

# Estimations asymptotiques du nombre de chemins Nord-Est de pente fixée et de largeur bornée

Isabelle Dutour, Laurent Habsieger, Paul Zimmermann

► **To cite this version:**

Isabelle Dutour, Laurent Habsieger, Paul Zimmermann. Estimations asymptotiques du nombre de chemins Nord-Est de pente fixée et de largeur bornée. [Rapport de recherche] RR-3585, INRIA. 1998, pp.13. <inria-00073095>

**HAL Id: inria-00073095**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073095>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Estimations asymptotiques du nombre de  
chemins Nord-Est de pente fixée et de largeur  
bornée*

Isabelle Dutour , Laurent Habsieger , Paul Zimmermann

N° 3585

1998

\_\_\_\_\_ THÈME 2 \_\_\_\_\_



*R*apport  
de recherche





## Estimations asymptotiques du nombre de chemins Nord-Est de pente fixée et de largeur bornée

Isabelle Dutour\* , Laurent Habsieger† , Paul Zimmermann‡

Thème 2 — Génie logiciel  
et calcul symbolique  
Projet Polka

Rapport de recherche n° 3585 — 1998 — 13 pages

**Résumé :** Nous étudions une quantité liée aux chemins constitués de pas Nord et Est restant sous la droite de pente  $d$  partant de l'origine. Nous donnons une estimation asymptotique de cette quantité en fonction de la largeur  $n$  de ces chemins et de la pente  $d$ , répondant ainsi à une question posée par Bernard Mourrain.

**Mots-clé :** rang de Bezoutien, chemin de Dyck généralisé, nombres de Catalan

*(Abstract: pto)*

Ce travail a été en partie soutenu par la Région Lorraine.

\* LaBRI, Université Bordeaux I, [dutour@labri.u-bordeaux.fr](mailto:dutour@labri.u-bordeaux.fr)

† A2X, Université Bordeaux I, [habsiege@math.u-bordeaux.fr](mailto:habsiege@math.u-bordeaux.fr)

‡ INRIA Lorraine et LORIA, [Paul.Zimmermann@loria.fr](mailto:Paul.Zimmermann@loria.fr)

Unité de recherche INRIA Lorraine  
Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY (France)  
Téléphone : (33) 83 59 30 30 – Télécopie : (33) 83 27 83 19  
Antenne de Metz, technopôle de Metz 2000, 4 rue Marconi, 55070 METZ  
Téléphone : (33) 87 20 35 00 – Télécopie : (33) 87 76 39 77

# Asymptotic analysis of the number of North-East paths of fixed slope and bounded width

**Abstract:** We study here a quantity related to the number of walks with North and East steps staying under the line of slope  $d$  starting from the origin. We give an asymptotic analysis of this quantity with respect to both the width  $n$  and the slope  $d$ , answering to a question asked by Bernard Mourrain.

**Key-words:** Bezoutian rank, generalized Dyck path, Catalan numbers

## 1 Présentation du problème

Soient  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{F}_{d,n}$  le sous-ensemble des  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  défini par

$$\begin{cases} a_1 & \leq d-1 \\ a_1 + a_2 & \leq 2(d-1) \\ \vdots & \vdots \\ a_1 + \dots + a_n & \leq n(d-1) \end{cases}$$

et soit  $g_{n,k}$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{F}_{d,n}$  tels que  $a_1 + \dots + a_n = k$ . La notation  $g_{n,k}$  omet  $d$  qui est implicitement fixé.

Notons  $r = n(d-1)$ . On cherche une estimation asymptotique en  $n$  et  $d$  de

$$G_{d,n} = \sum_{0 \leq k \leq r} \min(g_{n,k}, g_{n,r-k}).$$

Une majoration grossière donne  $G_{d,n} = O(e^n d^n)$  et on cherche à raffiner cette estimation de  $G_{d,n}$ .

Ce problème posé par Bernard Mourrain est issu de celui du calcul du Bezoutien de  $n$  polynômes; c'est une matrice définie à partir des polynômes, on pourra se reporter aux articles [2] et [3] pour plus de précisions. La proposition 4.4.1 de [2] montre que la taille, c'est-à-dire la dimension, de cette matrice est majorée par le nombre de solutions du système précédent où  $d$  est le degré maximal des  $n$  polynômes. Dans la proposition 4.4.2 de [2], il est montré que cette taille est bornée par  $O(e^n d^n)$ .

