



**HAL**  
open science

# Sur le modèle du frottement sec dans les problèmes de roulement des solides

Victor Zhuravlev

► **To cite this version:**

Victor Zhuravlev. Sur le modèle du frottement sec dans les problèmes de roulement des solides. [Rapport de recherche] RR-3586, INRIA. 1998. inria-00073094

**HAL Id: inria-00073094**

**<https://inria.hal.science/inria-00073094>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur le modèle du frottement sec dans les problèmes de roulement des solides

Victor Zhuravlev

No 3586

Décembre 1998

———— THÈME 4 ————



*R*apport  
*de recherche*



# Sur le modèle du frottement sec dans les problèmes de roulement des solides

Victor Zhuravlev \*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet SOSSO

Rapport de recherche n° 3586 — Décembre 1998 — 10 pages

**Résumé :** On considère le modèle du frottement sec de Contensou. L'intégration des tensions tangentielles dans la zone de contact est faite à l'aide de fonctions élémentaires en opposition aux résultats précédents qui utilisaient des fonctions elliptiques. Ainsi on calcule non seulement la force de réaction mais aussi le couple. A l'aide d'une approximation de Padé on extrait des expressions de la force et du couple les parties principales. En guise d'exemple, on étudie le problème du roulement d'une boule avec frottement sec sur un plan horizontal.

**Mots-clé :** frottement sec, contact non ponctuel de Hertz, modèle de Contensou, roulement d'un solide.

*(Abstract: pto)*

\* Institut pour les Problèmes de Mécanique de Moscou. Ce travail a été partiellement réalisé lors d'un séjour de l'auteur à l'Inria-Rocquencourt

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Téléphone : (33) 01 39 63 55 11 – Télécopie : (33) 01 39 63 53 30

# Dry friction model in problems of solids rolling

**Abstract:** Contact dry friction model is considered. Tangential stresses in the contact zone are integrated in elementary functions unlike in Contact work, where they were integrated in elliptical functions. It is not only the reaction force like in Contact, that is calculated in such a way, but the moment of force as well.

The principal parts are extracted from the expressions of force and the moment of force using Padé approximations. The problem of a ball rolling with dry friction along a horizontal plane, is used as an example.

**Key-words:** dry friction, hertzian contact, Contact model, solid rolling.

# 1 Introduction

Le problème du roulement d'un solide sur une surface sous d'autres hypothèses que celle du contact ponctuel a intéressé beaucoup d'auteurs [2, 3].

L'analyse des publications montre qu'on ne peut pas considérer que ce problème est bien résolu dans le cas où l'interaction au point de contact est décrite par la loi du frottement sec. Dans ce cas on doit distinguer deux types de position du problème. Dans le premier on suppose que la réaction au point de contact ne dépasse pas une certaine limite, de sorte qu'il n'y a pas de glissement relatif. Cela conduit à une liaison non holonome. Dans le deuxième type, le glissement a lieu mais la force de frottement ne dépend pas de la vitesse de glissement. Pour justifier ces suppositions on mentionne d'habitude l'hypothèse de Coulomb. L'inconsistance de ces suppositions est évidente : l'hypothèse de Coulomb n'était pas formulée pour un point de contact mais pour une surface. Une tentative d'étude rigoureuse de cette question a été entreprise par Contensou [1]. Il a supposé, suivant Hertz (voir par exemple [4]), que les corps en contact sont élastiques de sorte qu'au lieu d'un point de contact on a une zone circulaire ou elliptique. Dans chaque point de cette zone, le glissement est différent et en appliquant l'hypothèse de Coulomb à chaque élément de la surface à l'intérieur de la zone de contact puis en intégrant, Contensou obtient une formule, liant la force de frottement avec la vitesse linéaire et la vitesse de pivotement. Malheureusement, la formule qu'il a obtenue s'exprime à l'aide d'une intégrale elliptique, donc elle est très compliquée pour être utilisée dans des problèmes de dynamique. Le résultat de Contensou a montré que l'hypothèse de Coulomb faite pour des corps absolument rigides en contact ponctuel est tout à fait inconsistante.

Dans ce qui suit nous montrons que la théorie de Contensou admet des simplifications considérables et on peut la présenter sous une forme commode pour des utilisations dans des problèmes concrets.

