Approche probabiliste de l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence en milieu périodique

Antoine Lejay

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Approche probabiliste de l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence en milieu périodique

Antoine Lejay

N° 3569

Décembre 1998

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Approche probabiliste de l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence en milieu périodique

Antoine Lejay*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SYSDYS

Rapport de recherche n° 3569 — Décembre 1998 — 40 pages

Résumé : La propriété d'homogénéisation pour des opérateurs sous forme divergence strictement elliptiques, à coefficients bornés et 1-périodiques sera démontrée ici en prouvant que leurs processus associés convergent en loi. La théorie ergodique permet de calculer le processus limite et de trouver ainsi l'opérateur homogénéisé.

Mots-clés : homogénéisation, processus de diffusion, opérateur sous forme divergence

* INRIA/LATP,
38 rue Joliot–Curie,
13451 Marseille Cedex 13, France,
Antoine.Lejay@sophia.inria.fr

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : 04 92 38 77 77 - International : +33 4 92 38 77 77 — Fax : 04 92 38 77 65 - International : +33 4 92 38 77 65

A Probabilistic Approach of the Homogenization of Divergence-form Operators in Periodic Media

Abstract: The homogenization property for stricly elliptic divergence-form operators with 1-periodic and bounded coefficient will be given here by probabilistic methods. The proof is based on the computation, using the ergodic theory, of the limit in distribution of the family of stochastic processes associated to these operators.

Key-words: homogenization, diffusion process, divergence form operator

Table des matières

1 Introduction et notations

Soit $a = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans l'espace des matrices symétriques (*i.e.*, $a_{i,j} = a_{j,i}$) réelles sur $\mathbb{R}^n$. Nous supposons de plus qu'il existe deux réels λ et Λ tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda|\xi|^2 \leqslant \langle a\xi, \xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2.$$

Considérons aussi des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ mesurables $b = (b_i)_{i=1}^n$ et $c = (c_i)_{i=1}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, ainsi que des fonctions mesurables d et e vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\, |b_1(x)|.\dots, |b_n(x)|, |c_1(x)|, \dots, |c_n(x)|, |d(x)|, |e(x)|\,\} \leqslant \Lambda.$$

Nous supposerons ici que les fonctions a, b, c, d et e sont périodiques de période 1.

La convention d'Einstein sera respectée, c'est-à-dire qu'il faut implicitement sommer de 1 à n tous les termes dans lesquels un indice apparaît exactement deux fois.

Nous allons étudier l'homogénéisation de la famille d'opérateurs

$$A^\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(\cdot/\varepsilon)_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\varepsilon}b_i(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_i(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}d(\cdot/\varepsilon) + e(\cdot/\varepsilon) \tag{1}$$

lorsque ε tend vers 0. Cela consiste à montrer que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$, les solutions u^ε des équations paraboliques

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t,x) = A^\varepsilon u^\varepsilon(t,x), \\ u^\varepsilon(0,x) = f(x) \end{cases}$$

convergent pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout point x de $\mathbb{R}^n$ vers la solution $\overline{u}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u}(t,x) = \overline{A}\overline{u}(t,x), \\ \overline{u}(0,x) = f(x). \end{cases}$$

L'approche probabiliste consiste à montrer la convergence en loi des processus associés à A^ε vers une processus limite qui sera identifié, afin de trouver les coefficients de $\overline{A}$. La méthode utilisée est une adaptation au cas des opérateurs sous forme divergence des idées exposées dans le chapitre 3 de [BLP78, p. 345], ainsi que dans [OLL94].

Nous allons voir que la régularité des coefficients n'intervient pas, et que seules les conditions de majoration et d'ellipticité sont nécessaires.

Pour ce faire, soit $A = A^1$ l'opérateur

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + c_i\frac{\partial}{\partial x_i} + d + e \tag{2}$$

Nous allons voir que, grâce à la formule de Feynman-Kac, l'étude de l'homogénéisation de A^ε se déduit de celle de

$$L^\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(\cdot/\varepsilon)_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\varepsilon}b_i(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_i(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Posons L l'opérateur

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3}$$

La limite des processus associés à L^ε sera calculée à l'aide de la théorie ergodique, appliquée à la projection de ces processus sur le tore unité.

L'approche probabiliste est ainsi différente de l'approche analytique, qui consiste à utiliser des développements asymptotiques. Sur ce sujet, très largement traité, le lecteur peut se référer à [BLP78, JKO94] par exemple.

2 Processus associé à un opérateur sous forme divergence

Afin de simplifier, posons

$$ {}^0A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + d. $$

Ce qui est vrai pour ${}^0A$ sera aussi vrai pour A.

Le processus associé à ${}^0A$ va se construire en étendant le semi-groupe du processus associé à $\frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right)$ par les formules de Girsanov et de Feynman-Kac. Soit $\mathcal{E}^{b=0,d=0}$ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$ \mathcal{E}^{b=0,d=0}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x. $$

2.1 Forme de Dirichlet et calcul stochastique

La forme bilinéaire symétrique $(\mathcal{E}, \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n))$ définit une forme de Dirichlet régulière et fortement locale [LEJ98], et, d'après les résultats exposés dans [FOT94], il existe un unique processus de Hunt X continu et conservatif de loi $(\mathbb{P}_x^{b=0,d=0})_{x\in\mathbb{R}^n}$ associé à cette forme de Dirichlet. Le générateur infinitésimal de ce processus est $\frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right)$, et sa filtration sera notée $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

Nous savons d'autre part que le semi-groupe de ce processus possède une fonction de densité de transition p [ARO68].

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, d'après Théorème 9.4 de [STA65, p. 249], pour $\alpha > 0$, il existe une fonction $U_\alpha f$ presque sûrement finie solution de

$$ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}\frac{\partial U_\alpha f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\mathbb{R}^n} U_\alpha f\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}). $$

Cette fonction $U_\alpha f$ est presque partout égale à $\mathbb{E}_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(\mathsf{X}_t)\,\mathrm{d}t\right]$. Cela garantit que $t\mapsto\int_0^t f(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$ est une fonction continue $\mathbb{P}_x$-p.s. pour quasi-tout point de départ x, c'est-à-dire pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n \setminus N$, où N est un ensemble polaire pour la diffusion X. Cet ensemble est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi, en utilisant la propriété de Markov, pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left[\int_s^t f(\mathsf{X}_u)\,\mathrm{d}u \text{ est continue}\right] &= \mathbb{P}_x\left[\int_s^t f(\mathsf{X}_u)\,\mathrm{d}u \text{ est continue}\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p(s,x,y)\mathbb{P}_y\left[\int_0^{t-s} f(\mathsf{X}_u)\,\mathrm{d}u \text{ est continue}\right] = 1. \quad (4)\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $t \in [s,+\infty[\mapsto \int_s^t f(\mathsf{X}_u)\,\mathrm{d}u$ est continue $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Cela est aussi vrai lorsque f est seulement localement intégrable. Si f est localement bornée, $t \mapsto \int_0^t f(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$ est continue $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Afin de considérer $f(\mathsf{X}_t)$ lorsque f est localement dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$, il convient en fait de considérer une version *quasi-continue* de f [FOT94, p. 67]. Par le Théorème 4.2.2 de [FOT94, p. 143], $t \in]0,+\infty[\mapsto f(\mathsf{X}_t)$ est continue $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Une telle version de f existe toujours, et nous considérerons qu'elle est implicitement utilisée lorsque cela sera nécessaire.

L'une des propriétés du processus X est que pour une fonction f localement dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et localement bornée, alors

$$f(\mathsf{X}_t) = f(\mathsf{X}_0) + \mathsf{M}_t^{[f]} + \mathsf{N}_t^{[f]}, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \tag{5}$$

pour quasi-tout point $x \in \mathbb{R}^n$, avec

$\mathsf{M}_t^{[f]}$ une martingale locale de crochet $\langle \mathsf{M} \rangle_t = \int_0^t a_{i,j} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$,

et $\mathsf{N}_t^{[f]}$ un processus localement à variation quadratique nulle.

Ces résultats sont exposés dans le Chapitre 5 de [FOT94], et plus exactement dans les Théorèmes 5.5.1 et 5.2.2 [FOT94], ainsi que dans l'exemple 5.2.1 [FOT94, p. 210].

Ce résultat appliqué à la fonction identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donne que

$$\mathsf{X}_t = \mathsf{X}_0 + \int_0^t \sigma(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}\mathsf{B}_s + \mathsf{N}_t^{[Id]}, \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

où σ vérifie ${}^t\sigma{\cdot}\sigma = a$ et B est un mouvement brownien standard en dimension n.

2.2 Extension aux termes d'ordre un par le Théorème de Girsanov

Le processus continu et conservatif de loi $(\mathbb{P}_x^{d=0})_{x\in\mathbb{R}^n}$ associé à L est donné par le Théorème de Girsanov [CZ95, Théorème 3.5, p. 340], avec le changement de mesure de densité

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_x^{d=0}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_x^{b=0,d=0}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\mathsf{M}_t - \frac{1}{2}\langle\mathsf{M}\rangle_t\right)$$

pour une martingale locale M vérifiant

$$\mathsf{M}_t = \int_0^t \sigma^{-1}b(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}\mathsf{B}_s,\quad \mathbb{P}_x^{b=0,d=0}\text{-p.s.},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

où B est le mouvement brownien de (6).

L'une des propriétés importante du processus est que son semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ possède une densité de transition p. Pour tout $T>0$, il existe une constante M ne dépendant que de T, λ, Λ et la dimension n telle que

$$\frac{1}{Mt^{n/2}}\exp\left(\frac{-M|x-y|^2}{t}\right) \leqslant p(t,x,y) \leqslant \frac{M}{t^{n/2}}\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{Mt}\right) \tag{7}$$

pour tout x,y dans $\mathbb{R}^n$, et pour tout temps $t\in]0,M]$. Cette inégalité s'appelle l'*estimation d'Aronson.* [ARO68, STR88].

La proposition suivante sera utile par la suite, car elle donne une formule d'Itô pour les processus associés aux opérateurs sous forme divergence.

