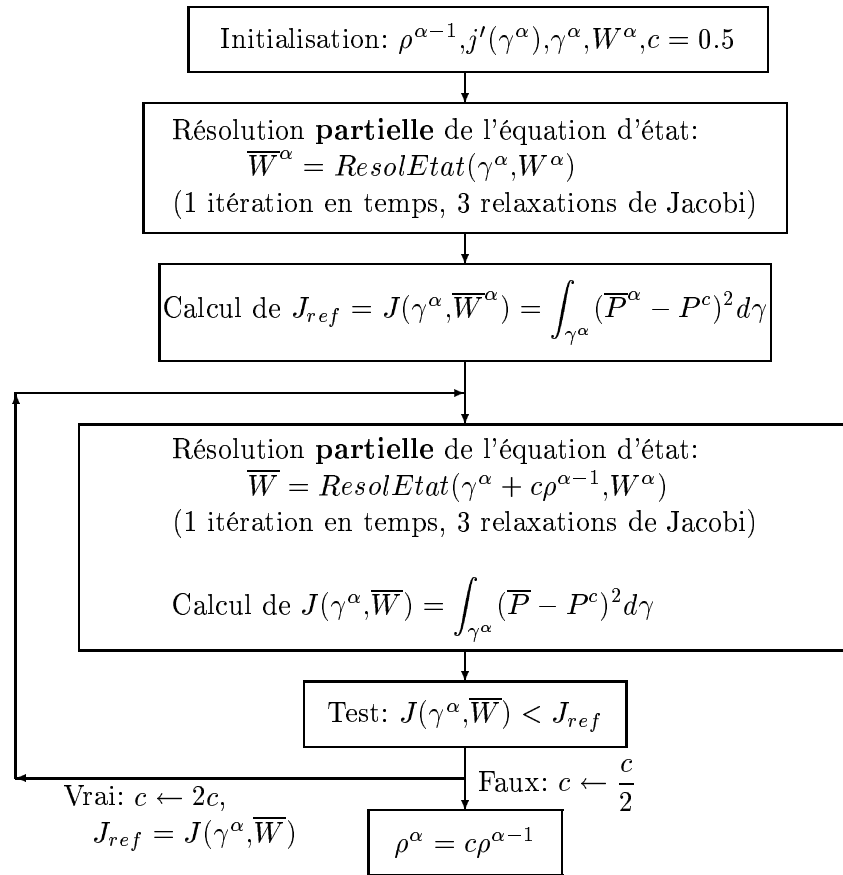


FIG. 10 – Description de l'algorithme de variation du pas de descente, présenté pour la méthode One-Shot.

Nous présentons à la figure 10 l'algorithme de calcul d'un pas de descente "optimal" pour un niveau (donc un pseudo-gradient) donné. La méthode consiste en une recherche itérative d'un pas faisant diminuer le plus possible la fonctionnelle coût. La recherche du pas le plus "optimal" pouvant se révéler assez coûteuse, nous limitons à 3 le nombre d'itérations de cet algorithme.

La boucle présentée à la figure 10 s'insère dans les algorithmes précédents juste avant l'évolution des paramètres de contrôle.

9.2 Variation du pas lors des changements de niveau

Pour une paramétrisation emboîtée de la forme, représentée à la figure 6, nous avons défini un opérateur de prolongement d'un niveau grossier V_n vers le niveau fin V_{2n-1} , noté P et défini par:

$$\begin{cases} P(x_j) &= \gamma_j \\ P(x_{j+1}) &= \gamma_{j+1} \\ P'(x_j) &= \gamma'_j \\ P'(x_{j+1}) &= \gamma'_{j+1} \end{cases} \quad (46)$$

pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, où

$$\gamma'_j = \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_{j-1}}{2(x_{j+1} - x_j)} \quad (47)$$

Ce qui nous donne l'interpolé suivant, pour le milieu du segment $[x_j, x_{j+1}]$:

$$(P\gamma)_i = \frac{9}{16}(\gamma_{j+1} + \gamma_j) - \frac{1}{16}(\gamma_{j+2} + \gamma_{j-1}) \quad (48)$$

Nous voulons maintenant déterminer l'opérateur de restriction associé. Cet opérateur P^* est l'adjoint de l'opérateur de prolongement P , et se déduit de l'expression de P en utilisant le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{V_n}$, grâce à la relation suivante:

$$\begin{aligned} \forall u_{2n-1} \in V_{2n-1}, P^* u_{2n-1} &\in V_n \\ \forall v_n \in V_n, (P^* u_{2n-1}, v_n)_{V_n} &= (u_{2n-1}, P v_n)_{V_{2n-1}} \end{aligned} \quad (49)$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
 (u_{2n-1}, P v_n)_{V_{2n-1}} &= \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i (P v_n)_i (u_{2n-1})_i \\
 &= \sum_{j=1}^n (v_n)_j \left[\alpha_{2j-1} u_{2j-1} + \frac{9}{16} (\alpha_{2j} u_{2j} + \alpha_{2j-2} u_{2j-2}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{16} (\alpha_{2j+2} u_{2j+2} + \alpha_{2j-4} u_{2j-4}) \right]
 \end{aligned} \tag{50}$$

et

$$(P^* u_{2n-1}, v_n)_{V_n} = \sum_{j=1}^n \beta_j (P^* u_{2n-1})_j (v_n)_j \tag{51}$$

où les coefficients $(\alpha_i)_{i=1, 2n-1}$ et $(\beta_j)_{j=1, n}$ sont les longueurs des segments $[x_i, x_{i+1}]$ (niveau fin) et $[x_j, x_{j+1}]$ (niveau grossier). Dans le cas de la tuyère, ces coefficients sont constants par niveau et valent:

$$\begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, 2n-2\}, \alpha_i = \Delta x \ (\alpha_1 = \alpha_{2n-1} = \frac{\Delta x}{2}) \\ \forall j \in \{2, \dots, n-1\}, \beta_j = 2\Delta x \ (\beta_1 = \beta_n = \Delta x) \end{cases} \tag{52}$$

En identifiant (50) et (51), on obtient:

$$(P^* u_{2n-1})_j = \frac{1}{2} \left(u_{2j-1} + \frac{9}{16} (u_{2j} + u_{2j-2}) - \frac{1}{16} (u_{2j+2} + u_{2j-4}) \right) \tag{53}$$

Ce qui signifie, en terme de relation matricielle, que l'on a:

$$P^* = \frac{1}{2} P^t \tag{54}$$

Nous avons déduit de cette relation une méthode de variation de la valeur du pas de descente lors d'un changement de niveau, afin de nous permettre de conserver un suivi de la valeur de ce pas de descente d'un niveau à l'autre. Cette méthode est la suivante:

Restriction: (passage au niveau immédiatement inférieur)

$$\rho_{grossier}^0 = 2\rho_{fin}$$

Prolongement: (passage au niveau immédiatement supérieur)

$$\rho_{fin}^0 = \frac{\rho_{grossier}}{2}$$

où ρ_{xxx} désigne la valeur du pas de descente obtenue pour le niveau traité précédemment (niveau plus fin lors d'une restriction et plus grossier lors d'une prolongation) et ρ_{xxx}^0 la valeur initiale pour la recherche d'un pas de descente "optimal" pour le niveau courant (niveau plus grossier lors d'une restriction et plus fin lors d'une prolongation).

10 Validation: comparaison entre gradient exact et différences divisées

Pour valider le calcul du gradient, nous comparons le calcul avec état adjoint avec celui obtenu par différences divisées. Ces différences divisées s'écrivent:

$$\frac{j(\gamma + \delta\gamma) - j(\gamma)}{\|\delta\gamma\|}$$

et approchent la dérivée de j au sens de Fréchet lorsque la perturbation $\delta\gamma$ est suffisamment petite.

Soit e_k le vecteur de base lié au k -ième paramètre de contrôle, et σ la norme de la perturbation appliquée (voir l'équation (43)).

Nous nous sommes placés dans le cas où le profil cible est celui de la figure 2 (d'équation (26)) et où le profil initial a pour équation:

$$y(x) = \frac{19}{40} + \frac{1}{40} \sin(\pi(x + \frac{1}{2})) \quad (55)$$

Nous avons alors calculé, pour différentes valeurs du paramètre σ , les valeurs $\delta_1^k = \frac{\partial j}{\partial \gamma}$ et $\delta_2^k = \frac{j(\gamma + \sigma e_k) - j(\gamma)}{\sigma}$, pour k variant de 1 au nombre de paramètres de contrôle (ici 31). Tous les calculs ont été effectués jusqu'à la précision machine (état et état adjoint). Nous présentons à la figure 11 les résultats obtenus pour différentes composantes du gradient ($k = 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18$), où nous avons décrit l'évolution de $Q = \log(|\frac{\delta_2^k - \delta_1^k}{\delta_1^k}|)$ en fonction de $\log(\sigma)$.

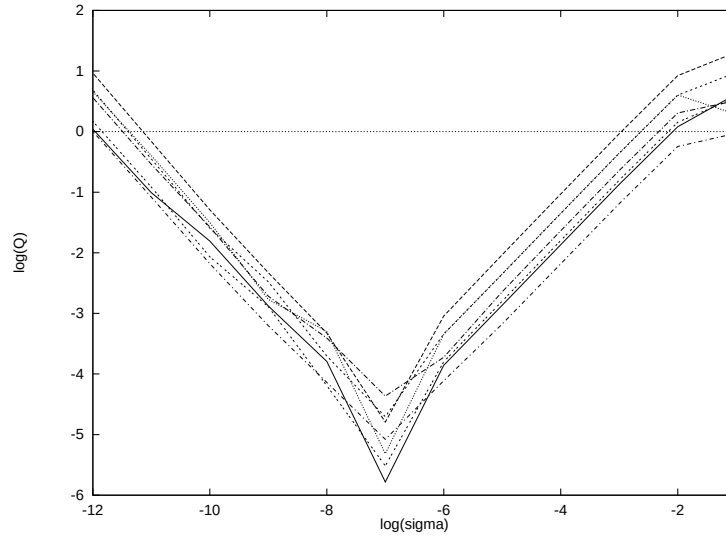


FIG. 11 – *Validation: évolution de l'écart entre le gradient exact et le gradient calculé par différences divisées en fonction de la valeur du paramètre σ .*

A partir de ces résultats, nous pouvons déduire que le calcul par différences divisées nécessite l'emploi d'une valeur de σ qui ne soit ni trop petite ni trop grande, afin de pouvoir garantir que le gradient calculé est bien une approximation de la dérivée de la fonctionnelle coût au sens de Fréchet.

De plus, lorsque nous utiliserons la méthode One-Shot, pour laquelle le paramètre σ varie au cours des itérations d'optimisation, ces résultats nous indiquent la valeur pour laquelle les différences divisées sont une bonne approximation du gradient, c'est à dire, pour le cas étudié, aux alentours de 10^{-7} .

11 Résultats numériques avec pas de descente constant

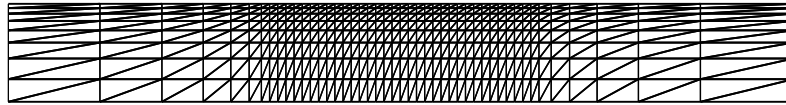


FIG. 12 – *Maillage initial pour l'optimisation (423 noeuds).*

Les résultats présentés ici correspondent tous au même test: la forme initiale est celle présentée à la figure 12, et nous cherchons à l'optimiser pour retrouver la forme du profil de la figure 2, pour lequel nous avons préalablement calculé le champ de pression sur la partie du bord à optimiser.

Nous avons considéré que le temps nécessaire à ce calcul d'écoulement (ou d'une fonctionnelle coût) est représentatif du cas étudié. C'est à dire que nous considérons que le temps de calcul d'une fonctionnelle coût est de 56 secondes (sur DEC ALPHA 500, 333 Mhz). Cette valeur servira de normalisation au temps effectif de l'optimisation, ce qui permet d'avoir une estimation du nombre équivalent de fonctionnelles coût calculées au cours de l'optimisation. Sur les figures 16, 20, 24, 28 et 32, nous avons donc mis en abscisse une évaluation du nombre de fonctionnelles coût calculées, pour permettre d'effectuer une comparaison intéressante de la méthode utilisant un état adjoint et de la méthode de différences divisées.

Tous les calculs sont effectués en partant d'une initialisation uniforme de l'état.

Les résultats ecomptés au terme de l'optimisation sont une convergence de la norme du gradient de la fonctionnelle coût vers zéro, un bon niveau de résolution de l'équation d'état et une convergence vers zéro de la valeur de la fonctionnelle coût.

11.1 Résolution complète avec état adjoint

(figures 13 à 15)

Nous nous sommes placés ici dans le cas où nous utilisons l'algorithme d'optimisation avec état adjoint de référence, c'est à dire que nous avons effectué des résolutions complètes de l'état et de l'état adjoint pendant tout le calcul. Cela donne une référence pour tous les résultats suivants.

Nous présentons à la figure 15 l'état de la partie du profil à optimiser pour certaines itérations du calcul d'optimisation. Il en ressort que la convergence est assez rapide (en nombre d'itérations) mais la figure 13 montre que le coût du calcul, en terme d'évaluations de fonctionnelle coût, est énorme (dans le cas présent, cela représente plus de 10 heures de calcul sur DEC ALPHA 500, 333 Mhz). La figure 14 nous donne l'évolution de la norme du gradient au cours des itérations d'optimisation. Cette norme tend bien vers zéro au fur et à mesure que le profil converge vers le profil optimal.

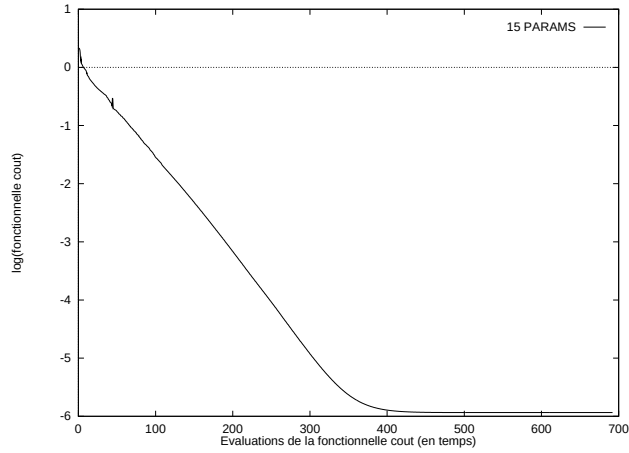


FIG. 13 – *Etat adjoint, résolution complète: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau de 15 paramètres de contrôle.*

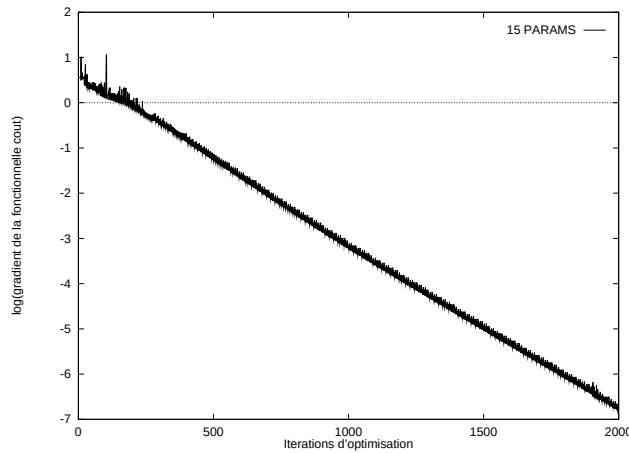


FIG. 14 – *Etat adjoint, résolution complète: évolution de la norme du gradient au cours des itérations d'optimisation pour le niveau de 15 paramètres de contrôle.*

11.2 Résolution simultanée avec état adjoint

(figures 16 à 23)

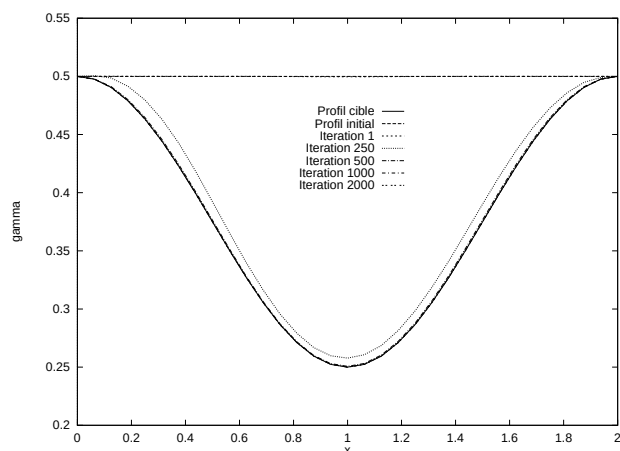


FIG. 15 – *Etat adjoint, résolution complète: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour le niveau de 15 paramètres de contrôle.*

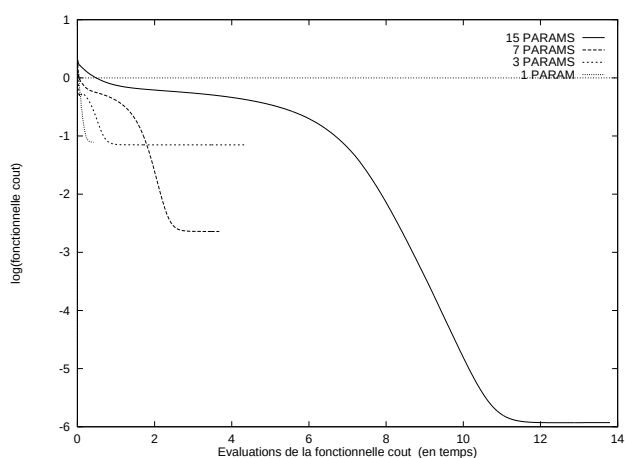


FIG. 16 – *Etat adjoint, résolution simultanée: valeur de la fonctionnelle coût pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

