



# Etude numérique des solutions périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell par une méthode de contrôle

Mihai Bostan, Frédéric Poupaud

## ► To cite this version:

Mihai Bostan, Frédéric Poupaud. Etude numérique des solutions périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell par une méthode de contrôle. RR-3534, INRIA. 1998. <inria-00073151>

**HAL Id: inria-00073151**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073151>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Étude numérique des solutions périodiques des  
systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell par une  
méthode de contrôle*

Mihai Bostan et Frédéric Poupaud

**N° 3534**

Octobre 1998

THÈME 4



*Rapport  
de recherche*



# Étude numérique des solutions périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell par une méthode de contrôle

Mihai Bostan et Frédéric Poupaud

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 3534 — Octobre 1998 — 34 pages

**Résumé :** Ce travail consiste à appliquer une méthode dite Absorption Limite (MAL) à la résolution des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell avec des conditions limite périodiques en temps. Les principes de base de cette méthode sont présentés dans un cas modèle 1D simplifié. On applique ensuite cette méthode à la résolution de problèmes de diffraction d'ondes plane harmoniques par des obstacles non-convexes bi-dimensionnels parfaitement réfléchissants. Un couplage des équations de Vlasov et de Maxwell pour la modélisation du transport de particules chargées est également présenté. Nous avons ensuite, comparé les solutions obtenues par cette méthode avec celles obtenues par une méthode classique.

**Mots-clés :** Électromagnétisme - Équations de Maxwell - Équation de Vlasov - Volumes finis.

# Numerical study by a controllability method for the calculation of the time-periodic solutions of the Maxwell and Vlasov-Maxwell systems

**Abstract:** In this paper, we introduce the Limit Absorption Method (LAM) which has been developed by the authors to obtain numerical periodic solutions of Partial Differential Equation. The principle of this method was proved on a reduced 1D model. We apply then this general methodology to the solution of scattering problems for harmonic planar waves by two dimensional purely reflecting non-convex obstacles. Numerical results were obtained by the above method for the calculation of the periodic states of the Maxwell and Vlasov-Maxwell systems.

**Key-words:** Electromagnetism - Maxwell equations - Vlasov Equation - Finite volumes.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Étude d'un cas modèle</b>	<b>5</b>
2.1	Convergence vers les états périodiques . . . . .	5
2.2	Méthode de l'absorption limite . . . . .	7
2.3	Vitesse de convergence . . . . .	12
2.4	Illustration numérique . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Application aux équations de Maxwell</b>	<b>15</b>
3.1	Présentation des équations et du schéma . . . . .	15
3.2	Méthode de l'absorption limite pour le système de Maxwell . . .	22
<b>4</b>	<b>Application au système de Vlasov-Maxwell</b>	<b>26</b>
4.1	Présentation des équations . . . . .	26
4.2	Résultats numériques . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>30</b>

## 1 Introduction

De nombreuses recherches sont de plus en plus liées aux études du transport de particules chargées soumises à des champs électromagnétiques. Ces études concernent aussi bien les dispositifs hyper-fréquence, les accélérateurs de particules, les canons à électrons que la physique des plasmas et les semi-conducteurs. La modélisation de ces dispositifs repose sur les équations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson. Le résultat principal dans ce domaine a été obtenu par DiPerna et Lions dans [12]. Ils montrent l'existence de solution faible globale pour le problème Cauchy du système de Vlasov-Maxwell. L'existence de la solution globale classique reste toujours un problème ouvert. Dans l'absence du champ magnétique, qui peut être justifiée par une limite non-relativiste [16], nous obtenons le système de Vlasov-Poisson. Dans ce cas, des solutions faibles globales pour le problème de Cauchy ont été obtenues par Arsenev [14]. L'existence de la solution classique dans deux dimensions d'espace est un résultat de Degond [17] et Ukai [18]. Le même résultat en trois dimensions d'espace a été montré par Pfaffelmoser dans [6] et une méthode simple a été proposée par Lions et Perthame dans [7]. Ce qui est particulièrement intéressant au niveau des applications est la modélisation des régimes permanents avec conditions aux limites. Ces régimes permanents sont caractérisés par des solutions stationnaires ou périodiques. Le cas stationnaire a déjà été étudié tout d'abord pour Vlasov-Poisson en une dimension d'espace dans [1], puis en dimension quelconque et pour Vlasov-Maxwell dans [2]. Dans le cas périodique, des résultats ont été obtenus pour Vlasov-Poisson en une dimension d'espace dans [9], en dimension quelconque dans [10] et pour Vlasov-Maxwell en une dimension d'espace dans [11]. D'autre part, ces régimes sont très difficilement atteints lors des simulations numériques. Afin d'accélérer la convergence vers les états périodiques, nous avons introduit le concept de *solution minimale* comme dans [1] et [2]. Une méthode dite *Absorption Limite* (MAL) a été développée. Nous proposons donc dans ce rapport une méthode pour calculer numériquement les solutions périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell. Dans un premier temps on propose cette méthode dans le cadre d'un modèle EDO et une analyse de la vitesse de convergence sera présentée. Après quelques illustrations numériques sur la résolution de problème