Proposition 1. *Soit f localement dans le domaine $\mathrm{D}(L)$ de L (i.e., pour tout compact K, il existe une fonction g dans $\mathrm{D}(L)$ telle que $f=g$ sur K) et localement essentiellement bornée. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, pour tout $t\geqslant s>0$, le processus $f(\mathsf{X}_t)-f(\mathsf{X}_s)$ se décompose de façon unique sous la forme*

$$f(\mathsf{X}_t)-f(\mathsf{X}_s) = \mathsf{M}_t-\mathsf{M}_s+\int_s^t Lf(\mathsf{X}_v)\,\mathrm{d}v \quad \textit{sous } \mathbb{P}_x^{d=0} \tag{8}$$

avec M_t une martingale locale de crochet

$$\langle\mathsf{M}\rangle_t = \frac{1}{2}\int_0^t \left(a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Preuve. Soit f dans le domaine de $\frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right)$, qui est aussi le domaine de L. Notons par X^x le processus associé à cet opérateur et partant de x. Alors $\int_0^t \frac{1}{2}\partial_{x_i}(a_{i,j}\partial_{x_j} f)(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$ est continue, intégrable pour $\mathbb{E}_x^{b=0,d=0}$ et à variation quadratique nulle pour quasi-tout point de départ x [FOT94, p. 201]. D'autre part,

$$f(\mathsf{X}_t^x) - f(\mathsf{X}_s^x) - \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathsf{X}_v^x)\,\mathrm{d}v$$

est une martingale pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n$, car $u(t,x) = \mathbb{E}[\,f(\mathsf{X}_t^x)\,]$ est la solution de $\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right)u(t,x)$.

Si f est aussi bornée, il suffit d'identifier cette martingale avec (5) pour obtenir (9) pour quasi-tout point x. Une technique similaire à (4) donne le résultat pour tout point de départ x.

Ainsi,

$$f(\mathsf{X}_t^x) - f(\mathsf{X}_s^x) = \mathsf{M}_t^x + \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathsf{X}_v^x)\,\mathrm{d}v$$

Cette propriété est vraie pour presque tout x, mais grâce à la propriété de Markov fort et au fait que le semi-groupe de X^x possède une densité de transition, il est facile de démontrer que cette propriété est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

L'équation (8) se déduit du Théorème de Girsanov [KS91, Proposition 5.4, p. 194].

Le cas où f n'est seulement que localement bornée et dans le domaine de L se traite par localisation. ∎

2.3 Extension à l'aide de la formule de Feynman-Kac

Pour finir, d'après le Théorème 5.3 de [CZ95, p. 349], le semi-groupe du processus de loi $\mathbb{P}$ associé à ${}^0A$ est donné par la formule de Feynman-Kac :

$$\mathbb{E}_x\left[\,f(\mathsf{X}_t)\,\right] = \mathbb{E}_x^{d=0}\left[\exp\left(\int_0^t d(\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s\right) f(\mathsf{X}_t)\right] \tag{10}$$

pour tout fonction f continue et bornée.

3 Homogénéisation

Afin de pouvoir utiliser les résultats de théorie ergodique pour identifier les coefficients de l'opérateur homogénéisé, nous allons travailler avec la projection sur le tore $\Box = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ du processus de générateur $\frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Nous allons montrer que ce processus évoluant sur une variété compacte admet une unique mesure invariante, et que la vitesse de convergence dans le théorème ergodique est exponentielle.

3.1 Opérateur sous forme divergence sur le tore

La notation $\Box$ désigne le tore unité de dimension n. L'espace $\mathrm{L}^p(\Box)$ avec $p = 1, 2$ sera l'espace des fonctions 1-périodiques — ou encore des fonctions définies sur le tore $\Box$ — intégrable ($p = 1$) ou de carrés intégrables ($p = 2$) sur $\Box$:

$$\mathrm{L}^p(\Box) = \left\{ f \,\middle|\, f \text{ mesurable}, \ \int_\Box |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Introduisons aussi « l'espace de Sobolev » $\mathrm{H}^1(\Box)$ défini par

$$\mathrm{H}^1(\Box) = \left\{ f \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ 1-périodique}, \ f \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \\ \forall i = 1, \dots, n, \quad \displaystyle\int_\Box \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x < +\infty, \ \displaystyle\int_\Box f(x)^2 \,\mathrm{d}x < +\infty \end{array} \right\}.$$

Cet espace, qui est dense dans $\mathrm{L}^2(\Box)$, est muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{H}^1(\Box)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_\Box \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x + \int_\Box f(x)^2 \,\mathrm{d}x}.$$

Afin de simplifier les écritures, posons

$$\|\nabla f\|_{\mathrm{L}^2(\Box)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_\Box \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x}.$$

Soit $m(x)\mathrm{d}x$ une mesure de probabilités sur le tore $\square$ de densité m. Définissons l'espace

$$\mathrm{L}^2_m(\square) = \left\{ f \,\middle|\, f \text{ mesurable}, \ \int_\square f(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\|f\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} = \left(\int_\square f(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

Proposition 2. *L'espace* $\mathrm{H}^1(\square)$ *est un espace vectoriel réflexif. L'injection de* $\mathrm{H}^1(\square)$ *dans* $\mathrm{L}^2(\square)$ *est compacte.*

Si la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)}$ *est équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\square)}$*, alors il existe une constante* C_m *telle que pour toute fonction* f *dans* $\mathrm{H}^1(\square)$*,*

$$\left\| f - \int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x \right\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} \leqslant C_m \|\nabla f\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} . \tag{11}$$

*Cette inégalité s'appelle l'*inégalité de Poincaré.

Preuve. La compacité de l'injection de $\mathrm{H}^1(\square)$ dans $\mathrm{L}^2(\square)$ se démontre comme la compacité de l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pour un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, car $\square$ est compact [BRE92, Théorème IX.15, p. 169].

Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathrm{H}^1(\square)$ vérifiant $\int_\square u_n(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ainsi qu'une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que

$$\|u_n\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} > C_n \|\nabla u_n\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} \quad \text{et} \quad C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Alors, du fait de l'équivalence des normes, il existe une suite de constante $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $(1 + C'_n)\|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\square)} \geqslant C'_n \|u_n\|_{\mathrm{H}^1(\square)}$. Si $v_n = u_n / \|u_n\|_{\mathrm{H}^1(\square)}$, il existe une sous-suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $\mathrm{H}^1(\square)$ vers un élément v. Comme l'injection de $\mathrm{H}^1(\square)$ dans $\mathrm{L}^2(\square)$ est compacte, la convergence a aussi lieu fortement dans $\mathrm{L}^2(\square)$. De plus, $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\square)} = \lim_{k\to\infty} \|v_n\|_{\mathrm{L}^2(\square)} = 1$. Comme

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2(\square)} \leqslant \|v\|_{\mathrm{H}^1(\square)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|v_n\|_{\mathrm{H}^1(\square)} = 1,$$

on en déduit que $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\square)} = \|v\|_{\mathrm{H}^1(\square)} = 1$. Par conséquent, $\nabla v = 0$ p.p. et donc $v = 1$. Mais $\int_\square v(x)m(x)\,\mathrm{d}x = \int_\square v_n(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ce qui est contradictoire. ∎

Soit $q : \mathbb{R}_+^* \times \square \times \square \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$q(t,x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} p(t,x,y+k).$$

Grâce à l'estimation d'Aronson (7), q est bien définie, et si f appartient à $\mathrm{L}^1(\square)$, alors la famille d'opérateurs $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ donnée par

$$Q_t f(x) = \int_\square q(t,x,y)\,\mathrm{d}y$$

est un semi-groupe sur $\mathrm{L}^1(\square)$.

Concernant q, le Lemme suivant sera utile.

Lemme 1. *Il existe deux constantes δ et κ ne dépendant que de λ, Λ et la dimension n telles que*

$$0 < \delta \leqslant q(1,x,y) \leqslant \kappa, \quad \forall x, y \in \square. \tag{12}$$

Preuve. Cela découle de l'estimation d'Aronson (7). ∎

Grâce à l'inégalité de Jensen, pour tout $p \geqslant 1$,

$$|Q_t f(x)|^p \leqslant Q_t |f|^p(x)$$

et donc le semi-groupe $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ s'étend à $\mathrm{L}^p(\square)$ pour tout $p \geqslant 1$.

Soit maintenant l'opérateur

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{13}$$

de domaine $\mathrm{D}(\widetilde{L}) = \{\, f \in \mathrm{L}^2(\square) \mid \widetilde{L}f \in \mathrm{L}^2(\square)\,\}$. Si f est 1-périodique et localement de carré intégrable, $P_t f$ et LP_t sont aussi 1-périodiques. Nous identifierons donc $P_t f$ et $Q_t f$, ainsi que $LP_t f$ et $\widetilde{L}Q_t f$, ce qui permet de montrer que l'opérateur $\widetilde{L}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(Q_t)_{t \geqslant 0}$.

Constatons que si π est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\square$, alors, pour une fonction f dans $\mathrm{L}^1(\square)$,

$$Q_t f(x) = P_t f(x) = \mathbb{E}_x\left[\, f(\mathsf{X}_t)\,\right] = \mathbb{E}_{\pi(x)}\left[\, f(\pi(\mathsf{X}_t))\,\right]$$

donc $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe du processus $\pi(\mathsf{X})$. Ce processus est introduit pour utiliser ses propriétés d'ergodicité.

Notons

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\square} a_{i,j}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x - \int_{\square} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)\,\mathrm{d}x$$

la forme bilinéaire sur $\mathrm{H}^1(\square)\times\mathrm{H}^1(\square)$ associée à $\widetilde{L}$.

Proposition 3. *Il existe une constante* α_0 *telle que pour tout* $\alpha \geqslant \alpha_0$ *et pour tout* f *dans* $\mathrm{L}^2(\square)$, *il existe une unique solution* $u = \widetilde{G}_\alpha f$ *dans* $\mathrm{H}^1(\square)$ *à l'équation*

$$\forall v\in\mathrm{H}^1(\square),\quad \widetilde{\mathcal{E}}(\widetilde{G}_\alpha f, v) + \alpha\langle \widetilde{G}_\alpha f, v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = \langle f, v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}\,.$$

De plus, l'opérateur $\widetilde{G}_\alpha$ *ainsi défini est un opérateur compact de* $\mathrm{L}^2(\square)$ *dans* $\mathrm{L}^2(\square)$ *et s'étendant à* $\mathrm{H}^{-1}(\square)$, *le dual de* $\mathrm{H}^1(\square)$.

