

# Simulations numériques 3D de phénomènes dynamiques du micromagnétisme

Anne Bagnérés

► **To cite this version:**

Anne Bagnérés. Simulations numériques 3D de phénomènes dynamiques du micromagnétisme. RR-3838, INRIA. 1999. <inria-00072819>

**HAL Id: inria-00072819**

**<https://hal.inria.fr/inria-00072819>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Simulations numériques 3D de phénomènes  
dynamiques du micromagnétisme*

Anne Bagnérés

**N° 3838**

Décembre 1999

———— THÈME 4 ————



*Rapport  
de recherche*





# Simulations numériques 3D de phénomènes dynamiques du micromagnétisme

Anne Bagnérés

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet IDOPT

Rapport de recherche n 3838 — Décembre 1999 — 44 pages

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes  
655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN (France)  
Téléphone : 04 76 61 52 00 - International: +33 4 76 61 52 00  
Télécopie : 04 76 61 52 52 - International: +33 4 76 61 52 52

**Résumé :** Les phénomènes dynamiques du micromagnétisme sont, en général, modélisés à l'aide de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG), équation non-linéaire parabolique. Ce rapport présente sa résolution numérique dans une plaque d'épaisseur constante avec des conditions de périodicité suivant les deux axes de coordonnées du plan de la plaque. L'équation de LLG est discrétisée par différences finies en espace et intégrée en temps à l'aide de l'algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif. Le champ démagnétisant est calculé par une technique de transformée de Fourier. Sa mise en équation se fait simplement dans le cadre des distributions.

Un programme de type parallélisme de données a été écrit pour l'ordinateur parallèle de type MIMD à mémoires distribuées Paragon. Ce programme a été utilisé pour simuler numériquement le processus tridimensionnel de coupe de bande dans des matériaux ferromagnétiques à anisotropie perpendiculaire. Le domaine de discrétisation présente deux parois planes délimitant un domaine central en bande aimanté vers le bas sous champ initial perpendiculaire de 220 oe. On applique des champs de coupe allant de 10 à 200 oe. Quand les parois sont sans structures, la marge de coupe entre paires de parois déroulantes et enroulantes est de 150 oe.

Quand une des parois contient une ligne  $2\pi$  périodiquement reproduite, il n'y a quasiment pas de marge et le module minimum du champ de coupe est le même que celui du cas sans structures et déroulant. Lorsque les parois sont déroulantes, la bande se coupe au niveau des espaces interlignes  $2\pi$ . Une bulle magnétique se forme dont la taille diminue au cours du temps avant de s'annihiler, l'état final étant uniformément aimanté vers le haut. Dans le cas enroulant, la ligne  $2\pi$  se dissocie et chacune des deux lignes de Bloch la composant va rejoindre celle qui la précède ou qui la suit dans la structure périodique. La coupe s'effectue dans l'espace qui s'est créé entre les lignes. Ce processus est 2,7 fois plus long que le précédent. Il y a, ensuite, de nouveau formation d'une bulle qui s'annihile au cours du temps.

On peut stabiliser une bulle magnétique de forme quasi cylindrique en supprimant le champ appliqué total.

Un tour d'horizon des calculs analytiques existants sur la physique des parois et des lignes de Bloch précèdera la présentation des résultats numériques.

**Mots-clé :** équation de Landau-Lifshitz-Gilbert, micromagnétisme, paroi de domaines

*(Abstract: pto)*

Les résultats de calcul ont été obtenus sur la machine parallèle Paragon XP/S de Intel située à l'IRISA, Rennes, accessible aux utilisateurs de la communauté académique grâce à l'accord RAPID entre laboratoires de recherche. (RAPID: <http://www.irisa.fr/rapid>)

## 3D numerical simulations of dynamic phenomena in micromagnetism

**Abstract:** A 3D dynamic micromagnetic model, with resolutions up to  $128 \times 128 \times 16$ , for computing the magnetization dynamics in a ferromagnetic material is presented. Its originality lies in the calculation of the demagnetizing field whose expression is very simple in the distributions frame. The Landau-Lifshitz-Gilbert equation is discretized using finite differences in space and integrated in time with the Runge-Kutta algorithm. The demagnetizing field is computed using a technic involving Fast Fourier transforms. A data-parallel program was written for a Parallel MIMD computer, the Paragon Intel System.

The model has been used to investigate the 3D stripe chopping process in a plate of constant thickness with perpendicular anisotropy. The plate contains two flat walls delimiting a stripe domain. The magnetization is assumed to be periodic in the two directions of the film plane. We applied uniform perpendicular chopping fields on the initial state subjected to a 220 oe bias field.

When the walls are structure free, the stripe domain delimited by a unwinding pair of walls chops at 220+20 oe. It chops at 220+170 oe when the walls are winding. The chopping margin is therefore equal to 150 oe. When one of the walls contains a  $2\pi$  vertical Bloch line (VBL), there is almost no margin. Both states chop at 220+20 oe. But the chopping process takes place later in time in the winding case : at about 19 nsec instead of about 7 nsec, in the unwinding case. It happens in the regions of the walls between VBL pairs. After it is completed, a magnetic bubble is formed. It collapses after a period of time.

Before presenting the results, we give a review the analytical calculations existing on the wall and Bloch line statics and dynamics.

**Key-words:** Micromagnetic calculations, domain walls, magnetic bubbles, vertical Bloch lines.

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Aspects physiques et mathématiques</b>	<b>8</b>
2.1	Domaines, parois, lignes et points . . . . .	8
2.2	Champ démagnétisant . . . . .	11
2.3	Différents termes d'énergie . . . . .	11
2.4	Équations aux dérivées partielles . . . . .	12
2.5	Équation d'évolution . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Position du problème</b>	<b>14</b>
3.1	Problème différentiel associé à l'équation de LLG . . . . .	15
3.2	Détermination du champ démagnétisant . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Discrétisation et mise en oeuvre</b>	<b>16</b>
4.1	Discrétisation . . . . .	16
4.2	Mise en oeuvre . . . . .	17
4.3	Test du calcul du champ démagnétisant . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Notions sur la physique des parois de Bloch</b>	<b>18</b>
5.1	Cas statique . . . . .	19
5.1.1	Les termes d'énergie en coordonnées sphériques . . . . .	19
5.1.2	Les équations variationnelles . . . . .	20
5.1.3	Les équations d'Euler-Lagrange en sphériques . . . . .	22
5.1.4	La paroi . . . . .	22
5.1.5	La ligne de Bloch . . . . .	25
5.2	Cas dynamique . . . . .	26
5.2.1	Dynamique d'une paroi soumise à un champ . . . . .	27
5.2.2	Vitesse d'une paroi rectiligne sans structures (Cas 1D): . . . . .	28
5.2.3	Dynamique de paroi et de lignes de Bloch sous l'effet d'un champ perpendiculaire . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>31</b>
6.1	Les paramètres . . . . .	31
6.2	Configurations d'aimantation initiales . . . . .	32
6.3	Coupe de bandes en 2D . . . . .	33
6.4	Coupe de bandes en 3D . . . . .	35
6.5	Stabilisation d'une bulle en champ nul . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

<b>8</b>	<b>Annexe</b>	<b>42</b>
8.1	Détermination de la solution élémentaire . . . . .	42
8.2	Calcul du champ démagnétisant . . . . .	42



## 1 Introduction

Les matériaux ferromagnétiques ont la propriété de présenter une aimantation spontanée de direction et de sens variables, et de norme constante  $M_s$  :  $\vec{M} = M_s \cdot \vec{m}$  avec  $|\vec{m}| = 1$ . Cette aimantation a une tendance naturelle à s'orienter suivant un axe dit d'anisotropie favorisant ainsi l'existence de régions où elle est constante : les domaines. Les zones de transitions entre les domaines sont appelées les parois. Elles sont de taille très fine.

Dans les matériaux que l'on étudie, l'axe d'anisotropie est perpendiculaire à la surface du matériau et on se trouve en présence de domaines en bandes, aimantés alternativement vers le haut et vers le bas.

L'aimantation crée un champ magnétique  $\vec{H}_D$ , appelé champ démagnétisant, présent dans tout l'espace. À l'équilibre, elle minimise une énergie somme de quatre termes : l'énergie d'échange, l'énergie d'anisotropie, l'énergie démagnétisante et l'énergie de Zeeman :

$E = E_A + E_K + E_D + E_Z$ . Soient  $V$  le volume du matériau et  $p(\vec{m})$  la projection de  $\vec{m}$  suivant l'axe d'anisotropie.

$$E(\vec{m}) = A \int_V |\nabla \vec{m}|^2 dV + K \int_V |p(\vec{m})|^2 dV + \frac{M_s^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{H}_D|^2 dV - M_s \int_V \vec{m} \cdot \vec{H}_Z dV$$

où  $\vec{H}_Z$  est un champ appliqué dit de Zeeman.  $A$  et  $K$  sont des constantes physiques spécifiques du matériau. Le problème statique du micromagnétisme est de trouver les minima, éventuellement locaux, de l'énergie totale sous la contrainte  $|\vec{m}| = 1$ .

Associé à l'énergie, on peut définir un champ effectif  $\vec{H}$  somme de quatre champs : le champ d'échange, le champ d'anisotropie, le champ démagnétisant et le champ de Zeeman. La dynamique de l'aimantation est décrite par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left( \vec{H} \times \vec{m} + \alpha \vec{m} \times (\vec{H} \times \vec{m}) \right), \quad \gamma < 0, \quad \alpha > 0,$$

où  $\alpha$  et  $\gamma$  sont deux constantes. C'est une équation parabolique semi-linéaire. Le premier terme du membre de droite est un terme de précession, le second, un terme d'amortissement.

Les difficultés liées à la résolution des problèmes du micromagnétisme sont les suivants :

- Les phénomènes étudiés sont de tailles très différentes. L'épaisseur des parois est très fine par rapport à la taille des domaines. En dynamique, lorsque  $\alpha$  est petit, on observe beaucoup de phénomènes dynamiques dans les parois.
- L'aimantation est de norme constante. Lorsqu'on travaille en coordonnées cartésiennes, sa prise en compte est une contrainte non linéaire.
- Le calcul du champ démagnétisant. Comme on l'a dit plus haut, il est présent dans tout l'espace et résulte d'interactions à longue portée entre dipôles.

Les études théoriques sur les parois de domaines dans les matériaux à anisotropie perpendiculaire ont commencé dans les années 30. C'est aussi à cette époque que Landau et

Lifshitz ont proposé une équation, portant actuellement leur nom, modélisant l'évolution de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques.

Plus tard, dans les années 60, des études théoriques, numériques et expérimentales ont été menées sur les bulles magnétiques. Ce sont des domaines de forme cylindrique entourés d'une paroi pouvant contenir des structures, les lignes de Bloch. Leur potentiel pour la conception de mémoires a été mis en évidence, et a conduit à un regain d'intérêt pour la physique des parois de domaine. Les travaux dans ce domaine sont synthétisés dans le livre de Malozemoff et Slonczewski [9].

Les mémoires dites "à bulles" sont issues de cette ligne de recherche. Elles sont fabriquées dans des matériaux ferromagnétiques à axe d'anisotropie perpendiculaire à la surface de la mémoire. Des domaines magnétiques de forme cylindrique, les bulles, sont les bits d'informations.

En 1983, Konishi a mis en évidence le concept d'une mémoire plus dense, la mémoire à lignes de Bloch [5]. Le bit d'information n'est plus la bulle comme dans le cas précédent mais une rotation rapide de l'aimantation, une paire de lignes de Bloch verticales, dans des parois de domaines en bande. Un élément essentiel de l'opération de lecture est basé sur la "coupe de bande". Cela se fait en appliquant localement un champ au dessus de la bande à couper de manière à produire un rapprochement des parois et, lorsque l'opération réussie, un pincement puis une coupe, ce qui forme deux domaines séparés.

Le processus de coupe a été étudiée par différents groupes et, en particulier, par des simulations numériques bi-dimensionnelles dans le cas de parois sans structures [10].

Nous avons prolongé ces travaux en étudiant numériquement le processus tridimensionnel de coupe de bande lorsqu'une paroi contient une paire de lignes de Bloch et l'autre est sans structures. Les résultats obtenus sont comparés au cas de la coupe de bande avec parois sans structures. La complexité des phénomènes entrant en jeu fait qu'ils ne sont pas prévisibles par des modèles simples.

Nous avons procédé de la façon suivante. On a supposé que  $V$  est une plaque ferromagnétique d'épaisseur constante contenant deux parois planes délimitant un domaine central en bande. On a considéré le problème différentiel associé à l'équation de LLG pour  $\vec{m} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  vérifiant les conditions de Neuman homogènes sur la surface supérieure et inférieure du matériau, et des conditions de périodicité suivant les deux directions du plan de la plaque. L'équation de LLG a été discrétisée par différences finies en espace. On a utilisé un schéma de Runge-Kutta à pas adaptatif pour l'intégration en temps.

Le schéma de discrétisation en temps étant explicite, la difficulté de la résolution réside dans le calcul du champ effectif et, en particulier, celui du champ démagnétisant. De par l'hypothèse de périodicité, on peut écrire, dans le cadre des distributions, une expression analytique des coefficients de Fourier de  $\vec{H}_D$  en fonction de ceux de l'aimantation. Le calcul de  $\vec{H}_D$  revient à effectuer des transformées de Fourier 2D par couches et à calculer une intégrale suivant l'épaisseur.

Dû au gros volume de calcul, on a choisi d'utiliser une machine parallèle, la Paragon, pour les calculs numériques. Le programme est de type parallélisme de données. Le maillage

est divisé en barreaux répartis sur les processeurs. Le code est en Fortran 77 avec appels aux routines de la librairie du constructeur pour l'échange des messages entre processeurs.