Le rang du Bezoutien est lui majoré par  $G_{d,n}$  (proposition 4.4.3 de [2]), c'est cette borne supérieure que nous améliorons ici. La borne inférieure sur le rang est donnée par le nombre de Bezout, c'est-à-dire  $d^n$ .

La section 2 est une étude combinatoire des nombres  $g_{n,k}$ . Une interprétation géométrique simple du système d'inéquations de départ permet de déduire une formule pour la somme sur  $k$  des  $g_{n,k}$  (cf Théorème 2.1). Celle-ci fait intervenir des chemins de Dyck généralisés, décrits dans [4]. Nous proposons également une formule de récurrence vérifiée par les  $g_{n,k}$  et une fonction génératrice, mais pas de formule close, sauf pour le cas  $d = 2$  qui se ramène à un multiple du binomial  $\binom{n+k}{k}$ .

Dans la section 3, nous donnons un premier encadrement pour  $G_{d,n}$  (cf Théorème 3.1), puis, grâce à une généralisation du problème de départ, nous obtenons une première estimation de la limite de  $G_{d,n}/d^n$  lorsque  $d$  tend vers l'infini avec  $n$  fixé.

La section 4 est l'étude asymptotique de cet encadrement dans les deux cas  $d$  fixé et  $n$  fixé. Nous mettons en évidence que  $G_{d,n}$  se comporte alors en  $(\frac{e}{2}d)^n$ .

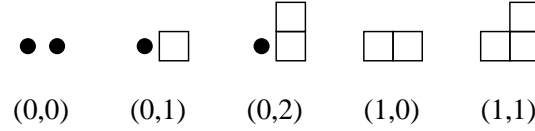


FIG. 1 – Diagrammes de Ferrers 2-bornés associés aux éléments de  $\mathcal{F}_{2,2}$ .

## 2 Résultats combinatoires

### 2.1 Lien avec les chemins de Dyck généralisés

Notons  $F_{d,n}$  le cardinal de  $\mathcal{F}_{d,n}$ . Alors, on a

$$F_{d,n} = \sum_{0 \leq k \leq r} g_{n,k},$$

et  $F_{d,n}$  est une majoration de  $G_{d,n}$ .

La valeur de  $F_{d,n}$  peut être calculée de manière exacte grâce à une bijection avec des langages de Dyck généralisés introduits dans [4].

**Définition 2.1** ([4]) *Soit l'alphabet  $X = \{a, b\}$ . Pour tout entier strictement positif  $p$ , on introduit l'ensemble  $D_p^*$ , le langage des mots  $w$  de  $X^*$  qui satisfont :*

- $w$  contient  $p$  fois plus de  $b$  que de  $a$ ,
- tous les préfixes de  $w$  contiennent au plus  $p$  fois plus de  $b$  que de  $a$ .

On peut représenter les mots de  $D_p^*$  comme des chemins dans le plan discret. Associons dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  un pas *Est* à la lettre  $a$  et un pas *Nord* à la lettre  $b$ . Le chemin associé à un mot de  $D_p^*$  de longueur  $m(p+1)$  va de l'origine  $(0,0)$  au point  $(m, mp)$  sans jamais aller au-dessus de la droite de pente  $p$  passant par l'origine.

**Théorème 2.1** *On peut construire une bijection entre les éléments de  $\mathcal{F}_{d,n}$  et les mots de  $D_{d-1}^*$  de longueur  $(n+1)d$ . On déduit de l'énumération de ces derniers [4, Cor. 2.7] la formule suivante :*

$$F_{d,n} = \frac{1}{n+1} \binom{(n+1)d}{n}.$$

**PREUVE.** Pour construire la bijection, nous utilisons une interprétation graphique des éléments de  $\mathcal{F}_{d,n}$ . Chaque  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathcal{F}_{d,n}$  est représenté par une juxtaposition de  $n$  colonnes de hauteur  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n$  respectivement. Les  $a_i$  pouvant être nuls, une colonne de hauteur 0 sera représentée par un point ( $\bullet$ ). Ainsi, chaque élément de  $\mathcal{F}_{d,n}$  correspond à un *diagramme de Ferrers  $d$ -borné* de largeur  $n$  et de hauteur inférieure ou égale à  $r$  (hauteur de la dernière colonne);  *$d$ -borné* signifie que la colonne  $j$ , pour  $j$  entre 1 et  $n$ , est de hauteur inférieure ou égale à  $j(d-1)$ . La figure 1 donne la représentation graphique des éléments de  $\mathcal{F}_{2,2}$ . À partir du diagramme de Ferrers associé à  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{F}_{d,n}$ , on

