Un modèle simplifié d'interaction fluide-structure

Dominique Chapelle, Miguel Angel Fernández, Patrick Le Tallec

b

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Un modèle simplifié d'interaction fluide-structure

Dominique Chapelle , Miguel-Angel Fernández-Varela , Patrick Le Tallec

No 3703

Juin 1999

THÈME 4b

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Un modèle simplifié d'interaction fluide-structure

Dominique Chapelle* , Miguel-Angel Fernández-Varela† ,
Patrick Le Tallec‡

Thème 4b — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet MACS

Rapport de recherche n 3703 — Juin 1999 — 11 pages

Résumé : On introduit une linéarisation de la formulation ALE des équations de Navier-Stokes incompressibles. Le problème fluide linéaire ainsi obtenu peut être utilisé pour le couplage fluide-structure dans les cas où les déplacements de la structure sont petits, et ces déplacements sont alors pris en compte au moyen d'une condition de type "transpiration" à l'interface. Ce travail constitue donc un premier élément de justification théorique de ces conditions d'interface, couramment employées en pratique. En outre, il aboutit à un problème dont la résolution est bien moins coûteuse que celle du problème initial.

Mots-clé : interaction fluide-structure, Navier-Stokes, ALE, transpiration

(Abstract: pto)

* Projet MACS
† Projet MACS
‡ CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

A simplified model for fluid-structure interaction

Abstract: We perform a linearization of the ALE formulation of incompressible Navier-Stokes equations. In a fluid-structure interaction problem where the displacements of the structure are assumed to be small, this allows to consider, in the fluid domain, a linear problem in which the structural displacements are simply accounted for by specific injection/suction boundary conditions on the interface. This is therefore a preliminary theoretical justification for this type of boundary conditions commonly advocated in practice. Furthermore, the resolution of the linear problem is much less costly than that of the original ALE formulation.

Key-words: fluid-structure interaction, Navier-Stokes, ALE, injection-suction

1 Introduction

Les techniques classiques de simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure reposent sur le couplage, par des algorithmes appropriés, d'un "code solide" qui simule le comportement de la structure soumise aux effets induits par l'écoulement d'une part, et d'autre part d'un "code fluide" capable de prendre en compte les déplacements de la structure baignée par le fluide, en général par le moyen d'une modélisation "arbitrairement lagrangienne-eulerienne" (ALE) (voir [2, 4]). Ces techniques, qui sont adaptées aux cas de grands déplacements de l'interface, sont très coûteuses en temps de calcul, du fait surtout du domaine fluide, car aux difficultés inhérentes à la simulation du fluide (modèles non-linéaires, effet de la convection, etc.) s'ajoutent, à chaque pas de temps, des modifications d'ordre géométrique liées au déplacement de la structure qui doivent être prises en compte dans l'ensemble du domaine fluide.

Si les déplacements de la structure sont de petite amplitude une modélisation ALE peut paraître excessive. Nous proposons un modèle linéaire d'interaction fluide-structure qui permet de prendre en compte les effets de la structure en conservant un domaine fluide fixe dans un cadre de petits déplacements de l'interface. Le modèle est obtenu par le moyen d'une linéarisation des équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation ALE. Cette linéarisation permet en particulier d'obtenir des conditions aux limites de type "transpiration" (voir [3, 5, 6]) qui reposent sur une justification théorique.

On introduit d'abord le problème mécanique traité en formulation ALE et ensuite on procède à la description de sa linéarisation. L'approche est essentiellement formelle en ce sens qu'on suppose constamment que les champs employés sont suffisamment réguliers pour que les calculs aient un sens.

2 Problème mécanique

Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une structure déformable. La structure occupe un domaine $\overline{\Omega}^s(t)$ dans sa configuration actuelle. Dans la partie fluide on s'intéresse à un volume de contrôle $\overline{\Omega}^f(t)$ autour de la structure, voir la figure 1. Le problème consiste à determiner à chaque instant

$t > 0$ la forme et l'évolution de la configuration $\overline{\Omega}^s(t) \cup \overline{\Omega}^f(t)$ ainsi que les champs de vitesse dans le fluide et la structure.