On présentera la coupe de bande lorsque les parois sont sans structures (cas 2D), puis lorsqu'une paroi contient une paire de lignes de Bloch. Le champ initial est perpendiculaire de module 220 oe. On applique des champs supplémentaires de module variant entre 10 oe et 200 oe.

Au paragraphe 2, on présente certains aspects physiques et mathématiques du micromagnétisme. Dans le paragraphe 3, on pose le problème étudié. Le paragraphe 4 contient la discrétisation et la mise en œuvre et le paragraphe 5, les résultats numériques.

Ce rapport couvre donc autant des aspects physiques que mathématiques et numériques du micromagnétisme, avec des résultats originaux dans différents paragraphes. Le lecteur plus intéressé par un domaine pourra se reporter directement au paragraphe correspondant.

## 2 Aspects physiques et mathématiques

### 2.1 Domaines, parois, lignes et points

Les matériaux ferromagnétiques présentent une aimantation spontanée  $\vec{M}$  que l'on peut imaginer comme un champ de vecteurs de direction variable et de norme constante. À l'intérieur de ces matériaux, on observe des régions où  $\vec{M}$  a une même orientation, les domaines. La zone de séparation entre les domaines est appelée la paroi. C'est une zone d'épaisseur assez fine dans laquelle l'aimantation change de sens.

Les matériaux étudiés sont des plaques à axe d'anisotropie perpendiculaire. L'axe d'anisotropie, aussi dit de facile aimantation, est un axe suivant lequel l'aimantation tend naturellement à s'orienter, favorisant ainsi la formation de domaines. Les domaines sont donc aimantés perpendiculairement au plan de la plaque, vers le haut ou vers le bas.

Au centre de la paroi, l'aimantation est, bien entendu, horizontale. Théoriquement, un vecteur tournant du haut vers le bas peut pointer dans toutes les directions du plan horizontal lorsqu'il passe dans ce plan. On appelle paroi de Bloch, une paroi au centre de laquelle l'aimantation est orientée le long de celle-ci. L'aimantation tourne de façon hélicoïdale avec les deux sens de rotation possible : sens des aiguilles d'une montre et sens inverse, définissant ce qu'on va appeler deux "chiralités" de paroi. À l'opposé, au centre d'une paroi dite de Néel, l'aimantation pointe suivant la normale à celle-ci. Figure 2.1.

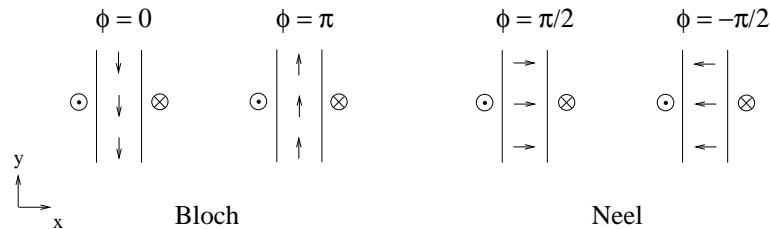
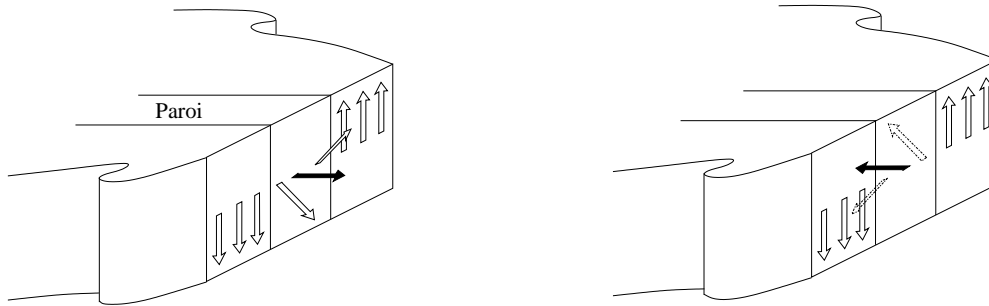
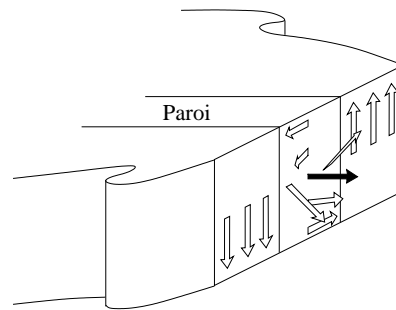


Figure 2.1 : *Parois de Bloch - Parois de Néel.*

Au centre des matériaux étudiés, en champ externe nul, l'aimantation s'oriente dans le plan de la paroi. Figure 2.2.

Figure 2.2 : *Structure d'une paroi au centre de matériau.*

Sur les surfaces, le champ démagnétisant force l'aimantation à s'orienter plutôt perpendiculairement à la paroi avec un sens opposé entre les deux surfaces. La paroi est donc de type Bloch au centre du matériau et tend à être de type Néel sur les surfaces. Figure 2.3.

Figure 2.3 : *Structure d'une paroi.*

Une même paroi peut contenir des portions de chiralité différente. La zone de transition au niveau d'un changement d'orientation de l'aimantation est une ligne de Bloch verticale. Figure 2.4.

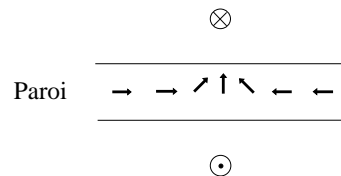


Figure 2.4 : *Vue de dessus d'une paroi contenant une ligne de Bloch verticale dans le plan médian du matériau.*

Au niveau de la ligne de Bloch, sur une des surfaces, l'aimantation fait une rotation rapide de  $360^\circ$  suivant la direction le long de la paroi, tandis que sur l'autre surface, il n'y a pas de changement d'orientation de l'aimantation. Figure 2.5.

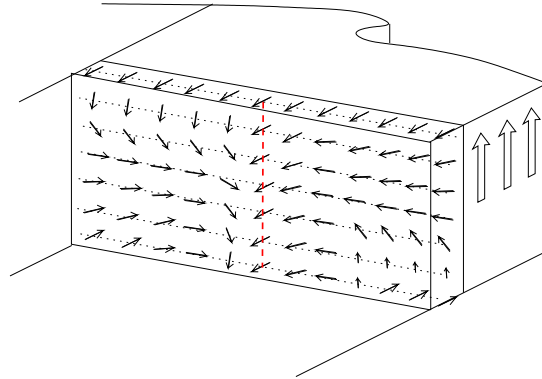


Figure 2.5 : *Structure d'une ligne de Bloch verticale.*

Pour une paroi contenant deux lignes de Bloch proches l'une de l'autre, il y a deux configurations possibles. On dit que la paire de lignes est déroulantes quand l'aimantation dans la paroi tourne dans un sens puis dans l'autre, suivant  $oy$ , la rotation totale de l'angle azimutal étant nulle. Figure 2.6. Cet état est instable : lorsqu'on le laisse évoluer, les lignes se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à s'annihiler.

On dit que la paire de lignes est enroulantes dans le cas contraire. Dans ce cas, l'état est stable et l'angle azimutal fait une rotation totale de  $2\pi$ . Après un temps d'attraction ou de répulsion, les lignes se placent à une distance d'équilibre que l'on peut déterminer ([9]).

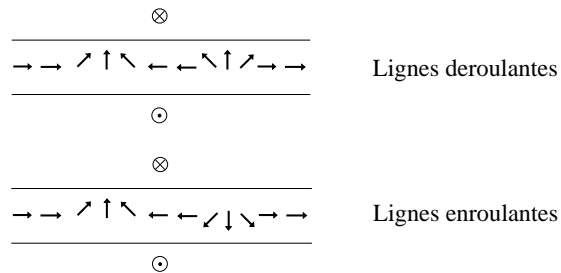


Figure 2.6 : *Caractérisation d'une paire de lignes.*

Les mécanismes d'interaction entre lignes de Bloch sont dus aux énergies d'échange et démagnétisante.

Dans les parois, on peut aussi rencontrer des points de Bloch. Ce sont des points singuliers de l'aimantation. Ils apparaissent lorsqu'on a deux lignes verticales d'orientation opposée empilées l'une au dessus de l'autre. Ils sont situés à la transition entre ces lignes.

Lorsqu'on applique un champ orienté vers le haut, les domaines aimantés vers le haut sont favorisés et un déplacement de parois en résulte. Par précession, les lignes à l'intérieur des parois se déplacent le long de celles-ci. On peut calculer leur vitesse dans certains cas particuliers et trouver une formule analytique pour la force de réaction dynamique exercée sur une ligne en mouvement ([9]). Cette formule permet de trouver le sens de circulation des lignes.

## 2.2 Champ démagnétisant

On considère une plaque ferromagnétique  $V$  d'épaisseur constante  $h$ . Soit  $M_s$  le coefficient de saturation magnétique. On note  $\vec{m}$  le vecteur de norme 1 associé à  $\vec{M}$  :  $\vec{M} = M_s \vec{m}$ , et  $\vec{m}^*$  son prolongement par  $\vec{0}$  en dehors de  $V$ . L'aimantation induit un champ, appelé champ démagnétisant et noté  $\vec{H}_D$ , présent dans tout l'espace. Il vérifie les équations suivantes : (données en unité CGS)

$$\vec{B} = \vec{H}_D + 4\pi\vec{m}^* \quad p.p. \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_D) = 0 \quad (3)$$

$$\vec{H}_D \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \quad (4)$$

$\vec{B}$  étant l'induction magnétique.

De (3), on déduit qu'il existe un potentiel scalaire associé au champ démagnétisant qu'on note  $\phi$  ( $\vec{\nabla}\phi = \vec{H}_D$ ). Il vérifie d'après (1), (2) et (4) :

$$\Delta\phi = -4\pi\operatorname{div}\vec{m}^* \quad (5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\phi|^2 < +\infty \quad (6)$$

## 2.3 Différents termes d'énergie

À l'équilibre, l'aimantation minimise une énergie qui est la somme de quatre termes : l'énergie d'échange, l'énergie d'anisotropie, l'énergie démagnétisante et l'énergie de Zeeman.  $E = E_A + E_K + E_D + E_Z$ . Ce minimum est éventuellement local.

– L'énergie d'échange est :

$$E_A(\vec{m}) = A \int_V |\nabla \vec{m}|^2 dV$$

où  $A$  est la constante d'échange. Ce terme tend à aligner les spins d'aimantation voisins.

– L'énergie d'anisotropie est :

$$E_K(\vec{m}) = K \int_V |p(\vec{m})|^2 dV$$

où  $K$  est la constante d'anisotropie et  $p(\vec{m})$  est la projection de  $\vec{m}$  dans le plan du matériau. Ce terme tend à aligner  $\vec{m}$  avec l'axe d'anisotropie.

– L'énergie démagnétisante est :

$$\begin{aligned} E_D(\vec{m}) &= -\frac{M_s^2}{2} \int_V \vec{m} \cdot \vec{H}_D dV \\ &= \frac{M_s^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 dV \end{aligned}$$

avec  $\vec{H}_D$  vérifiant de (1-4) et  $\phi$  tel que  $\nabla \phi = \vec{H}_D$ . Cette énergie favorise la multiplication du nombre de domaines. La compétition entre l'énergie de paroi  $\sigma$ , qui tend à minimiser la longueur de paroi, et l'énergie démagnétisante, qui tend à réduire la taille des domaines, détermine la configuration en domaines du matériau. Le paramètre de longueur  $l = \sigma/4\pi M_s$  donne la taille caractéristique de ceux-ci.

– L'énergie de Zeeman est :

$$E_Z(\vec{m}) = -M_s \int_V \vec{m} \cdot \vec{H}_Z dV$$

Ce terme tend à aligner  $\vec{m}$  sur le champ appliqué  $\vec{H}_Z$ .

## 2.4 Équations aux dérivées partielles

Soit  $e$  la densité volumique d'énergie totale. On considère l'équation d'Euler-Lagrange :  $\delta e / \delta \vec{m} = 0$ , où  $\delta e / \delta \vec{m}$  vérifie :

$$\delta E(\vec{m}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta e}{\delta \vec{m}} d\vec{m} dV. \quad (7)$$

Soit  $\vec{H}$  le champs effectif défini comme étant :

$$\vec{H} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta e}{\delta \vec{m}}. \quad (8)$$

Il est la somme du champ d'échange, du champ d'anisotropie, du champ démagnétisant et du champ de Zeeman :

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_K + M_s^2 \vec{H}_D + M_s \vec{H}_Z. \quad (9)$$

On prouve [1, 13] que, dans  $V$ , le champ d'échange s'écrit :  $\vec{H}_A = 2A\Delta\vec{m}$ , et que le champ d'anisotropie est :  $\vec{H}_K = -2Kp(\vec{m})$ .

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\vec{H} - 2\lambda\vec{m} = 0 \quad \text{dans } V \quad (10)$$

$$\partial\vec{m}/\partial n = 0 \quad \text{sur } \partial V \quad (11)$$

où  $\lambda = \lambda(\vec{m})$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $|\vec{m}| = 1$ .

### Remarque :

On peut calculer  $\lambda$  explicitement en multipliant (10) scalairement par  $\vec{m}$  :

$$\lambda(\vec{m}) = A|\nabla\vec{m}|^2 + K|p(\vec{m})|^2 - \frac{M_s^2}{2}\vec{H}_D \cdot \vec{m} - \frac{M_s}{2}\vec{H}_0 \cdot \vec{m}$$

## 2.5 Équation d'évolution

L'équation qui régit l'évolution de l'aimantation est l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG). Elle s'écrit :

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial t} = \gamma\vec{M} \times \vec{H} + \alpha \frac{\vec{M}}{M_s} \times \frac{\partial\vec{M}}{\partial t} \quad (12)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel,  $\gamma$  le rapport gyromagnétique ( $\gamma < 0$ ) et  $\alpha$  le coefficient d'amortissement ( $\alpha > 0$ ).

