

# Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem

► **To cite this version:**

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem. Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille. [Rapport de recherche] RR-3616, INRIA. 1999. <inria-00073062>

**HAL Id: inria-00073062**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073062>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*Original*

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Au delà de la VaR, vers une  
nouvelle mesure du risque en  
gestion de portefeuille***

Hugues Aubry - Lotfi Belkacem

N° 3616  
Janvier 1999

THÈME 4

***R**apport  
de recherche*

Les rapports de recherche de l'INRIA  
sont disponibles en format postscript sous  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp  
la forme papier peut être commandée par mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports  
are available in postscript format  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp  
we recommend ordering them by e-mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(don't forget to mention your postal address).

by mail :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Au delà de la VaR, vers une  
nouvelle mesure du risque en  
gestion de portefeuille*

Hugues Aubry - Lotfi Belkacem

N° 3616  
Janvier 1999

THÈME 4

A large, stylized, light-colored 'R' logo is positioned on the left side of a dark vertical bar.

*R*apport  
de recherche



## Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet FRACTALES

Rapport de recherche — Janvier 1999 — 10 pages

**Résumé :** L'objectif de ce travail est de généraliser le concept de Value-at-Risk (VaR) dans le cas où la rentabilité des actifs suit une loi  $\alpha$ -stable, avec  $1 < \alpha < 2$ . Pour justifier l'hypothèse de non-normalité du rendement des actifs, nous sommes amenés à mettre en évidence la structure fractale des différents marchés d'actions à travers des tests empiriques d'auto-similarité et de stabilité. Ces tests nous permettent ainsi de modéliser les variations de prix par des distributions  $\alpha$ -stables. A partir de cette hypothèse, nous tenterons de démontrer qu'au travers de l'étude du comportement des valeurs extrêmes, une nouvelle mesure du risque peut palier l'absence du moment d'ordre 2 (la variance), et l'imprécision du concept de VaR. Les résultats porteront sur l'ensemble des places financières dans le monde, susceptibles d'offrir un historique de cotation suffisamment important, afin de mettre en évidence le fossé qui peut exister, en terme de risque, entre les marchés développés et les marchés émergents.

**Mots-clé :** Value-at-risk, variance infinie, distribution  $\alpha$ -stable, distribution normale, Worst case scenario, Kurtosis, Skewness, valeurs extrêmes, leptokurtique.

*(Abstract: pto)*

## Beyond the Value-at-Risk, to a new measure of risk in portfolio management

**Abstract:** Our purpose in this paper is a generalisation of the VaR concept, under the assumption that the asset returns follows a joint symmetric  $\alpha$ -stable distribution, with  $1 < \alpha < 2$ . In order to justify such an investigation, we start by empirically evidencing the fractal structure of stock market through extensive test of self-similarity and stability. This test allows us to model price changes with  $\alpha$ -stable distributions. Under this assumption, an analysis of the behaviour of extreme value in finance shows that a new measure of risk can be used to avoid the instability of variance and inaccuracy of VaR measure.

**Key-words:** Value-at-risk, infinite variance,  $\alpha$ -stable distribution, normal distribution, Worst case scenario. Kurtosis, Skewness, extreme values, leptokurtic

---

# Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille

Aubry Hugues

\*THEMA. Université Paris X Nanterre

\*\*Département Analyse et Stratégie d'Investissement.  
Banque du Louvre, Paris VIII

Belkacem Lotfi

\*INRIA. Domaine de Voluceau, Rocquencourt

\*\*Institut Supérieure de gestion de Sousse  
Tunisie

---

## Introduction

En 1993, la sortie du rapport du Groupe des 30, présidé par Paul Volker, a permis d'établir un consensus quant à la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Dans son sillage, The International Swap and Derivatives Association recommande une mesure commune, acceptée de tous, la value-at-risk (VaR) journalière. Rarement un outil de gestion tel que la VaR a été aussi rapidement adopté comme mesure du risque, par l'ensemble de la communauté financière internationale. Après les faillites retentissantes de la filiale américaine de Metallgesellschaft<sup>1</sup>, de la banque Barings ou encore de la Sumitomo Bank, les autorités bancaires internationales se sont attachées à établir des normes strictes de suivi du risque. En avril 1995, la Banque des Règlements Internationaux reconnaît implicitement que les modèles de gestion des risques utilisés par les grandes banques de gestion sont en avance sur tout ce qu'elle pourrait proposer. Ainsi, depuis fin 1997, sous certaines conditions fixées par les autorités de tutelles nationales, les institutions financières ont la possibilité d'utiliser leur propre outil d'évaluation de risque.

La VaR est une mesure de risque de marché liée à la détention d'un titre ou d'un portefeuille de titres. Elle est définie comme la somme d'argent que l'on peut perdre sur un horizon de temps donné et à un seuil de confiance fixé. C'est une évaluation de la probabilité des pertes qui peuvent être subies à la suite d'un mouvement défavorable de marche. En terme statistique, elle correspond à la notion de quantile<sup>2</sup>. Il existe différentes méthodes<sup>3</sup> de calcul, selon que l'on fait ou non des hypothèses sur la distribution des rendements des actifs. Elles se regroupent principalement en trois catégories : les méthodes historiques, les méthodes de simulation de Monte Carlo et les méthodes de variance/covariance utilisant la loi normale.