de diffraction d'ondes planes harmoniques, cette méthodologie sera appliquée aux systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell.

## 2 Étude d'un cas modèle

Nous proposons ici d'étudier la convergence vers les régimes périodiques des solutions d'une EDO avec un terme source périodique. La méthode utilisée reposera sur le concept de l'absorption limite. Les résultats obtenus avec la nouvelle méthode seront comparés en terme de vitesse de convergence avec ceux obtenus avec une méthode classique.

### 2.1 Convergence vers les états périodiques

On considère l'équation monodimensionnelle :

$$\frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (1)$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

où  $f$  est une fonction périodique en temps de période  $T$ . La solution analytique de cette équation est donnée par :

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\varepsilon t} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-\varepsilon(t-s)} ds. \quad (3)$$

On s'intéresse ici aux solutions périodiques et en imposant la condition de périodicité  $x(0) = x(T)$ , on obtient :

$$x_0 = \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}}, \quad (4)$$

d'où la solution périodique s'écrit:

$$x_\infty(t) = \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}} \cdot e^{-\varepsilon t} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-\varepsilon(t-s)} ds. \quad (5)$$



Si la donnée initiale  $x_0$  ne vérifie pas (4), l'écart par rapport à la solution périodique est donné par :

$$|x(t) - x_\infty(t)| = \left| x_0 - \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}} \right| \cdot e^{-\varepsilon t}, \quad t > 0. \quad (6)$$

Nous cherchons à déterminer la valeur minimale du temps  $t^*$  de telle sorte que la solution calculée  $x(t)$  soit une  $\eta$  approximation du régime périodique :

$$|x(t) - x_\infty(t)| \leq \eta, \quad t > t^*. \quad (7)$$

En utilisant (6), on déduit pour le temps  $t^*$  une valeur de l'ordre de :

$$t^* \approx O\left(\frac{1}{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\eta}\right)\right), \quad (8)$$

ce qui implique un grand temps de calcul pour les petites valeurs du paramètre  $\varepsilon$ . L'énoncé suivant présente la condition sous laquelle les solutions périodiques données par (5) sont uniformément bornées, indépendamment par rapport à  $\varepsilon$ .

**Proposition 1** *Soit  $f \in L^\infty$  une fonction périodique en temps de période  $T$  et  $x_\infty$  la solution périodique du problème (1), donnée par (5). Si  $f$  vérifie :*

$$\int_0^T f(s) ds = 0, \quad (9)$$

*alors  $x_\infty$  est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$ .*

### Démonstration

Comme  $x_\infty$  est périodique, il suffit d'estimer  $x_\infty(t)$  pour  $t \in ]0, T[$ . En utilisant (5) on peut écrire :

$$|x_\infty(t)| \leq \left| \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}} \right| + T \cdot \|f\|_{L^\infty}.$$

Pour finir la preuve, il reste à montrer que la suite  $\frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}}$  est convergente quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^T f(s) \cdot [1 - \varepsilon(T-s) + \frac{[\varepsilon(T-s)]^2}{2!} + \dots]}{1 - [1 - \varepsilon T + \frac{(\varepsilon T)^2}{2!} - \dots]} \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(s) \cdot (T-s) ds. \end{aligned}$$

## 2.2 Méthode de l'absorption limite

Afin de réduire le temps de calcul, nous allons introduire un terme d'absorption  $\lambda \cdot x(t)$  dans l'équation (1):

$$\lambda \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), \quad t > 0. \quad (10)$$