Lorsqu'on multiplie vectoriellement cette équation par  $\vec{M}$ , on obtient :

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left( \vec{H} \times \vec{M} + \frac{\alpha}{M_s} \vec{M} \times (\vec{H} \times \vec{M}) \right) \quad (13)$$

$\gamma/(1 + \alpha^2)$  est appelé le facteur de Gilbert. Le premier terme du membre de droite est un terme de précession. Il décrit la tendance qu'a l'aimantation à tourner autour de  $\vec{H}$ . Le second est un terme d'amortissement visqueux. Il tend à aligner  $\vec{M}$  avec  $\vec{H}$ .

Cette équation s'écrit encore en fonction de  $\vec{m}$  de la façon suivante :

$$\frac{\partial\vec{m}}{\partial t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left( \vec{H} \times \vec{m} + \alpha\vec{m} \times (\vec{H} \times \vec{m}) \right) \quad (14)$$



Et, lorsqu'on développe le terme  $\vec{m} \times (\vec{H} \times \vec{m})$  en produits scalaires, elle devient :

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left( \vec{H} \times \vec{m} + \alpha \vec{H} - \alpha (\vec{m} \cdot \vec{H}) \vec{m} \right) \quad (15)$$

**Remarques :**

1) Faisons la multiplication scalaire de l'équation (14) par  $\vec{m}$ . On obtient  $\vec{m} \cdot \partial \vec{m} / \partial t = 0$ . Soit  $\partial(|\vec{m}|^2) / \partial t = 0$ . La condition  $|\vec{m}| = 1$  est donc incluse dans les équations de LLG.

2) L'énergie décroît avec le temps.

Multiplions vectoriellement l'équation (12) par  $\vec{m}$ , on obtient :

$$\vec{m} \times \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = +\gamma \left( \vec{H} - (\vec{m} \cdot \vec{H}) \vec{m} \right) - \alpha \frac{\partial \vec{m}}{\partial t}$$

Faisons maintenant la multiplication scalaire de cette équation par  $\partial \vec{m} / \partial t$ . On a alors :

$$0 = \gamma \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right)^2$$

Or

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} &= - \frac{\delta e(\vec{m}, t)}{\delta \vec{m}} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \\ &= - \frac{\partial e(\vec{m}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial e(\vec{m}, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right)^2$$

Comme  $\alpha > 0$  et  $\gamma < 0$ ,  $\partial e / \partial t \leq 0$ . Ce qu'il fallait démontrer.

### 3 Position du problème

On suppose que la plaque est infinie suivant les directions  $ox$  et  $oy$  et on restreint le domaine d'étude à un parallélépipède de taille  $2a$ ,  $2b$  et  $h$  respectivement suivant les axes  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$ , l'aimantation étant supposée périodique dans les directions  $ox$  et  $oy$ , de périodes  $2a$  et  $2b$ .

**Remarque :**

Des calculs pour les cristaux liquides tendent à montrer que l'utilisation de coordonnées cartésiennes et une discrétisation par différences finies permettent de prendre en compte les points singuliers de façon satisfaisante [2]. Ceci peut aussi se comprendre par le fait que la probabilité que le point singulier soit sur un nœud du maillage est nulle.

### 3.1 Problème différentiel associé à l'équation de LLG

Soient  $V = [-a, a] \times [-b, b] \times [0, h]$  et  $\vec{H}_Z$  un champ de Zeeman donné, on considère le problème différentiel associé à l'équation LLG avec  $\vec{m} : V \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  périodique de période  $2a$  et  $2b$  respectivement suivant  $x$  et  $y$  et vérifiant les conditions de Neuman homogènes sur la surface supérieure et inférieure du matériau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[ \vec{H} \times \vec{m} + \alpha \vec{m} \times (\vec{H} \times \vec{m}) \right] \\ \vec{m} : V \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad |\vec{m}| = 1 \text{ p.p.} \\ \vec{m}(-a, y, z, t) = \vec{m}(a, y, z, t) \quad \forall y, z, t \\ \vec{m}(x, -b, z, t) = \vec{m}(x, b, z, t) \quad \forall x, z, t \\ \partial \vec{m} / \partial z(x, y, 0, t) = \partial \vec{m} / \partial z(x, y, h, t) = 0 \quad \forall x, y, t \\ \vec{m}(x, y, z, 0) = \vec{m}_0(x, y, z) \quad \forall x, y, z \\ \vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_K + M_s^2 \vec{H}_D + M_s \vec{H}_Z \quad \text{où} \\ \vec{H}_K = -2Kp(\vec{m}) \\ \vec{H}_A = 2A\Delta \vec{m} \\ \vec{H}_D \text{ vérifie :} \\ \quad \cdot \operatorname{div} \vec{H}_D = -4\pi \operatorname{div} \vec{m}^* \\ \quad \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_D = \vec{0} \\ \quad \cdot \vec{H}_D \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \\ \vec{H}_Z \text{ donné.} \end{array} \right.$$

où  $\vec{m}_0$  est une structure d'aimantation initiale.

### 3.2 Détermination du champ démagnétisant

$\vec{m}$  étant périodique, on peut caractériser une solution  $\phi$  périodique de l'équation (5) [13]. C'est celle-ci que nous choisissons pour le calcul du champ démagnétisant. On développe  $\phi$  et  $\vec{m}$  en séries de Fourier. Les coefficients de Fourier dépendent, bien sùre, de la position suivant l'axe  $oz$  :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{+\infty} \phi_{\alpha\beta}(z) e^{2i\pi(\frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{b}y)} \\ \vec{m}^*(x, y, z) &= \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{+\infty} \vec{m}_{\alpha\beta}^*(z) e^{2i\pi(\frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{b}y)}. \end{aligned}$$

où  $i$  est le nombre complexe imaginaire pur, et  $\alpha$  et  $\beta$  des entiers. Soit  $G_{\alpha\beta}$  la fonction distribution :

$$G_{\alpha\beta} = 4\pi \left( 2i\pi \left( \frac{\alpha}{a} m_{1,\alpha\beta}^* + \frac{\beta}{b} m_{2,\alpha\beta}^* \right) + [m_{3,\alpha\beta}^*]' \right).$$

Les coefficients de Fourier  $\phi_{\alpha\beta}$  et  $\vec{m}_{\alpha\beta}$  satisfont l'équation différentielle complexe du second ordre déduite de l'équation (5) :

$$c_{\alpha\beta}^2 \cdot \phi_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\beta}'' = G_{\alpha\beta} \quad (16)$$

au sens des distributions, où  $c_{\alpha\beta} = 2\pi \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right)^{1/2}$ .

Soit  $\delta$  la distribution de Dirac. Réécrite comme un produit de convolution de l'opérateur distribution  $D_{\alpha\beta} = -\frac{d^2\delta}{dz^2} + c_{\alpha\beta}^2\delta$  par le coefficient de Fourier  $\phi_{\alpha\beta}$ , l'équation devient :

$$D_{\alpha\beta} * \phi_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \quad (17)$$

Elle a pour solution :

$$\phi_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}^{*(-1)} * G_{\alpha\beta} \quad (18)$$

où  $D_{\alpha\beta}^{*(-1)}$  est la solution élémentaire de l'équation de convolution obtenue par résolution de  $D_{\alpha\beta} * \phi_{\alpha\beta} = \delta$  [8].

$$D_{\alpha\beta}^{*(-1)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2c_{\alpha\beta}} e^{c_{\alpha\beta} \cdot z} & \forall z \in ]-\infty, 0[ \\ \frac{1}{2c_{\alpha\beta}} e^{-c_{\alpha\beta} \cdot z} & \forall z \in ]0, +\infty[. \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier du champ démagnétisant sont alors :

$$\vec{H}_{D,\alpha\beta} = (2i\pi\alpha \cdot \phi_{\alpha\beta}, 2i\pi\beta \cdot \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}')^T.$$

Le détail des calculs donné est en annexe.

## 4 Discrétisation et mise en oeuvre

### 4.1 Discrétisation

On a discrétisé l'équation de LLG en espace par différences finies. L'équation est intégrée en temps à l'aide de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 à pas adaptatif. À chaque pas de temps, on calcule le champ effectif. L'aimantation au pas de temps suivant est déterminée de façon explicite. Le pas de temps est choisi suffisamment petit pour que l'aimantation calculée soit de norme proche de 1. L'aimantation est renormée à chaque pas de temps.

On discrétise le domaine d'étude avec un maillage rectangulaire à pas constants de taille  $Nx \times Ny \times Nz$ . Les quatre composantes du champ effectif sont discrétisées par différences finies de la manière suivante :

- Le champ d'échange :  
Le laplacien est calculé à l'aide du schéma classique à sept points. Les conditions de Neuman sur la surface supérieure et inférieure du domaine d'étude sont traitées par la méthode du point fictif.
- Le champ d'anisotropie :  
Le calcul est local aux nœuds du maillage.
- Le champ démagnétisant :  
Les coefficients de Fourier de l'aimantation sont déterminés par des transformées de Fourier rapides 2D sur chaque grille horizontale du maillage.  
Le produit de convolution (18) est évalué ainsi. On suppose la fonction  $G_{\alpha\beta}$  linéaire par morceau. L'intégrale du produit de convolution se calcule donc analytiquement. On a programmé la formule obtenue.  
On calcule ensuite  $\vec{H}_D$  par des transformées de Fourier rapides inverses 2D effectuées sur chaque grille horizontale du maillage.
- Le champ appliqué :  
Il est donné par l'utilisateur.

## 4.2 Mise en oeuvre

Un programme a été écrit pour la machine parallèle de type MIMD à mémoire distribuée Paragon de Intel. Il est de type parallélisme de données, appelé aussi SPMD ("Simple Program Multiple Data") : un seul code s'exécute sur des données différentes. Le langage utilisé est le fortran 77. Les échanges de message entre processeurs sont fait par appels aux routines de la librairie *Nx* de Intel.

Les  $Nx \times Ny \times Nz$  nœuds du maillage sont divisés en barreaux répartis sur une grille 2D de  $Npy \times Npz$  processeurs alloués. Une direction, la direction suivant  $ox$ , est donc dégénérée, c'est-à-dire complètement interne aux processeurs, et chaque processeur a dans sa mémoire les données associées aux  $Nx \times Nby \times Nbz$  nœuds correspondants où  $Nby$  et  $Nbz$  sont le nombre de nœuds du maillage suivant  $y$  et  $z$  contenus dans chacun des barreaux.

L'intérêt d'une telle répartition des données réside dans le fait que la routine de FFT parallèle décompose la FFT 2D en 2 FFTs 1D avec une transposition de tableau entre les deux et une transposition inverse à la fin. Les FFTs 1D sont effectuées de façon locale aux processeurs. La transposition, elle, nécessite des communications. Mais cette opération s'avère rapide. La seconde FFT 1D est alors également locale aux processeurs.

### 4.3 Test du calcul du champ démagnétisant

Le calcul du champ démagnétisant a été testé à l'aide de la solution analytique suivante. L'aimantation vaut :

$$\vec{m}(x, y, z) = (\cos(2n\pi x), 0, \sin(2n\pi x))^T$$

Le potentiel scalaire correspondant est :

$$\phi(x, y, z) = \frac{4\pi}{2n\pi} (e^{-2n\pi z} - 1) \sin(2n\pi x)$$

et le champ démagnétisant se déduit par la formule :  $\vec{H}_D(x, y, z) = \vec{\nabla}\phi$ .

L'aimantation étant constante en  $z$ , la formule du produit de convolution programmée est exacte. On le vérifie également avec le programme qui donne des résultats de l'ordre de la précision de la machine. Lorsque le maillage est suffisamment fin, la procédure de transformées de Fourier rapides n'introduit donc pas d'erreurs numériques.

## 5 Notions sur la physique des parois de Bloch

Dans les matériaux ferromagnétiques que l'on étudie ici, le facteur de qualité  $Q$  ( $Q = K/2\pi M_s^2$ ) est supérieur à un. Cette condition associée à la géométrie du matériau indique que l'aimantation dans les domaines est dirigée perpendiculairement au plan du film, soit vers le haut, soit vers le bas. La compétition entre l'énergie de paroi  $\sigma$ , qui tend à minimiser la longueur de paroi, et l'énergie démagnétisante, qui tend à réduire la taille des domaines, détermine la configuration en domaines du matériau. Le paramètre de longueur  $l = \sigma/4\pi M_s$  donne la taille caractéristique de ceux-ci.

L'énergie de paroi est dominée par les énergies d'échange et d'anisotropie, et l'énergie démagnétisante peut être approchée de façon simple, ce qui permet d'obtenir des solutions analytiques pour décrire l'angle polaire et azimutal de l'aimantation dans la paroi dans certains cas particuliers, ainsi que son évolution sous l'effet d'un champ.

Nous reprenons dans ce paragraphe des résultats de [9], et également, pour une partie, de [11, 12] décrivant ces solutions analytiques. Le premier cas étudié est celui d'un matériau d'épaisseur infinie lorsque seules les énergies d'échange et d'anisotropie sont prises en compte. On trouve une formule donnant l'angle polaire en fonction de la position. La prise en compte du terme démagnétisant donne la valeur de l'angle azimutal qui minimise l'énergie totale.

Une formule pour l'angle azimutal dans une paroi contenant une ligne de Bloch et les mécanismes d'interactions entre lignes seront également présentés.

La deuxième partie de cette étude concerne la dynamique de parois et de lignes lorsqu'on applique un champ orienté vers le haut. Sous l'action d'un tel champ, les domaines aimantés vers le haut sont favorisés et un déplacement de parois en résulte. Par précession, les lignes à l'intérieur des parois se déplacent le long de celles-ci. On calcule leur vitesse dans certains cas particuliers et on donne une formule pour la force de réaction dynamique exercée sur une ligne en mouvement. Cette formule permet de trouver le sens de circulation des lignes.