Néanmoins, la VaR en tant qu'outil de mesure du risque présente quelques insuffisances. En effet, si elle permet de déterminer le seuil de perte à 95%, elle ne donne aucune indication quant aux pertes supérieures à ce seuil. B.Mandelbrot [Man63]<sup>i</sup>, Fama et Roll [FR71]<sup>ii</sup> ont mis en évidence que les queues de distribution empiriques des variations relatives des prix de certains actifs financiers sont plus « épaisses » que dans le cas d'une loi normale. Cette caractéristique est d'autant plus marquée que l'analyse porte sur des places financières dites émergentes<sup>4</sup>. L'étude comparative entre les marchés développés et les marchés émergents montrent que ces derniers sont en général soumis à des fluctuations plus marquées que la modélisation par une loi normale ne le laisse supposer.

---

<sup>1</sup> Le 6 décembre 1993, la filiale américaine de Metallgesellschaft constatait une perte de 1 milliard de marks sur le marché à terme américain du pétrole. En juin 1996, la Sumitomo annonçait une perte de 1,8 milliards de dollars sur le marché du cuivre. En février 1995, faillite de Barings après une perte de 1,38 milliards de dollars sur le marché contracts à terme sur indice Nikkei 225.

<sup>2</sup> Soit  $F$  la fonction de répartition de  $x$ , le quantile d'ordre  $p$  noté  $q_p$  est la valeur de  $x$  telle que  $F(x)=p$ .

<sup>3</sup> Voir numéro supplémentaire de la revue « Risk » de juin 96.

<sup>4</sup> Selon la Société Financière Internationale, un marché est dit émergent lorsqu'il a engagé un processus de croissance et de modernisation, susceptible d'intéresser les investisseurs. A noter que, le concept se confond avec celui de pays en voie de développement.

En effet, dans le cas du Bangladesh, un écart type<sup>5</sup> ( $\sigma$ ) journalier de 2,13 % signifie qu'une baisse journalière de plus de  $4\sigma$  (8,52 %) se produit en moyenne tous les 125 ans, or entre le 01 janvier 1990 et le 17 avril 1998, l'échantillon compte 9 variations négatives supérieures 8,52 % (dont une à -29,28 %, soit  $13\sigma$ ).

L'objectif de cette article est de démontrer que pour un gestionnaire de portefeuille, l'approche du risque en terme de Var empirique<sup>6</sup> est mieux adaptée que l'approche classique (du type volatilité), mais pas suffisante, notamment sur les places financières émergentes. Un nouvel indicateur mieux approprié sera proposé pour pallier l'imprécision de la VaR. Une première partie traitera de la remise en cause de la volatilité ou encore écart type du rendement des actifs, comme mesure du risque. Dans la deuxième partie, l'analyse statistique<sup>iii</sup> de la distribution des rendements des marchés d'action des pays émergents permettra de mettre en évidence la part de l'information contenu dans les queues de distribution. En troisième partie, une approche en terme de risques extrêmes sera proposée afin de pallier le manque d'information contenu dans la VaR.

## **I Value-at-Risk et Volatilité**

Sur les marchés financiers, le risque est associé à l'écart type ou en terme financier à la volatilité, et ce pour deux raisons : la simplicité des calculs, notamment dans la généralisation à plusieurs actifs, et l'utilisation du théorème central limite qui permet de définir toute la loi de distribution des rendements autour de deux paramètres, la moyenne et l'écart type. Ainsi, le risque est mesuré comme la dispersion des réalisations de la variable aléatoire  $X$  autour de sa moyenne. Il est important de noter que d'autres statistiques sont utilisées. Citons par exemple l'étendue<sup>7</sup>, la semi-variance, l'intervalle interquantile, ou encore l'écart absolu par rapport à la moyenne. Ainsi, en général, le risque est défini comme la racine carré du moment d'ordre 2 de la distribution des rendements d'un actif. Cette approche reste néanmoins fortement liée au cas très particulier d'une modélisation des rendements par une loi normale. En effet, dans l'univers d'attraction des lois de Levy<sup>8</sup>, avec  $\alpha^9 \in ]1,2[$ , cette mesure est caduque. Le moment d'ordre 2 n'existant pas, tout approche fondée sur la variance empirique ne tient pas compte d'une partie importante d'information sur la structure du risque.

Par ailleurs, le risque financier est un risque de pertes et non de gains, il semble donc plus judicieux d'utiliser une mesure du risque non symétrique. Dans la théorie moderne du portefeuille développée par Sharpe [Sha63, Sha64]<sup>iv</sup>, Mossin [Mos66]<sup>v</sup>, Lintner [Lin65]<sup>vi</sup>, Black [Bla72]<sup>vii</sup>, Fama-McBeth [FM73]<sup>viii</sup>, et Blume-Freind [BF73]<sup>ix</sup>, la volatilité d'un actif correspond à un risque symétrique, autour de la moyenne, calculé sur l'ensemble des données de la distribution des rendements.