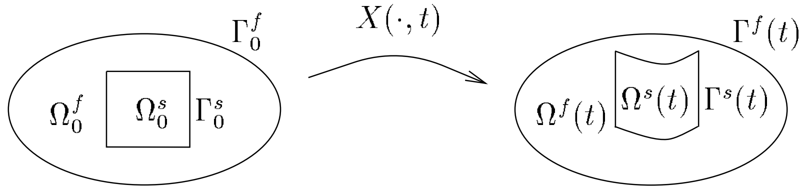

Fig. 1. Description cinématique.

L'équilibre du système est assuré par les équations de conservation de la masse et du mouvement auxquelles on rajoute, à l'interface $\Gamma^s(t)$, une condition cinématique de continuité des vitesses. Ainsi, dans le domaine fluide le problème se ramène (voir [4]) à résoudre pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) &= f + \operatorname{div} \sigma \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t), \\
\operatorname{div} u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^f(t), \\
u &= u_\infty \quad \text{sur} \quad \Gamma^f(t), \\
u &= u_{st} \quad \text{sur} \quad \Gamma^s(t), \\
u(x_0, 0) &= u^0(x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega^f(0).
\end{aligned} \tag{1}$$

Ici : f répresente la densité de force volumique ; $\sigma = -pI + \nu\left(\nabla u + \nabla u^T\right)$ le tenseur de contraintes de Cauchy du fluide ; u la vitesse ; p la pression ; ν la viscosité ; u_∞ la vitesse "à l'infini" ; u_{st} la vitesse de la structure à l'interface et u^0 la vitesse du fluide à l'instant initial.

La description du domaine $\overline{\Omega}^f(t)$ va être donnée par une application du type :

$$X : \overline{\Omega}_0^f \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad (d = 2, 3),$$

où $\overline{\Omega}_0^f = \overline{\Omega}^f(0)$ est le volume de contrôle pour le fluide à l'instant initial. On supposera X régulière, injective et avec $\det \nabla_0 X > 0$, de telle façon que si $x_0 \in \Gamma_0^s$ alors $X(x_0, t)$ représente la position du point matériel x_0 à l'instant t. Il résulte donc, en particulier, que tout champ en configuration actuelle $\overline{\Omega}^f(t)$ peut être transformé en un champ sur $\overline{\Omega}_0^f$ au moyen de la relation

$$v(x_0, t) = v(X(x_0, t), t),$$

la notation étant la même pour les deux champs. Et réciproquement, chaque champ défini sur $\overline{\Omega}_0^f$ peut être transformé en un champ sur $\overline{\Omega}^f(t)$ par la relation

$$v(X(x_0,t),t) = v(x_0,t).$$

De la sorte, en transportant le problème (1) en configuration fixe Ω_0^f on obtient la formulation ALE des équations de Navier-Stokes incompressibles suivante (voir [2, 4]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Ju}{\partial t}_{|x_0} + \mathrm{div}_0\left[Ju \otimes (u-w)\,F^{-T}\right] &= Jf + \mathrm{div}_0\left(J\sigma F^{-T}\right) \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+, \\
\mathrm{div}_0\left(JuF^{-T}\right) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+, \\
u &= u_\infty \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^f \times \mathbb{R}^+, \\
u &= w \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+, \\
u(x_0,0) &= u^0(x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega_0^f,
\end{aligned} \tag{2}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial t}_{|x_0}$ représente la derivée temporelle en configuration fixe ; $w = \dfrac{\partial X}{\partial t}_{|x_0}$ la vitesse du volume de contrôle ; $F = \nabla_0 X$; $J = \det F$ et $\sigma = -pI + \nu\left(\nabla_0 u F^{-1} + F^{-T}\nabla_0 u^T\right)$. Remarquons que sur Γ_0^s la carte X est donnée comme solution des équations d'équilibre dans la partie solide, tandis que sur Ω_0^f l'application X est arbitraire. En pratique, on se donne souvent X en considérant le volume de contrôle fluide comme une structure sans masse et avec une rigidité donnée (voir [1]).