## 5.1 Cas statique

### 5.1.1 Les termes d'énergie en coordonnées sphériques

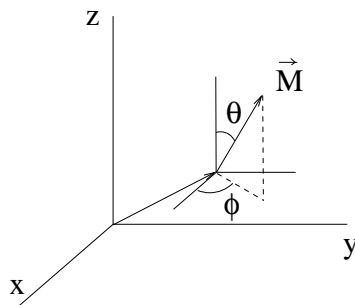


Figure 5.1 : Le système de coordonnées.

Soient  $\theta$  et  $\phi$ , l'angle polaire et azimutal de l'aimantation. (Figure 5.1). On a donc  $\cos \theta = M_z/M_s$ ,  $\tan \phi = M_y/M_x$  et

$$\vec{m} = \vec{m}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (19)$$

En coordonnées sphériques, l'énergie d'échange et d'anisotropie s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} E_A(\theta, \phi) &= A \int_V (|\nabla \theta|^2 + \sin^2 \theta |\nabla \phi|^2) dV \\ E_K(\theta, \phi) &= K \int_V \sin^2 \theta dV \end{aligned}$$

Considérons un matériau avec une paroi à la position  $x = 0$ . L'aimantation dépendant fortement de la coordonnée normale à la paroi  $\vec{n}$  et seulement faiblement de la coordonnée orthogonale à  $\vec{n}$ , on peut décomposer le champ démagnétisant en

$$H_D(x, y, z) = H_{Dn}(x) + H_{Dt}(y, z) \quad \text{avec } H_{Dn}(x) = -4\pi M_s \vec{m}_n(x).$$

L'énergie démagnétisante peut alors être approchée par :

$$E_D(\vec{m}) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} M_n^2 dV ; \quad (20)$$

ce qui s'écrit en coordonnées sphériques :

$$E_D(\theta, \phi) = 2\pi M_s^2 \int_{\mathbb{R}^3} \sin^2 \theta \sin^2 \phi dV \quad (21)$$

### 5.1.2 Les équations variationnelles

On donne, dans un premier temps, les dérivées variationnelles de la densité d'énergie  $e$  par rapport à  $\theta$  et  $\phi$  :  $\delta e/\delta\theta$  et  $\delta e/\delta\phi$ . On a :

$$\delta E = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\delta e}{\delta\theta} d\theta + \frac{\delta e}{\delta\phi} d\phi \right) dV \quad (22)$$

Et donc :

$$\begin{cases} \delta e_A(\theta, \phi)/\delta\theta = -A(2\Delta\theta - \sin 2\theta |\vec{\nabla}\phi|^2) \\ \delta e_A(\theta, \phi)/\delta\phi = -A(\sin 2\theta \vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\phi \sin^2 \theta \Delta\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta e_K(\theta, \phi)/\delta\theta = K \sin 2\theta \\ \delta e_K(\theta, \phi)/\delta\phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta e_D(\theta, \phi)/\delta\theta = 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi \sin 2\theta \\ \delta e_D(\theta, \phi)/\delta\phi = 2\pi M_s^2 \sin^2 \theta \sin 2\phi \end{cases}$$

#### Preuve:

#### Formules préliminaires :

Soient  $(u, du) \in \mathbb{R}^2$ . Pour  $|du|$  petit, on a :

$$\sin(u + du) = \sin u + \cos u du + o(du) \quad (23)$$

$$\sin^2(u + du) = \sin^2 u + \sin(2u) du + o(du) \quad (24)$$

#### Fonction trace :

Soit  $V$  un ouvert régulier de bord  $C^1$  par morceaux noté  $\Gamma$ . La fonction trace est définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(V) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\ f &\mapsto \gamma_0(f) = f|_{\Gamma} \end{aligned}$$

#### Dérivée normale :

Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(V) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\ f &\mapsto \gamma_1(f) = \frac{\partial f}{\partial n} /_{\Gamma} \end{aligned}$$

### Dérivées de l'énergie d'échange:

La dérivée variationnelle de  $E_A$  par rapport à  $\theta$  s'obtient par calcul de  $E_A(\theta + d\theta, \phi) - E_A(\theta, \phi)$ . D'après (24), pour  $|d\theta|$  petit,

$$\begin{aligned} E_A(\theta + d\theta, \phi) &= A \int_V \left( |\vec{\nabla}\theta + \vec{\nabla}d\theta|^2 + \sin^2(\theta + d\theta)|\vec{\nabla}\phi|^2 \right) dV \\ &= E_A(\theta, \phi) + A \int_V \left( 2\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}d\theta + \sin(2\theta)d\theta|\vec{\nabla}\phi|^2 \right) dV + o(d\theta). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Green,

$$\int_V \left( \vec{\nabla}\theta \vec{\nabla} \cdot d\theta \right) dV = - \int_V (\Delta\theta d\theta) dV + \int_\Gamma \gamma_1(\theta)\gamma_0(d\theta)d\Gamma$$

D'où

$$E_A(\theta + d\theta, \phi) - E_A(\theta, \phi) = -A \int_V \left( 2\Delta\theta - \sin(2\theta)|\vec{\nabla}\phi|^2 \right) d\theta dV + \int_\Gamma \gamma_1(\theta)\gamma_0(d\theta)d\Gamma + o(d\theta)$$

et  $\delta e_A(\theta, \phi)/\delta\theta = -A(2\Delta\theta - \sin 2\theta|\vec{\nabla}\phi|^2)$  dans  $V$ .

Calculons maintenant sa dérivée variationnelle par rapport à  $\phi$ . Pour  $|d\phi|$  petit,

$$\begin{aligned} E_A(\theta, \phi + d\phi) &= A \int_V \left[ |\vec{\nabla}\theta|^2 + \sin^2\theta|\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}d\phi|^2 \right] dV \\ &= E_A(\theta, \phi) + 2A \int_V (\sin^2\theta \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}d\phi) dV + o(d\phi). \end{aligned}$$

D'après la formule de Green,

$$\int_V \left( \sin^2\theta \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}d\phi \right) dV = - \int_V \left( \sin 2\theta \vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\phi d\phi + \sin^2\theta \Delta\phi d\phi \right) dV + \int_\Gamma \gamma_0(\sin^2\theta \vec{\nabla}\phi)\gamma_0(d\phi)d\Gamma$$

On a donc :

$$E_A(\theta, \phi + d\phi) - E_A(\theta, \phi) = -2A \int_V \left( \sin 2\theta \vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\phi + \sin^2\theta \Delta\phi \right) d\phi dV + 2A \int_\Gamma \gamma_0(\sin^2\theta \vec{\nabla}\phi)\gamma_0(d\phi)d\Gamma + o(d\phi)$$

D'où  $\delta e_A(\theta, \phi)/\delta\phi = -A(\sin 2\theta \vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\phi + \sin^2\theta \Delta\phi)$  dans  $V$ .

### Dérivées de l'énergie d'anisotropie:

D'après les formules préliminaires,

$$\begin{aligned} E_K(\theta + d\theta, \phi) &= K \int_V \sin^2(\theta + d\theta) dV \\ &= E_K(\theta, \phi) + K \int_V (\sin 2\theta) d\theta dV + o(d\theta) \end{aligned}$$



D'où  $\delta e_K(\theta, \phi)/\delta\theta = K \sin 2\theta$  dans  $V$ .

La dérivée de  $e_K$  par rapport à  $\phi$  s'obtient de façon triviale. Les dérivées de  $e_D$  par rapport à  $\theta$  et  $\phi$  se calculent de manière identique.

### 5.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange en sphériques

Le principe variationnel  $\delta E = 0$  donne les minima de l'énergie  $E$ . Un couple  $(\theta, \phi)$  vérifiant un minimum local est donc solution du système d'équations différentielles suivant :

$$A \left( \Delta\phi \sin^2 \theta + \vec{\nabla}\phi \vec{\nabla}\theta \sin 2\theta \right) - \pi M_s^2 \sin^2 \theta \sin 2\phi = 0 \quad \text{dans } V \quad (25)$$

$$A \left( 2\Delta\theta - |\vec{\nabla}\phi|^2 \sin 2\theta \right) - K \sin 2\theta - 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi \sin 2\theta = 0 \quad \text{dans } V \quad (26)$$

$$\gamma_1(\theta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (27)$$

$$\gamma_0(\sin^2 \theta \vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (28)$$

### 5.1.4 La paroi

#### Structure et largeur d'une paroi :

On s'intéresse à la structure de la paroi dans le plan médian du matériau : on veut savoir comment l'angle  $\theta$  varie lorsque l'aimantation tourne du haut vers le bas. Il y a, au niveau de la paroi, compétition entre l'énergie d'anisotropie qui induit un changement abrupt de l'aimantation du haut vers le bas, ou vice versa, et l'énergie d'échange qui favorise une variation progressive de sa direction.

On va, dans un premier temps, ne prendre en compte que ces deux termes. On néglige donc l'énergie démagnétisante, on suppose que le film est d'épaisseur infinie et on considère une paroi plane infinie, parallèle au plan  $yo$ , centrée en  $x = 0$  avec à gauche ( $x < 0$ ), un domaine aimanté vers le haut, et à droite, un domaine aimanté vers le bas. On suppose, de plus, qu'il n'y a pas de variation de l'aimantation suivant  $oy$ . La densité d'énergie totale s'écrit :

$$e(\theta, \phi) = A[(\partial\theta/\partial x)^2 + (\sin \theta \partial\phi/\partial x)^2] + K \sin^2 \theta. \quad (29)$$

Trouver une configuration d'aimantation dans la paroi revient à déterminer les minima de l'énergie de densité  $e$ , et pour cela, à chercher les solutions des équations d'Euler-Lagrange (25-26) pour :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \pi$$

Cela équivaut à résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta = 0$$

$$2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left[ K + A \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \sin 2\theta = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \theta(x) = 0 \text{ ou } \pi$$

La fonction  $\phi = \text{cte}$  est solution de la première équation. Quand on la reporte dans la seconde équation, on obtient l'équation différentielle de Sine-Gordon suivante :

$$2A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - K \sin 2\theta = 0.$$

Elle a pour solution la fonction  $\theta$  vérifiant :

$$\tan(\theta(x)/2) = \exp(x/\Delta_0), \quad (30)$$

$$\text{où } \Delta_0 = (A/K)^{1/2} \quad (31)$$

$\Delta_0$  est appelé paramètre de largeur de paroi.

Lorsqu'on intègre la densité d'énergie totale sur  $\mathbb{R}$  et qu'on prend un  $\theta$  vérifiant (30), on détermine l'énergie de paroi par unité de surface :

$$\sigma_0 = 4(AK)^{1/2} \quad (32)$$

#### Remarques :

1 - On remarque que l'angle  $\phi$  solution est une constante quelconque. Cela provient du fait qu'on a pris seulement en compte les énergies d'échange et d'anisotropie.

2 - Lorsqu'on dérive les deux membres de l'équation (30), on trouve la relation :

$$\Delta_0 \partial \theta / \partial x = \sin \theta \quad (33)$$

Elle nous sera utile par la suite.

#### Comment l'aimantation tourne-t-elle dans la paroi ? Détermination de l'angle $\phi$ .

Si maintenant nous prenons également en compte la partie de l'énergie démagnétisante provenant des charges magnétiques à l'intérieur de la paroi lorsque  $\phi \neq 0$  et l'énergie de Zeeman issue d'un champ externe plan  $H_p$  orienté à un angle  $\phi_H$  de l'axe de la paroi, la densité d'énergie totale devient :

$$e(\theta, \phi) = A[(\partial \theta / \partial x)^2 + (\sin \theta \partial \phi / \partial x)^2] + [K + 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi] \sin^2 \theta - M_s H_p \cos(\phi - \phi_H) \sin \theta.$$

On remarque que, si  $M_s H_p$  est petit devant  $K + 2\pi M_s^2$ , et que, dans une première approximation, on néglige ce terme,  $e$  se formule de la même manière que la densité (29) avec, à la place de  $K$ , le terme  $K + 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi$ . Dans ce cas, on peut prendre, comme précédemment,

pour solution  $\phi = \text{cte}$ .  $\theta$  vérifie alors l'équation (30) dans laquelle on a remplacé  $\Delta_0$  par un paramètre  $\Delta$  à déterminer.

Commençons par déterminer  $\Delta$ . On calcule l'énergie de paroi par unité de surface en incluant tous les termes dans l'expression de  $e$  :

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta(x), \phi(x)) dx = 2A\Delta^{-1} + 2\kappa\Delta \\ \text{où } \kappa &= K + 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi - (\pi M_s H_p / 2) \cos(\phi - \phi_H).\end{aligned}$$

La minimisation de  $\sigma$  par rapport à  $\Delta$  donne :

$$\Delta = (A/\kappa)^{1/2}. \quad (34)$$

Si on reporte cette valeur dans l'expression de  $\sigma$ , on obtient :

$$\sigma = 4(A\kappa)^{1/2} \quad (35)$$

Dans les matériaux à bulles, on a, en général,  $K > 2\pi M_s^2$ . Le développement au premier ordre de  $\Delta$  et de  $\sigma$  s'écrit :

$$\Delta = \Delta_0 \left[ 1 - \frac{1}{2Q} \sin^2 \phi + \frac{\pi M_s H_p}{4K} \cos(\phi - \phi_H) \right] \quad (36)$$

$$\sigma = \sigma_0 + 4\pi M_s^2 \Delta_0 \sin^2 \phi - \pi \Delta_0 M_s H_p \cos(\phi - \phi_H) \quad (37)$$

En champ externe nul,  $H_p = 0$ . Il est clair que le minimum d'énergie de paroi est atteint lorsque  $\sin^2 \phi = 0$ , c'est à dire pour  $\phi = 0$  ou  $\pi$ . La paroi est alors de type Bloch. L'énergie est maximum pour une paroi de Néel, c'est à dire lorsque  $\phi = \pm\pi/2$ .