De plus, les tests empiriques ont montré que la modélisation gaussienne, à laquelle la volatilité est fortement liée, ne permettait pas de tenir compte des variations extrêmes. Les événements rares<sup>x</sup> sont plus fréquents sur les marchés financiers que ne le suppose la loi normale. La plupart des marchés étudiés sont caractérisés par des variations de fortes amplitudes, brusques et instantanées. Le calcul de la variance séquentielle<sup>10</sup> ne permet pas de déterminer nettement une asymptote horizontale, mais au contraire montre un processus par à-coups conforme à la notion de variance infinie<sup>11</sup> développé en finance par B.Mandelbrot.

De son côté la VaR ne donne aucune indication sur le comportement des valeurs extrêmes de la distribution. Définie mathématiquement comme  $\text{Prob}(R_t < -\text{VaR}) = p\%$ <sup>12</sup>, elle permet de déterminer à partir des Variations historiques des rendements d'un actif, la perte réalisable dans  $p\%$  des cas, mais elle ne donne aucune précision concernant les pertes supérieures à ce seuil. A noter, que dans l'approche traditionnelle du CAPM la modélisation par une loi normale des rendements des actifs permet de contourner le problème, puisque la probabilité d'avoir un événement au-delà de  $3\sigma$  est négligeable (voir quasiment nul en terme financier).

<sup>5</sup> Dans l'approche traditionnelle d'optimisation de portefeuille, la volatilité d'un titre se mesure en terme d'écart type, soit  $EC^2 = E((X-m)^2)$ .

<sup>6</sup> La VaR empirique se calcule sur la distribution effective des rendements, mais conserve la même interprétation théorique.

<sup>7</sup> L'étendue est égale à  $|x_{\max} - x_{\min}|$ , la semi-variance est l'écart type calculé sur les variations négatives, l'intervalle interquantile (cf. note 2), l'écart absolu moyen est égal  $\sum |x-m|/n$ ,  $m$  étant la moyenne.

<sup>8</sup> Modélisées par P.Levy en 1925, ces lois ont été utilisées en sciences économiques par B.Mandelbrot pour décrire la distribution des revenus, et les mouvements des prix du coton. A noter que la loi normale et la loi de Cauchy sont des cas particuliers des lois de Levy.

<sup>9</sup> Paramètre  $\alpha$  ou exposant caractéristique, c'est de sa valeur que dépend la forme plus ou moins pointue (leptokurtique) de la fonction de densité.

<sup>10</sup> Calcul par incrémentation journalière, ce qui permet d'analyser l'évolution dans le temps de la variance.

<sup>11</sup> L'hypothèse de variance infinie a été proposée pour la première fois par B.Mandelbrot dans son compte-rendu à l'Académie des Sciences de Paris, le 4 juin 1962.

<sup>12</sup>  $R_t$  représente de rendement de l'actif considéré.



Du point de vue du contrôle des risques, tant au niveau global d'une institution financière que concernant les compartiments du portefeuille d'un gérant, il apparaît souhaitable de considérer comme mesure du risque la Value-at-risk, plutôt que la volatilité traditionnelle. Cependant, une analyse plus approfondie des valeurs extrêmes est nécessaire pour tenir compte du comportement erratique des marchés, notamment sur les places financières émergentes.

## II Le risque sur les marchés émergents

Depuis les travaux de B.Mandelbrot [Man63], d'autres auteurs tels que Fama et Roll [FR71], ou encore Belkacem<sup>xi</sup>, se sont attachés à démontrer que les queues de distribution empiriques des variations relatives des prix de certains actifs financiers étaient plus épaisses que celle d'une loi normale, modèle de base de la théorie moderne du portefeuille. On remarque un écart entre la courbe de densité théorique de la loi normale, et la courbe de densité empirique des données. Pour l'ensemble des places financières étudiées, l'Excess<sup>13</sup> Kurtosis<sup>14</sup> est largement positif, excepté pour l'Australie légèrement au-dessus de 1,48, ce qui signifie que la distribution est plus pointue au centre, et présente des queues plus épaisses. Cette constatation empirique permet de souligner l'importance des valeurs extrêmes (au-delà de la VaR à 95%), mais surtout le fait que la queue de distribution négative est porteuse d'informations essentielles pour une évaluation précise du risque.

L'estimation du paramètre  $\alpha$ , coefficient de pente des queues de distribution, a été réalisé suivant la méthode d'estimation de Mc Culloch<sup>15</sup>. De ce point de vue, Belkacem, Levy-Vehel et Walter<sup>xii</sup> se sont attachés à montrer que cette méthode était la meilleure parmi plusieurs alternatives. Les calculs réalisés selon un pas de temps glissant entre 1 et 10 jours, ont permis de tester la stabilité du coefficient  $\alpha$ . Les cours de bourse proviennent de la base de données Datastream, et correspondent en général à l'indice de référence du pays considéré. A noter que sur certains marchés, notamment dans les pays de l'ancien bloc de l'Est, le manque d'historique n'a pas permis de valider les résultats statistiques, ce qui nous a amené à utiliser des indices régionaux du type: Europe de l'Est ou encore Marchés émergents d'Europe (Indice Morgan Stanley Capital Investment).