La figure 17 montre que le comportement de la norme du gradient de la fonctionnelle est bien celui que nous attendions. Il est toutefois à noter que cette décroissance

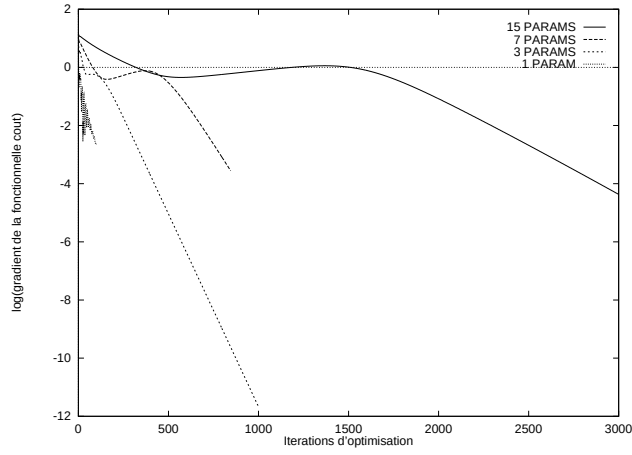


FIG. 17 – *Etat adjoint, résolution simultanée: évolution de la norme du gradient au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

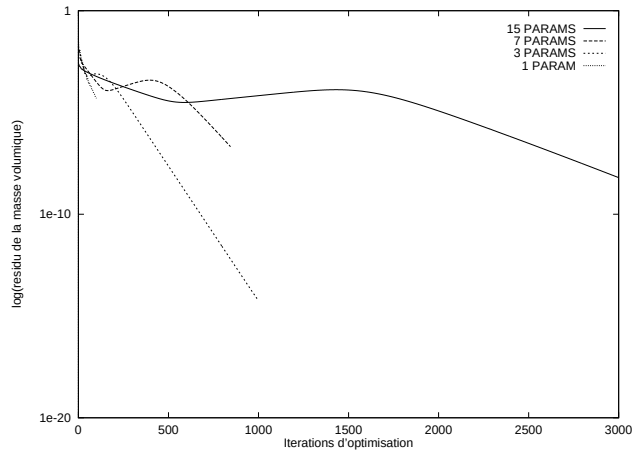


FIG. 18 – *Etat adjoint, résolution simultanée: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

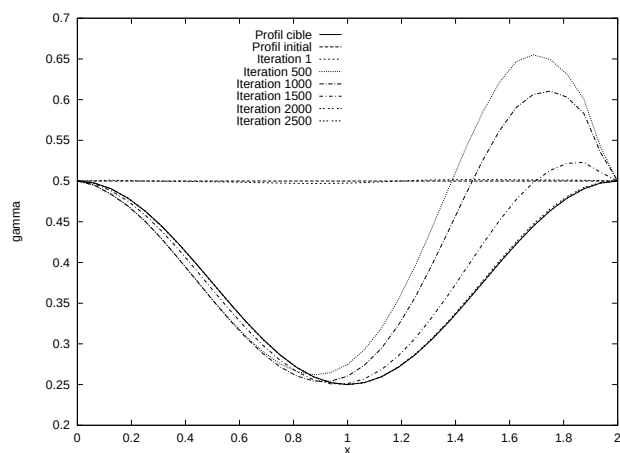


FIG. 19 – *Etat adjoint, résolution simultanée: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour le niveau de 15 paramètres de contrôle.*

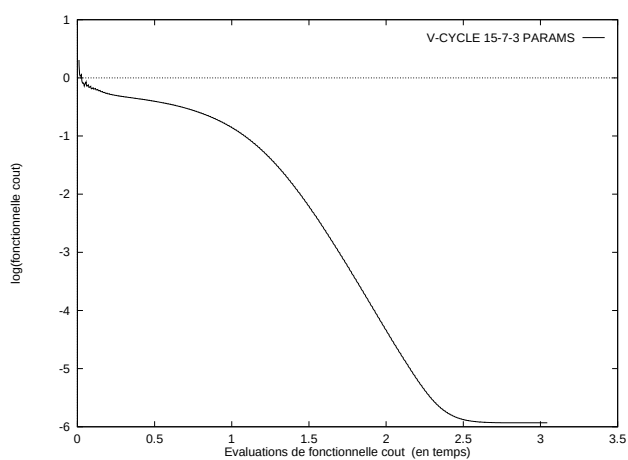


FIG. 20 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

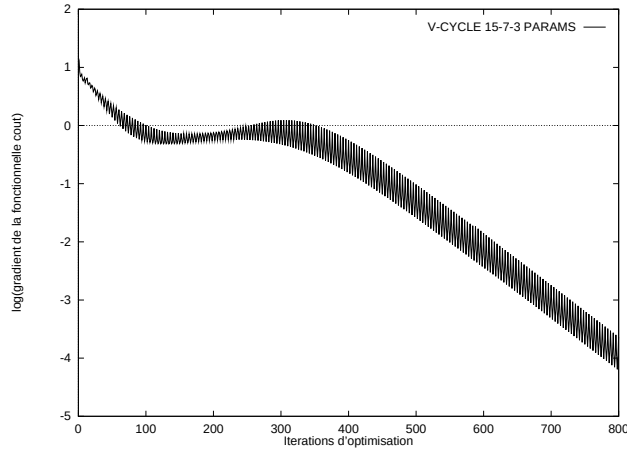


FIG. 21 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du gradient au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

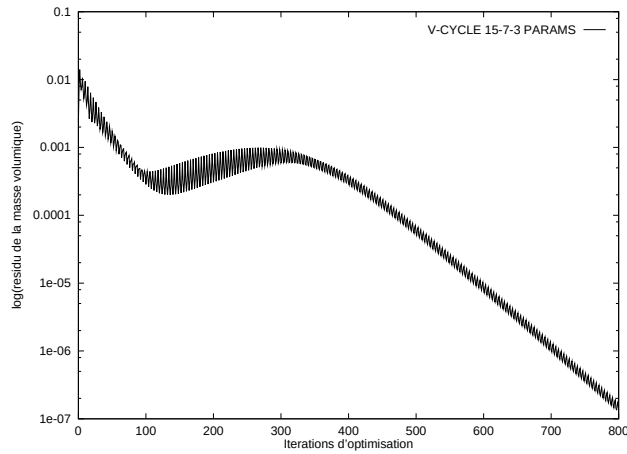


FIG. 22 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

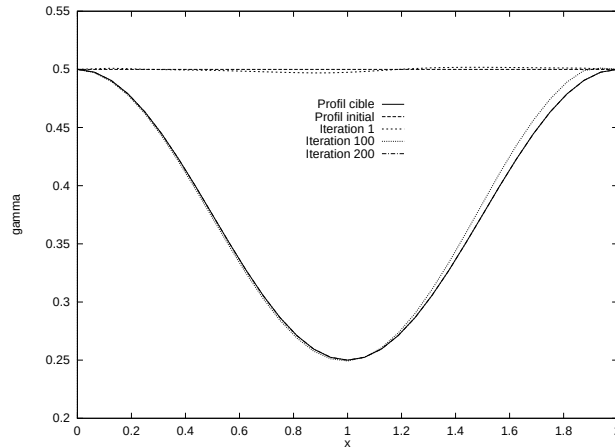


FIG. 23 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

devient plus lente lorsqu'on augmente la finesse du niveau utilisé. En revanche, plus le niveau est fin, plus la forme finale de l'optimisation est proche de la forme désirée, et donc plus la valeur de la fonctionnelle coût tend vers 0 (figure 16), mais pour un nombre d'évaluations de fonctionnelle toujours croissant par rapport au nombre de paramètres de contrôle du niveau. La figure 18 illustre le fait que, lorsque l'optimum est atteint, l'algorithme d'optimisation permet d'amener la résolution de l'état au niveau désiré. Nous présentons à la figure 19 l'état de la partie du profil à optimiser pour certaines itérations, pour le calcul à 15 paramètres de contrôle. Nous pouvons y voir que, dans les premières itérations d'optimisation, le gradient calculé n'est pas vraiment une bonne direction de descente. Cela est dû au fait que l'état est initialisé avec une solution uniforme.

Grâce à la figure 18, qui nous donne l'évolution du résidu de la masse volumique en fonction du nombre d'itérations d'optimisation, on voit qu'il faut attendre que l'état ait suffisamment convergé pour inverser cette tendance.

Nous obtenons le même comportement en utilisant la méthode multiniveau (figures 20, 21, 22 et 23) sur 3 niveaux (3 paramètres de contrôle sur le niveau le plus

grossier et 15 paramètres sur le niveau le plus fin) et une stratégie multiniveau en V-cycle, mais avec une diminution notable du nombre d'évaluations de fonctionnelle coût nécessaire pour atteindre le même niveau de convergence que celui obtenu pour le niveau de 15 paramètres de contrôle: 3 évaluations de fonctionnelle au lieu de 12.

11.3 Résolution simultanée avec différences divisées

(figures 24 à 38)

La figure 25 nous donne le comportement de la norme du gradient de la fonctionnelle. Le comportement des normes de gradient pour les différents niveaux sont comparables en différences divisées à ce que nous obtenons lorsque nous utilisons la méthode d'état adjoint. La figure 26 illustre le fait que, lorsque l'optimum est atteint, l'algorithme d'optimisation permet d'amener la résolution de l'état au niveau désiré. On peut également remarquer que les niveaux de convergence obtenus sur chaque niveau en différences divisées (figure 24) sont comparables à ceux obtenus par la méthode de l'état adjoint, mais pour un coût plus élevé. La figure 27, qui nous donne l'évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation, montre que ce paramètre évolue bien vers la valeur attendue (environ 10^{-7} , cf figure 11). La figure 36 donne l'état de la partie du profil à optimiser pour différentes itérations d'optimisation.

Nous obtenons le même comportement en utilisant plusieurs méthodes multiniveau (V-cycles, F-cycles, FMG; cf figure 5) avec 3 (15, 7 et 3 paramètres de contrôle; figures 29, 28, 30, 31 et 37) ou 4 niveaux (15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle; figures 33, 32, 34, 35 et 38), mais avec une diminution notable du coût en évaluations de fonctionnelle pour atteindre le même niveau de convergence que dans le cas où nous n'utilisons que le niveau de 15 paramètres de contrôle. Cette diminution est d'autant plus importante que le nombre de niveaux grossiers utilisés est grand. En effet, les figures 28 et 32 permettent de se rendre compte que l'ajout du niveau le plus grossier (1 paramètre de contrôle) permet de diviser par deux le nombre d'évaluations de fonctionnelle nécessaire pour obtenir la convergence de l'algorithme. Cela permet également d'améliorer le niveau de résolution de l'état (figures 30 et 34).

De plus, il est à noter que, dans le cas de trois niveaux (figure 28), la convergence est améliorée lorsque le travail effectué sur les niveaux grossiers est augmenté. Au contraire, dans le cas de quatre niveaux (figure 32), un travail plus important sur les niveaux les plus grossiers semble néfaste. Cela est dû au faible niveau de convergence lié au niveau le plus grossier. En effet, l'utilisation de ce niveau n'a un effet réellement

important que pour les premiers cycles. Par la suite, son utilisation pénalise le cycle.

Les figures 20 et 32 montrent également que la méthode multiniveau avec différences divisées sur 4 niveaux (15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle) pour une stratégie V-cycle converge en un nombre d'évaluations de fonctionnelle comparable à celui obtenu par la méthode multiniveau avec état adjoint sur 3 niveaux (15, 7 et 3 paramètres de contrôle) pour la même stratégie.

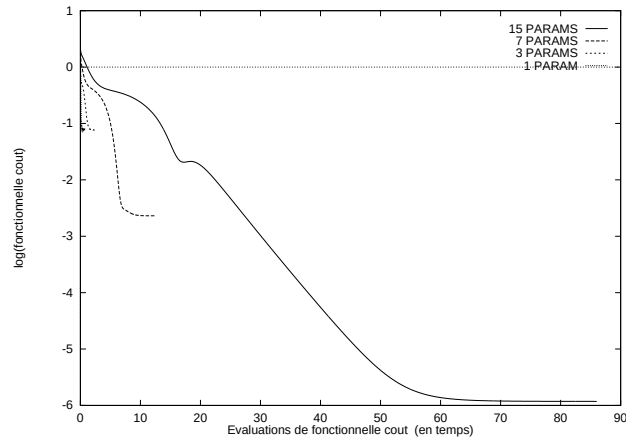


FIG. 24 – *Différences divisées, résolution simultanée: valeur de la fonctionnelle coût pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

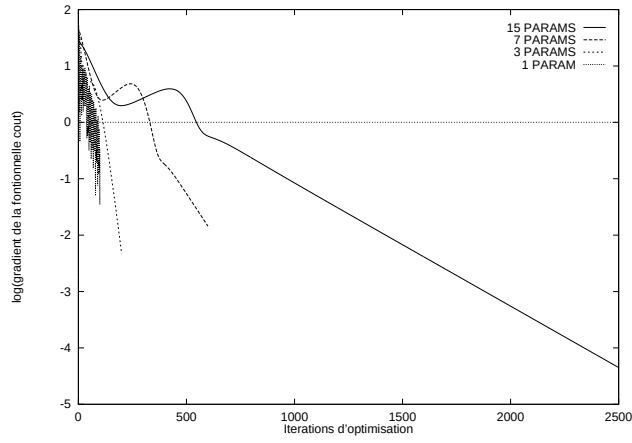


FIG. 25 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

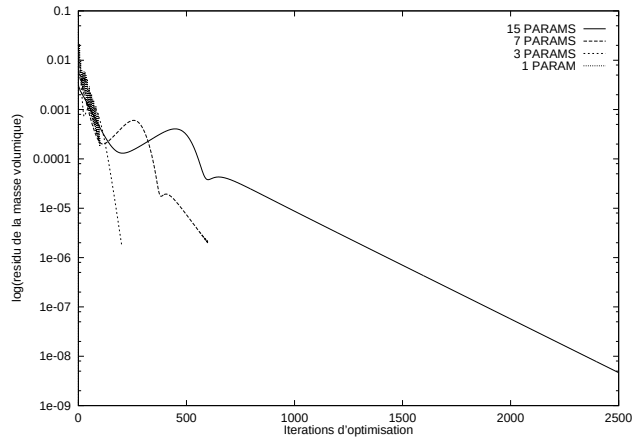


FIG. 26 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

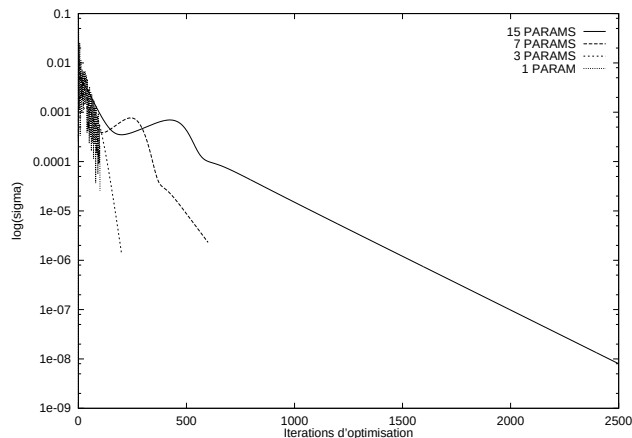


FIG. 27 – Différences divisées, résolution simultanée: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.

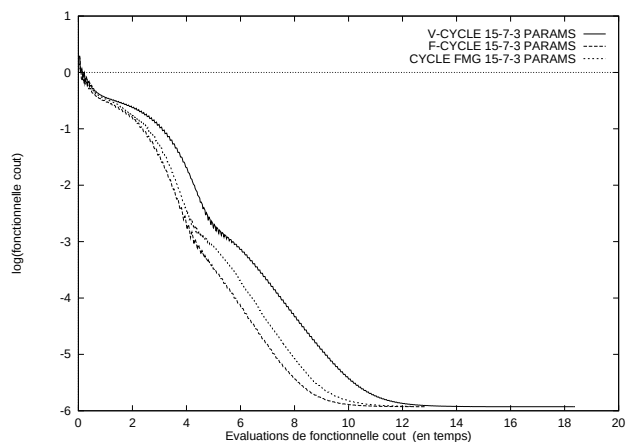


FIG. 28 – Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.