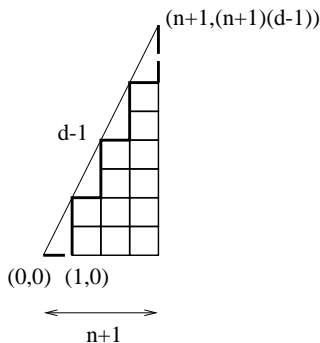


FIG. 2 – Construction de la bijection entre  $\mathcal{F}_{d,n}$  et  $D_{d-1}^*$ .

obtient le chemin de  $D_{d-1}^*$  de longueur  $(n+1)d$  correspondant en réalisant la construction suivante, illustrée par la figure 2 :

- on trace la droite  $\Delta_{d,n}$  de pente  $d-1$ , joignant l'origine  $(0,0)$  au point  $(n+1, (n+1)(d-1))$ ,
- on place le coin gauche inférieur du diagramme en  $(1,0)$ ,
- le chemin correspondant est obtenu en suivant le contour supérieur du diagramme, complété par des pas Est au début et des pas Nord à la fin de manière à atteindre la droite  $\Delta_{d,n}$ .

□

La figure 3 illustre la construction de cette bijection entre les éléments de  $\mathcal{F}_{3,2}$  et les chemins de  $D_2^*$  de longueur 9.

**Corollaire 2.1** On en déduit deux interprétations des  $g_{n,k}$  :

- $g_{n,k}$  est le nombre de diagrammes de Ferrers  $d$ -bornés de largeur  $n$  et de hauteur  $k$ ,
- $g_{n,k}$  est le nombre de chemins de  $D_{d-1}^*$  de longueur  $(n+1)d$  se terminant par  $ab^{(n+1)(d-1)-k}$ .

**Remarques.** Modifions dans le problème initial les conditions respectées par les  $a_i$ . Ainsi :

1. Si tous les  $a_i$  appartiennent à  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors le nombre de configurations possibles devient  $F_{d-1,n}$  au lieu de  $F_{d,n}$  avec par convention  $F_{1,n} = 1$ .
2. Plus généralement, si tous les  $a_i$  sont supérieurs ou égaux à  $h$ , avec  $h < d$ , on trouve  $F_{d-h,n}$  configurations possibles.
3. Si on interdit à  $a_1$  d'être nul, alors les diagrammes de Ferrers obtenus ne peuvent pas avoir de colonne de hauteur 0, et les chemins associés sont des chemins de Dyck généralisés *primitifs*. La droite utilisée pour la construction de ces chemins diffère légèrement de celle du Théorème 2.1; elle est translatée de 1 vers le Nord. Elle est toujours de pente  $d-1$  mais joint le point  $(0,1)$  au point  $(n+1, 1+(n+1)(d-1))$ .



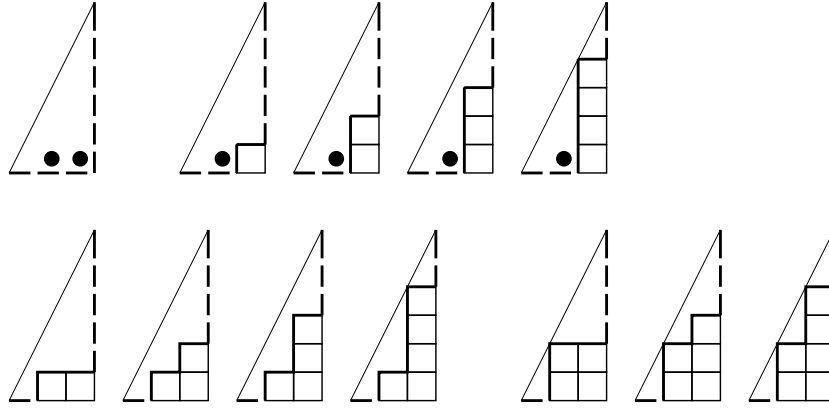


FIG. 3 – Bijection entre éléments de  $\mathcal{F}_{3,2}$  et chemins de  $D_2^*$  de longueur 9.