Les résultats montrent que la plupart des places financières dites émergées présentent un coefficient  $\alpha$  supérieur ou égal à 1,6. C'est le cas de la France, de l'Allemagne, des Etats-Unis, de l'Italie, de la Nouvelle Zélande, de la Norvège, des Pays-Bas, du Canada, et de l'Australie. Par opposition les places financières considérées comme émergentes présentent des queues de distribution nettement plus épaisses, avec des coefficient  $\alpha$  compris entre 1,1 pour le Portugal, et 1,5 pour la Colombie ou les Philippines etc.... La valeur de  $\alpha$  modifie la forme de la courbe de distribution. Si S et S' sont deux fonctions de densité de paramètre  $\alpha$  et  $\alpha'$  tels que  $\alpha' > \alpha$ , alors le nombre de valeurs extrêmes (très grandes variations ou très petites variations) sera plus important dans S que dans S', mais il y aura moins de variations intermédiaires. Concrètement cela signifie que dans le processus S, à une majorité de faibles variations succèdent quelques forts mouvements erratiques.

A noter que pour certaines places émergentes, il n'a pas été possible de déterminer une valeur précise et stable du coefficient  $\alpha$ , ce qui nous a empêché de conclure quant à la nature exacte du processus, c'est le cas de la Chine, Finlande, Inde, Irlande, etc...

En terme de gestion de portefeuille sur les places financières émergentes, il existe deux types d'approches qui peuvent être complémentaires. L'une découle directement du principe d'optimisation de portefeuille au sens de Markowitz [Mar59]<sup>xiii</sup>, et consiste à diminuer son exposition au risque en se diversifiant sur des marchés décorrélés. Les économies en voie de développement présentent en général des cycles décorrélés, avec les économies développées, mais aussi entre elles. L'autre approche, qui intervient en général lorsque les marchés émergés présentent des niveaux de cours excessifs, consiste à arbitrer un marché pour un autre, au fur et mesure que ceux-ci atteignent des niveaux de valorisation (Per, Prime de risque)<sup>16</sup> trop élevés. Les mouvements de portefeuille seront d'autant plus violents que la situation macro-économique, les résultats des entreprises, ou encore les risques politiques, ne justifient pas les anticipations d'un réel potentiel d'appréciation du marché. Le manque de liquidité et l'étroitesse de ces marchés accentuent généralement ces phénomènes de surajustement, overshooting en anglais, provoquant des mouvements brutaux et rapides des cours.

<sup>13</sup> Différence entre le coefficient de Kurtosis de la distribution et le coefficient de Kurtosis d'une distribution Normale (3).

<sup>14</sup> Le Kurtosis est le moment d'ordre 4, divisé par le moment d'ordre 2.

<sup>15</sup> Pour la méthode de calcul, conférer J.H McCulloch. Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in statistics-Computation and simulation*, 15 :1109-1136,1986.

<sup>16</sup> Le Per est égal au Cours/Bénéfices par action, et les méthodes de valorisation en terme de Prime de risque consistent à comparer historiquement le rendement d'un placement par rapport à celui d'une obligation d'Etat (considérée sans risque).

Par ailleurs, il existe une dualité entre les flux d'investissements spéculatifs de court terme, et les capitaux stables de long terme nécessaire au financement de la croissance économique. En effet, la faiblesse d'une épargne nationale susceptible d'amortir l'hémorragie périodique des investissements de portefeuille de court terme, et le besoin croissant d'investissements directs, en font des places financières particulièrement risquées.

### **III Insuffisance de la VaR comme mesure du risque dans la gestion d'actifs**

La VaR en tant qu'outil de mesure du risque présente cependant selon les hypothèses utilisées quelques lacunes, notamment en termes de précision. En effet, si elle permet de déterminer à partir des variations historiques, le seuil de perte qui ne sera pas dépassé dans 95% des cas, elle ne donne aucune indication quant à l'étendue des pertes supérieures à ce niveau.

Sur un échantillon de 8481 observations pour l'Allemagne et de 2740 sur le Chili, la VaR journalière à 95% calculée empiriquement est de -1,46% sur l'indice allemand (Dax<sup>17</sup> 30), et de -1,29% pour l'indice chilien (Igpa<sup>18</sup>). La perte journalière la pire sur le même nombre d'observations, est de 11,57% sur le Chili et de 12,80% pour l'Allemagne. Les 5% d'observations supérieures à la VaR représentent dans le cas allemand 425 données qui se répartissent entre -1,46% et -12,80%, et dans le cas chilien 137 Variations comprises entre -1,29% et -11,57%. Ainsi en utilisant la VaR comme indicateur du risque, la perte d'information est d'autant plus importante que le pays étudié présente des queues de distribution épaisses, c'est-à-dire que son  $\alpha$  est proche de 1.