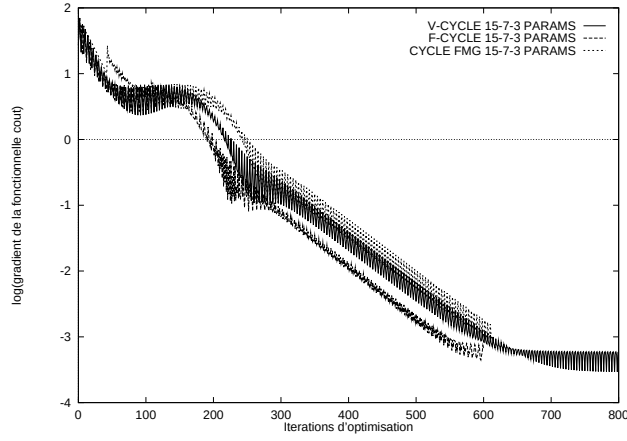


FIG. 29 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

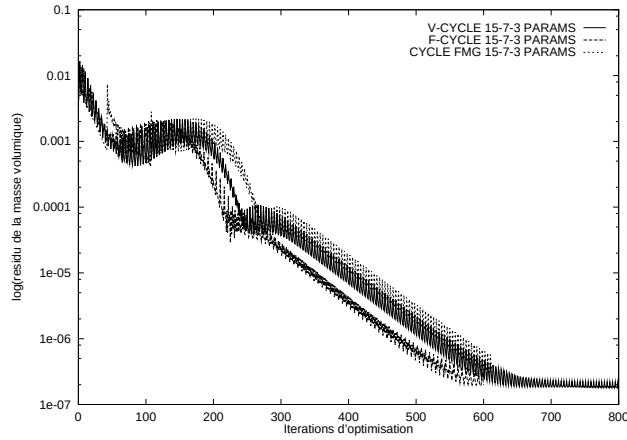


FIG. 30 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

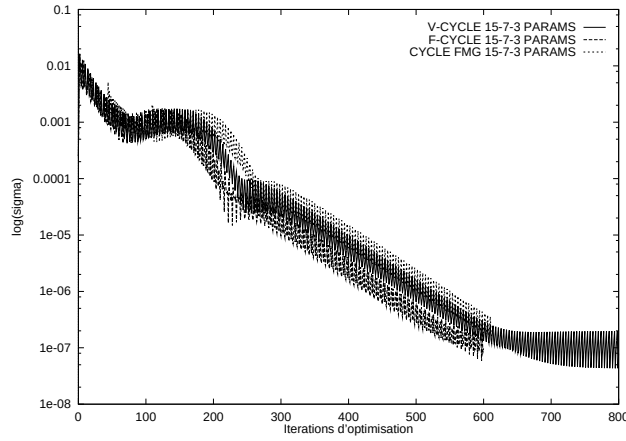


FIG. 31 – Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.

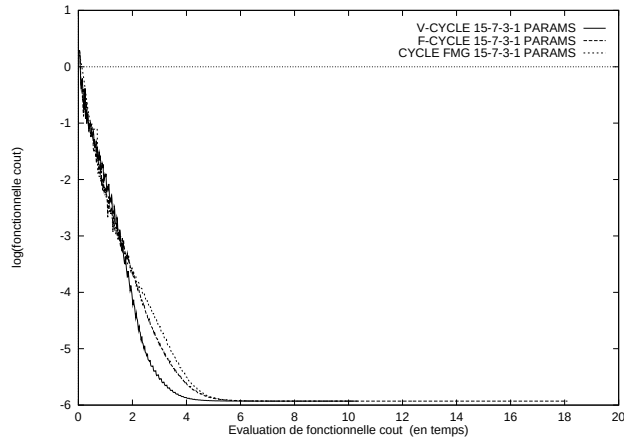


FIG. 32 – Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.

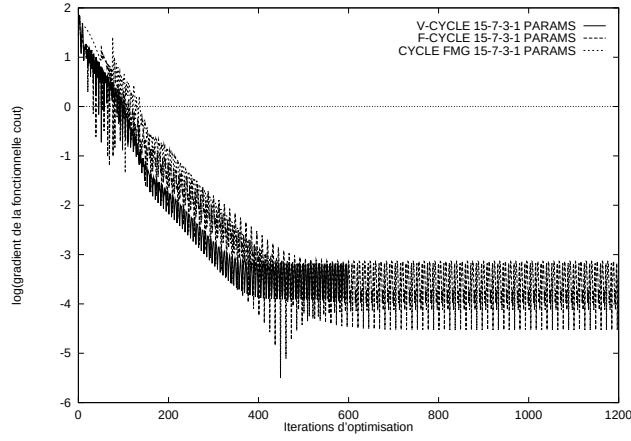


FIG. 33 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

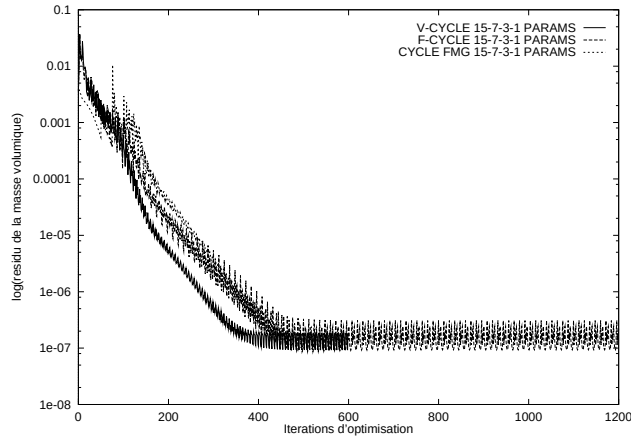


FIG. 34 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

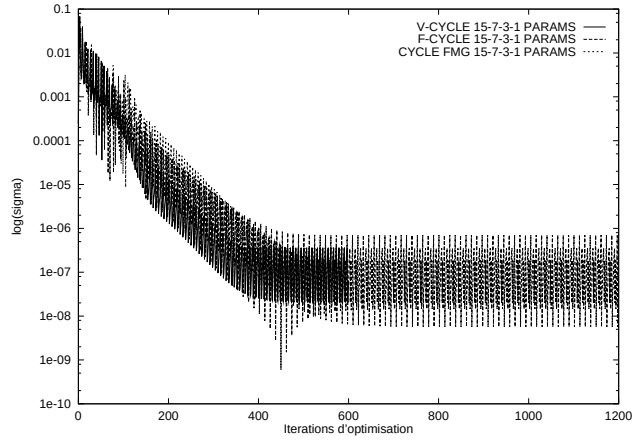


FIG. 35 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

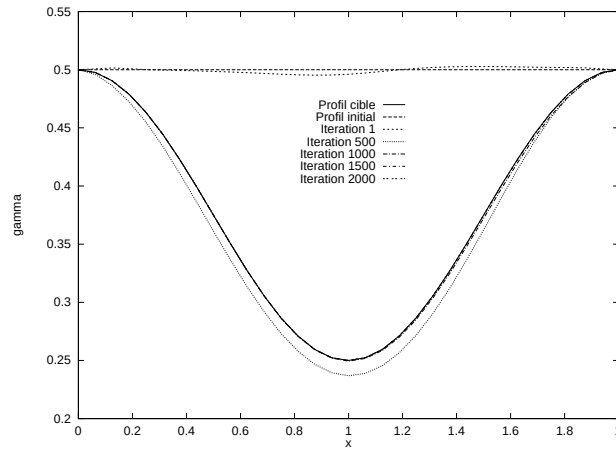


FIG. 36 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour le niveau de 15 paramètres de contrôle.*

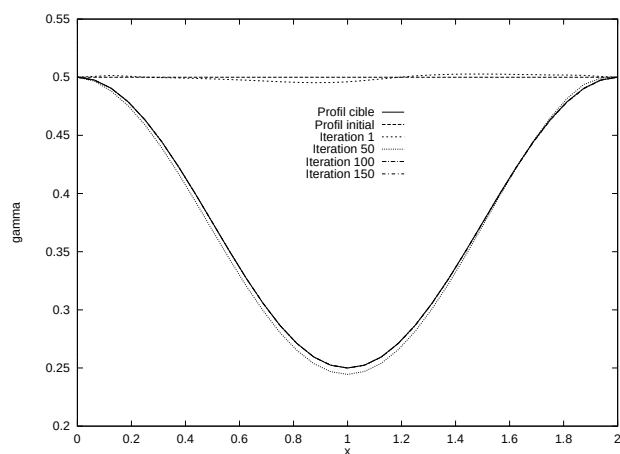


FIG. 37 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

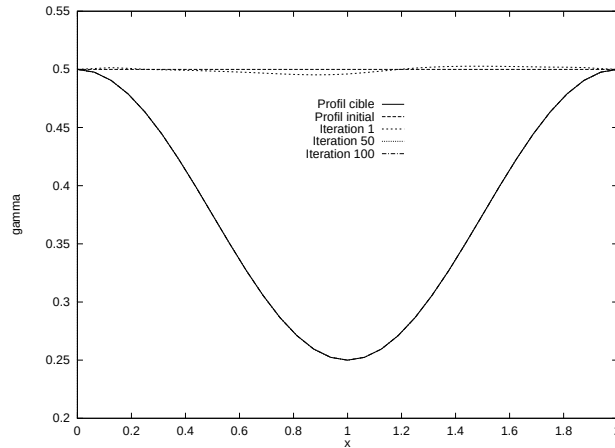


FIG. 38 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

12 Résultats numériques avec pas de descente variable

12.1 Résolution simultanée avec état adjoint

(figures 39 à 43)

Sur la figure 39, nous comparons le coût du calcul d'optimisation en pas de descente constant et celui en pas de descente variable pour la méthode multiniveau V-cycle avec 3 niveaux. Le calcul en pas variable est deux fois plus cher en nombre d'évaluations de fonctionnelles, mais reste toujours d'un coût très raisonnable. En effet, il ne faut pas oublier que les calculs d'optimisation avec pas de descente constant nécessitent un certain nombre de calculs préalables. Ceux-ci servent à fixer la valeur du pas constant, de façon à ce qu'il ne soit ni trop grand (le calcul d'optimisation diverge) ni trop petit (le calcul d'optimisation est trop coûteux). Dans l'ensemble, le surcoût lié à l'utilisation d'un pas de descente variable est au moins égal au temps nécessaire aux calculs préliminaires lorsque nous utilisons un pas de descente constant. La figure 40 nous montre que la norme du gradient tend plus vite vers zéro lorsqu'un pas de descente variable est utilisé, ce qui est normal puisque, en fait, le pas de descente est, dans ce cas, plus grand que celui utilisé en pas constant. Cette figure

nous montre également qu'en utilisant un pas de descente variable, la convergence de l'algorithme d'optimisation est plus rapide en nombre d'itérations mais chaque itération est plus coûteuse que pour un pas constant, ce qui est dû au temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une valeur "optimale" du pas de descente à chaque itération.

Sur la figure 42, nous voyons que cette rapidité de convergence par rapport au nombre d'itérations permet également d'obtenir une meilleure convergence de l'état. Les figures 43 et 41 représentent respectivement l'évolution du pas de descente en fonction des itérations et l'état de la partie du profil à optimiser pour certaines itérations d'optimisation. La chute de la valeur du pas de descente à la fin du calcul s'explique par le fait que la norme du gradient atteint un palier et que l'algorithme de variation du pas de descente que nous utilisons n'est plus efficace. Par contre, pour toute la partie du calcul où il se passe réellement quelque chose, nous arrivons à obtenir une valeur du pas de descente quasiment constante.

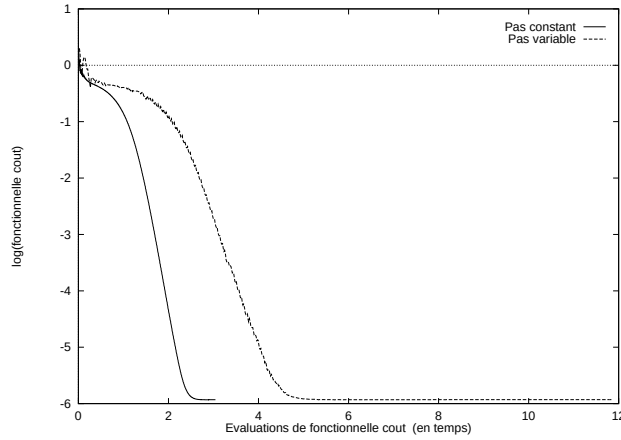


FIG. 39 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour la stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Comparaison pas constant/pas variable.*

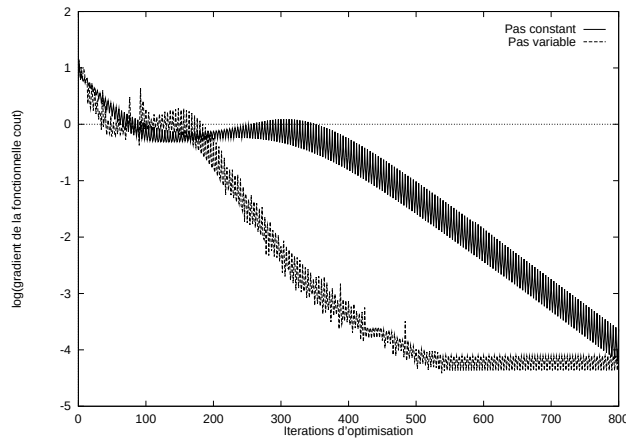


FIG. 40 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du gradient au cours des itérations d'optimisation pour la stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Comparaison pas constant/pas variable.*

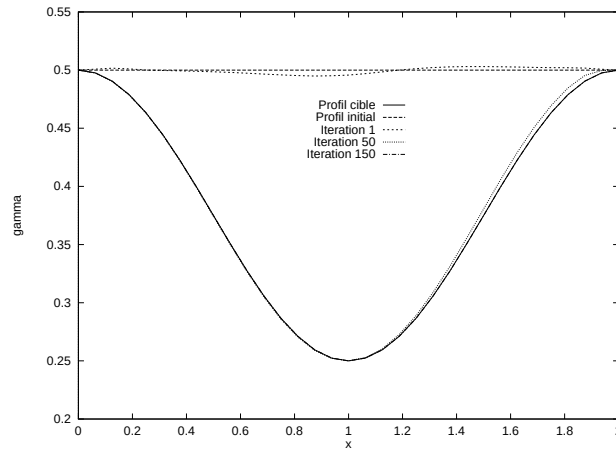


FIG. 41 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.*

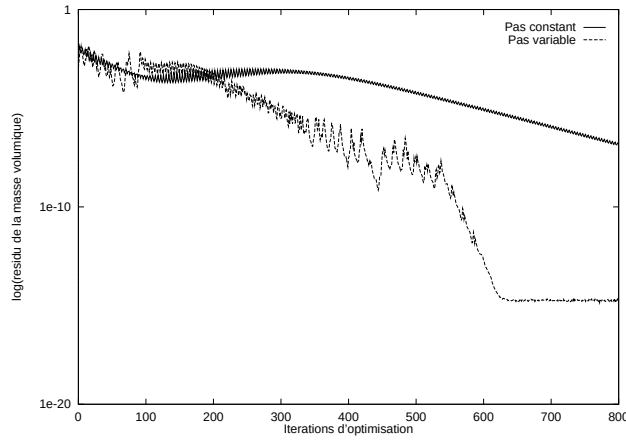


FIG. 42 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour la stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Comparaison pas constant/pas variable.*

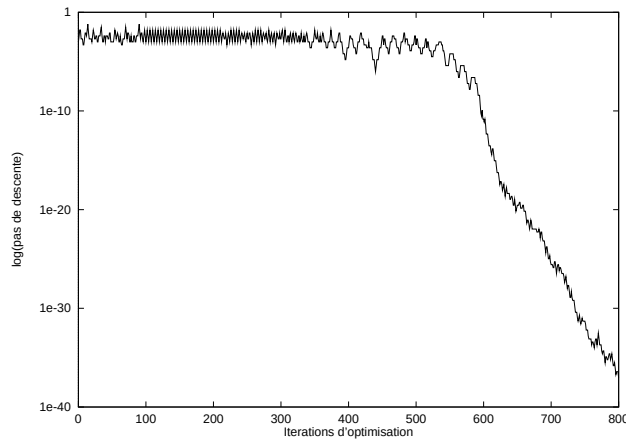


FIG. 43 – *Etat adjoint, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du pas de descente au cours des itérations d'optimisation pour la stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

12.2 Résolution simultanée avec différences divisées

(figures 44 à 61)

En comparant les résultats suivants avec les résultats similaires obtenus en utilisant un pas de descente constant (figures 44, 45, 46, 47, 59 et figures 24, 25, 26, 27, 36 pour les niveaux grossiers; figures 48, 49, 50, 51, 60 et figures 28, 29, 30, 31, 37 pour les méthodes multiniveau à 3 niveaux; figures 52, 53, 54, 55, 61 et figures 32, 33, 34, 35, 38 pour les méthodes multiniveau à 4 niveaux), il est très facile de se rendre compte que les résultats obtenus avec l'algorithme à pas de descente variable sont les mêmes que lorsque nous utilisons un pas de descente constant, au surcoût en nombre d'évaluations de fonctionnelles prêt. Mais ce surcoût, dans le cas des méthodes multiniveau à 3 et 4 niveaux (figures 48 et 52), n'altère en rien le fait que le calcul d'optimisation coûte environ 15 évaluations de fonctionnelle lorsque le niveau le plus fin utilisé comporte 15 paramètres de contrôle.

Les figures 56, 57 et 58 nous donnent l'évolution du pas de descente au cours des itérations d'optimisation, respectivement pour les niveaux grossiers, les méthodes multiniveau à 3 niveaux et celles à 4 niveaux. Nous pouvons constater, comme lorsque nous utilisons la méthode avec état adjoint, que le pas reste à peu près constant, sauf sur les dernières itérations, lorsque le profil optimal est atteint.