Les chemins ainsi construits ne croisent ni ne touchent cette droite qu'à l'origine et à l'extrémité. Ils sont également énumérés dans [4, Cor. 2.8]:

$$\frac{1}{(n+1)d-1} \binom{(n+1)d-1}{n+1}.$$

## 2.2 Étude des $g_{n,k}$

Voici les premières valeurs des  $g_{n,k}$  pour  $d = 2$  et  $d = 3$ .

Pour  $d = 2$ .

k	0	1	2	3	4
n=1	1	1			
n=2	1	2	2		
n=3	1	3	5	5	
n=4	1	4	9	14	14

Pour  $d = 3$ .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n=1	1	1	1						
n=2	1	2	3	3	3				
n=3	1	3	6	9	12	12	12		
n=4	1	4	10	19	31	43	55	55	55

Dans les tableaux ci-dessus, les valeurs non précisées sont égales à 0.

Les  $g_{n,k}$  satisfont une relation de récurrence simple. On la déduit grâce à la proposition suivante :

**Proposition 2.1** Pour  $n \geq 2$ ,

$$g_{n,k} = \sum_{i=0}^k g_{n-1,i}.$$

PREUVE. Pour construire tous les diagrammes de Ferrers  $d$ -bornés de largeur  $n$  et de hauteur  $k$  (comptés par  $g_{n,k}$ ), il suffit de rajouter une colonne de hauteur  $k$  à tous les diagrammes de largeur  $n-1$  et de hauteur inférieure ou égale à  $k$  (comptés par  $g_{n-1,i}$  pour  $i$  allant de 0 à  $k$ ).

□

**Corollaire 2.2** *On obtient alors les relations de récurrence suivantes, avec  $r = n(d-1)$ .*

Pour  $n = 1$ ,

$$g_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq r, \\ 0 & \text{si } k > r. \end{cases}$$

Pour  $n \geq 2$ ,

$$g_{n,k} = g_{n-1,k} + \begin{cases} g_{n,k-1} & \text{si } 1 \leq k \leq r, \\ 0 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k > r. \end{cases}$$

Cette relation est très proche d'une relation pour le binomial. En effet, si on pose  $g_{n,k} = h_{n+k,k}$ , on obtient une relation du binomial  $\binom{n+k}{k}$  :

$$h_{n+k,k} = h_{n+k-1,k} + h_{n+k-1,k-1}.$$

**Formule close.** Pour  $d \geq 3$ , aucune formule close n'a pu être déduite. Par contre pour  $d = 2$ , on déduit de la relation précédente une formule close pour  $g_{n,k}$ , pour  $n \geq 1$  et  $0 \leq k \leq n$  :

$$g_{n,k} = \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+k}{k}.$$

Comme le montre le tableau page 6 des premières valeurs pour  $d = 2$ , les  $g_{n,k}$  forment un triangle que l'on peut nommer triangle de Catalan. En effet, les éléments de la diagonale droite du triangle, c'est-à-dire les  $g_{n,n}$ , sont les nombres de Catalan  $C_n$  :

$$g_{n,n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n.$$

La démonstration de cette égalité est donnée par Barucci et Verri dans [1]. On trouve également d'autres définitions de triangles de Catalan dans la littérature, comme celui de Shapiro [5].

**Fonction génératrice.** Notons  $G_d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} g_{n,k} x^n y^k$  la fonction génératrice des  $g_{n,k}$ . Nous avons

$$G_d(x, y) = \frac{1}{1-x-y} (x + y + xy^d(d-1) - yD_{d-1}^*(xy^{d-1})),$$

où  $D_{d-1}^*(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$  avec  $c_{n+1} = F_{d,n}$  et  $c_0 = 1$ , et  $D_{d-1}^*(t)$  vérifie  $D_{d-1}^*(t) = 1 + t(D_{d-1}^*(t))^d$ .