## 2 Le modèle du frottement sec des corps en contact

Comme dans [1], nous supposons que le contact des corps est régi par la théorie des tensions en contact de Hertz et que les surfaces en contact sont localement sphériques. Dans ce cas la zone de contact est circulaire de rayon  $\varepsilon$ . Le rayon  $\varepsilon$  dépend des modules d'élasticité des matériaux, de la réaction normale  $\mathcal{N}$  et des rayons de courbure des surfaces en contact. La distribution des tensions s'exprime par la formule :

$$\sigma = \frac{3\mathcal{N}}{2\pi\varepsilon^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\varepsilon^2}}$$

où  $\rho$  est la distance du centre du cercle au point où la tension normale est  $\sigma$  (Figure 1).

Nous allons supposer que le glissement relatif est dû à deux mouvements simples : translation à vitesse  $v$  et rotation (pivotement) à la vitesse angulaire  $\omega$ .

La vitesse relative en un point arbitraire est perpendiculaire au rayon-vecteur de ce point issu du centre instantané de rotation  $(0, h)$ . La force élémentaire du frottement sec est opposée à cette vitesse et elle est proportionnelle à la tension  $\sigma$  avec le coefficient de proportionnalité égal au coefficient du frottement sec  $f$  :  $|d\vec{F}| = f\sigma dx dy$ .

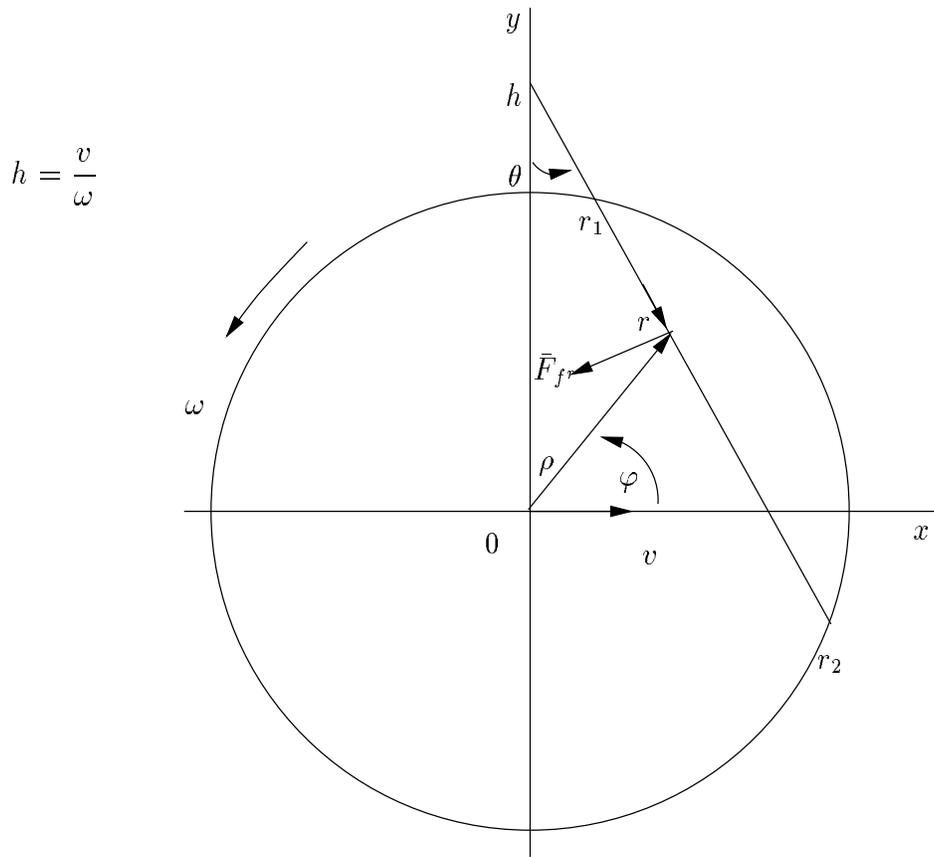


FIG. 1:

En intégrant la composante de cette force élémentaire sur l'axe  $x$ , nous obtenons la force de frottement sec le long de cet axe

$$F_{fr} = f \int \int \sigma \cos \theta dx dy. \quad (2.1)$$

En raison de la symétrie, la force du frottement le long de l'axe  $y$  est égale à zéro, de sorte que l'expression (2.1) représente le module de la résultante des forces tangenciales au contact. Dans [1, 2], l'intégrale double (2.1) était exprimée en coordonnées polaires  $\phi, \rho$  et par rapport à ces coordonnées prises séparément, l'intégrale à l'air d'une intégrale elliptique. Cela a permis à Contensou d'affirmer que la force (2.1) ne peut pas être exprimée en fonctions élémentaires. En réalité ce n'est pas vrai. L'intégrale (2.1) peut être exprimée en fonctions élémentaires si on passe des coordonnées  $\phi, \rho$  aux coordonnées  $\theta, r$  (Figure 1)

$$F_{fr} = \frac{3f\mathcal{N}}{\pi\varepsilon^2} \int_0^{\theta^*} \cos \theta d\theta \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta + (h - r \cos \theta)^2}{\varepsilon^2}} r dr$$

où  $\sin \theta^* = \varepsilon/h = \varepsilon\omega/v$ . Introduisons les notations :

$$k = h/\varepsilon, \quad q = r/\varepsilon.$$

Alors on a :

$$F_{fr} = \frac{3f\mathcal{N}}{\pi} \int_0^{\theta^*} \cos \theta d\theta \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{-q^2 + 2kq \cos \theta + 1 - k^2} dq. \quad (2.2)$$

Les bornes  $q_1$  et  $q_2$  valent :

$$q_1 = k \cos \theta - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad q_2 = k \cos \theta + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}.$$

La force  $F_{fr}$  est donnée par (2.2) si le centre instantané de rotation se trouve hors de la zone du contact ( $k > 1$ ). Dans le cas contraire ( $k \leq 1$ ), au lieu de (2.2), on a :

$$F_{fr} = \frac{3f\mathcal{N}}{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{-q^2 + 2kq \cos \theta + 1 - k^2} dq.$$

Le calcul montre que :

$$F_{fr} = \begin{cases} \frac{3}{32} \pi \mathcal{N} f k (4 - k^2) & k \leq 1 \\ \frac{3}{64k} \mathcal{N} f [4k^2(4 - k^2)\theta^* + 4(k^2 + 2)\sqrt{k^2 - 1}] & k > 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

La courbe  $F_{fr}(k)$  est représentée sur la Figure 2.

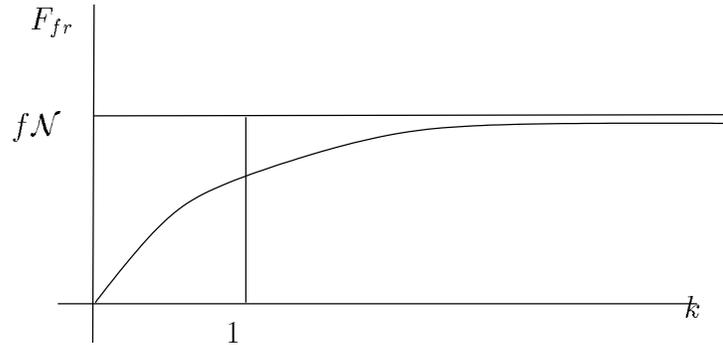


FIG. 2:

Il s'avère que la dérivée première  $\frac{dF_{fr}}{dk}$  est continue partout y compris au point  $k = 1$ . Notons aussi le comportement de la fonction  $F_{fr}(k)$  au voisinage de  $k = 0$  et à l'infini ( $k = \infty$ ):

$$F_{fr} = \frac{3}{8} \pi \mathcal{N} f k + O(k^2), \quad F_{fr} = \mathcal{N} f \left(1 - \frac{1}{10k^2}\right) + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (2.3')$$

Pour utiliser la loi du frottement (2.3) dans des problèmes de dynamique des corps roulants, il est commode de passer à l'approximation de Padé, c'est-à-dire à la forme d'une fraction rationnelle respectant le comportement (2.3') :

$$F_{fr} = \frac{3\pi\mathcal{N}fk}{8 + 3\pi k}$$

ou, en termes de vitesse ( $k = v/\varepsilon\omega$ ) :

$$F_{fr} = \frac{3\pi\mathcal{N}fv}{8\varepsilon\omega + 3\pi v}. \quad (2.4)$$

Dans [1], Contensou s'est borné au calcul de la résultante des forces de frottement. Pourtant, pour décrire complètement l'interaction des corps en contact, il est nécessaire encore de calculer le moment de ces forces en centre de la zone de contact.