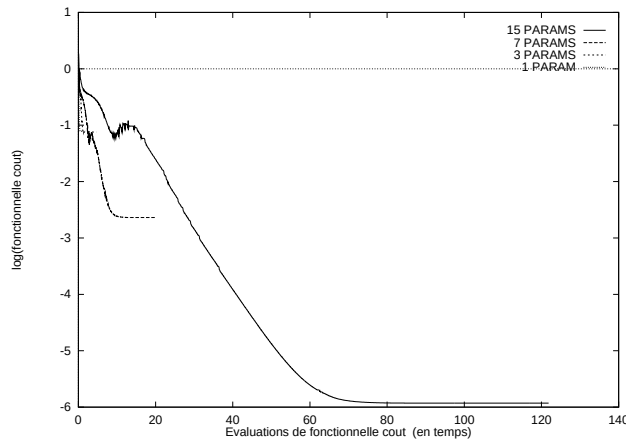


FIG. 44 – *Différences divisées, résolution simultanée: valeur de la fonctionnelle coût pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

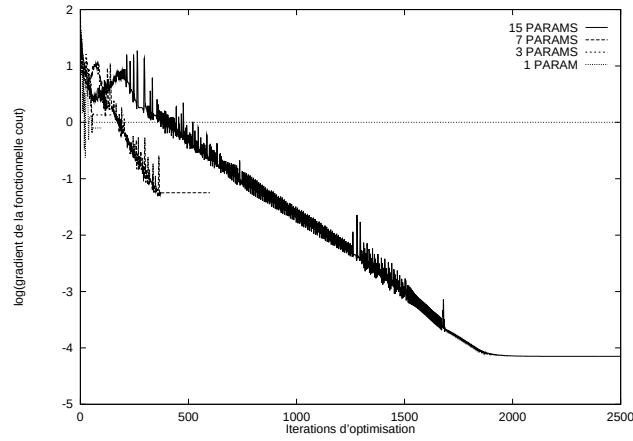


FIG. 45 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

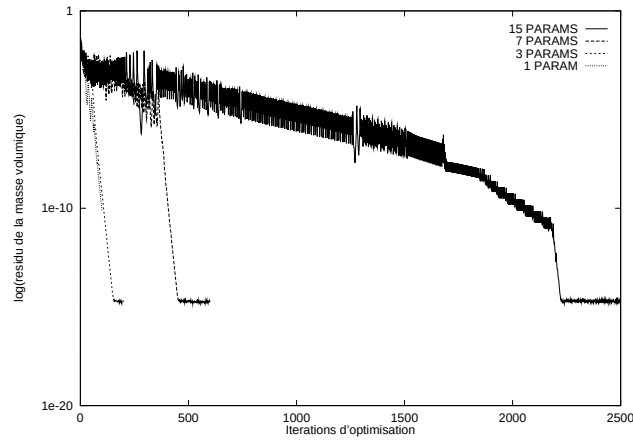


FIG. 46 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

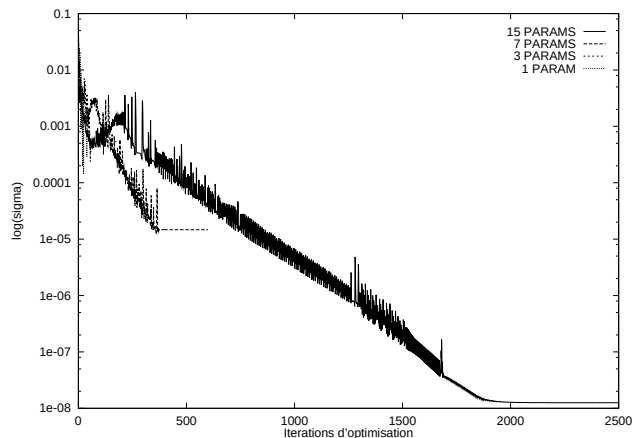


FIG. 47 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

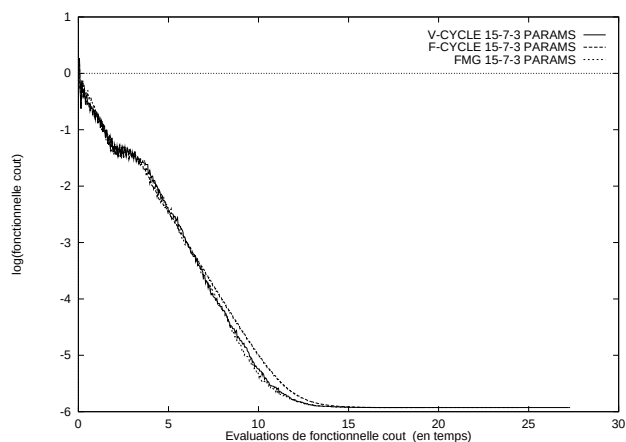


FIG. 48 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.*

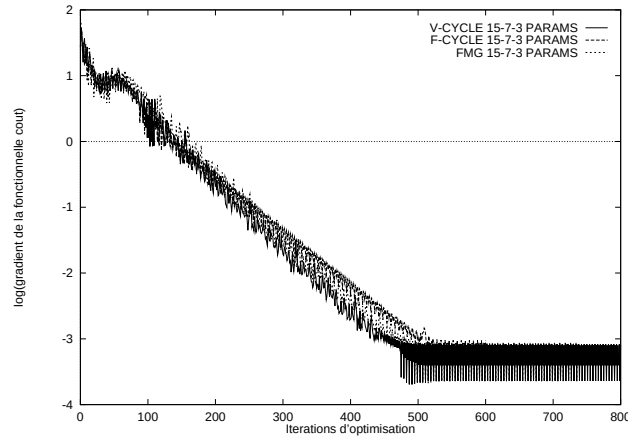


FIG. 49 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.*

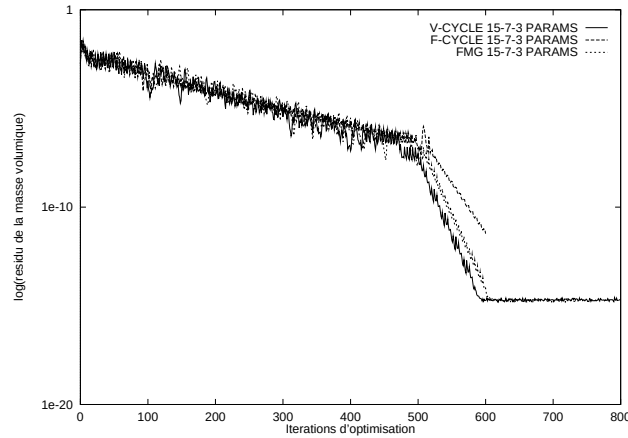


FIG. 50 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.*

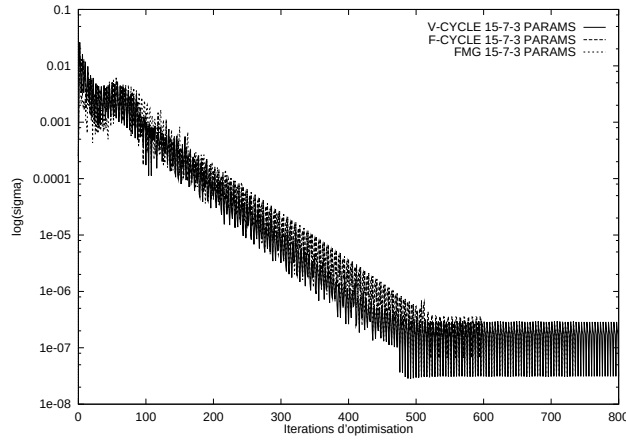


FIG. 51 – Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.

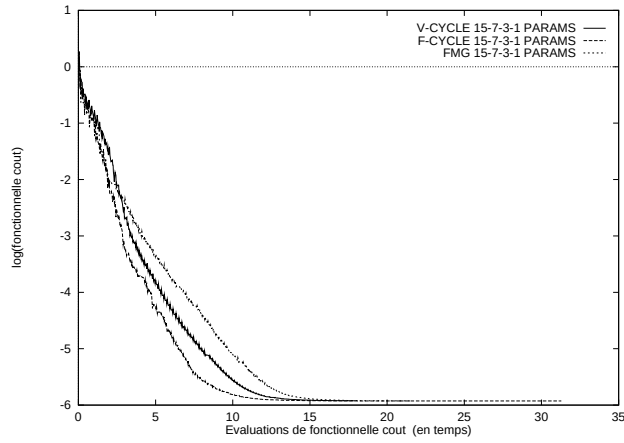


FIG. 52 – Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: valeur de la fonctionnelle coût pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.

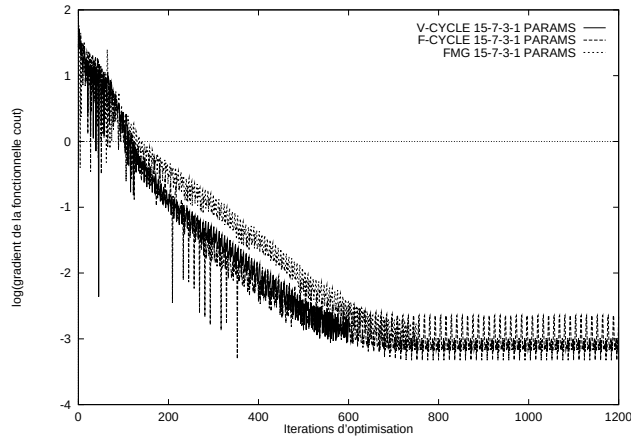


FIG. 53 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

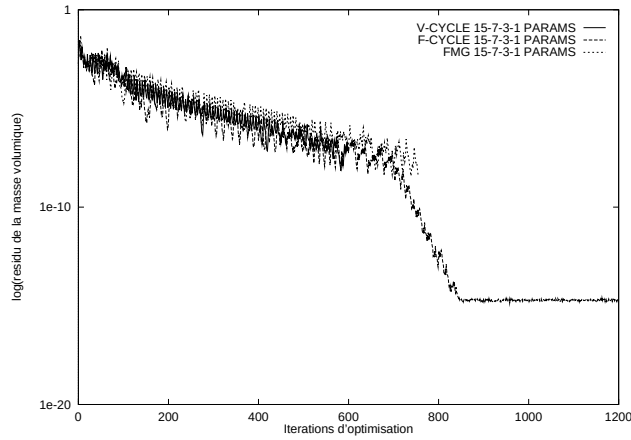


FIG. 54 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

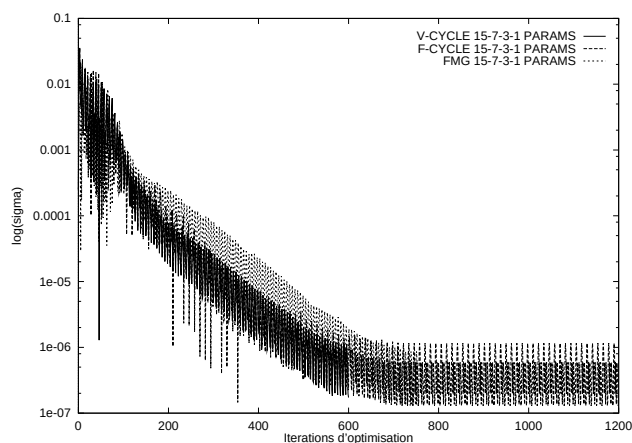


FIG. 55 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

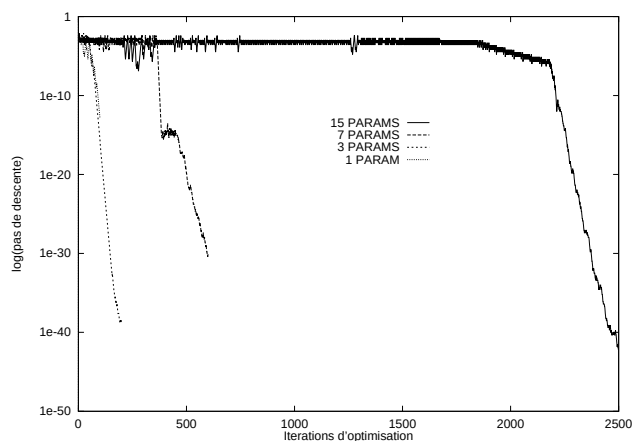


FIG. 56 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du pas de descente au cours des itérations d'optimisation pour les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

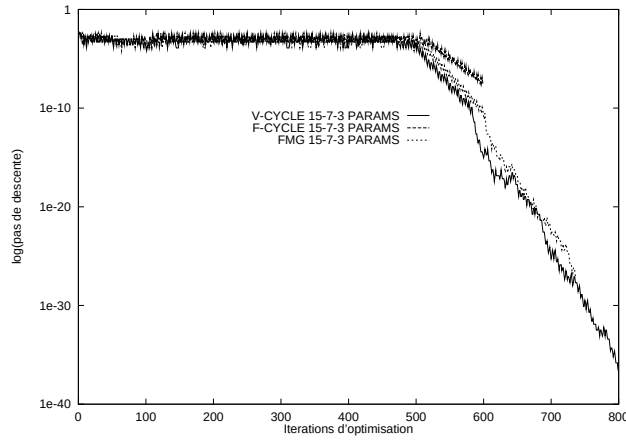


FIG. 57 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du pas de descente au cours des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle.*

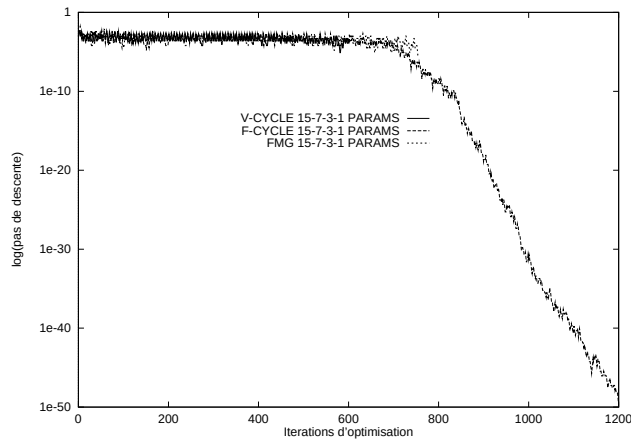


FIG. 58 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du pas de descente au des itérations d'optimisation pour des stratégies V-cycle, F-cycle et FMG sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle.*

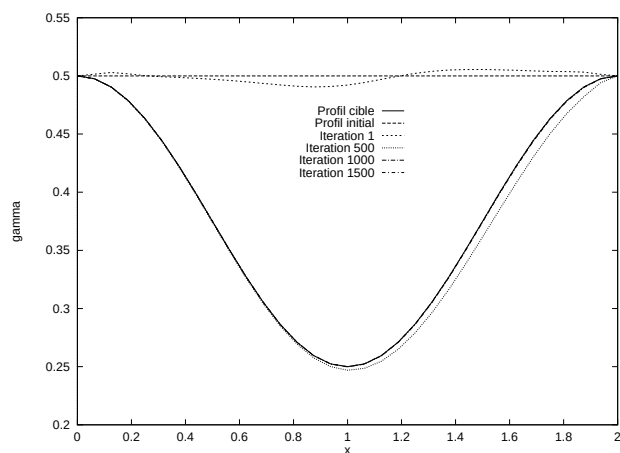


FIG. 59 – *Différences divisées, résolution simultanée: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour le niveau de 15 paramètres de contrôle. Pas variable.*

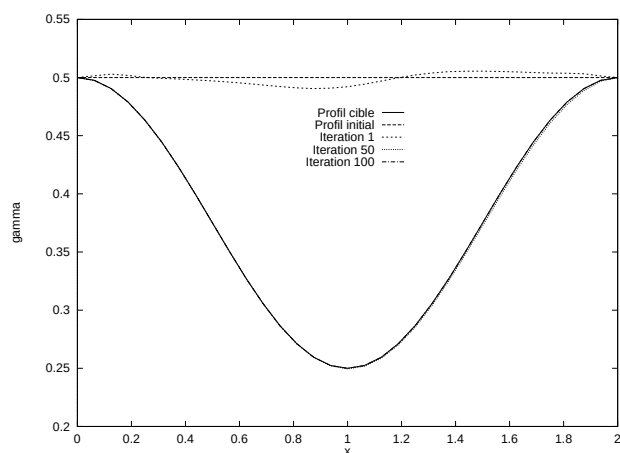


FIG. 60 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7 et 3 paramètres de contrôle. Pas variable.*

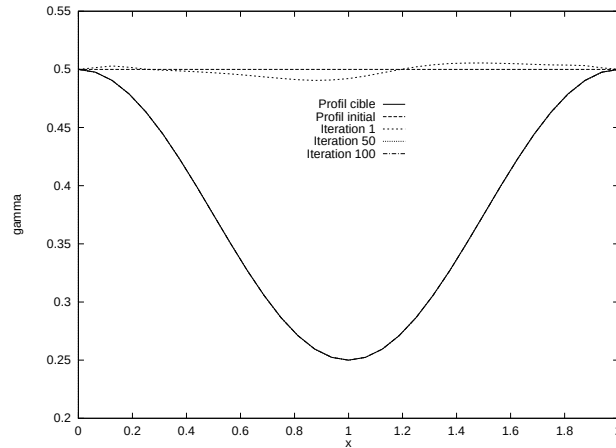


FIG. 61 – *Différences divisées, résolution simultanée et méthode multiniveau: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour une stratégie V-cycle sur les niveaux de 15, 7, 3 et 1 paramètres de contrôle. Pas variable.*

13 Conclusions préliminaires

L'introduction d'un pas variable permet, par rapport à l'option "pas constant", une utilisation plus directe (si ce n'est "boîte noire") des algorithmes de résolution simultanée, pour une perte d'environ un facteur deux sur le calcul final (c'est à dire en faisant abstraction des tentatives nécessaires pour trouver une bonne valeur du pas lorsque celui-ci est constant). Ce facteur deux se retrouve aussi bien en état adjoint qu'en différences divisées. Une fois fixé notre choix sur l'option "pas variable", nous constatons que l'approche état adjoint reste la plus efficace. Pour ce cas test (tuyère), elle consomme quatre évaluations de fonctionnelles (figure 39); l'approche différences divisées en consomme près de 15 (figure 48).