### 3 Estimations générales

#### 3.1 Premières estimations

Nous allons maintenant chercher des encadrements aussi précis que possibles de  $G_{d,n}$ .

**Théorème 3.1**

$$\frac{1}{n+1} \binom{(n+1) \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}{n} \leq G_{d,n} \leq 2 \binom{n + \lceil \frac{r}{2} \rceil}{n}.$$

PREUVE. Il est facile de voir que  $G_{d,n}$  est minoré par

$$\sum_{0 \leq k \leq n \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} g_{n,k}.$$

Cette dernière quantité est elle-même supérieure au nombre de solutions du système initial dans lequel  $d-1$  est remplacé par  $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ , c'est-à-dire  $F_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor, n}$ . Il suffit alors d'utiliser le Théorème 2.1 pour trouver la minoration annoncée.

Nous avons aussi

$$G_{d,n} \leq 2 \sum_{0 \leq k \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil} g_{n,k}.$$

Cette dernière somme s'interprète comme le nombre de diagrammes de Ferrers  $d$ -bornés de largeur  $n$  et de hauteur au plus  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$ . Comme le nombre de diagrammes de Ferrers de largeur  $n$  et de hauteur au plus  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$  vaut  $\binom{n + \lceil \frac{r}{2} \rceil}{n}$ , la majoration annoncée est bien valide.  $\square$

#### 3.2 Problème généralisé

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ , soit  $\mathcal{F}_n(x)$  le sous-ensemble des  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  défini par

$$\begin{cases} a_1 & \leq & x_1 \\ a_1 + a_2 & \leq & x_1 + x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 + \dots + a_n & \leq & x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

et notons  $F_n(x)$  le cardinal de  $\mathcal{F}_n(x)$ . Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.2** Notons  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \geq i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$ . Alors

$$F_n(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^n \binom{x_i + 1}{\alpha_i}.$$

PREUVE. Procédons par récurrence, la formule annoncée étant facilement vérifiée pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle l'est au rang  $n - 1$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \sum_{0 \leq a_1 \leq x_1} F_{n-1}(x_1 + x_2 - a_1, x_3, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{0 \leq a \leq x_1} F_{n-1}(x_2 + a, x_3, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{0 \leq a \leq x_1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}} \binom{x_2 + a + 1}{\alpha_1} \prod_{i=2}^{n-1} \binom{x_{i+1} + 1}{\alpha_i} \\
 &= \sum_{0 \leq a \leq x_1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha_1} \binom{a}{\beta} \binom{x_2 + 1}{\alpha_1 - \beta} \prod_{i=2}^{n-1} \binom{x_{i+1} + 1}{\alpha_i} \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha_1} \binom{x_1 + 1}{\beta + 1} \binom{x_2 + 1}{\alpha_1 - \beta} \prod_{i=2}^{n-1} \binom{x_{i+1} + 1}{\alpha_i} \\
 &= \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^n \binom{x_i + 1}{\alpha'_i},
 \end{aligned}$$

en posant  $\alpha' = (\beta + 1, \alpha_1 - \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ .

□

### 3.3 Lien avec le problème initial

Supposons d'abord  $n$  pair. Nous avons

$$\begin{aligned}
 G_{d,n} &= g_{n, n(d-1)/2} + 2 \sum_{0 \leq k \leq n(d-1)/2-1} g_{n,k} \\
 &= F_n(\underbrace{d-1, \dots, d-1, 0, \dots, 0}_{n/2}) + F_n(\underbrace{d-1, \dots, d-1, d-2, 0, \dots, 0}_{n/2-1}).
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant  $n$  et  $d$  impairs. Nous avons

$$\begin{aligned}
 G_{d,n} &= g_{n, n(d-1)/2} + 2 \sum_{0 \leq k \leq n(d-1)/2-1} g_{n,k} \\
 &= F_n(\underbrace{d-1, \dots, d-1, (d-1)/2, 0, \dots, 0}_{(n-1)/2}) + F_n(\underbrace{d-1, \dots, d-1, (d-3)/2, 0, \dots, 0}_{(n-1)/2}).
 \end{aligned}$$