On obtient ainsi une valeur du temps de convergence :

$$t^* \approx O\left(\frac{1}{\varepsilon + \lambda} \log\left(\frac{1}{\eta}\right)\right) < O\left(\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{\eta}\right)\right). \quad (11)$$

Cependant, même si le temps de calcul d'une  $\eta$  approximation périodique est réduit par rapport à la situation précédente ( indépendamment de  $\varepsilon$  ), on rappelle que cette approximation ne vérifiera pas l'équation non-perturbée (1). L'idée sera de remplacer le paramètre  $\lambda$  par une suite décroissante  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  dont la limite vaut zéro. Nous pouvons énoncer un résultat général de convergence vers le régime périodique :

**Proposition 2** Soient  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante telle que :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0, \\ (ii) \quad & \sum_{n \geq 0} \lambda_n < \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

et  $x_\infty$  la solution périodique (5) du problème (1). Alors l'équation:

$$\lambda(t) \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = x_0, \quad (14)$$

où  $f \in L^\infty$  est une fonction périodique en temps de période  $T$  et  $\lambda(t) = \lambda_n$ ,  $t \in [nT, (n+1)T[$ ,  $n \geq 0$  a une solution unique qui converge vers le régime périodique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(nT + \cdot) - x_\infty(\cdot)\|_{L^\infty(0,T)} = 0. \quad (15)$$

**Démonstration**

On vérifie aisément que la solution  $x(\cdot)$  est donnée par la formule :

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\int_0^t (\varepsilon + \lambda(s)) ds} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-\int_s^t (\varepsilon + \lambda(\tau)) d\tau} ds, \quad t > 0. \quad (16)$$

Notons  $x_n$  les valeurs de la solution  $x$  à  $t = nT$ ,  $n \geq 0$ . Il est facile d'obtenir la relation suivante :

$$x(nT + t) = x(nT) \cdot e^{-(\varepsilon + \lambda_n)t} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-(\varepsilon + \lambda_n)(t-s)} ds, \quad t \in [0, T[, \quad (17)$$

d'où on trouve :

$$x_{n+1} = x_n \cdot e^{-(\varepsilon + \lambda_n)T} + \int_0^T f(s) \cdot e^{-(\varepsilon + \lambda_n)(T-s)} ds, \quad n \geq 0. \quad (18)$$

Posons  $q_n = e^{-(\varepsilon + \lambda_n)T}$  et  $\beta_n = \int_0^T f(s) \cdot e^{-(\varepsilon + \lambda_n)(T-s)} ds$ . Évidemment :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q := e^{-\varepsilon T}, \quad (19)$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta := \int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds. \quad (20)$$

D'abord, en utilisant (16) on constate que la solution  $x(\cdot)$  est bornée :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \|f\|_{L^\infty} \cdot \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} ds \\ &\leq |x_0| + \|f\|_{L^\infty} / \varepsilon. \end{aligned} \quad (21)$$

Avec les notations précédentes, (18) devient :

$$x_{n+1} = q_n \cdot x_n + \beta_n, \quad (22)$$

ce qui permet d'écrire :

$$x_{n+1} = q_n q_{n-1} \dots q_0 x_0 + q_n q_{n-1} \dots q_1 \beta_0 + q_n q_{n-1} \dots q_2 \beta_1 + q_n q_{n-1} \dots q_3 \beta_2 + \dots + q_n \beta_{n-1} + \beta_n, \quad (23)$$

ou bien :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= q_n q_{n-1} \dots q_0 x_0 + q_n q_{n-1} \dots q_1 (\beta_0 - \beta) + q_n q_{n-1} \dots q_2 (\beta_1 - \beta) + \dots + (\beta_n - \beta) \\ &+ \beta (q_n q_{n-1} \dots q_1 + q_n q_{n-1} \dots q_2 + \dots + q_n + 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Puisque  $q_n < q < 1$ , on vérifie facilement que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n q_{n-1} \dots q_0 x_0 = 0$ . Nous allons montrer maintenant que la série  $\sum_{n \geq 0} |\beta_n - \beta|$  est convergente puisque le terme général est majoré par :

$$\begin{aligned} |\beta_n - \beta| &\leq \int_0^T |f(s)| \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} \cdot (1 - e^{-\lambda_n(T-s)}) ds \\ &\leq \lambda_n \frac{T}{\varepsilon} \|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

et donc:

$$\sum_{n \geq 0} |\beta_n - \beta| \leq \frac{T}{\varepsilon} \|f\|_{L^\infty} \cdot \sum_{n \geq 0} \lambda_n < +\infty. \quad (25)$$