Dans le cas d'une distribution gaussienne de moyenne 0 et d'écart-type ( $\sigma$ ), la probabilité qu'une variation dépasse  $-3\sigma$  est de 0,0014, et 0,000033 pour  $-4\sigma$ , la décroissance des queues de distribution est très rapide. Sous l'hypothèse de normalité des rendements la VaR est donc un indicateur satisfaisant<sup>19</sup> du risque.

Par opposition, le calcul de la VaR empirique sur les indices des places émergentes comparée à la VaR gaussien, confirme les résultats fournis par l'Excess Kurtosis. En effet, pour l'ensemble des pays la VaR empirique à 95% est inférieure à la VaR gaussienne, ce qui signifie d'une part que la majorité des variations se concentre dans la partie centrale de la distribution, et d'autre part que le risque se situe au-delà de la VaR empirique dans la queue négative. A noter, que la différence de résultat, entre les deux méthodes de calcul est d'autant plus faible que le marché est émergé<sup>20</sup>. Pour la France, la VaR empirique à 95% est de -1,74% et la VaR normale de -1,97%, pour l'Allemagne on obtient -1,46% et -1,64%. Pour le Chili et le Bangladesh, les chiffres sont respectivement de -1,29%, -1,76% et -1,48%, -3,56%.

Une analyse du comportement des valeurs extrêmes est donc nécessaire pour tenir compte de l'information contenue dans les queues de distribution, au travers de l'Expected Worst Case (EWC), ou encore la moyenne des pertes journalières les pires sur un intervalle de temps donné.

Les calculs ont été réalisés à partir d'une simulation de 10 000 vecteurs indépendants  $\alpha$ -stables ( $\alpha, 0, 0, 1$ ) de taille  $h$ , respectivement 5, 20, 100, 250, avec  $\alpha \in ]1 ; 2]$ . On s'intéresse à la loi des Min  $[z_1, z_2, z_3, \dots, z_n]$  où les  $z_i$  représentent les différents vecteurs de taille  $h$ .

Sur un horizon d'une semaine de cotation, l'EWC pour  $\alpha \in ]1 ; 2]$ , passe de -1,66 à -11,53, mais surtout 5% des observations sont supérieures à -3,3 pour  $\alpha = 2$ , et à -20,84 pour  $\alpha = 1,1$ . Lorsque  $h = 250$ , l'EWC passe de -3,99 pour  $\alpha = 2$  à -332,6 pour  $\alpha = 1,1$ , et il y a 50% des observations qui dépassent -3,93 pour  $\alpha = 2$ , et -70,11 pour  $\alpha = 1,1$ . La vérification empirique réalisée à partir des indices des différentes places financières mondiales confirme les résultats théoriques. En effet, en régressant sur chacune des horizons  $h$ , l'EWC en fonction du coefficient  $\alpha$ , on obtient une droite de pente positive, avec un coefficient de corrélation de l'ordre de 60%. Plus  $\alpha$  est proche de 1, plus l'EWC est important, et donc moins l'analyse en terme de VaR est pertinente.

Ainsi contrairement à un trader, un gérant de portefeuille sera plus sensible au niveau de sa perte potentielle journalière la pire sur un horizon de placement  $h$ , plutôt qu'à la probabilité sur une journée de ne pas baisser au-delà de la VaR. Le tableau (annexe) montre que pour un investissement de 100 marks sur une durée de 100 jours, il y a 95% de chances dans un mouvement défavorable du marché allemand de ne pas perdre au pire plus de 5,43 marks en un jour, ou 2,62 marks en moyenne. Dans le cas de l'Afrique du Sud, pour un investissement de 100

<sup>17</sup> Le Dax 30 est l'indice des 30 plus grosses capitalisations allemandes du Frankfurt Stock Exchange, base 1000 le 31 décembre 1987.

<sup>18</sup> L'Igpa est l'indice général de la bourse chilienne.

<sup>19</sup> Signifie dans ce cas que pour un gérant de portefeuille, une perte supérieure est considérée comme suffisamment rare pour être négligée.

<sup>20</sup> Par opposition, un marché sera dit émergé, lorsqu'il se situe dans une économie développée, avec un potentiel de croissance modéré (2 à 3%) et un PNB par tête entre 3 à 5 fois supérieur (en moyenne) aux économies émergentes.

rands et un horizon identique, la perte la pire dans un mouvement défavorable du marché serait de 10,59 rands en une journée et de 4,15 rands en moyenne.

#### IV Vers une nouvelle mesure du risque

L'exposant caractéristique  $\alpha$  ne permet pas de quantifier le risque, mais renseigne sur la déformation de la fonction de densité entre les valeurs centrales et les valeurs extrêmes (cf partie II). En effet, les coefficients  $\alpha$ , du Portugal et de la Malaisie, sont respectivement de 1,1 et 1,5-1,6, ce qui signifie que les rendements de l'indice portugais suivent un processus plus irrégulier que ceux de l'indice malais. Mais la différence entre la perte la pire et la VaR empirique à 95% est plus faible au Portugal qu'en Malaisie, ce qui signifie que la dispersion des rendements dans la queue est plus faible dans l'indice portugais.