Supposons enfin  $n$  impair et  $d$  pair. Nous avons

$$G_{d,n} = 2 \sum_{0 \leq k \leq (n(d-1)-1)/2} g_{n,k} = 2F_n(\underbrace{d-1, \dots, d-1, (d-2)/2, 0, \dots, 0}_{(n-1)/2}).$$

Nous pouvons maintenant combiner les trois expressions obtenues avec le Théorème 3.2. Ainsi, lorsque  $n$  est pair, nous avons

$$G_{d,n} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n/2} \binom{d}{\alpha_i} \times \prod_{i=n/2+1}^n \binom{1}{\alpha_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n/2-1} \binom{d}{\alpha_i} \times \binom{d-1}{\alpha_{n/2}} \times \prod_{i=n/2+1}^n \binom{1}{\alpha_i},$$

d'où nous déduisons

$$\frac{G_{d,n}}{d^n} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\binom{d}{\alpha_i}}{d^{\alpha_i}} \times \prod_{i=n/2+1}^n \frac{\binom{1}{\alpha_i}}{d^{\alpha_i}} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n/2-1} \frac{\binom{d}{\alpha_i}}{d^{\alpha_i}} \times \frac{\binom{d-1}{\alpha_{n/2}}}{d^{\alpha_{n/2}}} \times \prod_{i=n/2+1}^n \frac{\binom{1}{\alpha_i}}{d^{\alpha_i}}.$$

Cette dernière expression permet de voir immédiatement que, lorsque  $d$  tend vers l'infini et  $n$  reste fixé, la quantité  $G_{d,n}$  tend vers une limite, dont nous pouvons donner une expression explicite. Ce comportement apparaît aussi lorsque  $n$  est impair et nous pouvons présenter ces résultats dans le théorème suivant.

**Théorème 3.3** Désignons par  $\mathcal{B}_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{A}_n$  formé des éléments  $\alpha$  tels que  $\alpha_{\lceil n/2 \rceil + 1} = \dots = \alpha_n = 0$ . Lorsque  $n$  est fixé, la quantité  $G_{d,n}$  tend vers une limite  $G_n$  donnée par

$$G_n = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_n} 2^{1 - (\lceil n/2 \rceil - \lceil (n-1)/2 \rceil) \alpha_{\lceil n/2 \rceil}} \prod_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} \frac{1}{\alpha_i!}.$$

## 4 Estimations asymptotiques

Nous allons maintenant étudier ce qui se passe lorsque l'un des deux entiers  $d$  et  $n$  au moins devient grand. Pour cela nous utiliserons la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

et l'équivalence (valide pour  $x$  tendant vers l'infini) :

$$\binom{x}{n} \sim \frac{x^n}{n!}.$$

### 4.1 Le cas $d$ fixé

Dans cette sous-section, nous considérons  $d$  comme un paramètre et nous étudions ce qui se passe lorsque  $n$  devient grand.

Définissons  $c_d$  et  $C_d$  comme suit :

$$c_d = \frac{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}} \quad \text{et} \quad C_d = \frac{\left(\frac{d+1}{2}\right)^{\frac{d+1}{2}}}{\left(\frac{d-1}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}}}.$$

**Proposition 4.1** *Nous avons l'encadrement*

$$\sqrt{\frac{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}{2\pi n^3 \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}} c_d^{n+1} (1 + o(1)) \leq G_{d,n} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{d+1}{d-1} C_d^n (1 + o(1)).$$

PREUVE. D'après le Théorème 3.1, nous avons la majoration

$$G_{d,n} \leq 2 \frac{(n + \lceil \frac{r}{2} \rceil)!}{n! (\lceil \frac{r}{2} \rceil)!} \sim 2 \frac{(n \frac{d+1}{2})!}{n! (n \frac{d-1}{2})!} \times \frac{(n \frac{d+1}{2})^\eta}{(n \frac{d-1}{2})^\eta},$$

où  $\lceil \frac{r}{2} \rceil = \frac{r}{2} + \eta$ , avec  $\eta \in \{0, 1/2\}$ . En utilisant la formule de Stirling, nous trouvons comme majorant de  $G_{d,n}$  la quantité

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left( \frac{d+1}{d-1} \right)^{1/2+\eta} C_d^n (1 + o(1))$$

et la majoration du Théorème s'ensuit.