Comme  $\sum_{n \geq 0} q^n$  est convergente, alors le produit de convolution est aussi une série convergente, et on a alors nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n |\beta_0 - \beta| + q^{n-1} |\beta_{n-1} - \beta| + \dots + |\beta_n - \beta| = 0, \quad (26)$$

d'où, par majoration:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n q_{n-1} \dots q_1 (\beta_0 - \beta) + q_n q_{n-1} \dots q_2 (\beta_1 - \beta) + \dots + (\beta_n - \beta) = 0. \quad (27)$$

Reste à montrer que la suite  $y_n = 1 + q_n + q_n q_{n-1} + \dots + q_n q_{n-1} \dots q_1$  est convergente:

$$y_n = 1 + q + \dots q^n + q(e^{-\lambda_n T} - 1) + \dots + q^n (e^{-(\lambda_n + \dots + \lambda_1)T} - 1). \quad (28)$$

Soit  $\delta > 0$  et en tenant compte de (ii) on choisit  $k$  tel que :

$$\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} + \dots + \lambda_n < \frac{\delta}{2}, \quad n > k.$$

Ensuite on choisit  $N$  tel que :

$$q^{n-k} < \frac{\delta}{2}, \quad n > N.$$

On peut écrire :

$$|q(e^{-\lambda_n T} - 1) + \dots + q^n (e^{-(\lambda_n + \dots + \lambda_1)T} - 1)| \leq T(\lambda_n q + \dots + (\lambda_n + \dots + \lambda_1)q^n),$$

mais:

$$\begin{aligned}
\lambda_n q + \dots + (\lambda_n + \dots + \lambda_1) q^n &= \lambda_n q + \dots + (\lambda_n + \dots + \lambda_{k+1}) q^{n-k} \\
&+ (\lambda_n + \dots + \lambda_k) q^{n+1-k} + \dots + (\lambda_n + \dots + \lambda_1) q^n \\
&\leq (\lambda_n + \dots + \lambda_{k+1}) (q + q^2 + \dots + q^{n-k}) \\
&+ (\lambda_n + \dots + \lambda_1) q^{n+1-k} (1 + q + \dots + q^{k-1}) \\
&\leq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{q}{1-q} (1 + \sum_{n \geq 0} \lambda_n), \quad n > N.
\end{aligned}$$

Donc on déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{1-q}$ . Finalement, (24) et (27) permettent d'écrire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\beta}{1-q},$$

ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_\infty(nT)) = 0,$$

puisque  $x_\infty(nT) = \frac{\beta}{1-q}$ ,  $n \geq 0$ . On peut maintenant terminer facilement la démonstration en utilisant (5) et (17):

$$\begin{aligned}
|x(nT+t) - x_\infty(t)| &\leq |x(nT) - x_\infty(nT)| + (1 - e^{-\lambda_n t}) |x_\infty(nT)| \\
&+ \int_0^t |f(s)| e^{-\varepsilon(t-s)} (1 - e^{-\lambda_n(t-s)}) ds \\
&\leq |x_n - x_\infty(nT)| + \lambda_n T \cdot \|x_\infty\|_{L^\infty} \\
&+ \lambda_n T \cdot \|f\|_{L^1(0,T)}. \tag{29}
\end{aligned}$$

En passant à la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , on obtient alors (15), ce qui achève la démonstration.

Nous allons définir maintenant la notion de  $\xi$ -approximation du régime périodique :

**Définition 1** *On dit qu'une suite de fonctions  $x_\xi(t)$  est une  $\xi$ -approximation ( $\xi > 0$ ) du régime périodique  $x_\infty(t)$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$|x_\xi(t) - x_\infty(t)| \leq C \cdot \xi, \quad \forall t, \xi. \tag{30}$$

On montre maintenant un résultat dont on aura besoin pour la suite :

**Proposition 3** Soit  $f \in L^\infty$  une fonction périodique qui vérifie (9),  $x(t)$  solution de l'équation :

$$\lambda \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), \quad t \in ]0, T[,$$

qui satisfait :

$$|x(T) - x(0)| \leq \eta,$$

et  $x_\infty(t)$  le régime périodique donné par (5). Alors  $x$  est une approximation de  $x_\infty$  de l'ordre de  $O(\frac{\eta}{\lambda} + \lambda)$ . En particulier, si  $\lambda = \sqrt{\eta}$ , la fonction  $x$  est une  $\sqrt{\eta}$ -approximation du régime périodique.