Preuve. Posons $\widetilde{\mathcal{E}}_\alpha(u,v) = \widetilde{\mathcal{E}}(u,v) + \alpha\,\langle u,v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}$. Il suffit de démontrer que cette forme bilinéaire est continue sur $\mathrm{H}^1(\square)$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et qu'elle est coercive pour une valeur de α assez grande. Le résultat est une conséquence du Théorème de Lax-Milgram [BRE92, Corollaire V.8, p. 84].

Remarquons que, pour $f\in\mathrm{L}^2(\square)$, $\widetilde{\mathcal{E}}_\alpha(\widetilde{G}_\alpha f, \widetilde{G}_\alpha f) = \langle \widetilde{G}_\alpha f, f\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}$, et donc $\|\widetilde{G}_\alpha f\|_{\mathrm{H}^1(\square)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^2(\square)}$ pour une constante C ne dépendant pas de f. La compacité de l'opérateur $\widetilde{G}_\alpha$ découle alors de la compacité de l'injection de $\mathrm{H}^1(\square)$ dans $\mathrm{L}^2(\square)$ (*cf.* Proposition 2). ∎

La relation entre $\widetilde{G}_\alpha$ et $(Q_t)_{t>0}$ est donnée par

$$\widetilde{G}_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}Q_t f(x)\,\mathrm{d}t,$$

lorsque α est plus grand que α_0.

Soit $\alpha\geqslant\alpha_0$. Le domaine $\mathrm{D}(\widetilde{L})$ est égal à $G_\alpha(\mathrm{L}^2(\square))$. Ce sous-ensemble de $\mathrm{H}^1(\square)$ ne dépend pas de la valeur de α. Par intégration par parties,

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) = -\langle \widetilde{L}u, v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}\quad \forall u\in\mathrm{D}(\widetilde{L}),\ \forall v\in\mathrm{H}^1(\square).$$

La Proposition 3 implique que $\alpha - \widetilde{L}$ est inversible d'inverse $\widetilde{G}_\alpha$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$. Nous verrons plus bas que cet inverse est défini pour tout $\alpha > 0$ et que $\widetilde{L}$ est un opérateur fermé à domaine dense.

Soit $\widetilde{L}^*$ l'adjoint de $\widetilde{L}$ défini par

$$\widetilde{L}^* = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i \cdot).$$

Corollaire 1. *Il existe un ensemble dénombrable* $\mathrm{S}(\widetilde{L}) \subset]-\infty;\alpha_0[$ *de valeurs de* α *pour lesquelles les équations*

$$(\alpha - \widetilde{L})u = 0 \quad et \quad (\alpha - \widetilde{L}^*)u = 0$$

possèdent des solutions dans $\mathrm{H}^1(\square)$ *non nulles. Chacun des espaces vectoriels formé par les solutions de ces équations sont de même dimension finie.*

Si α *n'appartient pas à l'ensemble* $\mathrm{S}(\widetilde{L})$*, alors, pour tout* f *dans* $\mathrm{H}^{-1}(\square)$*, il existe une unique solution dans* $\mathrm{H}^1(\square)$ *à l'équation*

$$(\alpha - \widetilde{L})u = f.$$

Preuve. Ceci découle de l'alternative de Fredholm. En effet, $(\alpha - \widetilde{L})u = 0$ équivaut à $(\mathrm{Id} - \beta G_{\alpha+\beta})u = 0$ pour β assez grand. Et $G_{\alpha+\beta}$ est un opérateur compact. ∎

Appliquons maintenant ce résultat à l'étude de l'équation

$$\widetilde{L}u = 0.$$

Constatons tout d'abord que 1 est solution de cette équation. Soit maintenant une solution 1-périodique u dans $\mathrm{H}^1(]0,1[^n)$ de $Lu = 0$. Supposons que u est non constante. Alors, par application du principe fort du maximum [STA65, Corollaire 8.2, p. 238], u n'atteint ni son maximum, ni son minimum, en un point de $]0,1[^n$. Ce qui veut dire qu'elle atteint son maximum et son minimum en des points de $\{\, x, y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1,\ y_i = 0 \text{ ou } y_i = 1 \,\}$. Mais, par périodicité, u est aussi solution de $Lu = 0$ sur $\xi +]0,1[^n$ pour tout ξ dans $\mathbb{R}^n$. En appliquant à nouveau le principe fort du maximum, nous aboutissons à une contradiction. Ainsi u est constante. Nous venons de démontrer que l'espace des solutions de $\widetilde{L}u = 0$ est de dimension 1, et qu'il est formé des fonctions constantes.

Nous en déduisons qu'il existe une unique solution m à l'équation

$$\begin{cases} m \in \mathrm{H}^1(\Box), \\ \widetilde{L}^* m = 0, \\ \int_\Box m(x)\,\mathrm{d}x = 1. \end{cases}$$

D'après le Théorème 7.1 de [STA65, p. 232], cette solution m est continue.

Proposition 4. *La fonction m vérifie*

$$\min_{x\in\Box} m(x) > 0 \quad \text{et} \quad \max_{x\in\Box} m(x) < +\infty.$$

Preuve. Cette proposition se démontre en deux temps. Nous allons tout d'abord voir que m est positive, et donc que $|m|$ est aussi solution de $\widetilde{L}^* m = 0$. Pour cela, suivons les idées de [JKO94, p. 328]. Soit $\alpha \geqslant \alpha_0$. Soit u une solution dans $\mathrm{L}^2(\Box)$ de

$$(\alpha - \widetilde{L}^*)u = \alpha|m|.$$

Constatons que

$$\begin{aligned} (\alpha - \widetilde{L}^*)(u+m) &= \alpha(|m|+m), \\ (\alpha - \widetilde{L}^*)(u-m) &= \alpha(|m|-m). \end{aligned}$$

À partir du lien entre le semi-groupe et la résolvante $\widetilde{G}_\alpha$, il est facile de constater que si f est positive, alors $\widetilde{G}^*_\alpha f$ est aussi positive. Ainsi $u \geqslant m$ et $u \geqslant -m$, ce qui se réécrit en $u \geqslant |m|$. D'autre part,

$$\int_\Box \widetilde{L}^* u(x)\,\mathrm{d}x = \langle \widetilde{L}^* u, 1\rangle = \langle u, \widetilde{L}1\rangle = 0,$$

et donc $\int_\Box u(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Box |m|(x)\,\mathrm{d}x$. Ce qui prouve que $u = m$ p.p. et que $\widetilde{L}^*|m| = 0$. Comme l'espace des solutions de cette équation est de dimension 1, $m = |m|$.

D'après l'inégalité de Harnack [STA65, Théorème 8.1, p. 237], il existe alors une constante K ne dépendant que de λ, Λ et n telle que

$$\max_{x\in\square} m(x) \leqslant K \min_{x\in\square} m(x)$$

ce qui prouve que m est bornée supérieurement et que son minimum est non nul. ∎

Proposition 5. *La mesure de densité m par rapport à la mesure de Lebesgue sur le tore est invariante pour le semi-groupe $(Q_t)_{t>0}$.*

Preuve. Comme $(Q_t f)_{t\geqslant 0}$ est solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial Q_t f(x)}{\partial t} = \widetilde{L} Q_t f(x) \quad \text{et} \quad Q_0 f(x) = f(x),$$

il s'ensuit que

$$\left\langle \frac{\partial Q_t f}{\partial t}, m \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = \langle \widetilde{L} Q_t f, m\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = \langle Q_t f, \widetilde{L}^* m\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = 0$$

et donc $\int_\square Q_t f(x) m(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de t, et vaut $\int_\square f(x) m(x)\,\mathrm{d}x$. ∎

Corollaire 2. *Le spectre $\mathrm{S}(\widetilde{L})$ de $\widetilde{L}$ est inclus dans $]-\infty;0]$. Autrement dit, l'opérateur $\alpha - \widetilde{L}$ est inversible pour tout $\alpha > 0$*

Preuve. Soit f appartenant à $\mathrm{L}^2(\square)$. Constatons que

$$\begin{aligned}\int_\square \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t f(x)\,\mathrm{d}t\right)^2 m(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\int_\square Q_t(f^2)(x) m(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2}\int_\square f^2(x) m(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme m est bornée et minorée par une constante strictement positive, $\widetilde{G}_\alpha f = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t f(x)\,\mathrm{d}t$ appartient à $\mathrm{L}^2(\square)$ pour tout $\alpha > 0$. Comme $Q_t f$ est solution de l'équation parabolique $\partial_t Q_t f - \widetilde{L} Q_t f = 0$, $\widetilde{G}_\alpha f$ est bien la solution de $(\alpha - \widetilde{L})\widetilde{G}_\alpha f = f$. ∎

Corollaire 3. *La densité m vérifie pour tout x,*

$$\delta \leqslant m(x) \leqslant \kappa$$

où δ et κ sont les constantes intervenant dans (12)*. Autrement dit, δ et κ ne dépendent que de λ, Λ et n.*

Preuve. Soit ν la mesure de Lebesgue et soit $E = \{\, x \,|\, m(x) < \delta \,\}$. Alors, si $\nu(E) > 0$,

$$\begin{aligned}\delta\nu(E) > \int_\square m(x)\mathbb{1}_E \,\mathrm{d}x &= \int_\square Q_t \mathbb{1}_E(x) m(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\square \int_\square q(1,x,y) m(x) \mathbb{1}_E(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \geqslant \delta\nu(E),\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. On démontre de même que $\nu(\{\, x \,|\, m(x) > \kappa \,\})$ est nul. Comme m est continue, les inégalités sont vraies pour tout point. ∎

Revenons à l'opérateur $\widetilde{L}$.