La rotation dans les plans intermédiaires apparaît en présence d'une anisotropie d'axe dans le plan ou d'un champ plan. Dans le cas d'un champ plan orienté perpendiculairement à la paroi ( $\phi_H = \pi/2$ ,  $H_p = H_x$ ), la minimisation de l'énergie de paroi donne :

$$\phi = \begin{cases} \arcsin(H_x/8M_s), & |H_x| \leq 8M_s \\ \pm\pi/2, & |H_x| \geq 8M_s \end{cases}$$

Au fur et à mesure que  $|H_x|$  augmente, la paroi s'éloigne de son état Bloch pour n'être plus que de type Néel pour  $|H_x| \geq 8M_s$ .

### Structure verticale de la paroi :

Le matériau est maintenant supposé d'épaisseur finie. Il y a, sur les surfaces, au niveau de la paroi, une forte composante du champ démagnétisant planaire, orientée selon l'axe normal à la paroi. Pour une paroi plane isolée supposée d'épaisseur nulle, elle a pour expression ([9]) :

$$H_x(z) = -4M_s \ln[z/(h-z)], \quad (38)$$

si  $z$  vaut zéro à la surface inférieure du film.

Quel est son effet sur la structure de la paroi? Si, dans un premier temps, on néglige les effets de l'échange et qu'on ne considère que l'énergie démagnétisante, ce champ de fuite tend à éloigner la paroi de sa structure Bloch pour être de type Néel près des surfaces. On obtient la position d'équilibre de l'aimantation en injectant la valeur de  $H_x$  dans (38).

Pour  $|H_x| = 8M_s$ , on détermine deux points:  $z = h/(1 + e^2)$  et  $z = he^2/(1 + e^2)$  (où  $e = 2.718$ ). On observe des structures dynamiques, les lignes de Bloch horizontales, qui prennent naissance en ces points.

L'angle  $\phi$  variant suivant  $z$ , l'énergie d'échange n'est pas négligeable. Sa prise en compte tend à réduire la torsion de l'aimantation dans la direction verticale de la paroi.

### 5.1.5 La ligne de Bloch

#### Structure et largeur d'une ligne de Bloch verticale:

On considère une paroi plane contenant une ligne de Bloch verticale dans un matériau d'épaisseur infinie. On s'intéresse à la variation de l'angle  $\phi$  de l'aimantation selon l'axe  $oy$ , axe de la paroi. Pour cela, on considère les énergies d'échange, d'anisotropie et démagnétisante. La densité d'énergie totale est:

$$\epsilon(\theta, \phi) = A \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + K \sin^2 \theta + 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta$$

Dans ce cas, les équations d'Euler-Lagrange (25) et (26) s'écrivent:

$$A \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \sin^2 \theta + A \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \sin 2\theta - \pi M_s^2 \sin^2 \theta \sin 2\phi = 0 \quad (39)$$

$$2A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \left[ A \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) + K + 2\pi M_s^2 \sin^2 \phi \right] \sin 2\theta = 0 \quad (40)$$

Pour les résoudre, on fait l'hypothèse que  $\phi$  est indépendant de  $x$  et que  $\partial \theta / \partial y$  et  $\partial^2 \theta / \partial y^2$  sont négligeables. D'après la première des deux équations ci-dessus,  $\phi$  vérifie:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \pi M_s^2 \sin 2\phi = 0 \quad (41)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation en  $\theta$  obtenue pour la paroi. Elle a pour solution  $\phi$  vérifiant:

$$\tan(\phi(x, y)/2) = \exp(y/\Lambda_0) \quad (42)$$

$$\text{où} \quad \Lambda_0 = (A/2\pi M_s^2)^{1/2} \quad (43)$$

$\Lambda_0$  est le paramètre de largeur de ligne.

On note qu'on a la relation :

$$\Lambda_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin \phi \quad (44)$$

Si on injecte cette relation dans la seconde équation, on retrouve une expression pour  $\theta$  similaire au cas sans lignes :

$$\tan(\theta(x, y)/2) = \exp(x/\Delta(y)) \quad (45)$$

$$\text{avec } \Delta(y) = \Delta_0 [1 + 2Q^{-1} \sin^2 \phi]^{-1/2} \quad (46)$$

### Définition de la polarité d'une ligne :

Le sens de la rotation d'une ligne de Bloch peut être caractérisé par le vecteur unitaire,  $\vec{t}$ , évalué au centre géométrique de la ligne de Bloch, d'expression :

$$\vec{t} = \frac{\vec{\nabla} \phi \times \vec{\nabla} \theta}{|\vec{\nabla} \phi \times \vec{\nabla} \theta|} \quad (47)$$

Comme  $\vec{\nabla} \theta$  et  $\vec{\nabla} \phi$  sont toujours dans le plan du matériau, les deux directions possibles pour  $\vec{t}$  sont  $\pm oz$ .

Lorsqu'on a à faire à une paroi délimitant un domaine fermé, on peut définir la polarité ou signature d'une ligne de Bloch par la valeur de  $n = \vec{t} \cdot \vec{z}_0$ , où  $\vec{z}_0$  est la direction de l'aimantation en dehors du domaine fermé. Les lignes de Bloch sont dites positives ou négatives suivant que  $n$  vaut + 1 ou - 1.

## 5.2 Cas dynamique

Slonczewski [11] a proposé de considérer comme nouvelles inconnues  $q$ , la coordonnée du centre de la paroi, et  $\psi$ , l'angle azimutal de l'aimantation dans la paroi.

Pour  $\vec{m} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T$ , les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert en coordonnées sphériques s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\sin \theta \\ \sin \theta & \alpha \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{M_s} \begin{pmatrix} \delta e / \delta \theta \\ \delta e / \delta \phi \end{pmatrix} \quad (48)$$

où  $\delta e / \delta \theta$  et  $\delta e / \delta \phi$  sont les dérivées variationnelles de la densité d'énergie par rapport à  $\theta$  et  $\phi$  (cf. paragraphe 5.1.2). Lorsqu'on intègre les termes  $\delta e / \delta \theta$  et  $\delta e / \delta \phi$  suivant la direction perpendiculaire à la paroi, sous certaines hypothèses simplificatrices, on peut se ramener à un système de deux équations à deux inconnues liant la dérivée variationnelle de l'énergie de paroi par rapport à  $q$  et  $\psi$  :  $\delta \sigma / \delta q$  et  $\delta \sigma / \delta \psi$ , à  $\dot{q}$  et  $\dot{\psi}$  et, dans le cas de petites vitesses,

en déduire la vitesse d'une paroi rectiligne sans structures sous l'action d'un champ perpendiculaire uniforme dans un matériau infiniment épais. Dans le cas d'une paroi contenant des lignes, on peut également tirer de ces équations le comportement de cette paroi, sa vitesse, le sens de déplacement des lignes et leur vitesse.

Nous considérons, dans cette étude, des matériaux ayant un facteur de qualité  $Q \gg 1$ .

### 5.2.1 Dynamique d'une paroi soumise à un champ

#### Cas 1D

On suppose le matériau infiniment épais et une paroi plane parallèle au plan  $yo$ z de structure :

$$\tan(\theta(x, t)/2) = \exp[[x - q(t)]/\Delta(t)] \quad (10.1) \quad (49)$$

$$\phi(x, t) = \psi(t) \quad (50)$$

On a les relations :

$$\partial\theta/\partial x = \Delta^{-1} \sin \theta \quad (51)$$

$$\delta\theta = -(\partial\theta/\partial x)\delta q = -\Delta^{-1}\delta q \sin \theta \quad (52)$$

$$\dot{\theta} = -\Delta^{-1}\dot{q} \sin \theta \quad (53)$$

On cherche à déterminer  $\delta\sigma = \int \delta e \, dx$ . On a :

$$\delta\sigma = \int \left( \frac{\delta e}{\delta\theta} \delta\theta + \frac{\delta e}{\delta\psi} \delta\psi \right) dx \quad (54)$$

Si on remplace dans cette équation les expressions pour  $\delta e/\delta\theta$  et  $\delta e/\delta\psi$  données par l'équation de LLG en coordonnées sphériques, on obtient :

$$\delta\sigma = \frac{M_s}{\gamma} \int \left[ (\dot{\psi} \sin \theta - \alpha \dot{\theta}) \delta\theta + (-\dot{\theta} \sin \theta - \alpha \dot{\psi} \sin^2 \theta) \delta\psi \right] dx \quad (55)$$

Lorsqu'on utilise les relations (53-55),  $\delta\sigma$  devient :

$$\delta\sigma = \frac{M_s}{\gamma\Delta} \int \sin^2 \theta \left[ \left( -\dot{\psi} - \frac{\alpha\dot{q}}{\Delta^{-1}} \right) \delta q + (\dot{q} - \alpha\Delta\dot{\psi}) \delta\psi \right] dx. \quad (56)$$

Le changement de variable d'intégration  $dx$  par  $d\theta = \Delta^{-1} \sin \theta dx$  permet de calculer l'intégrale et d'écrire :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\psi} = \frac{2M_s}{\gamma} (\dot{q} - \alpha\Delta\dot{\psi}) \quad (57)$$

$$\frac{\delta\sigma}{\delta q} = -\frac{2M_s}{\gamma} \left( \dot{\psi} + \frac{\alpha\dot{q}}{\Delta} \right) \quad (58)$$

Un des intérêts de ces équations réside dans le fait que, lorsqu'on connaît une expression pour  $\sigma$  de laquelle on peut déduire sa dérivée variationnelle par rapport à  $\psi$  et  $q$ , par substitution, on a deux relations liant  $q$ ,  $\psi$ ,  $\dot{q}$  et  $\dot{\psi}$ , comme celles proposées par Slonczewski [11].

### Cas 3D

Ce résultat se généralise en 3D au cas d'une paroi de géométrie quelconque. Lorsque la paroi est légèrement fléchie et de structure :

$$\tan(\theta(x, y, z, t)/2) = \exp [[y - q(x, z, t)]/\Delta(t)] \quad (59)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \psi(x, z, t), \quad (60)$$

on retrouve les équations (59) et (60).

#### 5.2.2 Vitesse d'une paroi rectiligne sans structures (Cas 1D) :

On considère une paroi, dans un matériau infiniment épais, de structure décrite au paragraphe (5.1.4), soumise à un champ uniforme perpendiculaire  $H = (0, 0, H_z)^T$ . Il lui correspond une énergie de paroi donnée par la formule (37) dans laquelle on a remplacé  $\Delta_0$  par  $\Delta$  et  $\phi$  par  $\psi$ . On peut calculer sa dérivée par rapport à  $\psi$ . Elle vaut :

$$\delta\sigma/\delta\psi = 4\pi M_s^2 \sin 2\psi.$$

Cette expression combinée avec l'équation (59) donne :

$$\dot{q} = 2\pi\gamma\Delta M_s \sin 2\psi + \alpha\Delta\dot{\psi} \quad (61)$$

Malozemoff et Slonczewski [9] ont établi, par un raisonnement en terme de conservation d'énergie, que la moyenne en temps de  $\dot{q}$  vaut :

$$\langle \dot{q} \rangle = \frac{\alpha}{\gamma H_z} \left( \frac{\langle \dot{q}^2 \rangle}{\Delta} + \Delta \langle \dot{\psi}^2 \rangle \right) \quad (62)$$

En régime permanent, l'aimantation ne précesse pas dans la paroi :  $\dot{\psi} = 0$ . Pour  $\dot{q}(t) = v_p$ , l'équation (64) devient :

$$v_p = \frac{\gamma\Delta}{\alpha} H_z \quad (63)$$

Dans ce cas, la vitesse de la paroi est donc inversement proportionnelle à  $\alpha$ . Lorsque  $\dot{\psi} \neq 0$ , cette quantité constitue une borne supérieure et on a :

$$\frac{\gamma\Delta}{\alpha + \alpha^{-1}} H_z \leq \dot{q} \leq \frac{\gamma\Delta}{\alpha} H_z. \quad (64)$$

### 5.2.3 Dynamique de paroi et de lignes de Bloch sous l'effet d'un champ perpendiculaire

#### Comportement de la paroi

On considère une paroi contenant des lignes de Bloch libres de circuler le long de celle-ci. On constate que, lorsque la paroi se déplace sous l'action d'un champ perpendiculaire, elle est retardée dans les portions contenant les lignes. En effet, dans les parties sans lignes, suivant le modèle précédent,  $\dot{\psi} = 0$  et l'équation (60) se réduit à :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta q} = -\frac{2M_s\alpha}{\gamma\Delta}\dot{q} \quad (65)$$

Dans les parties avec lignes, la quantité  $\delta\sigma/\delta\psi$  est petite. Si on la néglige dans l'équation (59), on obtient  $\dot{q} = \alpha\Delta\dot{\psi}$ . Cette expression combinée avec (60) donne :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta q} = -\frac{2M_s}{\gamma\Delta}(\alpha + \alpha^{-1})\dot{q} \quad (66)$$

Cette nouvelle équation ne diffère de (67) que par le terme  $\alpha^{-1}$  qui, quand  $\alpha$  est petit, fait décroître de manière significative la mobilité effective de la paroi  $\gamma\Delta/(\alpha + \alpha^{-1})$ .