### Démonstration

Posons  $\delta = x - x_\infty$ . La fonction  $\delta$  vérifiera :

$$\lambda \cdot \delta(t) + \frac{d\delta}{dt} + \varepsilon \cdot \delta(t) = -\lambda \cdot x_\infty, \quad t \in ]0, T[,$$

et :

$$|\delta(T) - \delta(0)| \leq \eta.$$

Notons  $\varphi$  la solution périodique du problème :

$$\lambda \cdot \varphi(t) + \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \cdot \varphi(t) = -x_\infty, \quad t \in ]0, T[,$$

et  $\mu = \delta - \lambda\varphi$ . En utilisant (1) et (9) on déduit que  $\int_0^T x_\infty(s)ds = 0$ . Ensuite, compte tenu de la Proposition 1 on montre qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|\varphi(t)| \leq C$ , pour  $t \in ]0, T[$ . La fonction  $\mu$  vérifie :

$$\lambda \cdot \mu(t) + \frac{d\mu}{dt} + \varepsilon \cdot \mu(t) = 0, \quad t \in ]0, T[,$$

et :

$$|\mu(T) - \mu(0)| \leq \eta. \tag{31}$$

Mais  $\mu(t) = \mu(0) \cdot e^{-(\varepsilon+\lambda)t}$  et donc la condition (31) impose :

$$|\mu(0)| \leq \frac{\eta}{1 - e^{-(\varepsilon+\lambda)T}} \approx O\left(\frac{\eta}{(\varepsilon + \lambda)T}\right).$$

Finalement, on déduit :

$$\begin{aligned} |\delta(t)| &\leq |\mu(t)| + \lambda|\varphi(t)| \\ &\leq C\frac{\eta}{(\varepsilon + \lambda)T} + C\lambda \\ &\leq C\frac{\eta}{\lambda T} + C\lambda. \end{aligned} \tag{32}$$

Il est facile à vérifier maintenant que  $|x(t) - x_\infty(y)| \approx O(\sqrt{\eta})$  si  $\lambda = \sqrt{\eta}$ .

### 2.3 Vitesse de convergence

Comme annoncé dans la section précédente, nous sommes intéressés par l'estimation du temps de calcul pour atteindre une approximation du régime périodique. On peut énoncer la proposition suivante :

**Proposition 4** *Avec les mêmes notations que dans la Proposition 2, supposons que  $f \in L^\infty$  est une fonction périodique qui vérifie (9) et que la suite  $\lambda_n$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n, \text{ si } |x_{n+1} - x_n| > \eta, \ n \geq 0, \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n e^{-cT}, \text{ si } |x_{n+1} - x_n| \leq \eta, \ n \geq 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Alors le temps de convergence vers une  $\sqrt{\eta}$ -approximation du régime périodique est de l'ordre de :

$$t^* = O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \log\left(\frac{1}{\eta}\right)\right). \tag{34}$$

#### Démonstration

On a bien  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\} \subset \{1, e^{-cT}, e^{-2cT}, \dots\}$ . Nous allons montrer que la suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  est convergente vers zéro, ce qui revient à montrer que chaque valeur  $e^{-ncT}$  ne peut être prise que d'un nombre fini de termes  $\lambda_m$ . Soit par

exemple  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$  tels que  $\lambda_m = e^{-ncT}$  et on cherche à estimer la longueur de la chaîne constante  $\lambda_m = \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_{m+p-1} > \lambda_{m+p}$ , où  $\lambda_{m+p} = e^{-cT} \lambda_{m+p-1} = e^{-(n+1)cT}$ . On peut écrire :

$$x_{m+k} = q_m x_{m+k-1} + \beta_m, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

ce qui conduit à :

$$x_{m+k} = \frac{\beta_m}{1 - q_m} + q_m^k \left( x_m - \frac{\beta_m}{1 - q_m} \right), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

et donc :

$$x_{m+k} - x_{m+k-1} = q_m^{k-1} \left( x_m - \frac{\beta_m}{1 - q_m} \right) (q_m - 1), \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Compte tenu du choix (33),  $p$  est le plus petit nombre entier qui vérifie :

$$\eta \geq |x_{m+p} - x_{m+p-1}| = q_m^{p-1} \cdot \left| x_m - \frac{\beta_m}{1 - q_m} \right| \cdot (1 - q_m).$$