L'approche de résolution simultanée avec différences divisées restant beaucoup plus simple à mettre en œuvre que l'approche état adjoint (dont la conception peut se compter en années ingénieur), elle représente une intéressante alternative, beaucoup moins coûteuse que les différences divisées traditionnelles (qui résolvent complètement l'équation d'état), et plus abordable en terme de coût de développement que l'approche état adjoint.

On se propose de passer à des cas tests plus complexes pour cette approche (seulement).

14 Application à l'optimisation d'un profil

Le paragraphe précédent a permis de bien comprendre comment pouvait fonctionner une méthode combinant One-Shot et différences divisées pour de l'optimisation de formes en aérodynamique. L'exemple choisi comportait néanmoins plusieurs simplifications importantes:

- (i) la partie variable de la forme était paramétrable comme une fonction d'une seule variable sur un intervalle discrétisé avec un pas constant,
- (ii) le maillage était déduit par simple affinité d'un maillage modèle,
- (iii) le fluide était parfait.

Dans ce paragraphe, nous allons nous libérer de ces hypothèses simplificatrices en passant à un problème inverse pour un profil, avec un maillage non-trivial comportant de forts étirements, et avec les équations de Navier-Stokes moyennées, en approximation bi-couche.

La paramétrisation de la forme est donc étendue dans un premier paragraphe à une courbe de paramétrisation plus générale, et avec des subdivisions non-uniformes.

Les applications à une modélisation Euler puis Navier-Stokes seront présentées.

14.1 Paramétrisation de la forme du profil

14.1.1 Interpolation non uniforme

Lorsque nous avons présenté la méthode multiniveau, nous nous sommes placés dans le contexte de la tuyère pour définir l'opérateur de prolongement P (équation (40)). Cette définition utilise des dérivées d'ordre un que nous approchons par des différences divisées (équation (41)). Les formules utilisées sont difficilement utilisables sur des géométries quelconques car elles supposent une *discrétisation uniforme* sur l'axe des abscisses. Il nous faut donc redéfinir le prolongement P pour des maillages non uniformes (en abscisse). A cet effet, nous remplaçons la formule (41) par:

$$\gamma'_i = \frac{\Delta x_{i-1}^2 \gamma_{i+1} - \Delta x_i^2 \gamma_{i-1} - (\Delta x_{i-1}^2 - \Delta x_i^2) \gamma_i}{\Delta x_i \Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (56)$$

où $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Cette approximation est toujours du second ordre en espace. En utilisant les notations:

$$\alpha_j = \frac{x_j - x_i}{\Delta x_i} \quad , \quad \bar{\alpha}_j = 1 - \alpha_j \quad (57)$$

où $x_j \in [x_i, x_{i+1}]$ désigne l'abscisse du point pour lequel nous calculons l'interpolé $(P\gamma)_j$, nous obtenons l'expression suivante de l'opérateur de prolongement:

$$\begin{aligned} (P\gamma)_j = & \gamma_{i-1} \left[-\alpha_j \bar{\alpha}_j^2 \frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \right] \\ & + \gamma_i \left[\bar{\alpha}_j^2 (2\alpha_j + 1) + \alpha_j \bar{\alpha}_j^2 \frac{\Delta x_i^2 - \Delta x_{i-1}^2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} + \right. \\ & \quad \left. \alpha_j^2 \bar{\alpha}_j \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \right] \\ & + \gamma_{i+1} \left[\alpha_j^2 (2\bar{\alpha}_j + 1) + \alpha_j^2 \bar{\alpha}_j \frac{\Delta x_i^2 - \Delta x_{i+1}^2}{\Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} + \right. \\ & \quad \left. \alpha_j \bar{\alpha}_j^2 \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right] \\ & + \gamma_{i+2} \left[-\alpha_j^2 \bar{\alpha}_j \frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

Les termes de bord se traitent toujours de la même façon, c'est à dire en considérant que la dérivée γ'_i est nulle si i est l'indice d'un noeud de bord.

Ce paramétrage permet de définir un scalaire γ_i sur chaque noeud i du profil. A partir de ce scalaire, nous définissons un profil perturbé en supposant que chacun des points du profil glisse d'une distance égale à γ_i le long de la *verticale*. Nous allons vérifier qu'en pratique ce glissement permet de retrouver avec précision différents profils comme perturbation d'autres profils.

14.1.2 Evaluation de la précision du paramétrage

Le maillage utilisé comporte 2200 noeuds dont 96 sur le profil (voir la section 14.3.1).

La précision du paramétrage peut être évaluée en cherchant à retrouver une forme cible γ_c en minimisant la fonctionnelle:

$$\bar{j}(\gamma) = \int_{\gamma} (\gamma - \gamma_c)^2 d\sigma \quad (59)$$

(ce qui peut se faire à l'aide de l'algorithme de gradient en différences divisées).

Avec une minimisation sur 95 paramètres de contrôle (tous les points du profil, excepté celui d'abscisse 1, qui est considéré fixe), la fonctionnelle peut atteindre une valeur aussi proche que l'on veut de zéro (figures 62, 63 et 64), ce qui correspond à une erreur aussi petite que l'on veut sur les points du profil.

Avec 47 paramètres de contrôle (un point sur deux est interpolé), le minimum de la fonctionnelle est 10^{-6} , mais le profil obtenu et le profil cible sont visuellement confondus (figures 65, 66 et 67).

Avec 23 paramètres (fonctionnelle à 10^{-5}), on commence à voir une légère déviation au niveau du bord de fuite (figures 68, 69 et 70).

Ce défaut s'amplifie à mesure que l'on diminue le nombre de paramètres de contrôle: avec 11 paramètres (figures 71, 72 et 73) le défaut est encore localisé au bord de fuite, avec 5 paramètres (figures 74, 75 et 76) la précision a été détériorée sur tout le profil.

On en déduit que le niveau à 47 paramètres de contrôle offre une bonne précision, alors que le niveau à 5 paramètres est à la limite de l'utilisable pour obtenir des accélérations de convergence.

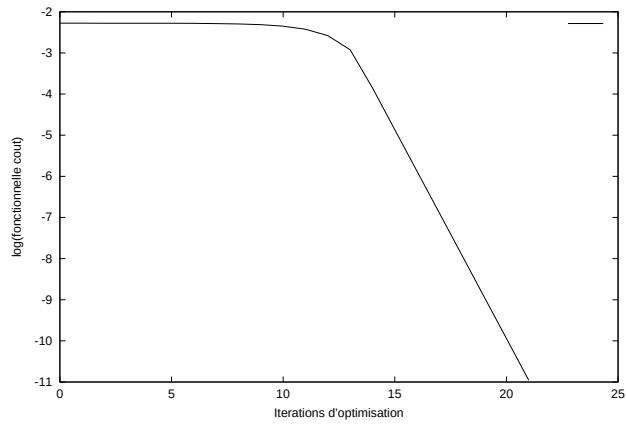


FIG. 62 – *Précision du paramétrage: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau à 95 paramètres de contrôle (niveau fin).*

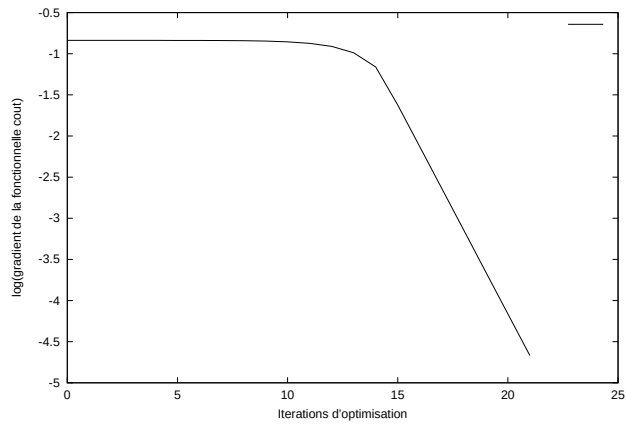


FIG. 63 – *Précision du paramétrage: norme du gradient pour le niveau à 95 paramètres de contrôle (niveau fin).*

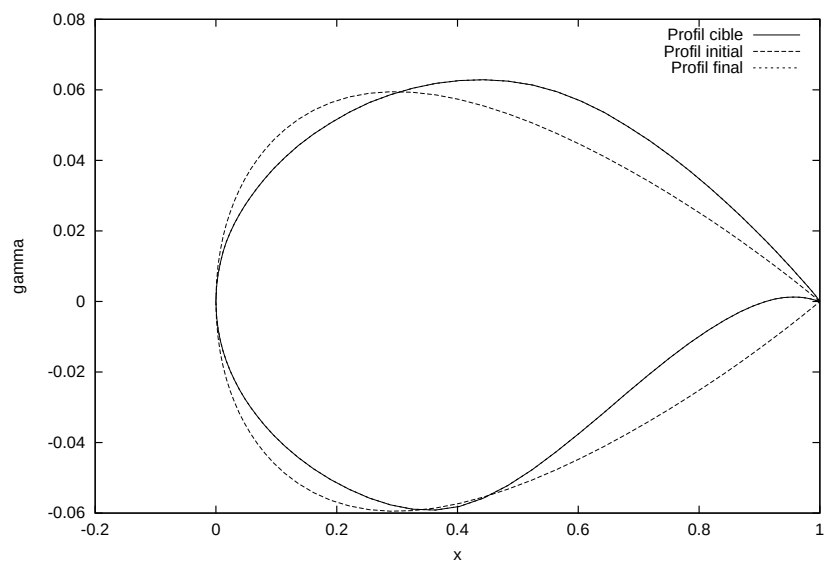


FIG. 64 – *Précision du paramétrage: profil final obtenu pour le niveau à 95 paramètres de contrôle (niveau fin).*

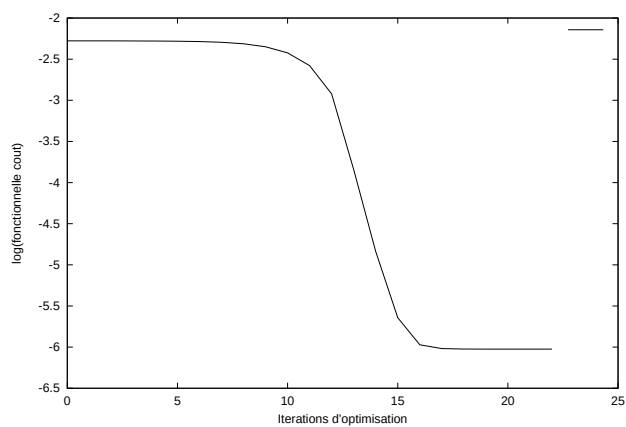


FIG. 65 – *Précision du paramétrage: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau à 47 paramètres de contrôle.*

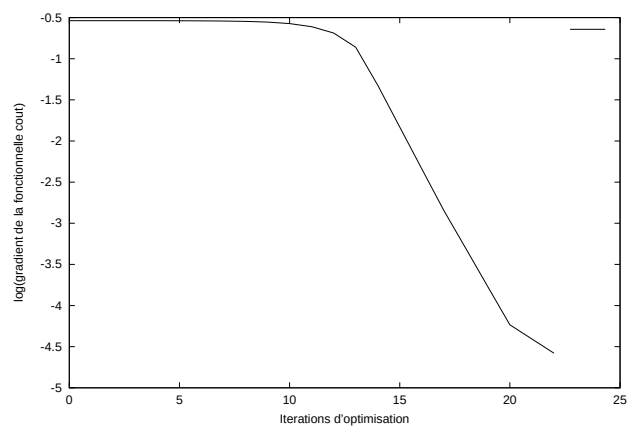


FIG. 66 – *Précision du paramétrage: norme du gradient pour le niveau à 47 paramètres de contrôle.*

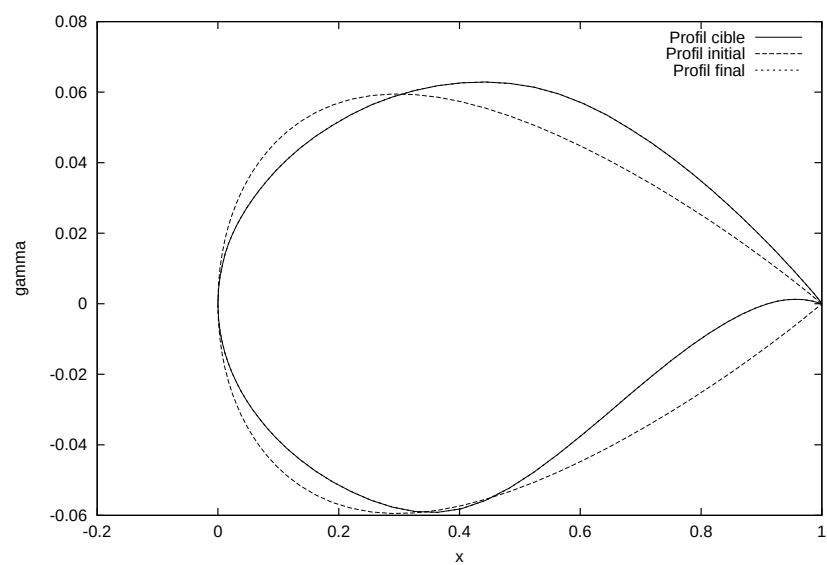


FIG. 67 – *Précision du paramétrage: profil final obtenu pour le niveau à 47 paramètres de contrôle.*

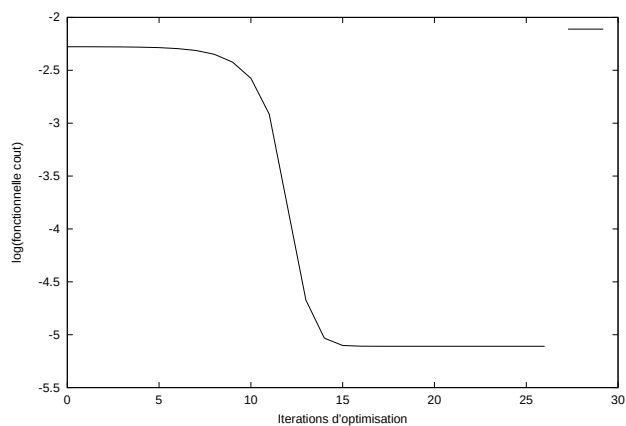


FIG. 68 – *Précision du paramétrage: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau à 23 paramètres de contrôle.*

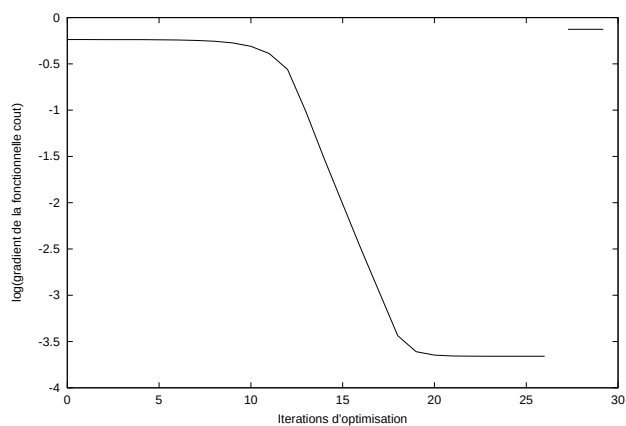


FIG. 69 – *Précision du paramétrage: norme du gradient pour le niveau à 23 paramètres de contrôle.*

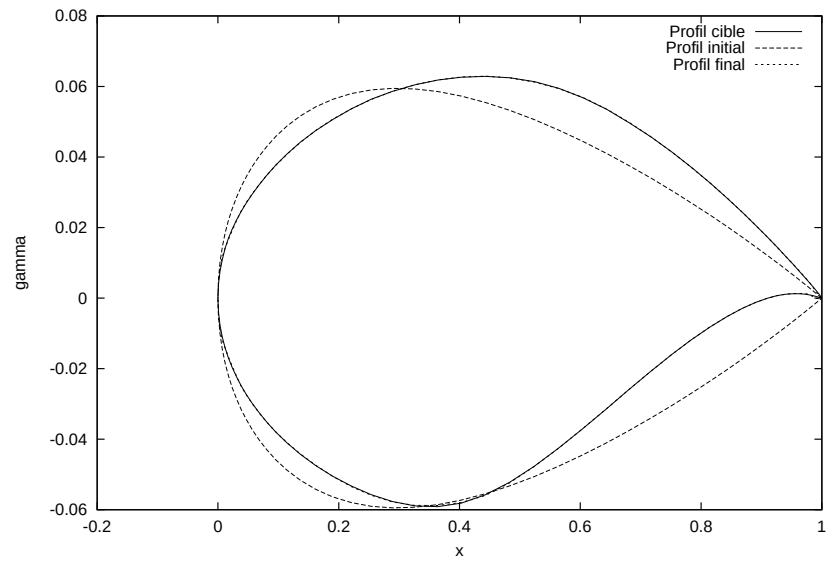


FIG. 70 – *Précision du paramétrage: profil final obtenu pour le niveau à 23 paramètres de contrôle.*