En terme de gestion de portefeuille, il est donc important de prendre en considération ces deux sources de risques. D'une part, le caractère plus ou moins erratique des Variations de l'actif étudié, c'est-à-dire quel est le degré de déformation de la courbe de distribution entre les valeurs extrêmes et les valeurs centrales. D'autre part, quelle est la dispersion des Variations dans la queue de distribution négative. Nous avons traduit cette notion de dispersion de queue au travers de l'Indicateur d'Etendue de Queue, ou encore en anglais Range Tail Indicator (RTI).

Cet indicateur de risque se définit comme la différence entre le fractile d'ordre 5% de la distribution des  $Z_{\min}$  et le fractile d'ordre 5% de la série des variations du cours de l'actif ( $X_1, \dots, X_i$ ).

$$RTI(h) = | \text{VaR}_{(95\%)} [Z_{\min}(h)] - \text{VaR}_{(95\%)} [X_1, \dots, X_i] |$$

La distribution des  $Z_{\min}$  correspond au vecteur  $\text{Min} [z_1, z_2, z_3, \dots, z_n]$  où les  $z_i$  représentent les différents vecteur de taille  $h$ . Pour  $h = N^{21}$ , le RTI représente la différence entre la perte journalière la pire et la VaR à 95% de la série parente, et pour  $h = 1$ , le RTI = 0. Par ailleurs, pour ne pas biaiser le calcul du RTI, nous avons décidé de ne pas retenir l'EWC comme borne inférieure. A noter, que  $h$  se définit comme l'horizon d'investissement, ce qui se traduit par un  $RTI(60) > RTI(20) > RTI(5)$ . En effet, le risque sera d'autant plus important que l'horizon d'investissement est loin.

Pour prendre en compte la déformation de la distribution entre les valeurs centrales et les valeurs extrêmes, nous avons multiplié le RTI par la probabilité de se trouver au-delà de la VaR à 95%, soit :

$${}^{22}\text{Prob}(X < -\text{VaR}) \approx C_\alpha ((1-\beta)/2) \gamma^\alpha \text{VaR}^{-\alpha}$$

$$\text{Avec } C_\alpha = (1-\alpha)/[\Gamma(2-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)] \text{ pour } \alpha \neq 1$$

(VaR calculée empiriquement à partir des données historiques)

La compilation des deux grandeurs permet de déterminer un classement des différentes places financières en fonction du risque de marché qu'elles présentent (tableau 1, page 6).

A noter, que cette indicateur contrairement à la volatilité présente la propriété d'être stable au sens financier du terme<sup>23</sup>. En effet, de part sa méthode de calcul, l'écart-type reste largement influencé par les variations extrêmes. Dans le cas du RTI, les valeurs extrêmes ne sont pas directement incorporées dans le calcul, mais interviennent dans la détermination des bornes de l'indicateur.

Ainsi pour l'Allemagne, en divisant l'échantillon en 2 sous-ensembles équivalents de 4220 variations, on obtient sur la première période un  $RTI(5)$ <sup>24</sup> de 0,64% et sur la deuxième période un  $RTI(5)$  de 1,14%. Ce qui signifie, que depuis le début des années 80 le risque sur le marché allemand s'est accentué. A noter, que ces résultats se retrouvent sur le graphique des cours du Dax, où l'on perçoit très nettement deux sous périodes distinctes.

<sup>21</sup> N est le nombre de valeurs de la série parente.

<sup>22</sup> Pour les développements conférer l'article de G.Samorodnitsky and Taqqu. Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman & Hall, New York, 1994.

<sup>23</sup> Signifie que la mesure du risque en  $t$  est un indicateur satisfaisant du risque à l'instant  $t+1$ .

<sup>24</sup>  $RTI(5)$  utilise comme borne extrême la  $VaR(95\%)$  de la distribution des jours les pires sur un horizon d'investissement d'une semaine.

Par opposition, en réalisant un back-testing sur l'ensemble de l'historique excepté 1997, on obtient un RTI(5) de 0,94%. En tenant compte de l'année 97, notamment du krach du 28 octobre, le RTI(5) est de 0,94%.

A noter, qu'empiriquement la stabilité du RTI est d'autant plus importante que la borne extrême ne correspond pas aux 2 ou 3 dernières valeurs négatives de l'échantillon. En effet, pour l'ensemble des marchés, la distribution des rendements fait état d'une discontinuité importante en général sur les 2 ou 3 dernières valeurs.

(Tableau 1 : classification du risque pays en fonction du RTI(20) pondéré)