Proposition 6. *Pour tout u dans le domaine $\mathrm{D}(\widetilde{L})$,*

$$\int_\square \widetilde{L}u(x) \cdot u(x) m(x) \,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \int_\square m(x) \cdot a_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x. \qquad (14)$$

Preuve. La densité m est bornée et appartient à $\mathrm{H}^1(\square)$. Soit φ dans $\mathcal{C}^\infty(\square)$. Nous pouvons appliquer la formule de dérivation de produit sur les espaces de Sobolev, ce qui donne,

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\varphi, m \cdot \varphi) = \frac{1}{2} \int_\square a_{i,j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} m \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \langle \varphi^2, \widetilde{L}^* m \rangle_{\mathrm{L}^2(\square)},$$

mais $\widetilde{L}^* m = 0$. Comme $\mathcal{C}^\infty(\square)$ est dense dans $\mathrm{H}^1(\square)$, cette relation est aussi vraie pour tout φ dans $\mathrm{H}^1(\square)$. Et donc (14) est vraie pour tout élément u de $\mathrm{D}(\widetilde{L})$. ∎

Proposition 7. *L'opérateur $\widetilde{L}$ de domaine $\mathrm{D}(\widetilde{L})$ est un opérateur fermé à domaine dense dans $\mathrm{L}^2(\square)$.*

Preuve. Nous savons par le Corollaire 2 que $\alpha - \widetilde{L}$ est inversible pour tout $\alpha > 0$ sur $\mathrm{L}^2(\square)$, donc sur $\mathrm{L}^2_m(\square)$. D'autre part, par la Proposition 6, $\langle -\widetilde{L}u, u\rangle_{\mathrm{L}^2_m(\square)} \geqslant 0$. La Proposition VII.1 de [BRE92, p. 101] et l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\square)}$ permettent de conclure. ∎

Proposition 8. *Soit f appartenant à $\mathrm{L}^2(\square)$ telle que*

$$\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Alors il existe une unique solution u à une constante additive près dans $\mathrm{H}^1(\square)$ à l'équation

$$Lu = f.$$

De plus, il existe une unique solution u à une constante additive près dans $\mathrm{H}^1(\square)$ à l'équation

$$Lu = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{lorsque} \quad \int_\square f(x)\frac{\partial m(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Cette équation est prise au sens faible, à savoir que pour tout v dans $\mathrm{H}^1(\square)$,

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) = \left\langle f, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}. \tag{15}$$

Preuve. D'après le Théorème II.18 dans [BRE92, p. 29], l'image de $\widetilde{L}$ est l'orthogonal du noyau de $\widetilde{L}^*$, ce qui correspond exactement à l'ensemble des fonctions f dans $\mathrm{L}^2(\square)$ telles que $\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrons maintenant l'existence de la solution de (15) pour f dans $\mathrm{L}^2(\square)$. Comme $\mathrm{H}^1(\square)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\square)$, considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathrm{H}^1(\square)$ convergeant vers f dans $\mathrm{L}^2(\square)$. Les fonctions f_n seront choisies de sorte que $\int_\square f_n(x)\partial_{x_i}m(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ce qui est possible, car si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2(\square)} f$, alors $\int_\square f_n(x)\partial_{x_i}m(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Constatons que $\partial f/\partial x_i$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^1(\square)$, et donc

$$\left\langle \frac{\partial(f-f_n)}{\partial x_i}, g\right\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\square),\mathrm{H}^1(\square)} = \left\langle f - f_n, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} \leqslant \|f-f_n\|_{\mathrm{L}^2(\square)}\cdot\|g\|_{\mathrm{H}^1(\square)},$$

ce qui prouve que $\partial f_n/\partial x_i$ converge vers $\partial f/\partial x_i$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\square)$. Soit u_n une solution de $\widetilde{L}u_n = f_n$ appartenant à $\mathrm{H}^1(\square)$. Alors, grâce à la relation (14),

$$\lambda\delta\,\|\nabla u_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\square)} \leqslant -\langle \widetilde{L}u_n, u_n\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = \left\langle f_n, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} \leqslant \|f_n\|_{\mathrm{L}^2(\square)}\,\|\nabla u_n\|_{\mathrm{L}^2(\square)}$$

et donc $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(\mathrm{L}^2(\square))^n$. Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et un élément u de $\mathrm{H}^1(\square)$ tel que $(\partial u_{n_k}/\partial x_i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\mathrm{L}^2(\square)$ vers $\partial u/\partial x_i$.

Cela suffit à démontrer que, pour tout v dans $\mathrm{H}^1(\square)$,

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) \xleftarrow[k\to\infty]{} \widetilde{\mathcal{E}}(u_{n_k},v) = \left\langle f_{n_k}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \left\langle f, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}$$

Soit maintenant un autre élément u' dans $\mathrm{H}^1(\square)$ tel que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\nabla u'$ dans $(\mathrm{L}^2(\square))^n$ le long d'une autre sous-suite. Alors, $\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) = \widetilde{\mathcal{E}}(u',v)$, et si v est choisi dans $\mathrm{D}(\widetilde{L}^*)$, $\langle u, \widetilde{L}^*v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = \langle u', \widetilde{L}^*v\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)}$. Autrement dit, $u-u'$ appartient à l'orthogonal de l'image de $\widetilde{L}^*$, qui n'est rien d'autre que le noyau de $\widetilde{L}$. Ainsi, u est définie à une constante près. Nous pouvons donc supposer que $\int_\square u(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Et c'est cet élément u qui sera considéré comme étant la solution de (15).

Remarquons que grâce à (11), (u_n) converge fortement vers u dans $\mathrm{L}^2(\square)$ lorsque $\int_\square u_n(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$. ∎

3.2 Convergence des processus

Introduisons maintenant la famille d'opérateurs

$${}^{\varepsilon}L = L + \varepsilon c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

définis sur $\mathbb{R}^n$ pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Ces opérateurs sont les générateurs infinitésimaux de processus ${}^{\varepsilon}\mathsf{X}$.

Lemme 2. *Le processus X^{ε} partant de x est égal en loi au processus $(\varepsilon\cdot{}^{\varepsilon}\mathsf{X}_{t/\varepsilon^2})_{t\geqslant 0}$ partant du point x/ε.*

Preuve. Il suffit de calculer le générateur de $\varepsilon \cdot {}^{\varepsilon}\mathsf{X}_{t/\varepsilon^2}$. ∎

La famille d'opérateurs ${}^{\varepsilon}\widetilde{L}$ définis sur le tore et correspondant à ${}^{\varepsilon}L$ est alors

$$
{}^{\varepsilon}\widetilde{L} = \widetilde{L} + \varepsilon c_i \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

pour $1 \geqslant \varepsilon > 0$. Ce qui a été dit sur $\widetilde{L}$ est aussi vrai pour ${}^{\varepsilon}\widetilde{L}$. Notamment, ${}^{\varepsilon}\widetilde{L}$ est le générateur d'un semi-groupe de Markov $({}^{\varepsilon}Q_t)_{t>0}$.

Proposition 9. *Il existe deux constantes K et ρ strictement positives telles que, pour tout f dans* $\mathrm{L}^1(\square)$,

$$
\sup_{x\in\square} \left| {}^{\varepsilon}Q_t f(x) - \int_{\square} f(x)m(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant K \left\| f \right\|_{\mathrm{L}^1(\square)} e^{-C(\varepsilon)t} \tag{16}
$$

où $C(\varepsilon)$ tend vers ρ quand ε tend vers 0.

Preuve. Cette proposition représente une variation de la technique du trou spectral.

Soit f dans $\mathrm{L}^2(\square)$ avec $\int_{\square} f(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Posons $\delta^{\varepsilon}(t) = \|{}^{\varepsilon}Q_t f\|^2_{\mathrm{L}^2(\square)}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\delta^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}(t) &= 2\left\langle \frac{\partial {}^{\varepsilon}Q_t f}{\partial t}, {}^{\varepsilon}Q_t f \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} = 2\langle {}^{\varepsilon}\widetilde{L}\,{}^{\varepsilon}Q_t f, {}^{\varepsilon}Q_t f\rangle_{\mathrm{L}^2(\square)} \\
&= -\int_{\square} \langle a\nabla {}^{\varepsilon}Q_t f, \nabla {}^{\varepsilon}Q_t f\rangle\, m(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \int_{\square} c_i(x) \frac{\partial {}^{\varepsilon}Q_t f}{\partial x_i}(x)\,{}^{\varepsilon}Q_t f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant -\lambda\delta \left\| \nabla {}^{\varepsilon}Q_t f \right\|^2_{\mathrm{L}^2_m(\square)} + \frac{\varepsilon\Lambda}{\kappa} \left\| \nabla {}^{\varepsilon}Q_t f \right\|_{\mathrm{L}^2_m(\square)} \left\| {}^{\varepsilon}Q_t f \right\|_{\mathrm{L}^2(\square)}
\end{aligned}
$$

L'inégalité de Poincaré (11) de constante C pour la mesure $m(x)\,\mathrm{d}x$ implique que

$$
\frac{\mathrm{d}\delta^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}(t) \leqslant -C(\varepsilon)\delta^{\varepsilon}(t),
$$

où $C(\varepsilon)$ tend vers $C^2\delta\lambda > 0$ quand ε tend vers 0. Comme $\delta^{\varepsilon}(0) = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\square)}$,

$$
\delta^{\varepsilon}(t) \leqslant \exp(-C(\varepsilon)t) \left\| f \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\square)}.
$$

Nous savons de plus que si f appartient à $\mathrm{L}^1(\square)$, ${}^{\varepsilon}Q_t f$ appartient à $\mathrm{L}^2(\square)$ pour $t > 0$ et

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\square} |{}^{\varepsilon}Q_t f(x)| &\leqslant \kappa \left\|{}^{\varepsilon}Q_{t-1} f\right\|_{\mathrm{L}^2(\square)} \\ &\leqslant K e^{-C(\varepsilon)t} \left\|{}^{\varepsilon}Q_1 f\right\|_{\mathrm{L}^2(\square)} \leqslant \kappa K e^{-C(\varepsilon)t} \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^1(\square)},\end{aligned}$$

ce qui prouve (16). ∎

Le Lemme suivant découle de cette Proposition, et nous assure qu'en prenant une solution de $\widetilde{L}u = f$ pour une fonction f bornée, alors cette solution u est aussi bornée.