#### Dynamique d'une ligne verticale dans une paroi soumise à un champ perpendiculaire :

On considère une ligne de Bloch de configuration donnée figure 5.3 à la position  $X_L = (x_L, y_L)$ . La force qui tend à la déplacer est obtenue en différenciant l'énergie totale  $E$  par rapport à sa position :

$$F_d = -\left(\frac{\partial E}{\partial x_L}, \frac{\partial E}{\partial y_L}\right)^T.$$

Notons  $A$  la surface de la paroi. On a :

$$\frac{\partial E}{\partial X_L} = \iint \left[ \frac{\delta\sigma}{\delta\psi} \frac{\partial\psi}{\partial X_L} + \frac{\delta\sigma}{\delta q} \frac{\partial q}{\partial X_L} \right] dA \quad (67)$$

Lorsqu'on reporte les expressions de  $\delta\sigma/\delta\psi$  et  $\delta\sigma/\delta q$  données par (59) et (60) dans cette intégrale, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial X_L} = \frac{2M_s}{\gamma} \iint \left[ (\dot{q} - \alpha\Delta\dot{\psi}) \frac{\partial\psi}{\partial X_L} - (\dot{\psi} + \alpha\Delta^{-1}\dot{q}) \frac{\partial q}{\partial X_L} \right] dA \quad (68)$$

Soit une ligne de Bloch dans une paroi plane décrite par (paragraphe 5.1.4) :

$$\tan \frac{\psi(x, y)}{2} = \exp \left[ \frac{-(y - y_L)}{\Lambda_0} \right] \quad (69)$$

$$\Lambda_0 = \left( \frac{A}{2\pi M_s^2} \right)^{1/2} \quad (70)$$



Dans ce contexte, on a les relations  $\delta q = \delta x_L$ ,  $\dot{q} = \dot{x}_L$ ,  $dA = dydz$ ; ainsi que :

$$\delta\psi = -\delta y_L \Lambda_0^{-1} \sin\psi \quad (71)$$

$$\dot{\psi} = -\dot{y}_L \Lambda_0^{-1} \sin\psi \quad (72)$$

On obtient par substitution de ces quantités dans la dérivée de l'énergie par rapport à  $X_L$  et après intégration sur une distance unité suivant la direction  $oz$  :

$$\frac{\partial E}{\partial y_L} = \frac{-2M_s}{\gamma} \int_{-a/2}^{a/2} (\dot{x}_L + \alpha \Delta \dot{y}_L \Lambda_0^{-1} \sin\psi) \Lambda_0^{-1} \sin\psi dy \quad (73)$$

où  $a$  est une constante de longueur de paroi grande devant  $\Lambda_0$ . On calcule cette intégrale en changeant la variable d'intégration  $y$  par  $\psi$  et en approchant  $\Delta$  par  $\Delta_0$ ; ce qui donne :

$$\frac{\partial E}{\partial y_L} = -\frac{2\pi M_s}{\gamma} \dot{x}_L - \frac{4\alpha M_s}{\gamma\sqrt{Q}} \dot{y}_L \quad (74)$$

De même, la composante  $x_L$  de la force de réaction dynamique est :

$$\frac{\partial E}{\partial x_L} = -\frac{2M_s}{\gamma} \int_{-a/2}^{a/2} (\dot{y}_L \Lambda_0^{-1} \sin\psi - \alpha \Delta^{-1} \dot{x}_L) dy \quad (75)$$

Dans ce cas, on doit développer  $\Delta^{-1}$  à un ordre plus élevé en utilisant (46) :

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} (1 + Q^{-1} \sin^2\psi + \dots). \quad (76)$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial x_L} = \frac{2\pi M_s}{\gamma} \dot{y}_L - \left( \frac{4\alpha M_s}{\gamma\sqrt{Q}} + a \frac{2\alpha M_s}{\gamma\Delta_0} \right) \dot{x}_L \quad (77)$$

Lorsqu'on applique un champ uniforme suivant  $oz$  de module  $H_z$ , l'énergie est  $E = -2M_s H_z a y_L$ . Des équations (76) et (79), on déduit :

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\pi\sqrt{Q}}{2\alpha} \quad (78)$$

$$v_x = \frac{\Delta\gamma}{\alpha} H_z \left( 1 + \frac{\pi^2 \Lambda_0}{2\alpha^2 a} + \frac{2\Delta}{aQ^{1/2}} \right)^{-1} \quad (79)$$

Comme  $Q \gg 1$  et  $\alpha < 1$ , la ligne se déplace à une vitesse supérieure à la paroi.

Si on néglige le terme proportionnel à  $a$  dans l'équation (79), il reste la force de réaction dynamique spécifique par unité de longueur d'une ligne de Bloch. Elle s'écrit aussi sous la forme vectorielle suivante :

$$F_{di} = \frac{2\pi M_s}{\gamma} \vec{t} \times \vec{v} - \frac{4\alpha M_s}{\gamma\sqrt{Q}} \vec{v} \quad (80)$$

où  $\vec{v} = (v_x, v_y)^T$  et  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire défini en (47).

Cette équation donne le sens de circulation d'une ligne soumise à un champ suivant  $oz$ . Chacun des spins d'aimantation dans la paroi étant soumis à cette force, il tourne dans le sens donné par la règle des trois doigts de la main droite. La nouvelle position de la ligne se trouve là où le spin est normal à la paroi et le sens de déplacement s'en déduit. Dans le cas de la figure 5.3, par exemple, un champ orienté vers le haut fera déplacer la ligne vers les  $y$  positifs.

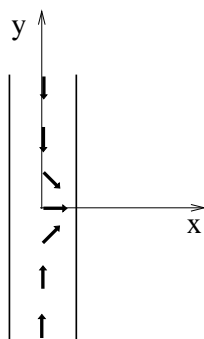


Figure 5.3 : Une ligne de Bloch.

## 6 Résultats numériques

### 6.1 Les paramètres

Les paramètres utilisés sont les suivants :

- la constante d'échange  $A = 1,08 \cdot 10^{-6}$  erg/cm.
- La constante d'anisotropie  $K = 30342,82$  erg/cm<sup>3</sup> d'où  $h_K = 2K/M_s = 1860$  Oe.
- L'aimantation à saturation  $4\pi M_s = 410$  Gauss.
- Le coefficient d'amortissement vaut  $\alpha = 0,5$ .
- Le rapport gyromagnétique vaut  $\gamma = -0,0179$  Oe<sup>-1</sup>nsec<sup>-1</sup>.
- La taille du domaine est de  $2,4 \times 2,4 \times 1,43 \times 10^{-12}$  cm<sup>3</sup>.
- Le maillage a  $128 \times 128 \times 16$  points ; soit une taille de maille de  $2,4/128 = 1,88 \cdot 10^{-6}$  cm en  $x$  et en  $y$ .
- Les calculs se font avec 32 processeurs de la Paragon.

Le paramètre de largeur de paroi vaut :  $\Delta_0 = \sqrt{A/K} = 5,97 \cdot 10^{-6}$  cm, ( $\pi\Delta_0 = 1,87 \cdot 10^{-5}$ cm). Il y a donc environ 10 points de maillage dans les parois. Le paramètre de largeur de ligne vaut :  $\Lambda_0 = \sqrt{A/2\pi M_s^2} = 1,27 \cdot 10^{-5}$  cm, ( $\pi\Lambda_0 = 4 \cdot 10^{-5}$ cm) ; soit environ 21 points de maillage dans les lignes de Bloch au centre du matériau.

Le facteur de qualité  $Q = K/2\pi M_s^2 = 4,54$ .

## 6.2 Configurations d'aimantation initiales

La configuration à l'équilibre comporte deux parois planes parallèles au plan  $yoz$  à  $1/4$  et  $3/4$  du matériau suivant  $x$ , délimitant un domaine central, en bande, dans lequel l'aimantation est orientée vers le bas. Figure 5.1.

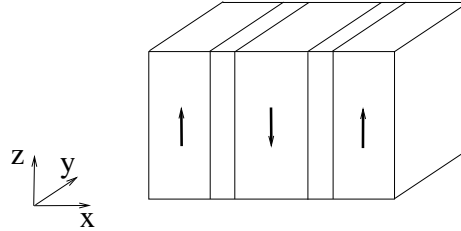


Figure 5.1: *Configuration d'aimantation initiale.*

On applique, dans un premier temps, un champ uniforme perpendiculaire de 220 oe orienté vers le haut. Sous l'effet d'un tel champ, les parois se rapprochent jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre où la bande centrale est plus étroite. Partant de cet état, on applique un champ de coupe uniforme, également orienté vers le haut, de module entre 10 et 200 oe. Alors, soit les parois se rapprochent jusqu'à un nouvel équilibre, soit la bande centrale se coupe et on atteint un état uniformément orienté vers le haut.

On exposera, dans un premier temps, les résultats obtenus avec des parois sans structures. Dans ce cas, les variables du problème sont indépendantes de la coordonnée  $y$ . Le champ appliqué étant uniforme, le problème est 2D et se ramène à la résolution des équations dans le plan  $xoz$ .

Puis, on présentera des résultats lorsqu'une paroi contient une paire de lignes de Bloch enroulantes ou lignes de Bloch  $2\pi$ , périodiquement reproduite le long de celle-ci. Figure 5.2. Cette fois, le problème est purement 3D.

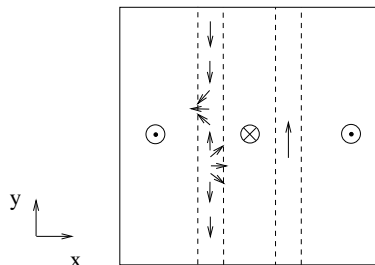


Figure 5.2: *Vue de dessus de la configuration d'aimantation initiale dans le plan médian du matériau lorsque la paroi de gauche contient une ligne  $2\pi$ .*

Figure 5.3, on a représenté les iso-valeurs de la composante  $m_y$  de l'aimantation dans la paroi contenant la ligne  $2\pi$ . On repère plus facilement les lignes de Bloch en regardant les iso-valeurs au niveau des surfaces. La rotation rapide de  $2\pi$  de l'angle azimutal au niveau de la ligne de Bloch, que l'on peut voir également sur la figure 2.4, se traduit par des courbes de niveau très rapprochées. Les deux lignes de Bloch composant la ligne  $2\pi$  ont la forme d'un éventail ouvert soit vers le haut, soit vers le bas.

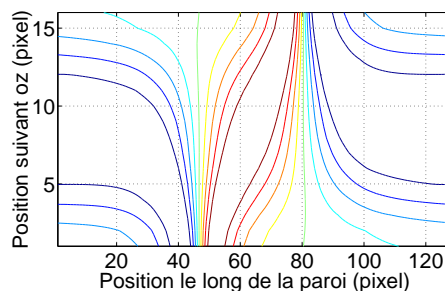


Figure 5.3: *Iso-valeurs de  $m_y$  dans la paroi contenant la ligne  $2\pi$ .*

### 6.3 Coupe de bandes en 2D

L'aimantation au centre de la paroi de gauche pointe suivant les  $y$  positifs, la rotation du haut vers le bas se faisant dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour la paroi de droite, on a considéré les deux types de paroi : rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire. On dit qu'on a des parois déroulantes lorsque les deux spins centraux de l'aimantation dans les parois, au milieu du matériau, pointent dans la même direction.

Les parois sont dites enroulantes dans le cas contraire. Figure 5.4. On utilise donc la même terminologie que pour les paires de lignes de Bloch.

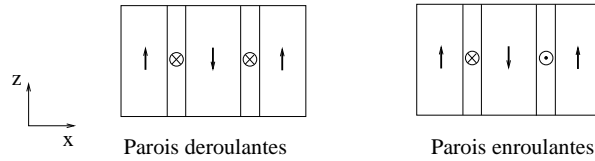


Figure 5.4: *Caractérisation d'une paire de parois.*

Partant de ces deux états, on a cherché le champ appliqué perpendiculaire de module minimum qui permet de couper le domaine central. De par le terme d'échange, une bande délimitée par deux parois déroulantes se coupe pour des champs de module inférieur au cas enroulant [10].

Ceci a été observé avec le programme. Pour des parois déroulantes, la bande ne se coupe pas pour des champs de module inférieur ou égal à  $220+18$  oe. Elle se coupe à  $220+20$  oe et plus. Ces valeurs sont respectivement de  $220+140$  oe et  $220+145$  oe pour des parois enroulantes.

La figure 5.5 donne la largeur de bande en fonction du temps pour un champ de  $220+20$  oe dans le cas de parois déroulantes, et de  $220+145$  oe dans le cas de parois enroulantes. On voit que, lorsque les parois sont enroulantes, elles se rapprochent jusqu'à atteindre un minimum de largeur de bande. Il y a, ensuite, une légère répulsion avant un long plateau où elles restent à distance égale, avant d'entamer le processus de coupe en lui-même. Dans le cas déroulant, la courbe est linéaire, dans un premier temps. Puis, il y a un temps assez long où le rapprochement s'effectue toujours mais de façon presque imperceptible, et enfin survient la coupe.

Il est à noter que la bande, avant la coupe, est nettement plus étroite dans le cas enroulant que dans le cas déroulant : 13,75 pixels au lieu d'environ 18 pixels.

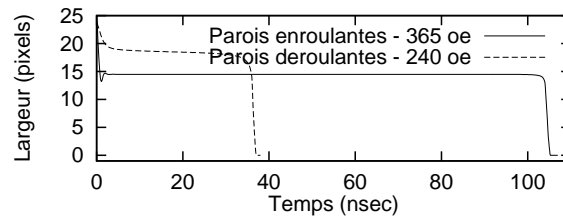


Figure 5.5: *Largeur de la bande en fonctions du temps.*

La figure 5.6 donne les courbes d'énergies en fonction du temps pour un champ de  $220+20$  oe pour des parois déroulantes et de  $220+145$  oe pour des parois enroulantes. On voit qu'après une période assez longue où l'énergie varie peu, les différents termes font un saut. Celui-ci correspond au processus de coupe, les énergies d'échange, d'anisotropie et

de Zeeman décroissant rapidement, l'énergie démagnétisante croissant. L'énergie d'échange avant la coupe est plus élevée dans le cas enroulant. Cela confirme le fait que c'est ce terme qui maintient les parois séparées pour des champs de module plus élevé.