L'intégrale correspondante s'exprime aussi en fonctions élémentaires :

$$M_{fr} = \begin{cases} \frac{3\pi\mathcal{N}f\varepsilon}{128}(8 - 8k^2 + 3k^4) & k \leq 1 \\ \frac{3\mathcal{N}f\varepsilon}{64}[(8 - 8k^2 + 3k^4)\theta^* + 3(2 - k^2)\sqrt{k^2 - 1}] & k > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

La courbe  $M_{fr}(k)$  est représentée sur la Figure 3. Comme la courbe (2.3), elle est lisse en  $k = 1$ . Son comportement à l'infini est du type :

$$M_{fr} = \frac{\mathcal{N}f\varepsilon}{5k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

L'approximation de Padé qui conserve  $M_{fr}(0)$  et le comportement à l'infini est :

$$M_{fr} = \frac{3\pi\mathcal{N}f\varepsilon}{16 + 15\pi k} = \frac{3\pi\mathcal{N}f\varepsilon^2\omega}{16\varepsilon\omega + 15\pi v}. \quad (2.6)$$

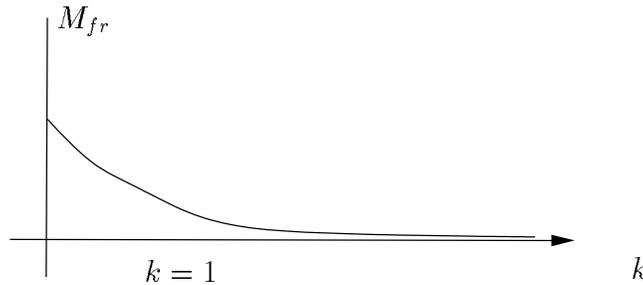


FIG. 3:

Réunissant les résultats obtenus, nous pouvons écrire le modèle du frottement issu de l'hypothèse de Coulomb, lors du roulement des corps :

$$\begin{cases} F_{fr} = f\mathcal{N} \frac{3\pi v}{8\varepsilon\omega + 3\pi v} & \omega + v \neq 0 \\ 0 \leq F_{fr} \leq f\mathcal{N} & \omega + v = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} M_{fr} = \frac{3\pi}{16} \mathcal{N} f \varepsilon \frac{16\varepsilon\omega}{16\varepsilon\omega + 15\pi v} & \omega + v \neq 0 \\ 0 \leq M_{fr} \leq \frac{3\pi}{16} \mathcal{N} f \varepsilon & \omega + v = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

(dans l'exposé précédent, les signes des variables n'avaient pas d'importance et étaient supposés tous positifs).

Ou, si on change les échelles des variables  $v' = 3\pi v$ ,  $\omega' = 8\pi\omega\varepsilon$ ,  $F_0 = f\mathcal{N}$ ,  $M_0 = \frac{3\pi}{16} \mathcal{N} f \varepsilon$ , on a :

$$\begin{cases} F_{fr} = F_0 \frac{v'}{\omega' + v'} & v' + \omega' \neq 0 \\ 0 \leq F_{fr} \leq F_0 & v' + \omega' = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} M_{fr} = M_0 \frac{2\omega'}{2\omega' + 5v'} & v' + \omega' \neq 0 \\ 0 \leq M_{fr} \leq M_0 & v' + \omega' = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les lois (2.3)-(2.4) et (2.5)-(2.6) ou (2.9)-(2.10) fondées sur l'hypothèse de Coulomb permettent de tirer des conclusions importantes pour les applications :