Lemme 3. *Soit f une fonction dans $\mathrm{L}^\infty(\square)$ telle que $\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et considérons u l'unique solution dans $\mathrm{L}^2(\square)$ du problème*

$$\widetilde{L}u = f \quad \textit{et} \quad \int_\square u(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Alors

$$u(x) = \int_0^{+\infty} Q_t f(x)\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

et u est bornée.

Preuve. L'inégalité (16) permet de démontrer que (17) a bien un sens. De plus $Q_t f(x) = Q_{t-1} Q_1 f(x)$ et $|Q_1 f(x)| \leqslant \kappa \left\|f\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\square)}$. L'inégalité (16) permet aussi de démontrer que u est bornée. ∎

Corollaire 4. *Soit f une fonction dans $\mathrm{L}^1(\square)$. Alors, si ${}^{\varepsilon}\mathbb{E}_x$ est la loi du processus ${}^{\varepsilon}\mathsf{X}$ associé à ${}^{\varepsilon}L$,*

$${}^{\varepsilon}\mathbb{E}_x \left[\left(\varepsilon^2 \int_1^{t/\varepsilon^2} f({}^{\varepsilon}\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s - \int_\square f(y)m(y)\,\mathrm{d}y \right)^2 \right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{18}$$

uniformément en x.

Preuve. Suivons pour cela une idée de Freidlin exposée dans [BLP78, p. 388]. Cette idée repose sur le fait que, pour une fonction g intégrable,

$$\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = 2\int_a^b g(x)\int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Supposons que $\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Grâce à la propriété de Markov, et comme ${}^\varepsilon P_t f$ — $({}^\varepsilon P_t)_{t>0}$ étant le semi-groupe de ${}^\varepsilon L$ — est égal à ${}^\varepsilon Q_t f$ lorsque f est 1-périodique,

$$\begin{aligned}
{}^\varepsilon\mathbb{E}_x\left[\left(\int_1^t f({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s\right)^2\right] &= 2\,{}^\varepsilon\mathbb{E}_x\left[\int_1^t\int_1^s f({}^\varepsilon\mathsf{X}_u){}^\varepsilon\mathbb{E}_x\left[\,f({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,|\,\mathcal{F}_u\,\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s\right]\\
&= 2\,{}^\varepsilon\mathbb{E}_x\left[\int_1^t\int_1^s f({}^\varepsilon\mathsf{X}_u){}^\varepsilon Q_{s-u}f({}^\varepsilon\mathsf{X}_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leqslant 2\,{}^\varepsilon\mathbb{E}_x\left[\int_1^t |f|({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s\cdot\int_1^t\sup_{y\in\square}|{}^\varepsilon Q_s f(y)|\,\mathrm{d}s\right]\\
&\leqslant 2\int_1^t\sup_{y\in\square}{}^\varepsilon Q_s|f|(y)\,\mathrm{d}s\cdot\int_1^t\sup_{y\in\square}|{}^\varepsilon Q_s f(y)|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

La connaissance de la vitesse de décroissante de ${}^\varepsilon Q_t f$ avec t établie en (16) permet de montrer (18). De plus, la convergence est uniforme en x. ∎

Dénotons par X^ε le processus associé à L^ε. Soit $\mathbb{P}_x^\varepsilon$ la loi de X^ε partant de x. Constatons tout de suite que grâce au Lemme 2, pour toute fonction f dans $\mathrm{L}^1(\square)$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\int_{\varepsilon^2}^t f(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s \overset{\text{loi}}{=} \varepsilon^2\int_1^{t/\varepsilon^2} f({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$$

lorsque X^ε part de x et que ${}^\varepsilon\mathsf{X}$ part de x/ε.

Corollaire 5. *Soit f une fonction dans $\mathrm{L}^1(\square)$. La famille de processus $(\mathsf{Y}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par*

$$\mathsf{Y}_t^\varepsilon = \int_{\varepsilon^2}^t f(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s \textit{ si } t \geqslant \varepsilon^2 \quad \textit{et} \quad \mathsf{Y}_t^\varepsilon = 0 \textit{ si } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^2$$

converge en probabilité sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vers le processus déterministe $(t\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x)_{t\geqslant 0}$.

Preuve. Supposons tout d'abord f positive. Comme

$$\mathbb{E}_x^\varepsilon \left[\left(\int_{\varepsilon^2}^t f(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s - t\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \right] \\ = {}^\varepsilon\mathbb{E}_{x/\varepsilon} \left[\left(\varepsilon^2 \int_1^{t/\varepsilon^2} f({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s - t\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \right],$$

le Corollaire 4 permet d'affirmer que Y^ε converge en loi fini-dimensionnelles vers $(t\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x)_{t\geqslant 0}$. D'autre part, pour chaque ε, Y_t^ε est croissante. Le Théorème VI.3.37 de [JS87, p. 318] implique que la convergence a aussi lieu en loi, et donc en probabilité, vu que la limite est déterministe.

Le même travail sur les fonctions négatives et le fait que les convergences ont lieu en probabilité permettent de prouver ce corollaire. ∎

3.3 Le résultat d'homogénéisation

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour prouver le résultat d'homogénéisation pour la famille d'opérateurs L^ε.

Hypothèse 1. *Les coefficients a et b vérifient*

$$\forall i = 1,\dots,d, \quad \frac{1}{2}\int_\square a_{i,j}(x)\frac{\partial m(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\square b_i(x)m(x)\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

Remarquons que si $b = 0$, alors $m = 1$ et cette hypothèse est automatiquement vérifiée.

Soient maintenant, pour $i = 1,\dots,n$, l'unique solution v_i dans $\mathrm{H}^1(\square)$ du problème

$$\begin{cases} \widetilde{L}v_i = \dfrac{-1}{2}\sum_{j=1}^d \dfrac{\partial a_{i,j}}{\partial x_j} - b_i, \\ \displaystyle\int_\square v_i(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \end{cases} \tag{20}$$

L'existence et l'unicité de cette solution est donnée par la Proposition 8 et l'hypothèse 1. En réalité, la condition sur la moyenne de cette solution n'est pas nécessaire. Car nous verrons que les coefficients de l'opérateur homogène ne font intervenir que le gradient de v_i Tout ce dont nous avons besoin est l'existence de cette solution et l'unicité de son gradient.

Regardons maintenant v_i comme une fonction 1-périodique définie sur $\mathbb{R}^n$ et posons, pour $i = 1, \dots, n$

$$u_i(x) = x_i + v_i(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nous constatons que u_i est harmonique sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.*,

$$Lu_i = 0$$

au sens faible : $\mathcal{E}(u_i, \varphi) = 0$ pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ à support compact. Pour montrer cela pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ à support compact, il suffit de considérer une partition de l'unité $(\psi_j)_{j \in J}$ sur le support de φ [BRE92, Lemme IX.3, p. 160], tel que le support de chaque ψ_j soit inclus dans un « cube unité », c'est-à-dire un ensemble de la forme $\xi +]0, 1[^n$ pour un élément ξ de $\mathbb{R}^n$. Il est alors possible d'utiliser (20) sur le support de chaque élément ψ_j.

Ainsi, d'après le Théorème 7.1 dans [STA65, p. 232], u_i est continue, et la fonction 1-périodique $v_i(x)$ est aussi continue. Cette dernière fonction est donc bornée.

Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Posons $u_\ell(x) = \ell_i u_i(x)$.

Si $u_\ell^\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot u_\ell(x/\varepsilon)$, alors u_ℓ^ε est harmonique pour L^ε. Les conditions d'applications de la Proposition 1 sont vérifiées pour u_ℓ^ε. Ainsi, pour $t \geqslant \varepsilon^2$,

$$u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) - u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) = \mathsf{M}_t^{\varepsilon,\ell} + \varepsilon \int_{\varepsilon^2}^t \langle c, \nabla u_\ell \rangle (\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon) \, \mathrm{d}s$$

où $\mathsf{M}^{\varepsilon,\ell}$ est une martingale locale de crochet

$$\langle \mathsf{M}^{\varepsilon,\ell} \rangle_t = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2}^t \langle a \nabla u_\ell, \nabla u_\ell \rangle ({}^\varepsilon\mathsf{X}_s/\varepsilon) \, \mathrm{d}s.$$

En utilisant la renormalisation de X^ε, nous obtenons que pour $t \geqslant \varepsilon^2$,

$$\begin{aligned} u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) - u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) &\overset{\text{loi}}{=} \varepsilon \cdot {}^\varepsilon\mathsf{X}_{t/\varepsilon^2} - \varepsilon \cdot {}^\varepsilon\mathsf{X}_1 + \varepsilon \ell_i \cdot (v_i({}^\varepsilon\mathsf{X}_t) - v_i({}^\varepsilon\mathsf{X}_1)) \\ &= \mathsf{M}_t^{\varepsilon,\ell} + \int_{\varepsilon^2}^t \langle c, \nabla u_\ell \rangle ({}^\varepsilon\mathsf{X}_s/\varepsilon) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Comme la fonction v_i est bornée, les familles de processus $(u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon)-u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon))_{t\geqslant 0}$ et $(\ell\cdot\mathsf{X}_t^\varepsilon-\ell\cdot\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon)_{t\geqslant 0}$ auront la même limite en loi, si cette limite existe.

Remarquons que grâce à l'estimation d'Aronson (7), pour tout $\kappa>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left[\,|\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon-x|\geqslant\kappa\,\right]&=\mathbb{P}_{x/\varepsilon}\left[\,|\mathsf{X}_1^\varepsilon-x/\varepsilon|\geqslant\kappa/\varepsilon\,\right]\\&\leqslant\int_{\{\,y\geqslant\kappa/\varepsilon\,\}}C\exp\left(\frac{-|y|^2}{M}\right)\,\mathrm{d}y\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0\end{aligned}$$

où M et C sont deux constantes ne dépendant pas de ε. Cela prouve que la famille de processus X^ε aura la même limite en loi que la famille de processus $(\mathsf{X}_t^\varepsilon-\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon)_{t\geqslant 0}$.