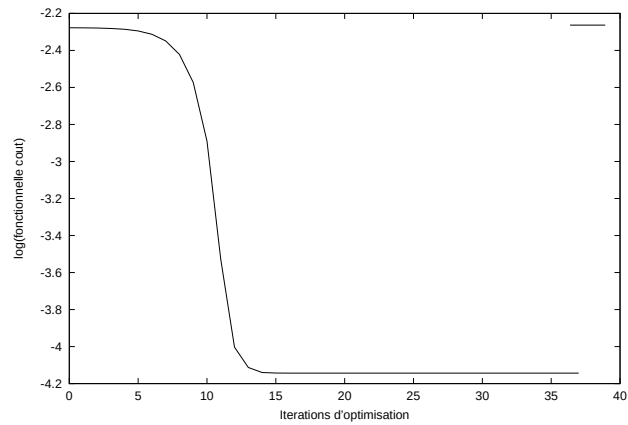


FIG. 71 – *Précision du paramétrage: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau à 11 paramètres de contrôle.*

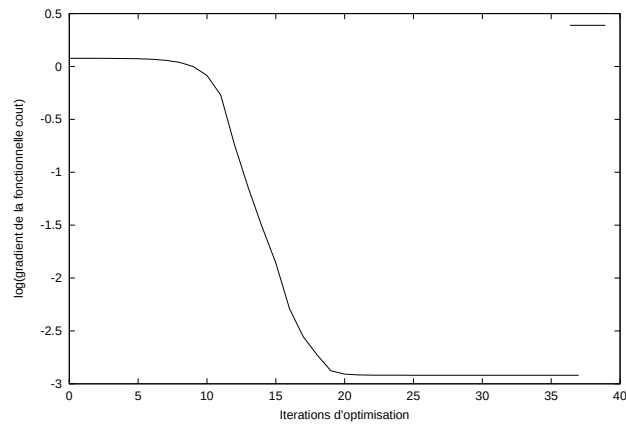


FIG. 72 – *Précision du paramétrage: norme du gradient pour le niveau à 11 paramètres de contrôle.*

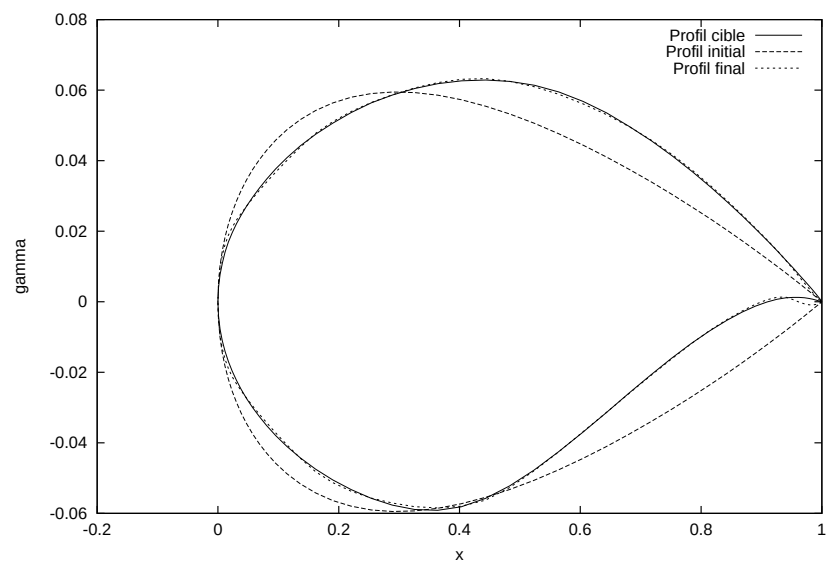


FIG. 73 – *Précision du paramétrage: profil final obtenu pour le niveau à 11 paramètres de contrôle.*

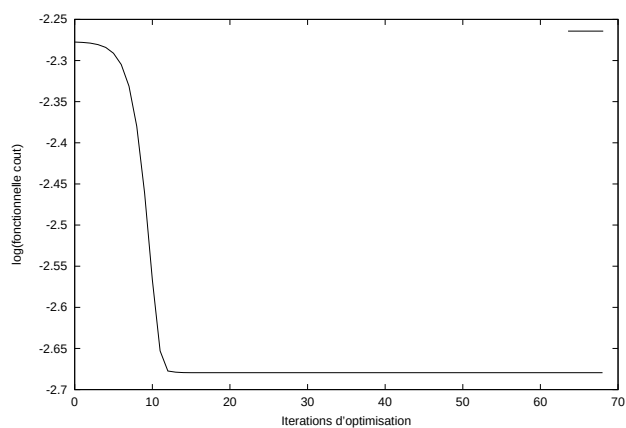


FIG. 74 – *Précision du paramétrage: valeur de la fonctionnelle coût pour le niveau à 5 paramètres de contrôle.*

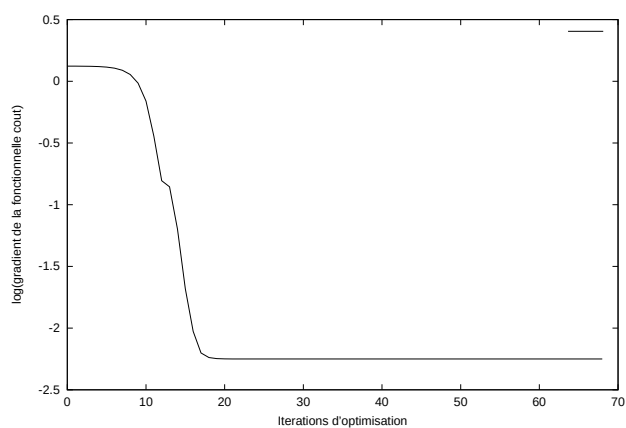


FIG. 75 – *Précision du paramétrage: norme du gradient pour le niveau à 5 paramètres de contrôle.*

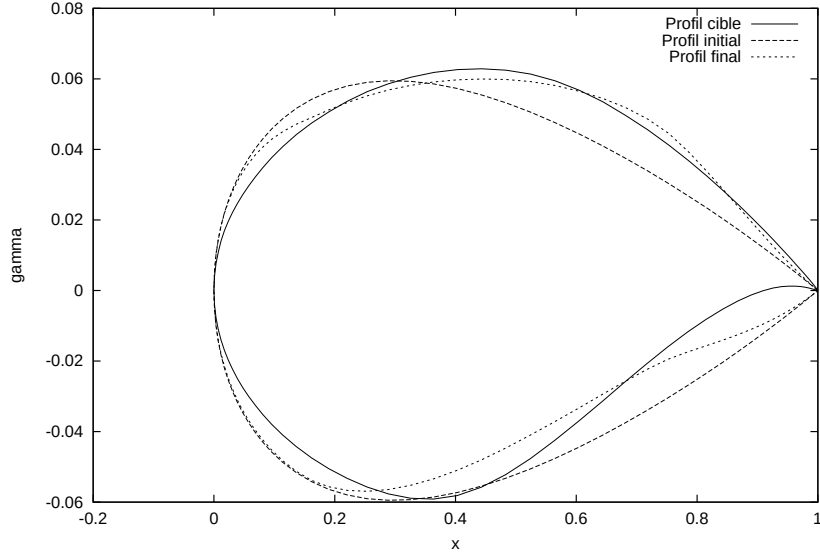


FIG. 76 – Précision du paramétrage: profil final obtenu pour le niveau à 5 paramètres de contrôle.

14.2 Formulation du problème d'optimisation

Nous conservons la forme "problème inverse" qui permet de bien mesurer la capacité de la chaîne d'optimisation à s'approcher autant que l'utilisateur le désire d'un optimum connu.

Etant donné un paramétrage γ de la forme, un maillage est reconstruit à l'aide d'un algorithme de déformation de maillage, puis une solution de l'écoulement est calculée sur ce maillage. Soit $P(\gamma)$ la pression correspondante, on en déduit la fonctionnelle:

$$j(\gamma) = \int_{\gamma} (P(\gamma) - P^c)^2 d\sigma \quad (60)$$

où l'intégrale est calculée sur le profil défini par γ .

14.3 Problème inverse monocorps en Euler

L'approche proposée dans ce travail est de manière inhérente assez indépendante du modèle fluide, du moins en ce qui concerne la boucle d'optimisation.

En revanche, les paramètres à utiliser dans cette boucle, d'une part, et la vitesse de convergence, d'autre part, risquent fort de dépendre de manière notable du modèle choisi pour le fluide. Afin de pouvoir comparer l'effet de la complexité géométrique due au profil et au maillage, nous présentons d'abord un calcul avec un modèle Euler.

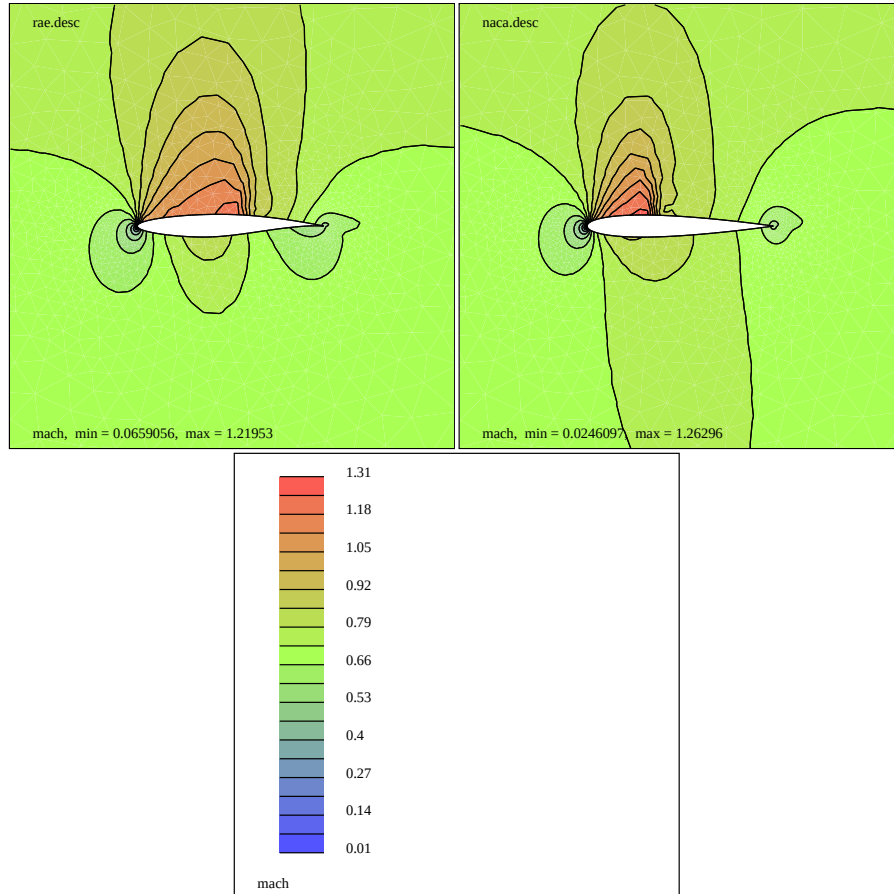


FIG. 77 – Iso-mach des écoulements autour du RAE2822 (à gauche) et du NACA0012 (à droite).

14.3.1 Contexte

Le problème à résoudre est la restitution d'un profil NACA0012 à partir d'un profil RAE2822. Le problème inverse est résolu pour un régime transsonique, plus précisément pour un nombre de Mach à l'infini de 0,73, et une incidence de 2 degrés. La forme des profils d'aile est décrite par 96 points, de sorte que le nombre de paramètres de contrôle maximal est de 95, le maillage total comportant 2200 sommets. Ce maillage est suffisant pour une bonne prédiction en modélisation eulérienne, aussi bien pour le RAE2822 que pour le NACA0012 (figure 77). Un calcul typique d'écoulement sur ce maillage coûte en moyenne 285 secondes CPU (sur DEC ALPHA 500, 333 Mhz).

L'optimisation se fera avec un noeud sur deux, soit 47 degrés de liberté au maximum.

Nous avons choisi d'effectuer cinq pas de temps au pour calculer les différences divisées ainsi qu'à chaque début d'itération d'optimisation.

14.3.2 Résultats

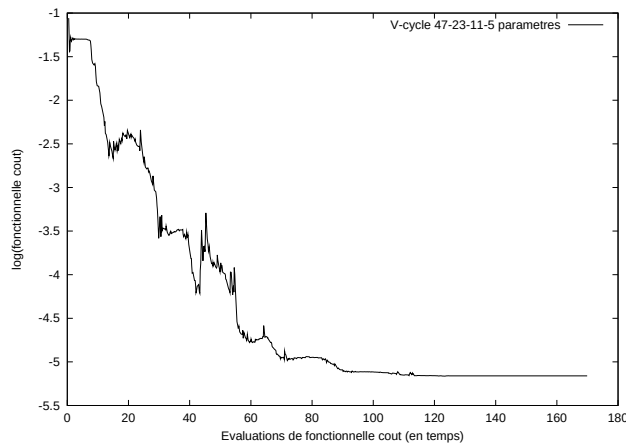


FIG. 78 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: valeur de la fonctionnelle coût pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

Les figures 78 à 83 présentent l'historique du calcul One-Shot.

Le calcul comporte 740 itérations d'optimisation. Il est 170 fois plus coûteux qu'un seul calcul d'état.

On vérifie que l'équation d'état est bien résolue à partir de la moitié environ du calcul (figure 81) et que le calcul aboutit à une très petite valeur de la fonctionnelle (la valeur zéro n'étant pas atteignable avec ce nombre de paramètres de contrôle) (figure 78).

Le gradient perd d'ailleurs trois ordres de grandeur (figure 80).

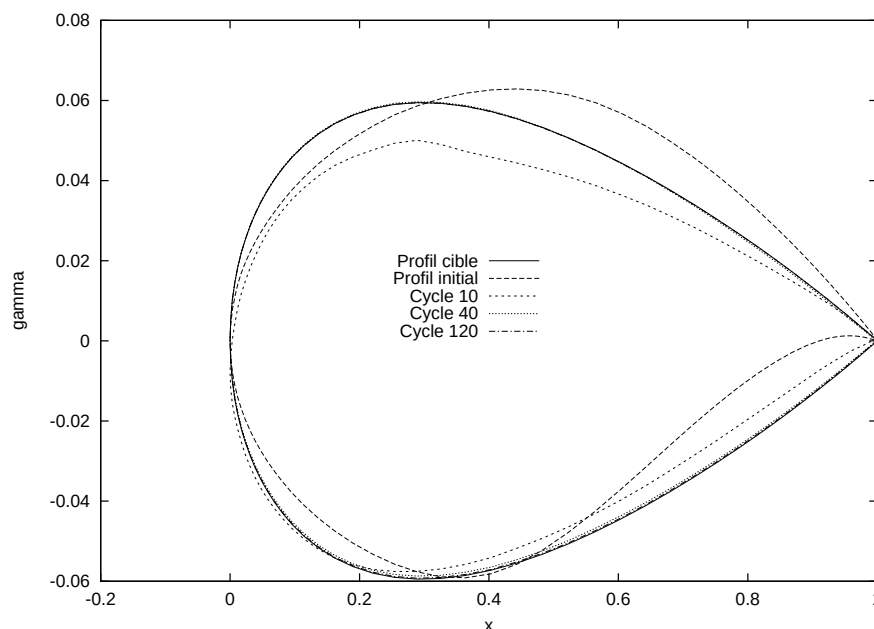


FIG. 79 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

Pour comprendre la figure 79, il faut se rappeler qu'avec 4 grilles, un cycle compte six itérations d'optimisation. On remarque qu'après 720 itérations d'optimisation, la forme obtenue est visuellement confondue avec la forme escomptée. Elle en est déjà très proche après 240 itérations d'optimisation, soit l'équivalent du calcul de 57

calculs d'état. Compte tenu du nombre effectif de paramètres de contrôle, le calcul a donc un coût plus faible que celui de deux itérations de gradient simple en différences divisées avec calcul complet de l'état (le coût est à peine plus élevé que celui d'une seule itération de gradient simple).