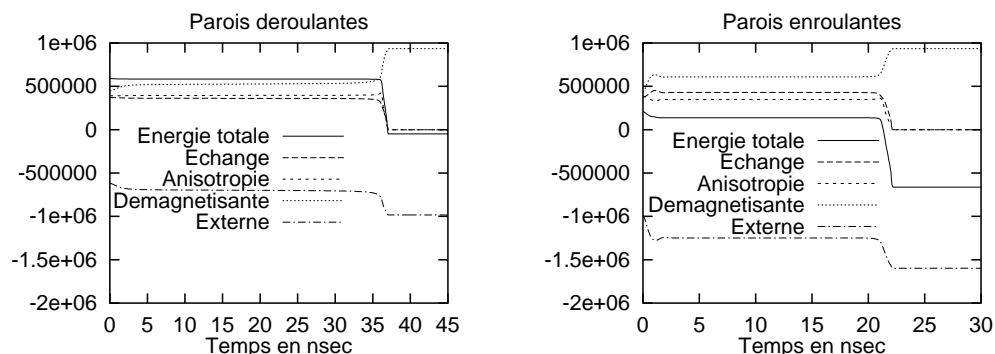


Figure 5.6 : *Différents termes d'énergie en fonction du temps.*

## 6.4 Coupe de bandes en 3D

La paroi de gauche contient maintenant une ligne de Bloch  $2\pi$  alors que la paroi de droite est sans structures. Pour cette dernière, on a, de nouveau, considéré les deux sens de rotation de l'aimantation, au centre du matériau : rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire. Dans un cas, la portion de paroi entre paires de lignes est de la même chiralité que celle de la paroi sans structures. Dans l'autre, la chiralité est opposée. Par analogie au 2D, nous qualifierons de parois déroulantes le premier cas et de parois enroulantes le second.

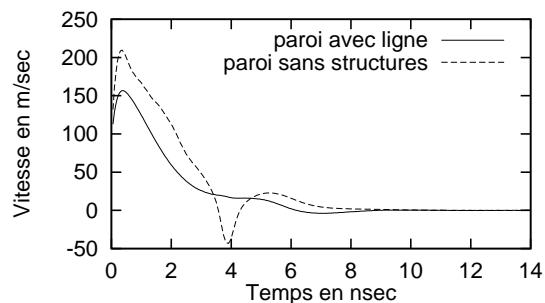


Figure 5.7 : *Vitesse des parois en fonction du temps lorsqu'on applique un champ perpendiculaire de 220 oe dans le cas déroulant.*

La figure 5.7 donne la vitesse des deux parois en fonction du temps lorsqu'on a appliqué le champ initial perpendiculaire de 220 oe. La paroi sans structures atteint une vitesse

maximum supérieure à celle de la paroi avec lignes. À 3,6 nsec, elle revient en arrière, alors que l'autre paroi, qui est moins "mobile", continue d'avancer à vitesse constante.

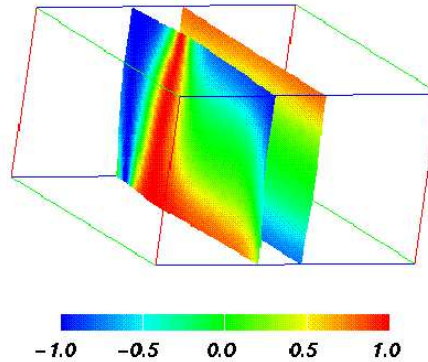


Figure 5.8 : Iso-surfaces  $m_z = 0$  pour l'aimantation initiale coloriées suivant  $m_x$  - Le champ appliqué est de 220 oe.

Figure 5.8, on a représenté les deux iso-surfaces  $m_z = 0$  correspondant au centre des parois lorsque le champ appliqué est de 220 oe et que les parois se sont stabilisées. Chacun des tons de gris représentés sur ces surfaces est une valeur de la composante  $m_x$  de l'aimantation. Les lignes de Bloch sont en gris foncé.

Dans les deux cas enroulant et déroulant, la bande ne se coupe pas pour des champs de module inférieur ou égal à 220+15 oe et se coupe à partir de 220+20 oe, ce qui correspond au module minimum de coupe du cas sans structures déroulant. Mais la coupe survient bien plus tard dans le cas enroulant : environ 19 nsec au lieu de 7 nsec. Une chose surprenante est que, dans le cas des parois enroulantes, la bande centrale se coupe même pour un champ de 220+18 oe alors qu'elle ne se coupe pas dans l'autre cas.

Comme prévu par les modèles analytiques, lorsque la paroi avec structures se déplace, la partie contenant la ligne  $2\pi$  est légèrement retardée par rapport à la zone sans structures, et, contrairement au 2D, la bande centrale ne se coupe pas uniformément le long de l'axe  $oy$ . Dans le cas déroulant, après une phase de rapprochement, les parois commencent à se toucher dans la portion sans lignes. La coupe s'effectue dans cette zone.

Dans le cas enroulant, la ligne de Bloch  $2\pi$  s'élargit jusqu'à ce que les deux lignes qui la composent se séparent et aillent rejoindre la ligne précédente ou suivante pour s'accoupler avec elle. La coupe s'effectue dans l'espace qui s'est créé entre les lignes. Dans cette portion, la paroi a, comme précédemment, la même chiralité que l'autre et on se retrouve donc dans le cas d'une coupe "facile". La coupe survient bien plus tard que pour les parois déroulantes.

Dans les deux cas, la coupe une fois terminée, on se retrouve en présence d'un domaine approximativement cylindrique aimanté vers le bas, entouré d'un domaine aimanté vers

le haut. On l'appelle bulle magnétique. Sa taille décroît au cours du temps jusqu'à son annihilation complète, l'état final étant uniformément aimanté vers le haut.

La figure 5.9 donne six états d'aimantation sélectionnés pendant la coupe de bande de l'état déroulant soumis à un champ de  $220+20$  oe. La figure en haut à gauche est l'état à 6.95 nsec, les autres sont les états qui suivent à 0.3 nsec d'intervalle. On voit que la bande commence à se couper par les surfaces, la coupe se propageant vers le centre jusqu'à formation de la bulle.

La figure 5.10 donne six états d'aimantation sélectionnés pendant le processus de coupe de l'état enroulant sous champ de  $220+20$  oe. La figure en haut à gauche représente les parois à 18.75 nsec, les autres sont les suivants à 0.5 nsec d'intervalle. Il est à noter que, dans ce cas, la bande commence à se couper par la surface supérieure, la coupe se propageant jusqu'à la surface inférieure.



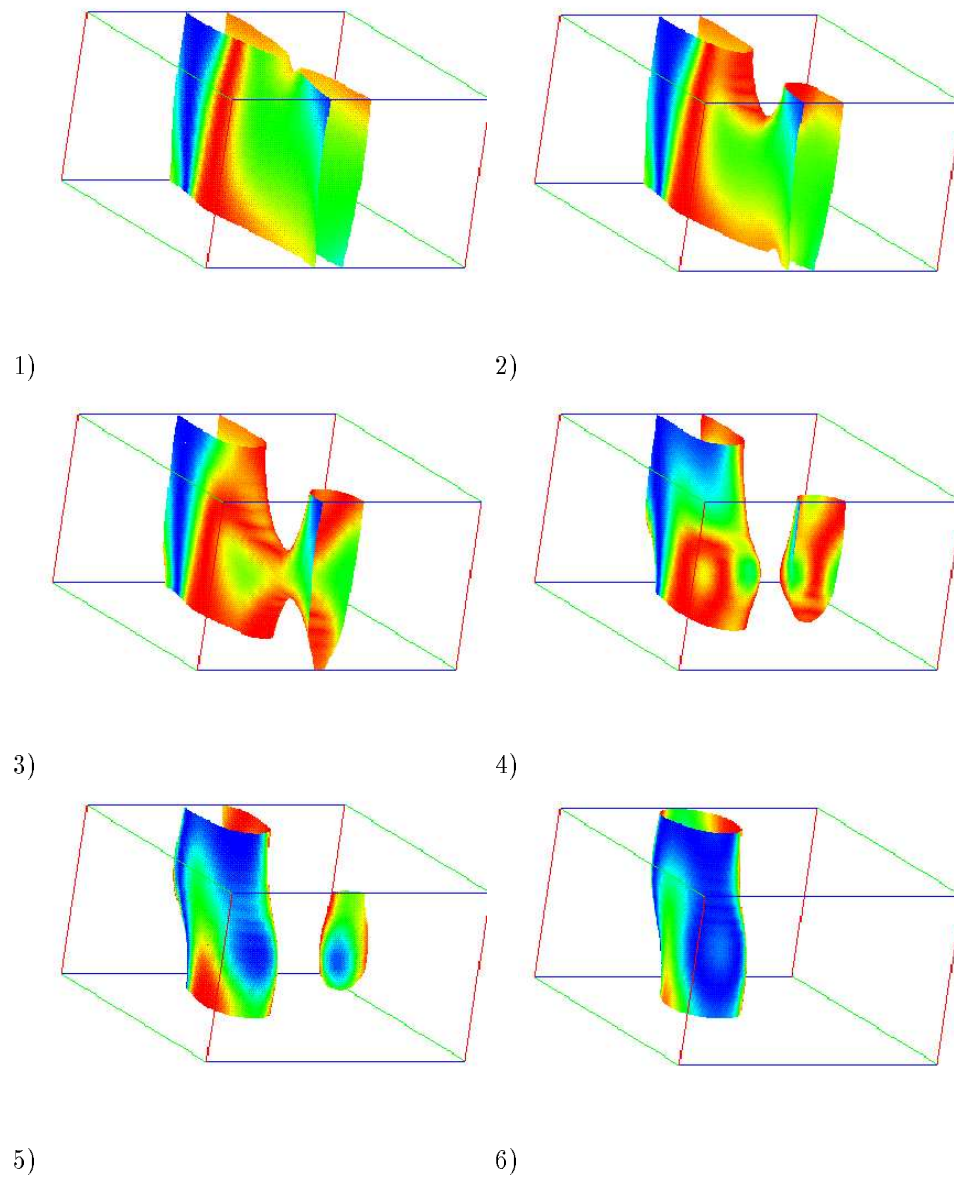


Figure 5.9: *Processus de coupe à  $220+20$  oe pour l'état déroulant.  
État à 6.95 nsec puis toutes les 0.3 nsec.*

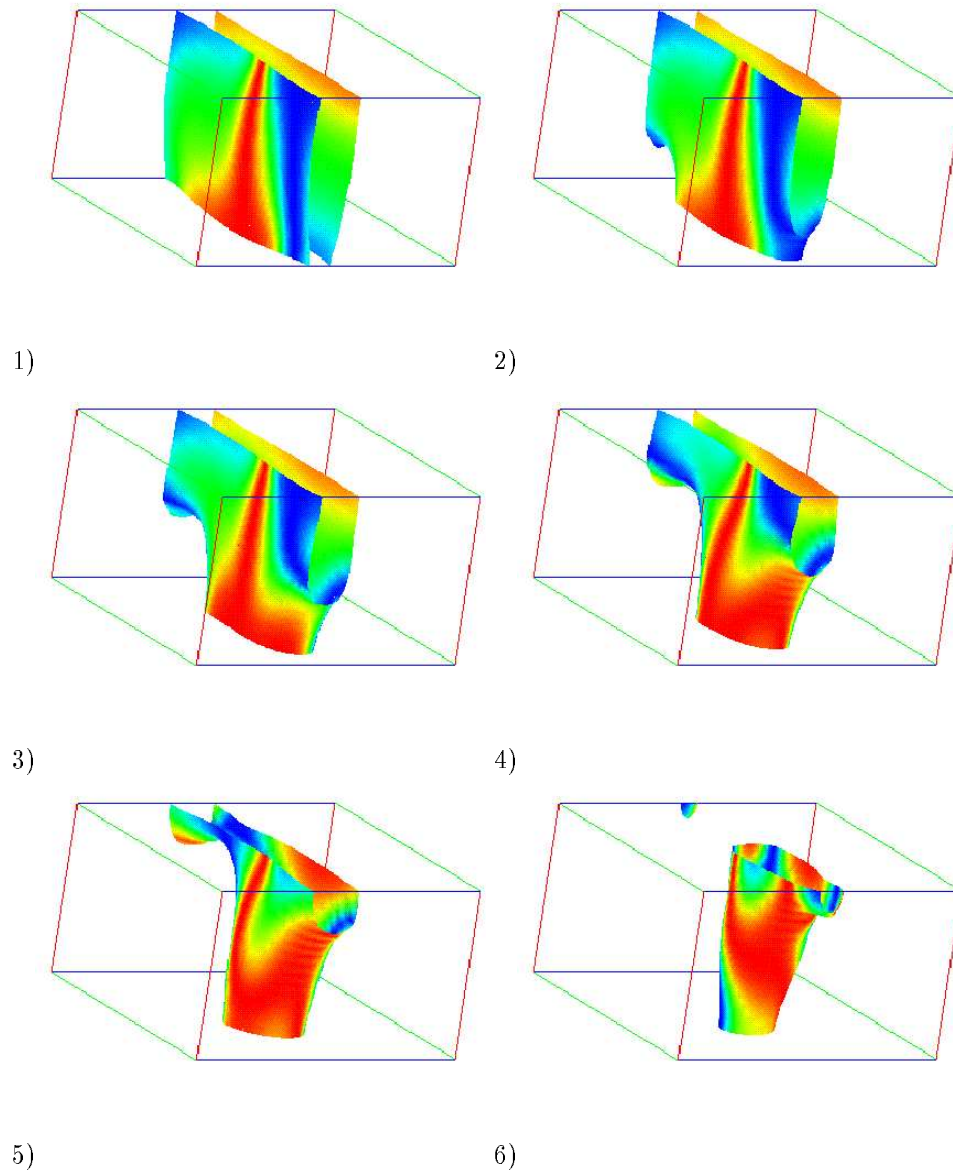


Figure 5.10 : *Processus de coupe à  $220+20$  oe pour l'état enroulant.  
État à 18.75 nsec puis toutes les 0.5 nsec.*

La figure 5.11 donne les largeurs bandes et de lignes sous champ de coupe de 20 oe pour des parois déroulantes (PD) et enroulantes (PE). Comme dans le cas déroulant sans structures, le rapprochement des parois s'effectue en trois phases ; elles se rapprochent d'abord rapidement puis beaucoup plus lentement avant d'entamer le processus de coupe lui-même. Dans le cas déroulant, au fur et à mesure que les parois se rapprochent, la largeur de la ligne décroît. Dans le cas enroulant, la largeur de la ligne commence par décroître, puis elle se met à croître jusqu'à ce que la ligne se disloque.