Nous savons par le Corollaire 5 que

$$\left(\int_{\varepsilon^2}^t\langle c,\nabla u_\ell\rangle\,({}^\varepsilon\mathsf{X}_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s\right)_{t\geqslant 0}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{probabilité}}\left(t\cdot\int_\square c_i(x)\frac{\partial u_\ell(x)}{\partial x_i}m(x)\,\mathrm{d}x\right)_{t\geqslant 0},$$

et que

$$\left\langle\mathsf{M}^{\varepsilon,\ell}\right\rangle_t\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{probabilité}}\left(t\cdot\int_\square a_{i,j}(x)\frac{\partial u_\ell(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_\ell(x)}{\partial x_j}m(x)\,\mathrm{d}x\right)_{t\geqslant 0},$$

la convergence ayant lieu sur $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$ pour tout $T>0$, et pour tout point de départ x.

Si $\ell=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathsf{M}^{\varepsilon,\ell}$ sera dénoté par $\mathsf{M}^{\varepsilon,i}$.

Soit $\overline{\mathsf{M}}$ la martingale

$$\begin{aligned}\langle\overline{\mathsf{M}}^i\rangle_t&=t\cdot\int_\square\langle a\nabla u_i,\nabla u_i\rangle\,m(x)\,\mathrm{d}x\\\text{et}\quad\langle\overline{\mathsf{M}}^i,\overline{\mathsf{M}}^j\rangle_t&=t\cdot\int_\square\langle a\nabla u_i,\nabla u_j\rangle\,m(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Alors nous obtenons que

$$\langle\mathsf{M}^{\varepsilon,i}\pm\mathsf{M}^{\varepsilon,j}\rangle\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{probabilité}}\left\langle\overline{\mathsf{M}}^i\pm\overline{\mathsf{M}}^j\right\rangle$$

ce qui est suffisant, en utilisant les formules de polarisation et en appliquant le Théorème VIII.2.17 de [JS87, p. 423], pour démontrer que ${}^{\varepsilon}\mathsf{M} = (\mathsf{M}^{\varepsilon,i})_{i=1}^{n}$ converge en loi vers la martingale $\overline{\mathsf{M}} = (\overline{\mathsf{M}}^{i})_{i=1}^{n}$.

Ainsi, le processus X^{ε} partant du point x converge en loi vers le processus $\overline{\mathsf{X}}$ partant du même point x de générateur

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\overline{a}_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \overline{c}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{a}_{i,j} &= \int_{\square} \langle a(x)\nabla u_i(x), \nabla u_j(x)\rangle \cdot m(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{et}\quad \overline{c}_i &= \int_{\square} \langle c(x), \nabla u_i(x)\rangle \cdot m(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Remarque. Nous avons ici choisi une approche utilisant des résultats d'analyse fonctionnelle pour démontrer l'existence de la mesure invariante et la convergence à vitesse exponentielle du semi-groupe. Une autre approche aurait consisté à construire explicitement la mesure m à partir de la densité de transition q comme dans le Théorème 3.1 de [BLP78, p. 365]. Cette construction nous donne aussi la convergence exponentielle du semi-groupe, mais, le traitement du terme $c_i\partial_{x_i}$ se fait au prix d'une perte d'information sur la vitesse de convergence.

3.4 Homogénéisation des termes d'ordre zéro

Nous pouvons maintenant donner un résultat d'homogénéisation pour les opérateurs $(A^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$. Pour cela, suivons les idées de [PAR98].

Soit X^{ε} le processus de générateur A^{ε}. La loi de ce processus sera appelée $\mathbb{Q}^{\varepsilon}$.

La formule de Feynman-Kac implique que, pour tout f continue bornée, la solution $u^{\varepsilon}(t,x)$ de l'équation parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial t} = A^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(t,x), \\ u^{\varepsilon}(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{22}$$

est donnée par la relation

$$u^\varepsilon(t,x) = \mathbb{Q}_x^\varepsilon\,[\, f(\mathsf{X}_t)\,] = \mathbb{E}_x^\varepsilon\left[\exp\left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} d(\mathsf{X}_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_0^t e(\mathsf{X}_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s\right) f(\mathsf{X}_t)\right]$$

Lemme 4. *Soit $(\mathsf{Y}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de variables aléatoires uniformément bornées convergeant en probabilité vers une valeur déterministe $\overline{\mathsf{Y}}$. Soit aussi $(\mathsf{X}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers $\overline{\mathsf{X}}$. Alors, pour toute fonction continue bornée f définie sur $\mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{E}\,[\,\exp(\mathsf{Y}^\varepsilon) f(\mathsf{X}^\varepsilon)\,] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{E}\left[\,\exp(\overline{\mathsf{Y}}) f(\overline{\mathsf{X}})\,\right].$$

Hypothèse 2. *La fonction d est de moyenne nulle par rapport à m :*

$$\int_\square d(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $\hat{d}$ l'unique solution dans $\mathrm{H}^1(\square)$ du problème

$$\begin{cases} \widetilde{L}\hat{d} = -d, \\ \displaystyle\int_\square \hat{d}(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en vertu du Lemme 3, $\hat{d}$ est bornée. Cette fonction appartient aussi à $\mathrm{H}^1(\square)$. Étendons $\hat{d}$ à $\mathbb{R}^n$ tout entier par périodicité, et posons $\hat{d}^\varepsilon(x) = \varepsilon\hat{d}(x/\varepsilon)$ de sorte que

$$L^\varepsilon \hat{d}^\varepsilon = \frac{-d(\cdot/\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Constatons que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon^2} |d(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)|\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon\cdot\Lambda \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

et que d'après la Proposition 1 appliquée pour $t \geqslant \varepsilon^2$,

$$\int_{\varepsilon^2}^t \frac{1}{\varepsilon} d(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s = -\hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) + \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) + \mathsf{N}_t^\varepsilon + \int_{\varepsilon^2}^t \langle c, \nabla\hat{d}\rangle(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s,$$

où N^ε est une martingale locale de crochet

$$\langle \mathsf{N}^\varepsilon \rangle_t = \int_{\varepsilon^2}^t \langle a_\varepsilon \nabla \hat{d}^\varepsilon, \nabla \hat{d}^\varepsilon \rangle (\mathsf{X}_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

Afin de simplifier les écritures, posons

$$h_\varepsilon(x) = a_{i,j}(x/\varepsilon)\frac{\partial \hat{d}}{\partial x_i}(x/\varepsilon)\frac{\partial \hat{d}}{\partial x_j}(x/\varepsilon)$$

et

$$\overline{h} = \int_\square a_{i,j}(x)\frac{\partial \hat{d}}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \hat{d}}{\partial x_j}(x) m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\hat{d}$ est bornée, le terme $\hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) - \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon)$ converge uniformément vers 0. Le terme $\varepsilon^{-1}\int_{\varepsilon^2}^t d(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s \overset{\text{loi}}{=} \varepsilon\int_1^{t/\varepsilon^2} d({}^\varepsilon\mathsf{X}_s)\,\mathrm{d}s$ sera donc traité à l'aide de la martingale N^ε et du Théorème de Girsanov. Mais, en général, h_ε appartient à $\mathrm{L}^1(\square)$ mais n'est pas bornée, ce qui complique un peu la démonstration.

Soit

$$\tau_\varepsilon = \inf\left\{ t > 0 \,\middle|\, \frac{1}{t}\int_{\varepsilon^2}^t h_\varepsilon(\mathsf{X}_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s \geqslant 2\overline{h} \right\}$$

Constatons que

$$\mathbb{P}_x\left[\,\tau_\varepsilon \leqslant t\,\right] = \mathbb{P}_x\left[\frac{1}{t}\int_{\varepsilon^2}^t h_\varepsilon(\mathsf{X}_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s - \overline{h} \geqslant \overline{h}\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

grâce au Corollaire 4.

Lemme 5. *Soit f dans $\mathrm{L}^1(\square)$. Alors*

$$\int_{\varepsilon^2}^{t\wedge\tau_\varepsilon} f(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\textit{probabilité}} t\int_\square f(x)m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve. Soit $\kappa > 0$ et $\overline{f} = \int_{\square} f(x)m(x)\,\mathrm{d}x$. Alors

$$\mathbb{P}_x\left[\left|\int_{\varepsilon^2}^{t\wedge\tau_\varepsilon} f(\mathsf{X}^\varepsilon_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s - t\overline{f}\right| \geqslant \kappa\right] \leqslant \mathbb{P}_x\left[\,\tau_\varepsilon \leqslant t\,\right] + \mathbb{P}_x\left[\left|\int_{\varepsilon^2}^{t} f(\mathsf{X}^\varepsilon_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s - t\overline{f}\right| \geqslant \kappa\right]$$

ce qui prouve la convergence en probabilité de $\int_{\varepsilon^2}^{t\wedge\tau_\varepsilon} f(\mathsf{X}^\varepsilon_s/\varepsilon)\,\mathrm{d}s$ vers $t\overline{f}$. Les arguments utilisés pour prouver le Corollaire 5 permettent de prouver la convergence sur $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$. ∎

Posons maintenant $\mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}_t = \mathsf{N}^\varepsilon_{t\wedge\tau_\varepsilon}$. Il s'agit d'une martingale locale, ainsi que $\mathsf{N}^\varepsilon - \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$.

Lemme 6. *La martingale locale* $\mathsf{N}^\varepsilon - \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$ *converge en probabilité vers 0 sur* $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$.