1. Le frottement de glissement et le frottement de pivotement ne sont pas indépendants l'un de l'autre. La force de frottement  $F_{fr}$  et le couple  $M_{fr}$  sont les fonctions de la vitesse de glissement  $v$  aussi bien que la vitesse de pivotement  $\omega$ . Il s'ensuit que si on prend, comme cela est admis d'habitude, ces composantes du frottement dans une forme où ils ne sont pas couplés, cela n'a aucun rapport avec le frottement de Coulomb.
2. Si le glissement d'un corps sur la surface de l'autre représente une translation pure ( $\omega = 0$ ) alors la force de frottement a sa valeur statique limite. Mais si  $\omega \neq 0$  (quelque petit qu'il soit) cette valeur limite est égale à zéro. C'est pourquoi le plus célèbre exemple de la mécanique non holonome -le roulement d'un solide sur une surface rugueuse est erroné. Il est basé sur des lois de Coulomb mal comprises.
3. Les fonctions (2.3)-(2.4) et (2.5)-(2.6) où (2.9)-(2.10) n'ont pas de limite au point  $v = \omega = 0$ . Cela signifie que sans information préliminaire supplémentaire sur le mouvement, aucune simplification du modèle de frottement sec n'est plus possible.

### 3 Roulement d'une boule pesante homogène sur un plan horizontal avec frottement sec

Les équations du mouvement de la boule homogène sont du type :

$$\mathcal{I} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M}, \quad m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$$

où  $\mathcal{I} = (2/5)m\mathcal{R}^2$  le moment d'inertie de la boule autour d'un axe passant par le centre d'inertie,  $m$  la masse de la boue,  $\mathcal{R}$  son rayon. La vitesse du point de la boule coïncidant avec le centre de la zone de contact :

$$v_x = \dot{x} - R\omega_y ; v_y = \dot{y} + R\omega_x, \quad (3.1)$$

Passons en variables polaires :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \geq 0 ; \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{v} ; \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v}. \quad (3.2)$$

Le module de la force de frottement, en vertu de (2.7), est :

$$F = F_0 \frac{3\pi v}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v}.$$

Par conséquent les composantes de la force  $\bar{F}$  sont

$$F_x = -\frac{3\pi F_0 v \cos \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v}, \quad F_y = -\frac{3\pi F_0 v \sin \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v}.$$

Les composantes du couple au centre de la boule sont :

$$M_x = \mathcal{R}F_y, \quad M_y = -\mathcal{R}F_x, \quad M_z = M_0 \frac{16\varepsilon\omega_z}{16\varepsilon|\omega_z| + 15\pi v}.$$

La dernière composante est écrite en vertu de (2.8). Il s'ensuit que le système des équations du mouvement de la boule est :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\dot{\omega}_x &= -F_0 \frac{3\pi v \mathcal{R} \sin \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v} ; & m\ddot{x} &= -F_0 \frac{3\pi v \cos \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v} \\ \mathcal{I}\dot{\omega}_y &= F_0 \frac{3\pi v \mathcal{R} \cos \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v} ; & m\ddot{y} &= -F_0 \frac{3\pi v \sin \alpha}{8\varepsilon|\omega_z| + 3\pi v} \\ \mathcal{I}\dot{\omega}_z &= -M_0 \frac{16\varepsilon\omega_z}{16\varepsilon|\omega_z| + 15\pi v} \quad \text{où } v \text{ et } \alpha \text{ sont donnés par (3.2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Faisons le changement de variables  $(t, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (\tau, \omega_x, \omega_y, u, v, \alpha)$  où  $\tau = (3\pi \mathcal{N} f / 2m)t$ ,  $u = \mathcal{R}\omega_z$ . Alors le système (3.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{d\tau} &= -\frac{5v \sin \alpha}{\mathcal{R}(8\mu|u| + 3\pi v)} ; & \frac{d\omega_y}{d\tau} &= \frac{5v \cos \alpha}{\mathcal{R}(8\mu|u| + 3\pi v)} ; \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{5\mu^2 u}{16\mu|u| + 5\pi v} ; & \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{7v}{8\mu|u| + 3\pi v} ; & \frac{d\alpha}{d\tau} &= 0. \\ & & \mu &= \varepsilon/\mathcal{R} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la vitesse de glissement relatif ne change pas de direction :  $\alpha \equiv \text{const}$ . On peut poser  $\alpha = 0$  ce qui nous donne  $\omega_x = \text{const}$  et  $7\mathcal{R}\omega_y + 5v = \text{const}$ . De cette façon, afin d'intégrer le système des cinq équations, il suffit d'intégrer le système des deux équations en les variables  $u$  et  $v$ .