Pays	RTI(5)	RTI(20)	RTI(60)	prob*RTI(5)	prob*RTI(20)	prob*RTI(60)
Maroc	0,30%	0,85%	1,65%	0,28%	0,77%	1,50%
Slovaquie	2,00%	6,57%	9,33%	0,09%	0,29%	0,41%
Argentine	2,84%	4,37%	6,29%	0,18%	0,28%	0,40%
Vénézuëla	2,77%	5,64%	6,10%	0,12%	0,25%	0,27%
Slovénie	2,20%	6,53%	6,64%	0,08%	0,24%	0,25%
Mexique	1,67%	4,07%	5,87%	0,10%	0,24%	0,34%
Pologne	4,68%	5,46%	6,35%	0,18%	0,21%	0,25%
Grèce	2,10%	4,81%	5,29%	0,09%	0,21%	0,23%
Brsil	1,94%	5,68%	10,66%	0,06%	0,19%	0,36%
Philippines	2,04%	4,74%	10,00%	0,07%	0,16%	0,34%
Russie	2,50%	4,40%	5,71%	0,09%	0,16%	0,21%
Portugal	1,48%	3,42%	7,60%	0,07%	0,16%	0,35%
Egypte	1,72%	3,26%	3,69%	0,08%	0,15%	0,17%
Hongrie	1,50%	3,84%	5,18%	0,06%	0,15%	0,20%
HongKong	2,53%	5,02%	7,06%	0,07%	0,15%	0,21%
Pérou	1,96%	4,34%	6,30%	0,06%	0,13%	0,19%
Malaisie	1,42%	4,04%	9,27%	0,04%	0,13%	0,29%
Colombie	1,03%	3,21%	3,68%	0,04%	0,11%	0,13%
Nouvelle-Zélande	0,63%	2,08%	5,12%	0,03%	0,11%	0,26%
Italie	1,36%	3,53%	5,65%	0,04%	0,10%	0,16%
Autriche	1,25%	2,54%	4,06%	0,05%	0,10%	0,16%
Singapour	1,45%	3,13%	4,85%	0,04%	0,08%	0,13%
Espagne	1,53%	2,64%	5,03%	0,05%	0,08%	0,15%
Afrique	1,22%	2,54%	9,17%	0,04%	0,08%	0,29%
Suisse	0,99%	2,43%	4,10%	0,03%	0,08%	0,13%
Norvège	1,23%	2,76%	7,26%	0,03%	0,08%	0,20%
Chili	1,37%	2,70%	5,13%	0,04%	0,08%	0,14%
Kenya	0,81%	1,94%	3,41%	0,03%	0,07%	0,13%
Bélgique	1,09%	2,00%	5,01%	0,04%	0,07%	0,17%
Royaume-Uni	1,06%	2,16%	3,04%	0,03%	0,06%	0,09%
Danemark	1,11%	2,42%	3,58%	0,03%	0,06%	0,09%
PaysBas	0,97%	2,13%	2,74%	0,03%	0,06%	0,07%
Canada	1,01%	2,13%	3,00%	0,03%	0,05%	0,08%
France	1,14%	2,53%	5,53%	0,02%	0,05%	0,11%
Allemagne	1,01%	1,70%	2,53%	0,02%	0,03%	0,05%
Australie	0,79%	1,75%	6,17%	0,01%	0,03%	0,10%
Etats-Unis	0,87%	1,69%	3,20%	0,01%	0,03%	0,05%

D'un point de vue purement statistique, le RTI(h) est une approximation empirique de l'espérance conditionnelle de la queue de distribution négative. Cette espérance pondérée par la probabilité de se situer dans cette partie de la distribution, permet d'obtenir une classification des places financières en fonction du risque de marché qu'elles présentent. Cet indicateur peut être utilisé pour sélectionner des SICAV dans un univers de classement homogène.

### Conclusions

D'un point de vue général, la VaR est mieux adaptée que  $\sigma$  pour mesurer le risque de marché, et ce pour deux raisons principales : le risque financier est un risque de pertes et non de gains, et les tests empiriques ont démontré que la modélisation gaussienne des rendements des actifs, à laquelle la volatilité est fortement liée, ne permettait pas de tenir compte des Variations extrêmes. Par ailleurs, une analyse plus approfondie des marchés d'actions dans le monde a permis de mettre en évidence des différences de comportements statistiques entre les marchés financiers développés et les marchés financiers dits émergents. En effet, on constate non seulement que le nombre de grandes variations (événements rares) est plus important que sur les marchés développés, mais aussi que l'étendue des pertes y est plus grande. Ainsi pour un gérant de portefeuille, la VaR en tant qu'outil de mesure du risque présente quelques insuffisances. En effet, si elle permet de calculer la probabilité de ne pas dépasser un certain seuil de perte dans 95% des cas, sur un intervalle de temps donné, elle ne donne aucune indication quant aux pertes supérieures à ce niveau. L'introduction du Range Tail Indicator pondéré par la probabilité de se situer au-delà de la VaR  $_{(95\%)}$  offre une mesure de risque plus complète. Elle tient compte non seulement de la dispersion empirique de la queue, mais aussi du degré de déformation de la distribution entre les valeurs extrêmes et les valeurs centrales. Plus précis et surtout plus stable que la variance, cet indicateur devrait permettre notamment de mettre en place des stratégies de couverture mieux adaptées.

Remerciements : nous tenons à remercier le Professeur Daniel Zajdenweber, laboratoire du THEMA (Nanterre Paris X) pour les idées et les remarques dont il a su nous faire part, ainsi que le Professeur Jacques Levy-Vehel, responsable du projet Fractales de l'INRIA (Rocquencourt) pour le temps qu'il a accepté de nous consacrer.

<sup>i</sup> B.Mandelbrot. The Variation of certain speculative prices. *J.Business*, 36 : 394-419, 1963.