Preuve. Le crochet de $\mathsf{N}^\varepsilon - \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$ est égal à

$$\left\langle \mathsf{N}^\varepsilon - \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}\right\rangle_t = \int_{t\wedge\tau_\varepsilon}^{t} h_\varepsilon(\mathsf{X}^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s.$$

Comme $\int_{\varepsilon^2}^{t\wedge\tau_\varepsilon} h_\varepsilon(\mathsf{X}^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s$ et $\int_{\varepsilon^2}^{t} h_\varepsilon(\mathsf{X}^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s$ ont la même limite en probabilité pour tout t quand ε tend vers 0, alors le crochet de $\mathsf{N}^\varepsilon - \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$ converge en probabilité vers 0. Le problème 1.5.25 de [KS91, p. 38] permet de conclure. ∎

Soit $(\mathsf{Y}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de martingales locales telle que pour tout $t > 0$, il existe une constante k_t pour laquelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{E}_x\left[\,\exp\left(6\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_t\right)\right] \leqslant k_t \tag{23}$$

La propriété (23) permet d'affirmer que

$$\mathsf{Z}^\varepsilon_t = \exp\left(\mathsf{Y}^\varepsilon_t - \frac{1}{2}\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_t\right).$$

est une martingale exponentielle vérifiant $\mathbb{E}_x\left[\,\mathsf{Z}^\varepsilon_t\,\right] = 1$ pour tout t. Par conséquent, la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}^\varepsilon$ sur $\mathcal{C}([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_x}{\mathrm{d}\mathbb{P}^\varepsilon_x}\right|_{\mathcal{F}^\varepsilon_t} = \mathsf{Z}^\varepsilon_t$$

satisfait les conditions d'application du Théorème de Girsanov.

Proposition 10. *Soit* U^ε *une famille de processus convergeant en probabilité sur* $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$ *vers* $\overline{\mathsf{U}}$ *sous* $\mathbb{P}^\varepsilon_x$*. Alors la convergence a aussi lieu en probabilité sous* $\widetilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_x$*.*

Preuve. Soit $\eta > 0$. Posons

$$K_\varepsilon = \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |\mathsf{U}^\varepsilon_t - \overline{\mathsf{U}}_t| \geqslant \eta \right\}.$$

Alors la convergence en probabilité sous $\mathbb{P}^\varepsilon_x$ signifie que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}^\varepsilon_x\left[\, K_\varepsilon \,\right] = 0$ pour tout $\eta > 0$.

D'autre part, par application de la formule de Cauchy-Schwarz,

$$\widetilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_x\left[\, K_\varepsilon \,\right] = \widetilde{\mathbb{E}}^\varepsilon_x\left[\, \mathbb{1}_{K_\varepsilon} \,\right] = \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, \mathsf{Z}^\varepsilon_T \mathbb{1}_{K_\varepsilon} \,\right] \leqslant \mathbb{P}^\varepsilon_x\left[\, K_\varepsilon \,\right]^{1/2} \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, (\mathsf{Z}^\varepsilon_T)^2 \,\right]^{1/2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, (\mathsf{Z}^\varepsilon_T)^2 \,\right] &= \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, \exp\left(2\mathsf{Y}^\varepsilon_T - 4\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_T + 3\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon_T\right\rangle\right) \,\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\exp\left(4\mathsf{Y}^\varepsilon_T - \frac{16}{2}\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_T \right) \right]^{1/2} \cdot \mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, \exp\left(6\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_T\right) \,\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (23) implique que $\mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, \exp\left(4\mathsf{Y}^\varepsilon_T - 8\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_T\right) \,\right] = 1$. De plus, le terme $\mathbb{E}^\varepsilon_x\left[\, \exp\left(6\left\langle \mathsf{Y}^\varepsilon\right\rangle_T\right) \,\right]$ est borné indépendamment de ε. Ainsi $\widetilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_x\left[\, K_\varepsilon \,\right]$ tend vers 0, ce qui démontre la convergence en probabilité de U^ε vers $\overline{\mathsf{U}}$. ∎

Cette Proposition aurait pu être utilisée pour traiter le terme $c_i\partial_{x_i}$ d'ordre un.

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour conclure. Si u^ε est la solution de l'équation parabolique (22),

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(t,x) = & \mathbb{E}_x^\varepsilon\left[\exp\left(\int_0^t (\frac{1}{\varepsilon}d + e)(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s\right) f(\mathsf{X}_t^\varepsilon)\right] \\
= & \mathbb{E}_x^\varepsilon\Bigg[\exp\Bigg(\mathsf{N}_t^{\varepsilon,\tau_\varepsilon} + (\mathsf{N}_t^\varepsilon - \mathsf{N}_t^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}) - \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) + \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) \\
& + \int_0^{\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon}d(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_0^t e(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_{\varepsilon^2}^t \langle c, \nabla\hat{d}\rangle(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s\Bigg) f(\mathsf{X}_t^\varepsilon)\Bigg] \\
= & \widetilde{\mathbb{E}}_x^\varepsilon\Bigg[\exp\Bigg(\mathsf{N}_t^\varepsilon - \mathsf{N}_t^{\varepsilon,\tau_\varepsilon} + \frac{1}{2}\left\langle \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}\right\rangle_t - \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) + \hat{d}^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) \\
& + \int_0^{\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon}d(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_0^t e(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_{\varepsilon^2}^t \langle c, \nabla\hat{d}\rangle(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s\Bigg) f(\mathsf{X}_t^\varepsilon)\Bigg]
\end{aligned}$$

en prenant pour le Théorème de Girsanov $\mathsf{Y}^\varepsilon = \mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$, car $\mathsf{N}^{\varepsilon,\tau_\varepsilon}$ vérifie (23) avec $k_t = 12t\overline{h}$.

Grâce à la Proposition 10 et au Lemme 6, l'argument de l'exponentiel dans l'équation précédente converge en probabilités sous $\widetilde{\mathbb{P}}_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vers

$$t \cdot \frac{\overline{h}}{2} + t\int_\square (e(x) + \langle c(x), \nabla\hat{d}(x)\rangle) m(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, sous $\widetilde{\mathbb{P}}_x^\varepsilon$, le processus $u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}^\varepsilon)$ devient

$$u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_t^\varepsilon) = u_\ell^\varepsilon(\mathsf{X}_{\varepsilon^2}^\varepsilon) + \mathsf{M}_t^{\varepsilon,\ell} + \int_{\varepsilon^2}^t \left\langle c, \nabla u_\ell\right\rangle(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \int_{\varepsilon^2}^{t\wedge\tau_\varepsilon} \langle a\nabla\hat{d}, \nabla u_\ell\rangle(\mathsf{X}_s^\varepsilon/\varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

La martingale locale $\mathsf{M}^{\varepsilon,\ell}$ est caractérisée par son crochet qui converge en probabilité sous $\mathbb{P}_x^\varepsilon$, et donc sous $\widetilde{\mathbb{P}}_x^\varepsilon$. Elle converge donc en loi vers $\ell\cdot\overline{\mathsf{M}}$, où $\overline{\mathsf{M}}$ est la martingale définie précédemment.

Posons

$$\overline{D} = (\overline{D}_i)_{i=1}^d = \left(\int_\square a_{j,k}(x)\frac{\partial\hat{d}}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x)m(x)\,\mathrm{d}x\right)_{i=1}^d.$$

Ainsi quand ε tend vers 0, X_t^ε tend en loi vers $\overline{\mathsf{M}}_t + t\cdot\overline{c} + t\cdot\overline{D}$.

Posons aussi $\overline{e} = \int_\square (e(x) + \langle c(x), \nabla\hat{d}(x)\rangle) m(x)\,\mathrm{d}x$.

Sous les hypothèses 1 et 2, pour tout $t>0$ et pour tout x, $u^\varepsilon(t,x)$ converge vers $\overline{u}(t,x)$ qui est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \overline{A}\overline{u}, \\ \overline{u}(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{24}$$

où $\overline{A}$ est l'opérateur

$$\overline{A} = \frac{1}{2}\overline{a}_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (\overline{c}_i + \overline{D}_i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\overline{h}}{2} + \overline{e}. \tag{25}$$

La difficulté pratique de l'homogénéisation est de calculer les fonctions harmoniques u_i et la densité m de la mesure invariante. Dans le cas particulier où $n=1$, ces fonctions sont connues. Posons

$$f(x) = \int_0^x \frac{2b(z)}{a(z)}\,\mathrm{d}z - \int_0^1 \frac{2b(z)}{a(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Ainsi la fonction harmonique u et la densité de la mesure invariante m sont

$$u(x) = \left(\int_0^1 \frac{e^{-f(y)}}{a(y)}\,\mathrm{d}y\right)^{-1} \int_0^x \frac{e^{-f(y)}}{a(y)}\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad m(x) = \exp f(x)$$

Ainsi, si $\int_0^1 b(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_0^1 d(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et si $\hat{d}$ est la solution de $\widetilde{L}\hat{d} = -d$,

$$\overline{a} = \left(\int_0^1 \frac{e^{-f(y)}}{a(y)}\,\mathrm{d}y\right)^{-1}, \quad \overline{c} = \overline{a}\int_0^1 \frac{c(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \overline{D} = 0,$$
$$\overline{e} = \int_0^1 \exp(f(x))\left(e(x) + c(x)\hat{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x \text{ et } \overline{h} = \int_0^1 a(x)\exp(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

3.5 Convergence sans les conditions de centrage

Les hypothèses 1 et 2 sont assez contraignantes. Si elles ne sont pas vérifiées, il est quand même possible de donner des résultats de convergence pour les solutions des équations paraboliques.

Soit m la mesure invariante associée à l'opérateur $\widetilde{L}$, et posons

$$g_i^m = \left\langle \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_j} + b_i, m \right\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\square),\mathrm{H}^1(\square)}.$$

Nous en déduisons que pour $i = 1, \dots, n$, il existe une unique solution à l'équation

$$\begin{cases} \widetilde{L}v_i = \dfrac{-1}{2}\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial a_{i,j}}{\partial x_j} - b_i + g_i^m, \\ \displaystyle\int_{\square} v_i(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \end{cases} \tag{26}$$

Définissons comme précédemment les fonctions $u_i^\varepsilon(x) = \varepsilon u_i(x/\varepsilon)$ où

$$u_i(x) = x_i + v_i(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Ainsi $L^\varepsilon u_i^\varepsilon = g_i^m/\varepsilon$. Par le Théorème 7.3 de [STA65, p. 232], les fonctions u_i sont continues et donc $\varepsilon v_i(x)$ converge uniformément vers 0. Ainsi, si X^ε est le processus de générateur L^ε, en utilisant les résultats du paragraphe 3.3 et en posant $g^m = (g_i^m)_{i=1}^n$,

$$\left(\mathsf{X}_t^\varepsilon - \frac{g^m t}{\varepsilon}\right)_{t\geqslant 0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{loi}} \overline{\mathsf{X}}$$

où $\overline{\mathsf{X}}$ est le processus de générateur $\overline{L}$ donné en (21) avec $(u_1, \dots, u_n)$ donné par (27).