En utilisant la *Proposition 1*, on déduit que la suite  $(x_m - \frac{\beta_m}{1 - q_m})_{m \geq 0}$  est bornée et donc il existe une constante  $a > 0$  telle que :

$$p_m \leq \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right). \quad (35)$$

Donc chaque valeur se répète  $\lceil \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log(\frac{a}{\eta}) \rceil$  fois. Maintenant, il est évident que la suite  $(\lambda_m)_{m \geq 0}$  n'est pas stationnaire, donc  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = 0$  et en plus :

$$\begin{aligned} \sum_m \lambda_m &\leq \sum_n \lambda_m \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right) \\ &= \log\left(\frac{a}{\eta}\right) \sum_n \frac{e^{-ncT}}{T(\varepsilon + e^{-ncT})} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon T(1 - e^{-cT})} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Donc les hypothèses (i), (ii) sont vérifiées et on a la convergence vers le régime périodique. Pour terminer la démonstration, nous allons estimer le temps de



convergence vers une  $\sqrt{\eta}$  approximation du régime périodique. Comme nous avons montré dans la *Proposition 3* il suffit que le paramètre  $\lambda$  soit de l'ordre de  $O(\sqrt{\eta})$ . Alors le temps de convergence sera de l'ordre de :

$$\begin{aligned} t^* &= \sum_{\lambda_m > \sqrt{\eta}} T p_m = \sum_{\lambda_m > \eta} T \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right) \\ &= \sum_{e^{-ncT} > \sqrt{\eta}} e^{ncT} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \log\left(\frac{a}{\eta}\right)\right). \end{aligned}$$

**Remarque 1** Le choix (33) de la suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  peut être donné par une équation du type :

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(x_{n+1} - x_n) \cdot \lambda(t) = 0, \quad t \in [(n+1)T, (n+2)T[. \quad (36)$$

où  $\mathcal{R}(\cdot) = c \cdot \chi_{[-\eta, \eta]}(\cdot)$ .

D'une façon encore plus générale, comme fonction  $\mathcal{R}$  on choisira un critère de périodicité pour  $x(\cdot)$ . Dans tous ces cas, le calcul des solutions périodiques de l'équation (1) reviendra à la résolution du système :

$$\begin{cases} \lambda(t) \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), & t > 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(x(\cdot))\lambda(t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (37)$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \lambda(0) = \lambda_0. \end{cases} \quad (38)$$

**Remarque 2** Si à l'instant initial  $\lambda_0 = 0$ , alors le problème (37) se réduit à l'équation (1).

### Démonstration

La conclusion est immédiate en tenant compte de (33) dans le cas discret, ou bien de (36) dans le cas continu.

## 2.4 Illustration numérique

Nous souhaitons maintenant comparer numériquement les vitesses de convergence de la méthode (MAL) ( $\lambda_0 > 0$ ) avec celle d'une méthode classique ( $\lambda_0 = 0$ ). On s'intéresse dans un premier temps aux régimes périodiques de l'équation (1) et du système (37) pour une valeur du paramètre  $\varepsilon = 0.01$  et un terme source périodique  $f(t) = \cos(\omega t)$  avec  $\omega = 1$ . Le régime périodique de ce problème est donné par:

$$x_\infty(t) = (\varepsilon \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) / (\varepsilon^2 + \omega^2), \quad t > 0. \quad (39)$$

Comme fonction  $\mathcal{R}$  nous avons choisi:

$$\mathcal{R}(x(t)) = \chi_{[-\eta, \eta]}(x(nT) - x((n-1)T)), \quad t \in [nT, (n+1)T[. \quad (40)$$

On présente les solutions calculées, obtenues avec les deux méthodes. Ensuite, on étudie le comportement des méthodes dans le cas  $\varepsilon = 0.0001$ . Dans le premier cas ( $\varepsilon = 0.01$ ), la méthode classique (1) donne une bonne approximation de la solution périodique après 70 périodes, tandis que la méthode (MAL) calcule le régime périodique après 6 périodes. Si dans cette situation les différences ne sont pas importantes, ce n'est pas le cas dans la deuxième. Cette fois-ci, le gain en temps de calcul s'avéra très important. On constate ainsi une très lente convergence de la solution calculée à l'aide de la méthode classique (1). Au contraire, la méthode (MAL) assure une convergence très rapide vers la solution périodique, une très bonne approximation étant atteinte après 6 périodes. Au vu des résultats présentés ci-dessus, la nouvelle méthode (MAL) introduite dans ce chapitre nous semble bien adaptée à nos calculs. De plus, on remarquera l'indépendance de la vitesse de convergence par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$ .