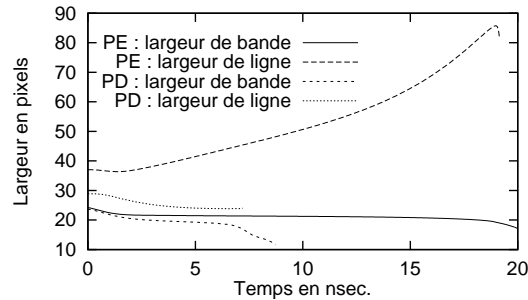


Figure 5.11 : Largeur de la bande et de ligne dans le cas des parois enroulantes (PE) et déroulantes (PD) en fonction du temps lorsqu'on applique un champ de coupe de 20 oe.

La figure 5.12 donne les courbes d'énergies en fonction du temps pour un champ de coupe de 20 oe, dans les deux cas. On observe, comme en 2D, qu'après une période assez longue où l'énergie varie peu, les différents termes font un saut qui correspond au processus de coupe avec une variation semblable des énergies : les énergies d'échange, d'anisotropie et de Zeeman décroissent, et l'énergie démagnétisante croît.

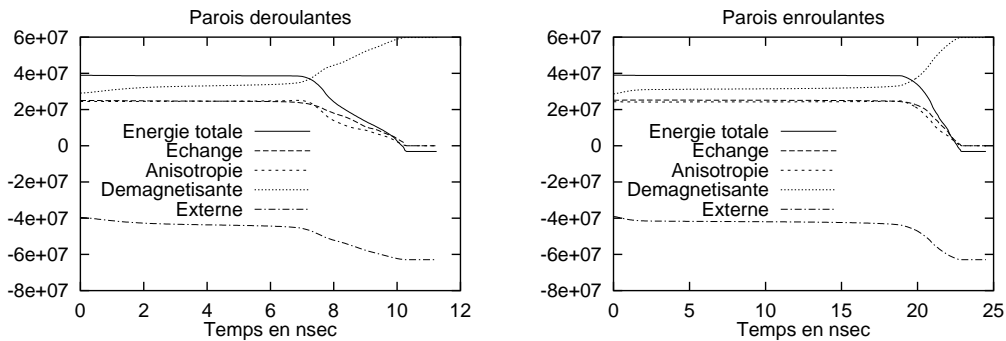


Figure 5.12 : Différents termes d'énergie en fonction du temps pour un champ de coupe de 20 oe.

## 6.5 Stabilisation d'une bulle en champ nul

On a ensuite supprimé le champ appliqué lorsque la bulle est formée dans le cas déroulant (à 7,95 nsec). La taille de la bulle croît au cours du temps jusqu'à atteindre une taille maximum où elle se stabilise dans une forme quasi-cylindrique. Figure 5.13.

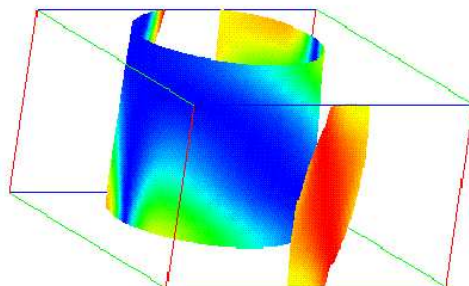


Figure 5.13: *Bulle obtenue en supprimant le champ externe.*

Le tableau ci-après donne la valeur des différents termes d'énergie pour l'état contenant la bulle à l'équilibre, ainsi que pour l'état présentant un domaine en bande délimité par des parois déroulantes, une contenant une ligne  $2\pi$ , l'autre sans structures, en champ externe nul. La valeur des énergies d'échange et d'anisotropie sont approximativement égales, bien que légèrement inférieure dans l'état bulle. L'énergie démagnétisante et l'énergie totale, par contre, sont supérieures dans cet état.

	Énergie totale	Énergie d'échange	Énergie d'anisotropie	Énergie démagnétisante
État bulle	$6,77 \cdot 10^7$	$2,403 \cdot 10^7$	$2,406 \cdot 10^7$	$1,961 \cdot 10^7$
État bande	$6,17 \cdot 10^7$	$2,45 \cdot 10^7$	$2,55 \cdot 10^7$	$1,17 \cdot 10^7$

## 7 Conclusion

La force du modèle numérique présenté dans ce rapport réside dans sa simplicité et l'efficacité du calcul du champ démagnétisant. L'utilisation d'un maillage régulier évite le problème de la fuite des parois des régions raffinées comme cela a été observé dans [3]. La discrétisation par différence finie permet de modéliser des états avec points de Bloch de manière satisfaisante. De plus, il semble que l'algorithme de Runge-Kutta à pas adaptatif permet de suivre de manière satisfaisante l'évolution de l'aimantation, le pas de temps étant largement réduit lorsque cela est nécessaire.

Ce modèle présente un autre intérêt de poids : il se parallélise bien.

Il permet de simuler toute une gamme de phénomènes du micromagnétisme. On a choisi de l'utiliser pour modéliser le processus de coupe de bandes dans un matériau ferromagnétique à anisotropie perpendiculaire, lorsqu'une paroi contient une ligne  $2\pi$  périodiquement reproduite. Il se trouve que c'était un domaine de la physique des parois de Bloch encore inexploré.

Certains résultats ont été pour le moins surprenants. On a été étonné de ne pas trouver de marge de coupe dans le cas tridimensionnel, même si elle existe si on applique un champ en créneau. Le phénomène de dislocation de la ligne  $2\pi$  dans le cas des parois enroulantes semble être dû au terme d'échange. Mais le tracé de cette énergie au cour du temps ne permet pas de confirmer cette explication.

Un autre résultat intéressant est que la coupe de bande s'effectue toujours dans l'espace interlignes et donne naissance à une bulle. La taille de cette bulle diminue au cour du temps jusqu'à disparaître même si on supprime le champ de coupe et qu'on ne garde que le champ initial de 220 oe.

## 8 Annexe

### 8.1 Détermination de la solution élémentaire

Pour déterminer la solution élémentaire  $E = D_{\alpha\beta}^{*(-1)}$ , on résout l'équation  $D_{\alpha\beta} * \phi_{\alpha\beta} = \delta$  au sens classique dans les demi-espaces  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . On obtient :

$$E(z) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot e^{c_{\alpha\beta} \cdot z} & \forall z \in ] -\infty, 0[ \\ \gamma_2 \cdot e^{-c_{\alpha\beta} \cdot z} & \forall z \in ]0, +\infty[. \end{cases}$$

Les conditions sur  $\phi$  en  $z = 0$  permettent de déterminer les constantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .  $\phi$  étant continue en 0,  $E(0^-) = E(0^+)$ ; d'où  $\gamma_1 = \gamma_2$ .  $\phi'$  ayant un saut de 1 en 0,  $E'(0^+) = E'(0^-) - 1$ ; d'où  $c_{\alpha\beta} \cdot \gamma_1 = c_{\alpha\beta} \cdot \gamma_2 - 1$ . On en déduit que  $\gamma_i = \frac{1}{2c_{\alpha\beta}}$   $i = 1, 2$ .

### 8.2 Calcul du champ démagnétisant

Nous allons donner une forme de  $\phi_{\alpha\beta}$  directement discrétisable. On rappelle que

$$\phi_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{2 \cdot c_{\alpha\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\alpha\beta}(t) e^{-c_{\alpha\beta} \cdot |z-t|} dt$$

où  $G_{\alpha\beta} = 4\pi \left( 2i\pi \left( \frac{\alpha}{a} m_{1,\alpha\beta}^* + \frac{\beta}{b} m_{2,\alpha\beta}^* \right) + [m_{3,\alpha\beta}^*]' \right)$ .

Soit  $c_{\alpha\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ . Commençons par déterminer les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  suivantes :

$$I_1(z) = \int_{-\infty}^z [m_{3,\alpha\beta}^*]'(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt$$

$$I_2(z) = \int_z^{+\infty} [m_{3,\alpha\beta}^*]'(t) e^{c_{\alpha\beta}(z-t)} dt$$

On a :

$$[m_{3,\alpha\beta}^*]' = m_{3,\alpha\beta}' \chi_{]0,h[} + m_{3,\alpha\beta}(0) e^{-c_{\alpha\beta}z} \delta(z=0) - m_{3,\alpha\beta}(h) e^{c_{\alpha\beta}(z-h)} \delta(z=h)$$

D'où, pour  $z < h$  :

$$I_1(z) = \int_0^z m_{3,\alpha\beta}'(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt + m_{3,\alpha\beta}(0) e^{-c_{\alpha\beta}z}$$

Après intégration par parties,  $I_1$  devient :

$$\begin{aligned} I_1(z) &= -c_{\alpha\beta} \int_0^z m_{3,\alpha\beta}(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt + \left[ m_{3,\alpha\beta}(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} \right]_0^z - m_{3,\alpha\beta}(0) e^{-c_{\alpha\beta}z} \\ &= -c_{\alpha\beta} \int_0^z m_{3,\alpha\beta}(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt + m_{3,\alpha\beta}(z) \end{aligned}$$

De même,

$$I_2 = c_{\alpha\beta} \int_z^h m_{3,\alpha\beta}(t) e^{c_{\alpha\beta}(z-t)} dt - m_{3,\alpha\beta}(z)$$

De sorte que, si on définit les deux fonctions  $H_1$  et  $H_2$  suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 &= 4\pi \left( 2i\pi \left( \frac{\alpha}{a} m_{1,\alpha\beta} + \frac{\beta}{b} m_{2,\alpha\beta} \right) - c_{\alpha\beta} m_{3,\alpha\beta} \right), \\ H_2 &= 4\pi \left( 2i\pi \left( \frac{\alpha}{a} m_{1,\alpha\beta} + \frac{\beta}{b} m_{2,\alpha\beta} \right) + c_{\alpha\beta} m_{3,\alpha\beta} \right), \end{aligned}$$

les coefficients  $\phi_{\alpha\beta}$  s'écrivent :

$$\phi_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{2c_{\alpha\beta}} \left( \int_0^z H_1(z') e^{c_{\alpha\beta}(z'-z)} dz' + \int_z^h H_2(z') e^{c_{\alpha\beta}(z-z')} dz' \right).$$

Leur dérivée est :

$$\begin{aligned} \phi'_{\alpha\beta}(z) &= H_1(z) - H_2(z) - \frac{1}{2} \left( \int_0^z H_1(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt - \int_z^h H_2(t) e^{c_{\alpha\beta}(z-t)} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \int_0^z H_1(t) e^{-c_{\alpha\beta}(z-t)} dt - \int_z^h H_2(t) e^{c_{\alpha\beta}(z-t)} dt \right) - 4\pi m_{3,\alpha\beta}(z) \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier du champ démagnétisant se déduisent de ce qui précède :

$$\vec{H}_{\alpha\beta}^{demag} = \begin{pmatrix} 2i\pi\alpha\phi_{\alpha\beta} \\ 2i\pi\beta\phi_{\alpha\beta} \\ \phi'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

## Références

- [1] M. Aïd, *Simulation de la répartition en domaines des pièces polaires des têtes d'enregistrement magnétiques couches minces*, thèse de l'INPG, février 1993.
- [2] F. Alouges, *communication personnelle*.
- [3] P. Asselin, *Numerical and theoretical aspects of micromagnetics*, PhD thesis, Université Carnegie Mellon, Pittsburgh, USA, 1988.
- [4] C. Bonjour, *Inversion de systèmes linéaires pour la simulation des matériaux ferromagnétiques. Singularités d'une configuration d'aimantation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, 1996.
- [5] S. Konishi, *A new ultra-high-density solid state memory: Bloch line memory*, IEEE Trans. Magn., vol. MAG-19, No 5, sept. 1983.
- [6] L. Landau and E. Lifshitz, *Physik A, Soviet Union* 8, 153 (1935).
- [7] Y. Nakatani and N. Hayashi, *Computer simulation of the two-dimensional vertical Bloch lines by direct integration of the Gilbert equation*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-23, No 5, sept. 1987.
- [8] V.-K. Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, tome 2, Vuibert, 1972.
- [9] A. P. Malozemoff, J. C. Slonczewski, *Magnetic Domain Wall in Bubble Materials*, Academic Press, New York, 1979.
- [10] G. N. Patterson, R. C. Giles, and F. B. Humphrey, *A Numerical Investigation of Stripe Chopping in Thin Films with Perpendicular Anisotropy*, IEEE Trans. Magn. 28,2341 (1992).
- [11] J. C. Slonczewski, *Dynamics of Magnetic Domain Walls*, Intern. J. Magnetism, 1972, Vol. 2. pp. 85-97.
- [12] J. C. Slonczewski, *Theory of Bloch Line Motion*, Journal of Applied Physics, Vol. 45, No 6, 2705-2715, juin 1974.
- [13] A. Viallix, *Simulation de la structure de parois dans un matériau magnétique*, thèse de l'INPG, février 1990.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399