3 Linéarisation des équations

Le problème fluide (2) en formulation ALE peut être récrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\phi(u,p,X) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+, \\
u &= u_\infty \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^f \times \mathbb{R}^+, \\
u &= w \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+, \\
u(x_0,0) &= u^0(x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega_0^f,
\end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$\phi(u,p,X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Ju}{\partial t}_{|x_0} + \operatorname{div}_0\left[Ju\otimes(u-w)\,F^{-T}\right] - Jf - \operatorname{div}_0\left(J\sigma F^{-T}\right) \\ \operatorname{div}_0\left(JuF^{-T}\right) \end{pmatrix}.$$

On remarque en plus qu'en transportant les opérateurs de ϕ en configuration actuelle on obtient (voir [2, 4])

$$\phi(u,p,X) = J\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\otimes u) - f - \operatorname{div}\sigma \\ \operatorname{div} u \end{pmatrix}. \tag{4}$$

On introduit l'état de référence (u_0,p_0) solution de (3) avec $X = I$ et correspondant à l'écoulement autour de la structure fixe. Plus précisément, comme $X = I$ le volume de contrôle ne varie pas au cours du temps et la vitesse à l'interface est nulle. De plus, comme

$$\phi(u_0,p_0,I) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial t}_{|x_0} + \operatorname{div}_0(u_0\otimes u_0) - f - \operatorname{div}_0\sigma_0 \\ \operatorname{div}_0 u_0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

avec $\sigma_0 = -p_0 I + \nu\left(\nabla_0 u_0 + \nabla_0 u_0{}^T\right)$, l'équation $\phi(u_0,p_0,I) = 0$ se réduit aux équations de Navier-Stokes incompressibles sur domaine fixe Ω_0^f, de sorte que le problème (3) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t}_{|x_0} + (\nabla_0 u_0)u_0 + \nabla_0 p_0 - \nu\Delta_0 u_0 &= f \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f\times\mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div}_0 u_0 &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f\times\mathbb{R}^+, \\ u &= u_\infty \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^f\times\mathbb{R}^+, \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s\times\mathbb{R}^+, \\ u(x_0,0) &= u^0(x_0) \quad \forall x_0\in\Omega_0^f. \end{aligned} \tag{6}$$

Désormais on supposera que la structure subit des mouvements de petite amplitude, ce qui du côté fluide se traduit dans des petites fluctuations du volume de contrôle Ω_0^f. Ainsi, on considère $X = I + \delta X$ avec δX "petit" et on s'intéresse à des fluctuations $(\delta u, \delta p)$ autour de l'état (u_0, p_0), induites par la perturbation δX du volume de contrôle Ω_0^f, fluctuations que l'on *convient de définir* de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcll} u(I+\delta X) & = & u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X + \delta u & \text{dans} \quad \overline{\Omega}_0^f \times \mathbb{R}^+, \\ p(I+\delta X) & = & p_0 + \nabla_0 p_0 \delta X + \delta p & \text{dans} \quad \overline{\Omega}_0^f \times \mathbb{R}^+. \end{array} \tag{7}$$

La motivation essentielle de cette définition de $(\delta u, \delta p)$ réside dans le fait que, comme chaque point du volume de contrôle x_0 subit un déplacement jusqu'à $x_0 + \delta X(x_0)$, on considère les fluctuations par rapport à $(u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X, p_0 + \nabla_0 p_0 \delta X)$ au lieu de (u_0, p_0). Notons en effet que, si $x_0 + \delta X(x_0) \in \Omega_0^f$, alors les relations

$$\begin{array}{rcl} u(I+\delta X) & = & u_0(I+\delta X) + \delta u, \\ p(I+\delta X) & = & p_0(I+\delta X) + \delta p, \end{array}$$

donnent bien à l'ordre 1 la définition (7).