## 3 Application aux équations de Maxwell

### 3.1 Présentation des équations et du schéma

On s'intéresse maintenant à la résolution de phénomènes électromagnétiques périodiques. Ils sont régis par les équations de Maxwell qui s'écrivent dans le

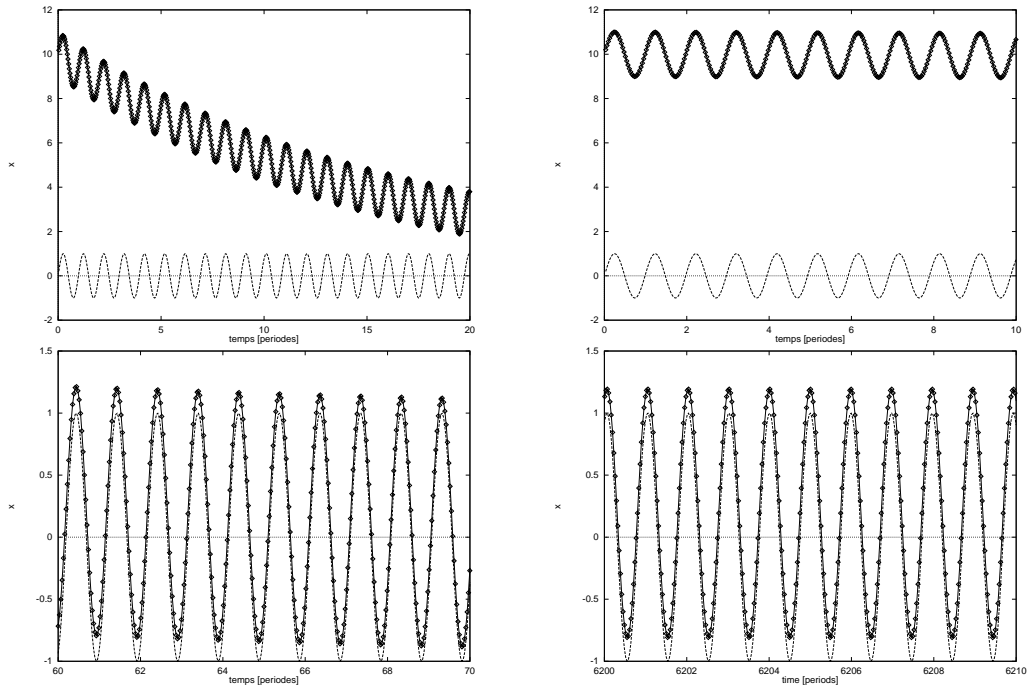


FIG. 1 – *Convergence vers le régime périodique par la méthode classique*

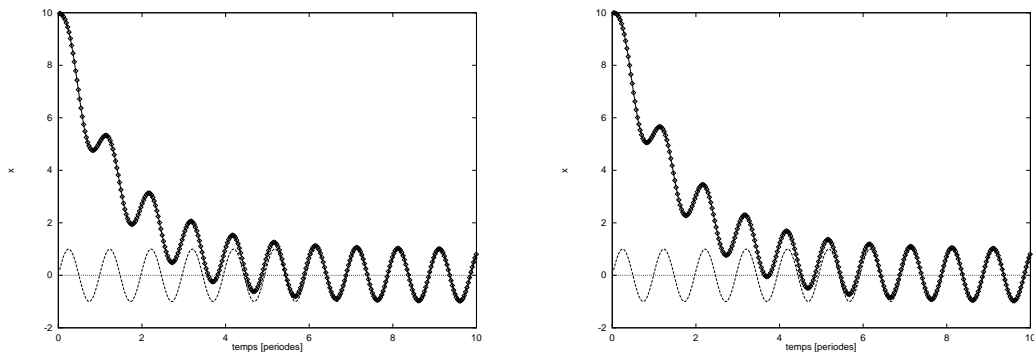


FIG. 2 – *Convergence vers le régime périodique par la MAL ( $\lambda_0 > 0$ )  
(gauche :  $\varepsilon = 0.01$  / droite :  $\varepsilon = 0.0001$ )*