Tout d'abord faisons quelques remarques qualitatives. Les équations différentielles déterminant les courbes intégrales dans le plan  $u, v$  sont :

$$\frac{du}{dv} = \frac{8\mu|u| + 3\pi v}{16\mu|u| + 5\pi v} \cdot \frac{5\mu^2 u}{7v}.$$

Ces courbes sont représentées sur la Figure 4. Il suffit de se borner au cas  $u \geq 0$ .

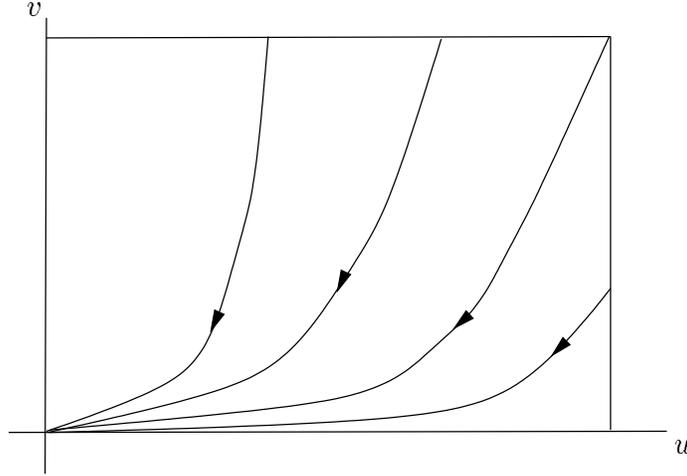


FIG. 4:

Considérons le système qui a les mêmes courbes intégrales dans le plan  $u, v$  :

$$\frac{du}{d\beta} = -5(8\mu u + 3\pi v)\mu^2 v ; \quad \frac{dv}{d\beta} = -7v(16\mu u + 5\pi v). \quad (3.4)$$

Les variables  $\beta$  et  $\tau$  sont liées par la relation :

$$\tau = \int_0^\beta (16\mu u + 5\pi v)(8\mu u + 3\pi v) d\beta. \quad (3.5)$$

Pour le système (3.4) il est facile de déduire l'inégalité suivante :

$$\sqrt{u^2 + v^2} \leq \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{1 + 40\mu^3 \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \beta}.$$

Donc l'intégrale (3.5) converge.

Cela signifie que toutes les courbes intégrales du système (3.4) atteignent le point  $u = v = 0$  en temps fini. Donc la vitesse de glissement et la vitesse de pivotement s'annulent simultanément [3]. Le mouvement ultérieur représente le roulement sans glissement avec une vitesse constante le long d'une droite.

Les résultats connus auparavant pour ce problème, et qui sont basés sur le modèle du frottement que nous jugeons inconsistent, montre que la vitesse du glissement et la vitesse du pivotement s'annulent indépendamment, ce qui contredit ce que nous avons obtenu précédemment.

Le système (3.4) peut être résolu analytiquement. Pour cela il suffit de remarquer qu'il admet le groupe des dilatations homogénéisées :

$$u \rightarrow u' = au ; v \rightarrow v' = av.$$

Dans les coordonnées canoniques de ce groupe il se ramène au quadrature. En effectuant le changement des variables  $(u, v) \rightarrow (p, q) : q = u/v ; p = \ln v$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} &= -q \frac{8\mu(5\mu^2 - 14)q + 5\pi(\mu - 7)}{(8\mu q + 3\pi)(16\mu q + 5\pi)} e^{-p} \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{7e^{-p}}{8\mu q + 3\pi}. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation aux variables partagées :

$$\frac{dq}{dp} = q \frac{8\mu(5\mu^2 - 14)q + 5\pi(\mu - 7)}{16\mu q + 5\pi}.$$

## Références

- [1] P. Contensou, "Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie." *In Kreiselprobleme: Gyrodynamics*, Ed. H. Ziegler, Springer-Verlag, Berlin 1963.
- [2] A.P. Markeev, "Dynamique du solide en contact avec une surface rigide". Moscou, Nauka, Fizmatlit 1982 (en Russe).
- [3] Ju.I. Neimark, N.A. Fufaev, "Dynamics of Nonholonomic Systems", Vol. 33 Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1972.
- [4] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York 1951.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399