Les équations linéaires satisfaites par δu et δp sont obtenues en reportant les définitions (7) dans $\phi(u,p,X) = 0$, et en effectuant un développement limité où l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 1. Ainsi dans Ω_0^f on aura

$$\phi(u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X + \delta u, p_0 + \nabla_0 p_0 \delta X + \delta p, I + \delta X) = 0.$$

Un premier développement de l'équation précédente donne au premier ordre

$$\phi(u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X, p_0 + \nabla_0 p_0 \delta X, I+\delta X) + \phi_u(u_0, p_0, I)\delta u + \phi_p(u_0, p_0, I)\delta p = 0, \tag{8}$$

où ϕ_u et ϕ_p dénotent respectivement les différentielles de ϕ par rapport à u et p. On va montrer que le premier terme de (8) à gauche est nul à l'ordre 1. En effet, au premier ordre on a

$$\phi(u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X, p_0 + \nabla_0 p_0 \delta X, I + \delta X) = \phi(u_0(I+\delta X), p_0(I+\delta X), I+\delta X).$$

D'autre part les relations (4), (5) et le problème (6) vérifié par (u_0, p_0) impliquent que

$$\begin{array}{rcl} \phi(u_0(I+\delta X), p_0(I+\delta X), I+\delta X) & = & J\phi(u_0, p_0, I)(I+\delta X) \\ & = & 0. \end{array}$$

Les expressions $u_0(I+\delta X)$, $p_0(I+\delta X)$ ont seulement un sens pour les points $x_0 \in \Omega_0^f$ tels que $x_0+\delta X(x_0) \in \Omega_0^f$, cependant δX est arbitrairement petit et donc le raisonnement est bien valide dans tout Ω_0^f. On déduit ainsi, à partir de (8), que la fluctuation $(\delta u, \delta p)$ satisfait l'équation suivante :

$$\phi_u(u_0,p_0,I)\delta u + \phi_p(u_0,p_0,I)\delta p = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+. \tag{9}$$

Le calcul des différentielles donne :

$$\begin{aligned}
&\phi_u(u_0,p_0,I)\delta u \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \delta u}{\partial t}_{|x_0} + \operatorname{div}_0(\delta u \otimes u_0) + \operatorname{div}_0(u_0 \otimes \delta u) - \nu\Delta_0 \delta u - \nu\nabla_0(\operatorname{div}_0 \delta u) \\ \operatorname{div}_0 \delta u \end{pmatrix}, \\
&\phi_p(u_0,p_0,I)\delta p = \begin{pmatrix} \nabla_0 \delta p \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que l'équation linéaire (9) correspond aux équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées autour de l'état (u_0,p_0) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta u}{\partial t}_{|x_0} + (\nabla_0 \delta u)u_0 + (\nabla_0 u_0)\delta u - \nu\Delta_0 \delta u + \nabla_0 \delta p &= 0, \\
\operatorname{div}_0 \delta u &= 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

dans $\quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+$.

Les conditions aux limites et initiales pour δu sont obtenues de (3) à partir de la définition (7). Ainsi sur Γ_0^f on a

$$u_\infty = u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X + \delta u,$$

mais sur ce bord $u_0 = u_\infty$ et $\delta X = 0$ (car Γ_0^f reste fixe au cours du temps), ce qui impose

$$\delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^f \times \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

De même, sur l'interface Γ_0^s on a

$$w = u_0 + \nabla u_0 \delta X + \delta u,$$

et comme sur ce bord $u_0 = 0$, on déduit la condition

$$\delta u = w - \nabla_0 u_0 \delta X \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Finalement, à l'instant initial on a

$$u^0 = u_0 + \nabla_0 u_0 \delta X + \delta u \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f,$$

avec $X = I$ et $u_0 = u^0$, il en résulte donc que

$$\delta u(x_0, 0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega_0^f. \tag{13}$$