Le générateur du processus $\mathsf{X}^\varepsilon - g^m t/\varepsilon$ est $L^\varepsilon - \frac{g_i^m}{\varepsilon}\partial_{x_i}$. Pour f continue et bornée, la fonction $v^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(t, x - g^m t/\varepsilon)$ est solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial v^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = L^\varepsilon v^\varepsilon(t,x) - \frac{g_i^m t}{\varepsilon}\frac{\partial v^\varepsilon(t,x)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad v^\varepsilon(0,x) = f(x).$$

Ce qui prouve que pour tout x et pour tout $t \geqslant 0$,

$$u^\varepsilon\left(t, x - \frac{g^m t}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \overline{u}(t,x)$$

où $\overline{u}$ est la solution de l'équation parabolique $\partial_t \overline{u} = \overline{L}\overline{u}(t,x)$.

Intéressons nous maintenant à l'opérateur A en supposant que les hypothèses 1 et 2 ne sont pas vérifiées. Alors, posons

$$d^m = \int_\square d(x) m(x) \,\mathrm{d}x$$

et soit $\hat{d}$ l'unique solution de

$$L\hat{d} = -d + d^m \quad \text{et} \quad \int_\square \hat{d}(x) m(x) \,\mathrm{d}x = 0. \tag{28}$$

Il est clair que si u^ε est la solution de l'équation parabolique (22), alors

$$\exp\left(\frac{-d^m t}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon\left(t, x - \frac{g^m t}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \overline{u}(t,x)$$

où $\overline{u}$ est la solution de l'équation différentielle parabolique (24) pour $(u_1, \ldots, u_n)$ et $\hat{d}$ donnés par (27) et (28).

4 Homogénéisation sur un domaine quelconque

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il existe aussi un résultat d'homogénéisation sur les solutions des équations paraboliques

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t,x) = A^\varepsilon u^\varepsilon(t,x), \\ u^\varepsilon(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{29}$$

lorsque f est continue et bornée sur $\mathcal{O}$ et que A^ε est un opérateur dont les coefficients ne sont définis que sur $\mathcal{O}$.

Soit $L^{\mathcal{O}}$ est un opérateur sous forme divergence défini sur $\mathcal{O}$ s'écrivant comme (3), vérifiant la condition d'ellipticité et dont les coefficients sont bornés. Ces coefficients s'étendent sur $\mathbb{R}^n$ de façon à obtenir un opérateur A sous forme divergence sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant les mêmes conditions d'ellipticité et de majoration.

Le domaine $\mathrm{D}(L^{\mathcal{O}})$ est défini par

$$\mathrm{D}(L^{\mathcal{O}}) = \left\{ f \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O}) \,\middle|\, L^{\mathcal{O}} f \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}) \right\}.$$

Soit X le processus de générateur L et $\mathsf{X}^{\mathcal{O}}$ le processus X tué en sortant de $\mathcal{O}$. C'est-à-dire que, si

$$\tau = \inf \{ t \geqslant 0 \,|\, \mathsf{X} \notin \mathcal{O} \}$$

est le *temps de sortie* de $\mathcal{O}$, alors $\mathsf{X}^{\mathcal{O}}$ est défini par

$$\mathsf{X}^{\mathcal{O}}_t = \begin{cases} \mathsf{X}_t & \text{si } t \leqslant \tau, \\ \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

où Δ est le *cimetière*. Il s'agit d'un point ajouté à l'espace $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11. *Le générateur du processus $\mathsf{X}^{\mathcal{O}}$ est $(L^{\mathcal{O}}, \mathrm{D}(L^{\mathcal{O}}))$. Le semi-groupe de ce processus est donné par*

$$P^{\mathcal{O}}_t f(x) = \mathbb{E}_x \left[f(\mathsf{X}_t),\ t < \tau \right]$$

pour toute fonction f appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$.

Preuve. La Théorème A.2.10 dans [FOT94, p. 324] donne le semi-groupe de $\mathsf{X}^{\mathcal{O}}$. Le Théorème de Girsanov associé au Théorème 4.4.2 de [FOT94, p. 154] donnent le générateur de $\mathsf{X}^{\mathcal{O}}$. ∎

Soient $(\mathsf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de processus dont chacun est associé à un opérateur sous forme divergence de type (3) avec les conditions d'ellipticité et de majoration, et $(\tau^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps de sortie de $\mathcal{O}$ associée.

Proposition 12. *Si $(\mathsf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers un processus X associé à un opérateur sous forme divergence lorsque X^n et X partent du même point x, alors la suite des temps sortie $(\tau^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers τ, le temps de sortie de $\mathcal{O}$ du processus X.*

Preuve. Cela se démontre (*cf.* [LEJ98]) en utilisant le fait que l'ensemble des points irréguliers de $\mathcal{O}$ pour X^n est polaire, et que ces points sont les mêmes que ceux du mouvement brownien d-dimensionnel. Ce dernier résultat, du à Littman, Stampacchia et Weinberger, est exposé dans [LSW63] pour les opérateurs $\frac{1}{2}\partial_{x_i}\left(a_{i,j}\partial_{x_j}\right)$. Il s'étend aisément aux cas des opérateurs avec un terme d'ordre un grâce à la formule de Girsanov. ∎

Soit A un opérateur sous forme divergence de la forme (2) défini sur $\mathcal{O}$ et dont les coefficients de A peuvent s'étendre en des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ 1-périodiques. Ce qui permet de considérer une famille d'opérateurs $(A^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur $\mathcal{O}$ dont les coefficients sont donnés en (1).

Ainsi, la solution u^ε des équations paraboliques (29) converge en tout point et pour tout temps vers la solution d'une équation différentielle parabolique $\partial_t\overline{u} = \overline{A}\overline{u}$ et $\overline{u}(0,x) = f(x)$, dont $\overline{A}$ est donné par (25).

5 Équations elliptiques

Soit A^ε un opérateur sous forme divergence sur $\mathcal{O}$ donné par

$$A^\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(\cdot/\varepsilon)_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\varepsilon}b_i(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(\cdot/\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i} + e(\cdot/\varepsilon),$$

où les coefficients sont 1-périodiques, uniformément bornés et que a vérifie la condition d'ellipticité uniforme. Soit $(P^\varepsilon_t)_{t>0}$ son semi-groupe.

Alors, si f est une continue et bornée, en utilisant la formule de Feynman-Kac (10), il est clair que que $P^\varepsilon_t f(x) \leqslant e^{\Lambda t}\left\|f\right\|_\infty$.

Dans ce cas, la résolvante

$$G^\varepsilon_\alpha f(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(\mathsf{X}^\varepsilon_t)\,\mathrm{d}t\right] = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P^\varepsilon_t f(x)\,\mathrm{d}t$$

est bien défini pour $\alpha > \Lambda$ et, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$G^\varepsilon_\alpha f(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \overline{G}_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\overline{P}_t f(x)\,\mathrm{d}t$$

avec $(\overline{P}_t)_{t>0}$ le semi-groupe de l'opérateur $\overline{A}$ écrit en (25).

D'autre part, les fonctions $G^\varepsilon_\alpha f$ et $\overline{G}_\alpha$ sont les solutions des problèmes elliptiques

$$\begin{cases}(\alpha - A^\varepsilon)u = f,\\ u \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O})\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases}(\alpha - \overline{A})u = f,\\ u \in \mathrm{H}^1_0(\mathcal{O}).\end{cases}$$

Il existe ainsi une propriété d'homogénéisation pour les équations elliptiques. Sous des conditions plus fortes ($b = d = 0$), des résultats sur la convergence des résolvantes peut être donnée pour toute fonction f dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ en utilisant l'estimation d'Aronson [ROZ96].

Références

[ARO68] D.G. ARONSON. « Non-negative solutions of linear parabolic equation ». *Annali della Scuda Normale Superiore di Pisa*, vol. 22, pp. 607–693, 1968.

[BLP78] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS et G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, 1978.

[BRE92] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1992.

[CZ95] Z.Q. CHEN et Z. ZHAO. « Diffusion Processes and Second Order Elliptic Operators with Singular Coefficients for Lower Order Terms ». *Mathematische Annalen*, vol. 302, pp. 323–357, 1995.

[FOT94] M. FUKUSHIMA, Y. OSHIMA et M. TAKEDA. *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Process*. De Gruyter, 1994.

[JKO94] V.V. JIKOV, S.M. KOZLOV et O.A. OLEINIK. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionnals*. Springer-Verlag, 1994.

[JS87] J. JACOD et A.N. SHIRYAYEV. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1987.

[KS91] I. KARATZAS et S.E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 2e édition, 1991.

[LEJ98] A. LEJAY. « Homogenization of Divergence Form Second Order Operator: a Probabilistic Viewpoint ». Rapport de recherche, INRIA, 1998. À paraître.

[LSW63] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA et H.F. WEINBERGER. « Regular Point for Elliptic equation with Discontinuous Coefficients ». *Annali della Scuda Normale Superiore di Pisa*, vol. 17, pp. 43–77, 1963.

[OLL94] S. OLLA. « Homogenization of Diffusion Processes in Random Fields ». Cours de l'École doctorale de l'École polytechnique, 1994.

[PAR98] É. PARDOUX. « Homogenization of Linear Second Order PDEs with Periodic Coefficients: a Probabilistic Approach ». Soumis, 1998.

[ROZ96] A. ROZKOSZ. « Weak Convergence of Diffusions Corresponding to Divergence Form Operator ». *Stochastics and stochastics reports*, vol. 57, pp. 129–157, 1996.

[STA65] G. STAMPACCHIA. « Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques à coefficients discontinus ». *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 15, nº 1, pp. 189–258, 1965.

[STR88] D.W. STROOCK. « Diffusion Semigroups Corresponding to Uniformly Elliptic Divergence Form Operator ». Dans *Séminaire de Probabilités XXII*, tome 1321 de *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 316–347. Springer-Verlag, 1988.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399