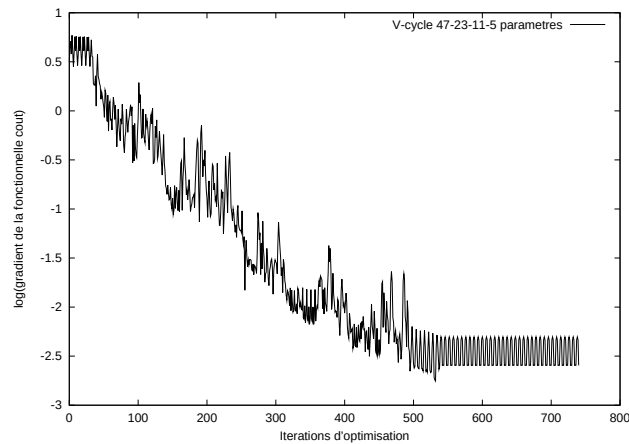


FIG. 80 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

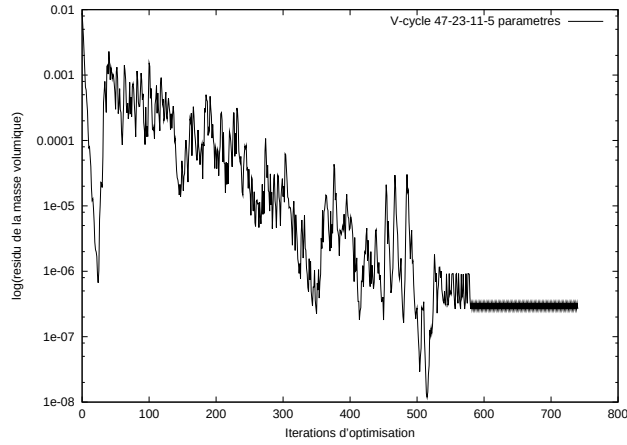


FIG. 81 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

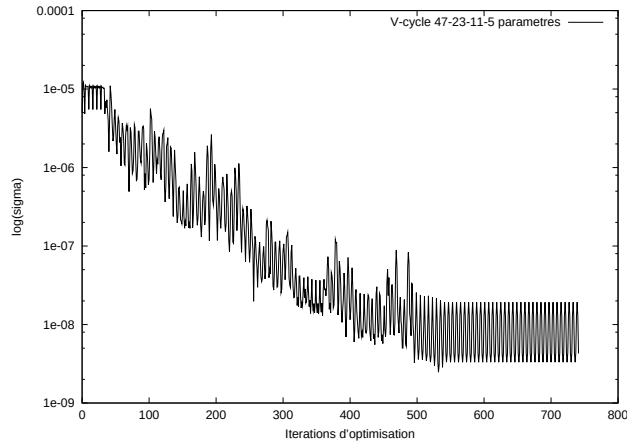


FIG. 82 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

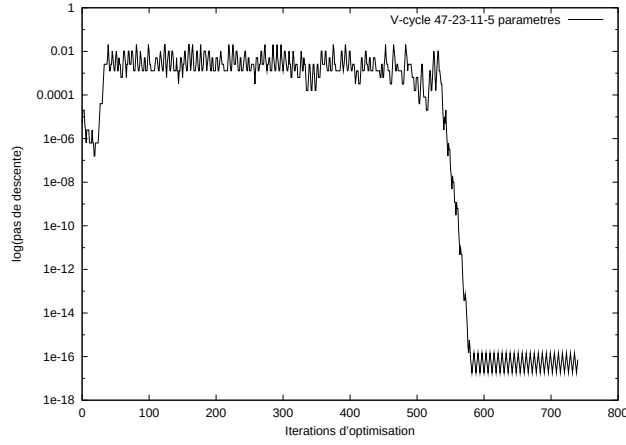


FIG. 83 – *Problème inverse pour profils, Euler, différences divisées, résolution simultanée: évolution du résidu du pas de descente au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

14.4 Problème inverse en turbulent

14.4.1 Modèles de turbulence pour des couches limites compressibles

La partie résolution de l'écoulement est celle développée par J. Francescatto dans sa thèse [Fra98] [FD98]. Nous en rappelons les principales caractéristiques.

Ecriture du système sous forme conservative

Le système des équations de Navier-Stokes adimensionnées auquel on a ajouté le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ s'écrit en deux dimensions d'espace et en formulation conservative:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} &= \frac{1}{Rey} \left(\frac{\partial R(W)}{\partial x} + \frac{\partial S(W)}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial \tilde{R}(W)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{S}(W)}{\partial y} + \Omega(W) \end{aligned} \quad (61)$$

où:

- $W(x, y, t)$ est une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^6$, dont les composantes sont les variables conservatives adimensionnées.
- $F(W)$ et $G(W)$ sont les fonctions de flux convectifs appelés flux d'Euler ou flux hyperboliques
- $R(W)$, $S(W)$ sont les fonctions de flux visqueux laminaires et Rey est le nombre de Reynolds laminaire provenant de l'adimensionnalisation des équations.
- $\tilde{R}(W)$, $\tilde{S}(W)$ sont les fonctions de flux visqueux turbulents.
- $\Omega(W)$ est le terme source associé au modèle de turbulence $k - \varepsilon$.

L'introduction du modèle de fermeture dans les équations de Navier-Stokes moyennées ajoute, en plus de la viscosité turbulente, des termes supplémentaires. Ces termes dans l'expression des contraintes visqueuses turbulentes proviennent de l'existence d'un terme diagonal $2/3 \rho k I_d$ dans les tenseurs de Reynolds. Afin de pouvoir traiter les termes hyperboliques, de la même façon que dans le cas laminaire, nous utilisons un changement de variables approprié:

$$\begin{cases} p' = p + \frac{2}{3}\rho k \\ E' = E + \beta \rho k \text{ avec } \beta = -1 + \frac{2}{3(\gamma - 1)} \end{cases} \quad (62)$$

avec:

$$\begin{cases} p = (\gamma - 1)\rho C_v T \\ E = \rho C_v T + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \rho k \end{cases} \quad (63)$$

où p est la pression, E l'énergie totale par unité de volume, ρ la masse volumique du fluide, k l'énergie cinétique turbulente, C_v désigne la chaleur spécifique à volume constant, T la température, γ le rapport des chaleurs spécifiques supposé constant ($\gamma = 1.4$ pour un gaz parfait) et u, v sont les composantes de la vitesse moyenne. La relation liant E' et p' prend alors la forme classique:

$$p' = (\gamma - 1) \left(E' - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \right) \quad (64)$$

Ainsi, en introduisant ce changement de variables dans le système initial, les termes en $2/3 \rho k$ sont retirés des flux visqueux turbulents pour être incorporés

aux flux convectifs (d'après la définition de p' et de E'). On obtient :

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p' \\ \rho uv \\ (E' + p') u \\ \rho uk \\ \rho u\varepsilon \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p' \\ (E' + p') v \\ \rho vk \\ \rho v\varepsilon \end{pmatrix} \quad (65)$$

Les flux visqueux laminaires s'écrivent :

$$R(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial k}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial k}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

les flux visqueux turbulents :

$$\tilde{R}(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^t \\ \tau_{xy}^t \\ u\tau_{xx}^t + v\tau_{xy}^t + \frac{\gamma\mu_t}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

$$\tilde{S}(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy}^t \\ \tau_{yy}^t \\ u\tau_{xy}^t + v\tau_{yy}^t + \frac{\gamma\mu_t}{Pt} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

et le terme source :

$$\Omega(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_k \\ \omega_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (70)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v \\ \tau_{ij}^t = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \\ Pr = 0.725, \quad Pt = 0.86, \quad Re_y = \frac{\rho_{ref} u_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}} \end{array} \right. \quad (71)$$

où μ et μ_t sont respectivement un coefficient de viscosité laminaire adimensionné et un coefficient de viscosité turbulente adimensionné, τ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, Pr et Pt sont respectivement le nombre de Prandtl laminaire et le nombre de Prandtl turbulent provenant de l'adimensionnement des équations. Les notations ρ_{ref} , u_{ref} , L_{ref} et μ_{ref} désignent respectivement une masse volumique de référence, une vitesse de référence, une longueur de référence et une viscosité de référence. Enfin, nous

posons:

$$\begin{cases} \mu_t = c_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \\ \omega_k = -\rho\varepsilon + \mathcal{P} \\ \omega_\varepsilon = c_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P} - c_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \end{cases} \quad (72)$$

et la viscosité laminaire en fonction de la température T dimensionnée obtenue par la loi de Sutherland:

$$\begin{cases} \mu(T) = \mu_{ref} \frac{T}{T_{ref}} & \text{si } T \leq 120 \text{ K} \\ \mu(T) = \mu(120) \left(\frac{T}{120} \right)^{1.5} \left(\frac{120 + 110}{T + 110} \right) & \text{si } T \geq 120 \text{ K} \end{cases} \quad (73)$$

où le terme de production de la turbulence est défini par:

$$\mathcal{P} = - \left(\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (74)$$

avec c_μ , c_{ε_1} et c_{ε_2} qui sont les constantes empiriques de la modélisation.

Les fonctions f_1 , f_2 et f_μ sont respectivement les fonctions d'amortissement pour le contrôle du terme source et la fonction de correction de la viscosité turbulente. Les constantes c_μ , c_{ε_1} , c_{ε_2} , σ_ε , σ_k et f_1 , f_2 , f_μ font l'objet de définitions différentes suivant les modèles utilisés.

Couche limite turbulente incompressible

La définition des fonctions et des constantes pour le modèle de turbulence à haut Reynolds est la suivante:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_\mu = 1 \\ c_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, c_{\varepsilon_1} = 1.44, c_{\varepsilon_2} = 1.92. \end{cases} \quad (75)$$

L'approche dite "*bi-couche*" a été introduite par Chen et Patel en 1988 [CP88]. Elle consiste à séparer l'écoulement en deux zones; la première, loin de la paroi où le nombre de Reynolds local est grand et la deuxième près de la paroi où la viscosité turbulente est prédominante. Le principe est d'appliquer le modèle de turbulence $k - \varepsilon$ à haut Reynolds dans la première zone et d'utiliser l'équation de k suivi d'une détermination algébrique du taux de dissipation de la turbulence ε dans la deuxième zone.

Ce modèle dépend de trois variables: R_t , R_y et y^+ qui représentent respectivement les deux nombres de Reynolds locaux de la turbulence et une distance à la paroi adimensionnée:

$$R_t = \frac{k^2}{\nu_p \varepsilon}, \quad R_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu_p}, \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{u_f y}{\nu_p} \quad (76)$$

où ρ_p est la masse volumique du fluide à la paroi et ν_p la viscosité laminaire à la paroi.

L'approche de Chen-Patel introduit dans la présente définition le modèle à une équation de Wolfshtein (1969) [Wol69]. Dans la région où $R_y < 200$ (ce qui correspond approximativement à $y^+ < 100$), seules les équations des variables moyennées et de l'énergie cinétique de la turbulence sont résolues numériquement tandis que les longueurs d'échelles caractéristiques sont déterminées par des relations algébriques.

– Zone haut Reynolds ($R_y > 200$):

Les deux équations turbulentes à résoudre sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D(\rho k)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \rho \varepsilon + \mathcal{P} \\ \frac{D(\rho \varepsilon)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P} - c_{\varepsilon_2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad (77)$$

où les constantes empiriques du modèle sont : $c_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{\varepsilon_1} = 1.44$, $c_{\varepsilon_2} = 1.92$ et la viscosité turbulente est donnée par:

$$\mu_t = \rho \, c_\mu \, \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Zone bas Reynolds ($R_y < 200$):

Seule l'équation de l'énergie turbulente est calculée. Le taux de dissipation de la turbulence est déduit de l'énergie cinétique turbulente et d'une échelle de longueur l_ε :

$$\begin{cases} \frac{D(\rho k)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \rho \varepsilon + \mathcal{P} \\ \rho \varepsilon = \rho \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\varepsilon} \end{cases} \quad (78)$$

où la constante $\sigma_k = 1.0$ et la viscosité turbulente sont définies par l'expression suivante :

$$\mu_t = c_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu, \text{ avec } c_\mu = 0.09$$

Les deux échelles de longueurs l_μ et l_ε sont définies de la manière suivante:

$$l_\mu = \kappa c_\mu^{-3/4} y f_\mu \text{ et } l_\varepsilon = \kappa c_\mu^{-3/4} y f_\varepsilon \quad (79)$$

où f_μ et f_ε sont deux fonctions de correction qui s'écrivent:

$$f_\mu = 1 - \exp \left(\frac{-R_y}{A_\mu} \right) \text{ et } f_\varepsilon = 1 - \exp \left(\frac{-R_y}{A_\varepsilon} \right) \quad (80)$$

avec $\kappa = 0.4$, $A_\mu = 70$ et $A_\varepsilon = 2 \kappa c_\mu^{-3/4}$.

- Zone de raccord:

C'est une zone située à cheval entre la zone calculée par le modèle à haut-Reynolds et celle calculée par le modèle bi-couche. Elle est comprise approximativement entre $180 < R_y < 220$. Dans cette zone, la viscosité turbulente dépend d'un coefficient $\alpha \in [0,1]$ qui est une fonction linéaire du nombre de Reynolds turbulent local R_y :

$$\mu_t = \alpha \mu_t^{k-l} + (1 - \alpha) \mu_t^{k-\varepsilon}$$

où

$$\alpha = \frac{220 - R_y}{40}$$

– Condition à la paroi:

Pour les variables moyennées, les conditions imposées à la paroi sont celles d'un écoulement visqueux: la condition d'adhérence du fluide $\vec{V} = \vec{0}$ et la condition sur la température adiabatique $\partial T / \partial y = 0$.

Pour les deux variables de fermeture, les conditions imposées à la paroi sont: une énergie cinétique turbulente nulle et une condition sur le taux de dissipation de la turbulence qui peut être différente d'un modèle à un autre. Pour les modèles de turbulence à bas-Reynolds, nous utilisons une condition suggérée par Chapman and Kuhn [CK85]:

$$\varepsilon|_{y=0} = \left(4\nu \frac{k}{y^2} - \varepsilon \right)_{y=\delta}$$

où $y = \delta$ est le premier point au voisinage de la paroi. Pour le modèle bi-couche, nous utilisons une condition de Dirichlet calculée en $R_y = 200$:

$$\varepsilon|_{R_y=200} = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon}$$

– Traitement aux frontières à l'infini:

Pour la frontière amont et aval, nous utilisons un traitement par décantage sur la base du flux numérique de Steger-Warming [SW81].

14.4.2 Contexte du calcul

Le problème à résoudre est l'inverse de celui présenté en 14.3.1, c'est à dire qu'il s'agit de la restitution d'un profil RAE2822 à partir d'un profil NACA0012. Mais cette fois-ci en turbulent.

Le problème inverse est également résolu pour un régime transsonique, plus précisément pour un nombre de Mach à l'infini de 0.734, une incidence de 2.79 degrés, et le nombre de Reynolds est égal à $6.5 \cdot 10^6$ (cas 9).

La forme des profils d'aile est décrite par 192 points, de sorte que le nombre de paramètres maximal est de 191. Le maillage total (à l'origine structuré) comporte 16672 sommets, dont 192 le long du profil, 32 dans le sillage et 65 dans la direction normale, la plus petite distance à la paroi est de $7.9 \cdot 10^{-6}m$ et sur la première maille le rapport de maille est de 2400 environ.

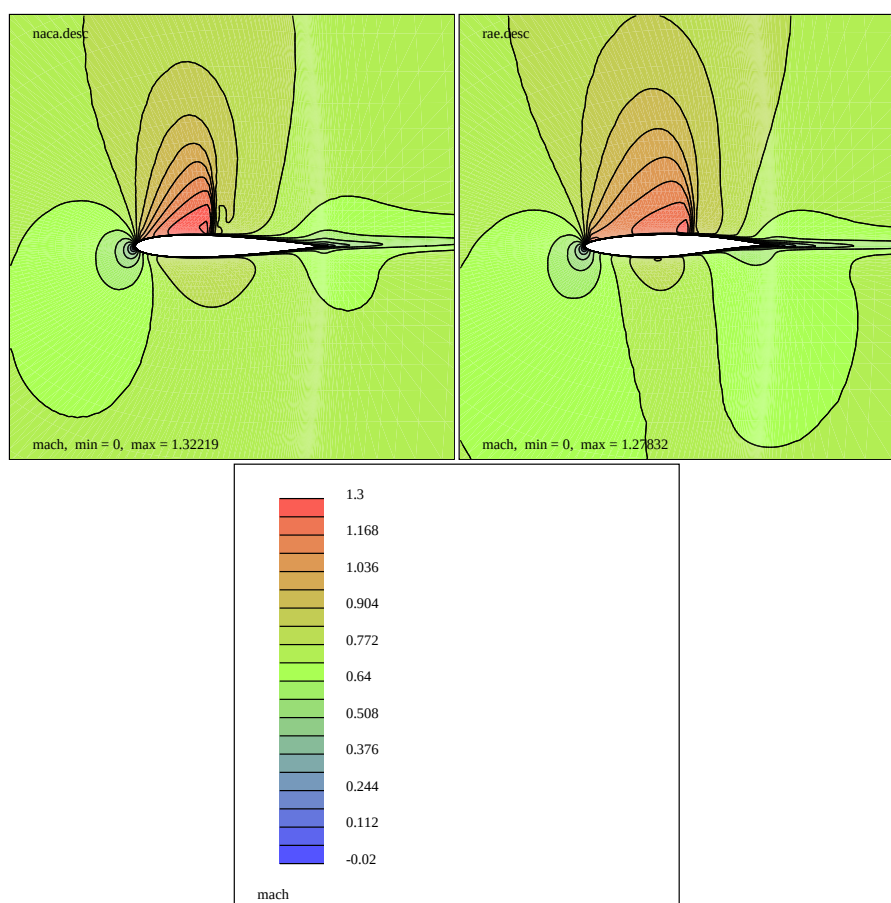


FIG. 84 – Iso-mach des écoulements autour du RAE2822 (à droite) et du NACA0012 (à gauche).

Pour ce maillage, un calcul typique d'écoulement coûte en moyenne 3118 secondes CPU (sur DEC ALPHA 500, 333 Mhz).

L'optimisation se fera avec un noeud sur quatre, soit 47 degrés de liberté au maximum.

On choisit de réaliser 10 pas de temps au cours des différences divisées ainsi qu'à chaque début d'itération d'optimisation.