Par conséquent, la linéarisation effectuée sur les équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation ALE (2) donne d'après (10)-(13) le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta u}{\partial t}_{|x_0} + (\nabla_0 \delta u) u_0 + (\nabla_0 u_0) \delta u + \nabla_0 \delta p - \nu \Delta_0 \delta u & \\
= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+&, \\
\operatorname{div}_0 \delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+&, \\
\delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^f \times \mathbb{R}^+&, \\
\delta u = w - \nabla_0 u_0 \delta X \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+&, \\
\delta u(x_0, 0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega_0^f&.
\end{aligned} \tag{14}$$

4 Discussion

Le problème fluide (14) permet de prendre en compte les effets de la structure en conservant un domaine fluide fixe (formulation eulerienne) dans le cas de petits déplacements de l'interface. On souligne que la formulation ALE (2) entraîne des modifications des équations à l'intérieur du volume de contrôle, du fait du mouvement de la structure, tandis que dans (14) toutes les dépendances en X sont transportées à l'interface par le moyen de la condition au limite, dite de "transpiration" (ou d'injection/succion, voir [5]), suivante :

$$\delta u = w - \nabla_0 u_0 \delta X \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+. \tag{15}$$

Par conséquent, l'état (u_0, p_0) et la fluctutation qui lui est associée, $(\delta u, \delta p)$, sont tous les deux calculés en domaine fixe Ω_0^f.

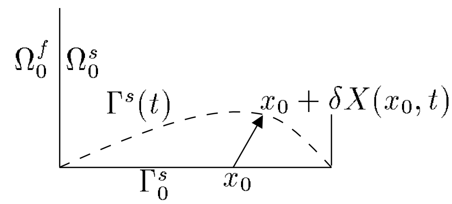

Fig. 2. Le fluide traverse l'interface Γ_0^s.

D'une façon heuristique, une condition similaire à (15) a déjà été introduite dans [3, 5, 6]. Typiquement, la condition de "transpiration" est obtenue à partir d'un développement limité de la vitesse autour de l'interface Γ_0^s, voir la figure 2,

$$u(I + \delta X) = u + \nabla_0 u \delta X \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+. \tag{16}$$

On remarque que ce développement limité a un sens uniquement dans le cas particulier où le fluide traverse l'interface Γ_0^s, c'est-à-dire, quand u est définie sur Γ_0^s.

En imposant la contraite cinématique de continuité des vitesses

$$u(I + \delta X) = w \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+,$$

on déduit de (16) la loi de "transpiration"

$$u = w - \nabla_0 u \delta X \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^s \times \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

La condition précédente est alors généralement appliquée aux équations d'équilibre du fluide sans linéarisation. Ainsi dans [6], la relation (17) est transformée dans une loi explicite en remplaçant le gradient $\nabla_0 u$ par $\nabla_0 u_0$, u_0 étant de nouveau le champ de vitesse associé à l'écoulement permanent.

L'intérêt de notre approche est qu'elle fournit un premier élément de justification théorique des conditions de type "transpiration" (15), à partir d'un traitement global, en linéarisant tout le problème d'équilibre fluide et pas uniquement la condition à l'interface. Par ailleurs, elle aboutit à un problème linéaire dont la résolution est moins coûteuse que celle des équations de Navier-Stokes.

Références

[1] J.T. Batina, "Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes", *AIAA Journal*, **28**, (1990), 1381-1388.

[2] J. Donea, S. Giuliani, J.P. Halleux, "An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**, (1982), 689-723.

[3] W.P. Huffman, R.G. Melvin, D.P. Young, F.T. Johnson, J.E. Bussoletti, M.B. Bieterman, C.L. Hilmes, "Practical design and optimisation in computational fluids dynamics", *AIAA Paper No. 93-3111, AIAA 24th Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida,* (1993).

[4] P. Le Tallec, J. Mouro, "Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement", *Rapport de recherche INRIA No. 2961*, (1996).

[5] G. Medic, "Étude mathématique des modèles aux tensions de Reynolds et simulation numérique d'écoulements turbulents sur parois fixes et mobiles", *Thèse de l'Université Paris VI,* (1999).

[6] J.Y. Renou, "Une méthode eulerienne pour le calcul de forces fluide-élastiques", *Thèse de l'Université Paris VI,* (1998).

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399