D'après le Théorème 3.1, nous avons la minoration

$$G_{d,n} \geq \frac{((n+1) \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor)!}{((n+1) \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1) (n+1)! ((n+1) \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor)!}.$$

Un calcul similaire à celui effectué précédemment permet alors d'obtenir le minorant désiré.  $\square$

### Remarques

1. Si  $d$  est impair, nous trouvons  $c_d = C_d$ . Nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{d,n}^{1/n} = C_d.$$

De plus nous avons

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{C_d}{d} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{d}\right)^{\frac{d+1}{2}} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{-\frac{d-1}{2}}}{2} = \frac{e}{2},$$

et ainsi

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G_{d,n}}{d^n} \right)^{1/n} = \frac{e}{2}.$$

2. Si  $d$  est pair, nous obtenons seulement

$$c_d \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} G_{d,n}^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} G_{d,n}^{1/n} \leq C_d.$$

Toutefois nous avons encore

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{c_d}{d} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{C_d}{d} = \frac{e}{2}$$

et nous trouvons

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G_{d,n}}{d^n} \right)^{1/n} = \lim_{d \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G_{d,n}}{d^n} \right)^{1/n} = \frac{e}{2}.$$

## 4.2 Le cas $n$ fixé

D'après le Théorème 3.3, nous savons que, dans ce cas,  $G_{d,n}/d^n$  admet une limite  $G_n$  lorsque  $d$  tend vers l'infini avec  $n$  fixé.

**Proposition 4.2** *Nous avons*

$$\frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{n+1}{2} \right)^n \leq G_n \leq \frac{2}{n!} \left( \frac{n}{2} \right)^n.$$

PREUVE. D'après le Théorème 3.1, nous avons

$$G_{d,n} \geq \frac{1}{(n+1)!} \left( (n+1) \frac{d}{2} \right)^n (1 + o(1))$$

lorsque  $d$  tend vers l'infini et que  $n$  est fixé, et la minoration de  $G_n$  s'ensuit.

D'après le Théorème 3.3, nous avons

$$\begin{aligned} G_n &= \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_n} 2^{1 - ([n/2] - [(n-1)/2])\alpha_{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} \frac{1}{\alpha_i!} \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_{[n/2]} \geq 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{[n/2]} = n}} 2^{1 - ([n/2] - [(n-1)/2])\alpha_{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} \frac{1}{\alpha_i!} \\ &= \frac{2}{n!} ([n/2] - ([n/2] - [(n-1)/2])/2)^n \\ &= \frac{2}{n!} \left( \frac{n}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de la Proposition. □

### Remarques

1. La majoration de  $G_n$  donnée dans la Proposition 4.2 peut aussi se déduire du Théorème 3.1.

2. Nous pouvons déduire de ces encadrements des informations sur le comportement asymptotique de  $G_n$  lorsque  $n$  devient grand :

$$\frac{e}{\sqrt{2\pi}} n^{-3/2} \left(\frac{e}{2}\right)^n (1 + o(1)) \leq G_n \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{-1/2} \left(\frac{e}{2}\right)^n (1 + o(1)).$$

Nous obtenons ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \left(\frac{G_{d,n}}{d^n}\right)^{1/n} = \frac{e}{2}.$$

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Jean-Luc Rémy pour sa lecture attentive et ses remarques avisées, et Emeric Deutsch pour ses références sur les triangles de Catalan.

Le premier auteur tient également à remercier chaleureusement le LORIA pour son hospitalité lors de son stage post-doctoral. Le travail présenté dans cet article a été partiellement réalisé lors de ce séjour.

## Références

- [1] E. Barucci and C. Verri. Some more properties of Catalan numbers. *Discrete Mathematics*, 102:229–237, 1992.
- [2] Jean-Paul Cardinal and Bernard Mourrain. Algebraic approach of residues and applications. *Lectures in Applied Mathematics*, 32:189–210, 1996.
- [3] Ioannis Z. Emiris and Bernard Mourrain. Matrices in elimination theory, Octobre 1997. 33 pages.
- [4] H. Jacquet and G. Melançon. Langages de Dyck généralisés et factorisations du monoïde libre. *Ann. Sci. Math. Québec*, 2:103–122, 1997.
- [5] L.W. Shapiro. A Catalan triangle. *Discrete Mathematics*, 14:83–90, 1976.





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399