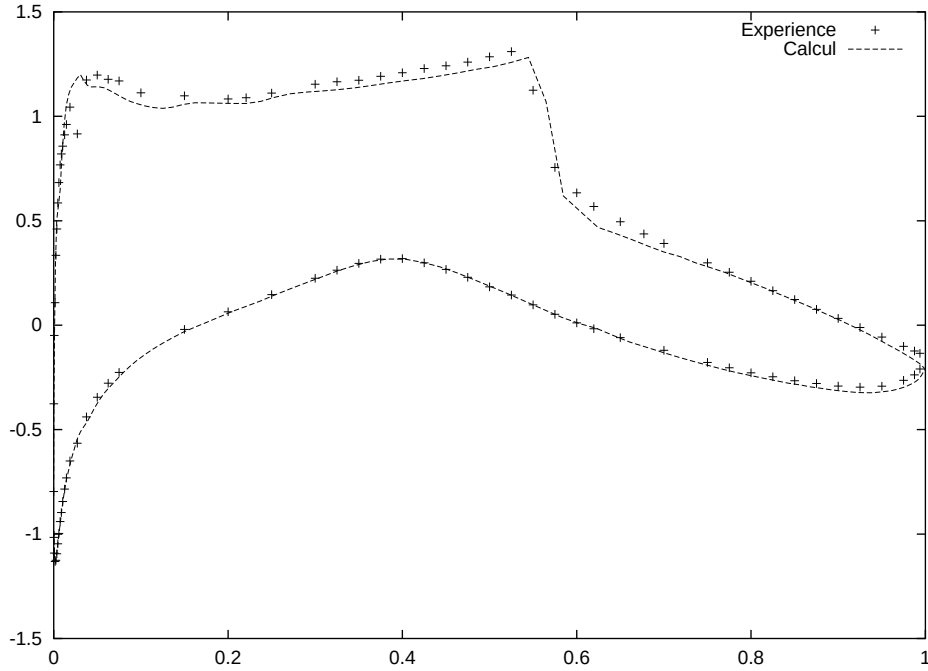


FIG. 85 – Profil RAE2822 (cas 9): comparaison du coefficient de pression provenant du calcul numérique et du calcul expérimental [CMF79].

Les calculs étant cette fois particulièrement coûteux, une implémentation parallèle a été développée. Elle consiste en la réalisation en parallèle des calculs de différences divisées.

14.4.3 Résultats

Les figures 87 à 92 présentent l'historique du calcul One-Shot. L'écoulement initial est cette fois-ci complètement convergé sur la géométrie initiale (bonne évaluation de la fonctionnelle initiale).

Le calcul comporte 240 itérations d'optimisation. Le temps total écoulé est de 51 heures CPU en parallèle (sur cinq machines), que l'on peut estimer à environ 200 heures CPU en séquentiel.

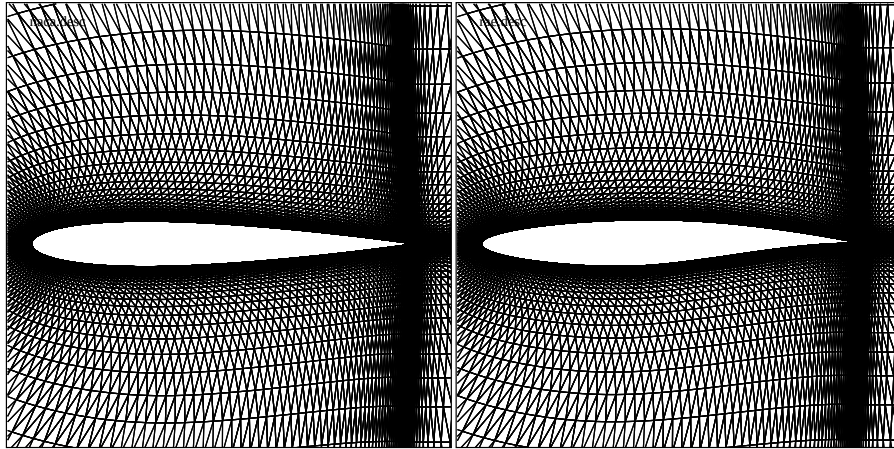


FIG. 86 – Maillages autour des profils et NACA0012 (à gauche) du RAE2822 (à droite). Le maillage du NACA0012 a été déduit de celui du RAE2822 par déformation du maillage.

On vérifie que l'équation d'état est bien résolue à partir des deux tiers environ du calcul (figure 89) et que le calcul aboutit à une très petite valeur de la fonctionnelle (la valeur zéro n'était pas atteignable avec ce nombre de paramètres de contrôle) (figure 87).

Le gradient perd 2 ordres de grandeur (figure 88).

En ce qui concerne la figure 92, on notera qu'avec quatre grilles, un cycle compte six itérations d'optimisation. On remarque qu'après 240 itérations, soit 40 cycles, la forme obtenue est très proche de la forme escomptée. Cela correspond à l'équivalent du calcul de 230 états (en séquentiel). Compte tenu du nombre effectif de paramètres de contrôle, le calcul a donc le même coût que 5 itérations de gradient simple en différences divisées pour une décroissance de trois ordres de grandeur de la fonctionnelle.

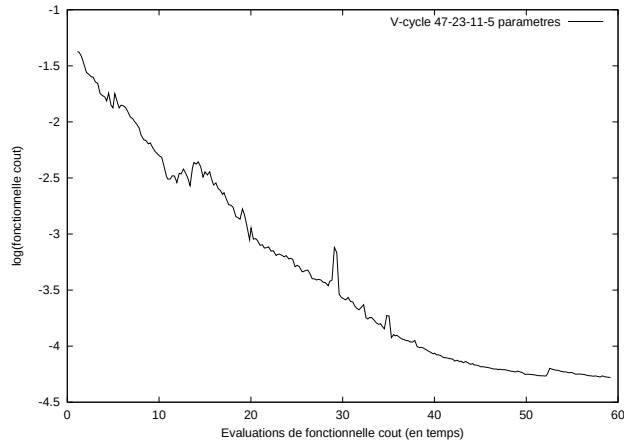


FIG. 87 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: valeur de la fonctionnelle coût pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

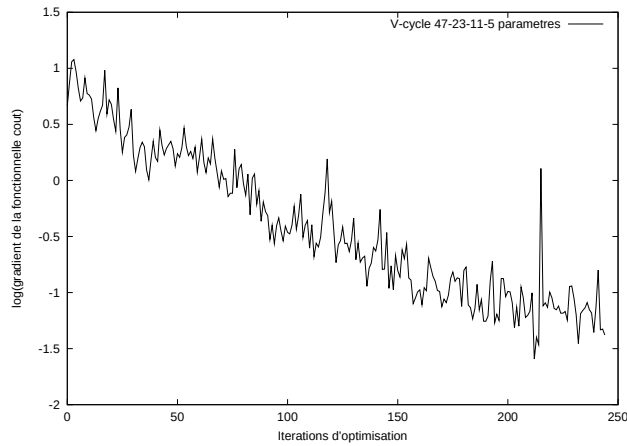


FIG. 88 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: évolution de la norme du pseudo-gradient au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

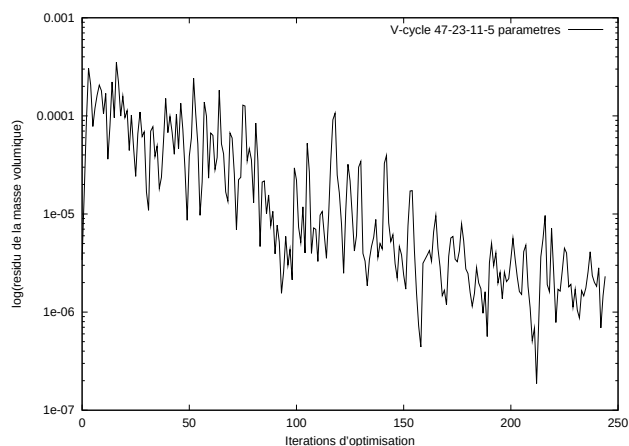


FIG. 89 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: évolution du résidu de la masse volumique au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

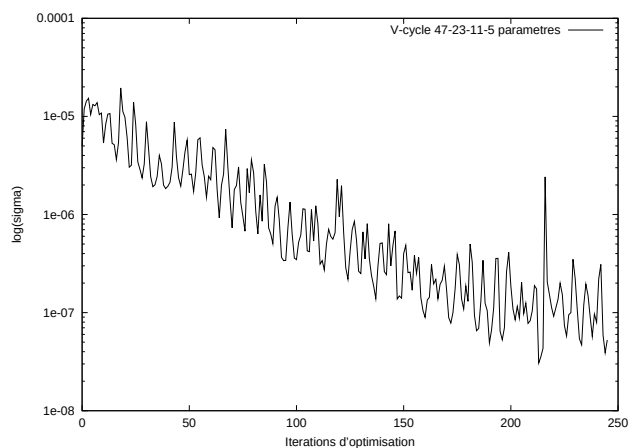


FIG. 90 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: évolution du paramètre σ au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

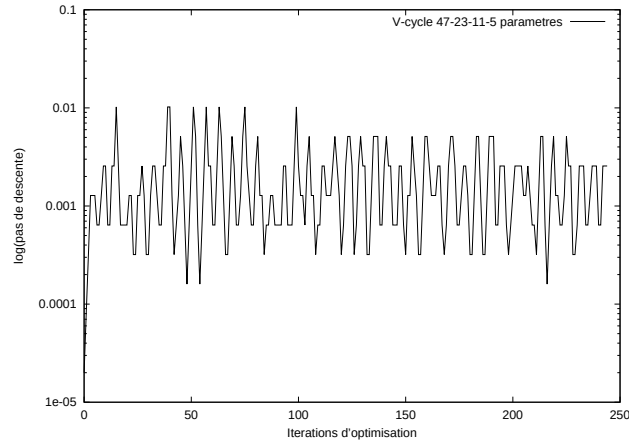


FIG. 91 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: évolution du pas de descente au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

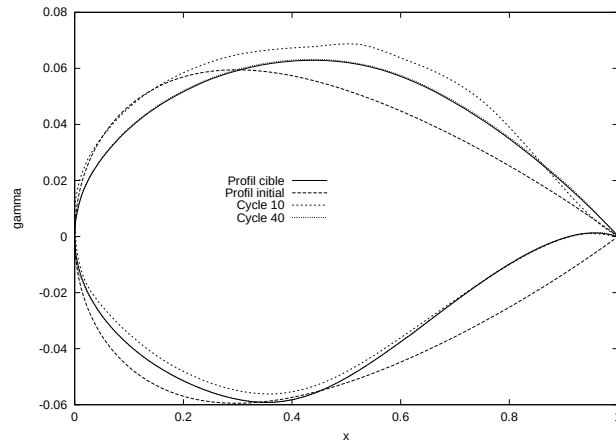


FIG. 92 – *Cas turbulent, différences divisées, résolution simultanée: évolution du profil au cours des itérations d'optimisation pour un V-cycle sur les niveaux à 47, 23, 11 et 5 paramètres de contrôle.*

15 Conclusion

L'optimisation de formes pour des systèmes complexes comme ceux intervenant en aérodynamique est depuis plusieurs dizaines d'années confrontée à deux obstacles principaux: l'optimisation nécessite un effort de calcul de plusieurs ordres de grandeur plus grand que l'analyse (c'est à dire le calcul d'un écoulement), et elle peut nécessiter une analyse de sensibilité précise, coûteuse en temps de calcul (méthode de différences divisées) ou en développement (méthodes utilisant un gradient analytique).

Les difficultés liées au coût ont été passablement dépassées grâce aux méthodes utilisant l'état adjoint et éventuellement la résolution simultanée [Jam88] [Ta'91] [Beu94] [Moh97]. Mais ces méthodes sont coûteuses en développement et nous avons cherché dans ce travail à proposer une version relativement peu coûteuse de l'approche différences divisées.

Pour nous donner toutes les chances dans cette démarche, nous avons évalué une approche combinant les méthodes suivantes:

- méthode One-Shot,
- différences divisées,
- méthode multiniveau.

Cette approche a été comparée avec une approche en gradient analytique pour un premier cas test. Elle est aussi évaluable facilement par rapport à une approche purement différences divisées.

Moyennant un ajustement ad hoc (et néanmoins un peu complexe et coûteux) de quelques paramètres (dont notamment le niveau minimum de résolution de l'état qui assure la convergence de la méthode One-Shot), nous obtenons un algorithme efficace pour une famille de problèmes assez simples et pour un nombre de paramètres de contrôle encore modéré, mais déjà intéressant: en modélisation eulérienne, l'optimisation utilisant 15 paramètres de contrôle coûte l'équivalent d'une dizaine d'évaluations de fonctionnelles.

Il est néanmoins évident que cette approche a un coût encore très dépendant du nombre de paramètres de contrôle et du modèle de CFD choisi. Avec le cas test le plus complexe, l'optimisation de 47 paramètres coûte environ 230 solutions, pour descendre de 3 ordres de grandeur. Au cours de cette optimisation, la position de la surface vis à vis du plan central peut varier de 30%. En pratique, on cherche des variations plus faibles, 5-10%, et des décroissances du coût de moins d'un ordre de

grandeur. On peut espérer (mais cela reste à vérifier) réaliser ce nouvel objectif avec 47 paramètres de contrôle pour le coût de moins d'une centaine d'évaluations.

La mise en œuvre de cette méthode à partir d'un code CFD demande les efforts suivants:

- mise en place du paramétrage,
- ajout d'une routine de remaillage,
- mise en place de la résolution partielle,

mais fait l'économie de l'analyse de sensibilité.

Dans le futur, nous chercherons à améliorer l'efficacité de cette méthode et à l'appliquer à des problèmes d'optimisation concrets (minimisation de trainée, maximisation de portance, ...).

Références

- [Beu93] Beux (F.). – *Conception optimale de formes aérodynamiques et méthodes d'approximations décentrées pour des écoulements incompressibles*. – Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1993.
- [Beu94] Beux (F.). – Shape optimization of an Euler flow in a nozzle. *Notes on numerical fluid mechanics*, vol. 55, 1994. – EUROPT - A European Initiative on Optimum Design Methods in Aerodynamics.
- [CK85] Chapman (D.R.) et Kuhn (G.D.). – Navier-stokes computations of viscous sublayer flow and the limiting behaviour of turbulence near a wall. *In : 7th Computational Fluid Dynamics Conference*. – Cincinnati, New-York, 1985.
- [CMF79] Cook (P.H.), McDonald (M.A.) et Firmin (C.P.). – *Pressure distributions, and boundary layer and wake measurements*. – Rapport technique n138, AGARD, 1979.
- [CP88] Chen (H.C.) et Patel (V.C.). – Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA Journal*, vol. 26, 1988, pp. 641–648.
- [DD89] Deslauriers (G.) et Dubuc (S.). – Symmetric iterative interpolation schemes. *Constructive Approximation*, vol. 5, 1989, pp. 49–68.
- [DGL91] Dyn (N.), Gregory (J. A.) et Levin (D.). – Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design. *Constructive Approximation*, vol. 7, 1991, pp. 127–147.
- [FD98] Francescatto (J.) et Dervieux (A.). – A semi-coarsening strategy for unstructured multigrid based on agglomeration. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 26, 1998, pp. 927–957.
- [Fez85] Fezoui (L.). – *Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*. – Rapport de Recherche n358, INRIA, 1985.
- [Fle85] Fletcher (R.). – *Practical methods of optimization. Vol 2, Constrained optimization*. – John Wiley & Sons, 1985.
- [Fra98] Francescatto (J.). – *Méthodes multigrilles par agglomération directionnelle pour le calcul d'écoulements turbulents*. – Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [FS86] Fezoui (L.) et Stoufflet (B.). – *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*. – Rapport de Recherche n 517, INRIA, 1986.
- [Jam88] Jameson (A.). – *Aerodynamic design via control theory*. – Report 1824 MAE, Princeton University, New Jersey, 1988.

- [KTS94] Kuruwila (G.), Ta'asan (S.) et Salas (M. D.). – Airfoil optimization by the one-shot method. – 1994. Cours von Karmann Institute (VKI).
- [MB93] Marco (N.) et Beux (F.). – *Multilevel optimization: application to shape optimum design with a One-Shot method*. – Rapport de recherche n2068, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 1993.
- [MD95] Marco (N.) et Dervieux (A.). – Numerical optimizers for aerodynamic design using transonic finite-element solvers. – Rapport final ECARP, Juillet 1995.
- [Moh97] Mohammadi (B.). – Practical application to fluid flows of automatic differentiation for design problems. – 1997. Cours von Karmann Institute (VKI).
- [PBC⁺98] Periaux (J.), Buggeda (G.), Chaviaropoulos (P. K.), Giannakoglou (K.), Lanteri (S.) et Mantel (B.) (édité par). – *Optimum aerodynamic design & Parallel Navier-Stokes computations*. – Vieweg, 1998, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, volume 61. ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project.
- [Pir76] Pironneau (O.). – *Sur les problèmes d'optimisation de structure en mécanique des fluides*. – Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1976.
- [Ste88] Steve (H.). – *Schémas implicites linéarisés décentrés pour la résolution des équations d'Euler en plusieurs dimensions*. – Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille 1, 1988.
- [Sto84] Stoufflet (B.). – *Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis*. – Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1984.
- [SW81] Steger (J.) et Warming (R. F.). – Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, vol. 40, 1981, pp. 263–293.
- [Ta'91] Ta'asan (S.). – *One shot methods for optimal control of distributed parameter systems I: finite dimensional control*. – Report 91-2, NASA contractor report 187497, ICASE, 1991.
- [Wol69] Wolfshtein (M.). – The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 12, 1969, pp. 301–318.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399