<sup>ii</sup> E.F.Fama et R.Roll. Parameter estimates for symmetric stable distribution. *JASA*, 66(334), 1971.

<sup>iii</sup> H.Aubry et L.Belkacem, Analyse statistique des rendements des marchés d'actions des pays émergents, *Rapport de recherche, CIFRE, juin 1997*.

<sup>iv</sup> W.F.Sharpe. A Simplified Model Portfolio analysis. *Management Science*, 10 : 277-293, january 1963.

W.F.Sharpe. Capital asset prices : A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19 : 425-442 September 1964.

<sup>v</sup> J.Mossin. Equilibrium in Capital Asset Market. *Econometrica* 34 : 337-350, October 1966.

<sup>vi</sup> J.Lintner. The Valuation of Risk Asset and the selection of Risky investments in stock portfolio and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 : 13-27, February 1965.

<sup>vii</sup> F.Black. Capital Market Equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*. Pages 444-455, july 1972.

<sup>viii</sup> E.F.Fama and J.McBeth. Risk, return and equilibrium : empirical test. *Journal of Political Economy*, mai-juin 1973.

<sup>ix</sup> M.Blume and I.Freind. A new look at the Capital Asset pricing Model. *Journal of Finance*. Pages 283-299, Mai 1973.

<sup>x</sup> D.Zajdenweber, Hasard et prévisions. *Economica, Paris 1976*.

<sup>xi</sup> L.Belkacem. Processus Stables et Applications en Finance. *PhD, Université de Paris IX Dauphine, Novembre 1996*.

<sup>xii</sup> L.Belkacem, J. Levy-Vehel, and C.Walter. Generalized Market Equilibrium : « Stable » CAPM. *In Proceeding of the AFFI-International Conference of Finance, 1994. June 29-30 and 1<sup>er</sup> july, Bordeaux, France*.

<sup>xiii</sup> H.Markowitz. Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments. *John Wiley & Sons, New York, 1959*.

Annexe :

H = 100		Fractiles empiriques de la distribution des Zmin				
Pays	Expected WCS	1%	5%	10%	25%	50%
Afrique du Sud	-4,15%	-37,82%	-10,59%	-5,23%	-3,85%	-2,80%
Allemagne	-2,62%	-12,81%	-5,43%	-3,62%	-2,95%	-2,23%
Argentine	-8,53%	-51,71%	-13,45%	-11,74%	-9,40%	-6,82%
Australie	-2,09%	-4,13%	-4,13%	-3,53%	-2,60%	-2,05%
Autriche	-3,24%	-9,98%	-8,02%	-6,94%	-3,88%	-2,38%
Belgique	-2,42%	-12,68%	-4,70%	-3,55%	-2,85%	-1,94%
Canada	-2,25%	-11,31%	-5,32%	-3,84%	-2,48%	-1,84%
Chili	-2,78%	-11,57%	-6,43%	-4,30%	-3,21%	-2,24%
Chine	-7,32%	-16,39%	-16,39%	-13,07%	-10,70%	-7,77%
Colombie	-2,93%	-5,15%	-5,15%	-4,73%	-4,37%	-2,63%
Corée	-3,63%	-15,94%	-8,34%	-6,17%	-4,51%	-3,26%
Danemark	-2,40%	-7,71%	-5,11%	-4,42%	-3,25%	-2,23%
Espagne	-3,05%	-9,27%	-8,25%	-6,26%	-3,40%	-2,64%
Finlande	-3,03%	-11,78%	-7,30%	-4,69%	-3,60%	-2,49%
France	-3,33%	-9,64%	-7,29%	-6,28%	-3,55%	-2,86%
Hong kong	-5,13%	-33,33%	-11,83%	-8,44%	-6,52%	-3,97%
Hongrie	-3,68%	-6,88%	-6,88%	-5,94%	-5,07%	-3,24%
Italie	-3,79%	-13,79%	-8,06%	-7,03%	-4,04%	-3,26%
New Zealande	-3,43%	-8,75%	-7,49%	-5,77%	-4,10%	-3,15%
Norvège	-3,45%	-19,11%	-10,70%	-5,90%	-3,83%	-2,50%
Pays-Bas	-2,62%	-11,49%	-4,48%	-3,93%	-3,12%	-2,38%
Pérou	-4,07%	-8,41%	-8,41%	-6,61%	-5,52%	-4,18%
Philippines	-4,37%	-14,60%	-8,04%	-7,53%	-5,67%	-3,72%
Portugal	-3,20%	-12,65%	-10,43%	-8,81%	-4,01%	-2,39%
Royaume-Uni	-2,70%	-20,64%	-4,66%	-4,36%	-2,78%	-2,10%
Singapour	-3,37%	-20,86%	-8,63%	-6,06%	-4,26%	-2,59%
Suisse	-2,50%	-10,82%	-5,66%	-4,48%	-2,88%	-1,97%
Vénézuéla	-6,98%	-13,02%	-13,02%	-11,24%	-9,75%	-6,82%





---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399



\* R R - 3 6 1 6 \*



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399



\* R R - 3 6 1 6 \*