vide en l'absence de charges et de courant sous la forme :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{H}) = 0, \end{cases} \quad (41)$$

où  $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$  et  $\vec{H} = \vec{H}(t, \vec{x})$  sont respectivement les champs électrique et magnétique,  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide. Du fait de la redondance des équations de Gauss dans le modèle continu pour des conditions initiales vérifiant ces contraintes, elles n'apparaissent pas explicitement dans le système écrit ci-dessus. Le système de Maxwell est un système conservatif et hyperbolique. L'approximation numérique utilisée repose sur une méthode de volumes finis. On se contente donc ici de rappeler brièvement les grandes lignes de l'approximation utilisée. Le lecteur intéressé par une étude plus détaillée pourra se référer par exemple à [19].

En dimension trois d'espace, une présentation des équations de Maxwell sous la forme adimensionnée conservative donne :

$$Q_t + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(Q) = 0, \quad (42)$$

avec :

$$Q = {}^t(H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z)$$

On note :

$$\mathbf{F}(Q) = {}^t(F_1(Q), F_2(Q), F_3(Q))$$

avec :

$$\begin{cases} F_1(Q) = {}^t(0, -E_z, E_y, 0, H_z, -H_y), \\ F_2(Q) = {}^t(E_z, 0, -E_x, -H_z, 0, H_x), \\ F_3(Q) = {}^t(-E_y, E_x, 0, H_y, -H_x). \end{cases}$$

On complète (42) par des conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma$  du domaine de calcul  $\Omega$  ainsi que des conditions initiales. On établit la formulation faible de (42), après discrétisation du domaine de calcul. On obtient :

$$\text{Volume}(C_i) (Q_t)_i + \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij} + \text{termes de bord} = 0 \quad (43)$$

où  $K(i)$  est l'ensemble des voisins du noeud  $i$  et  $C_i$  est la cellule centrée au noeud  $i$ . Les termes de bord (condition aux limites de type métallique et condition absorbante) sont développés dans [20] par exemple. On donne ci-dessous à titre d'indication l'expression du flux numérique que l'on obtient. On a :

$$\Phi_{ij} = \Phi(Q_i, Q_j, \vec{\eta}_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(Q_i, \vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j, \vec{\eta}_{ij})}{2} - \frac{\gamma}{2} |\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})| (Q_j - Q_i),$$

où  $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij}) = \eta_1 F_1(Q) + \eta_2 F_2(Q) + \eta_3 F_3(Q)$  est une combinaison linéaire de flux et  $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$  la matrice jacobienne associée à  $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij})$ . Pour des raisons de précision et de stabilité, nous calculons les valeurs aux interfaces des cellules à l'aide d'une combinaison convexe des gradients hermitiens. Ce calcul est réalisé en introduisant un paramètre de décentrage et les schémas résultants sont connus sous le nom de  $\beta$ -schémas. Les valeurs interpolées sont données par :

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= Q_i + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(Q_j - Q_i) + 2\beta \nabla Q_i \cdot \vec{S}_i \vec{S}_j \}, \\ Q_{ji} &= Q_j - \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(Q_j - Q_i) + 2\beta \nabla Q_j \cdot \vec{S}_i \vec{S}_j \}, \end{aligned}$$

où  $S_i$  sont les sommets des tétraèdres.

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une combinaison d'ondes planes dans une cavité rectangulaire métallique semi-ouverte, en deux dimensions d'espace. Le domaine de calcul sera un rectangle  $\Omega = ]0, 25m[ \times ]0, 11m[$ . On impose des conditions limites absorbantes sur la frontière extérieure  $\Gamma_{ext}$  et métalliques sur la frontière intérieure  $\Gamma_{int}$ . Nous avons considéré le mode Transverse Magnétique ( $H_z = 0$ ). Le champ incident arrive de droite à gauche sur la cavité métallique et il est donné par les formules :

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{k_y}{|k|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right) - \frac{k_y}{|k|} \cos\left(0.5 \cdot \omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right) \\ H_y &= +\frac{k_x}{|k|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right) + \frac{k_x}{|k|} \cos\left(0.5 \cdot \omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right) \\ E_z &= \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right) + \cos\left(0.5 \cdot \omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right), \end{aligned} \quad (44)$$

où  $|k| = \omega/c = \pi\sqrt{2}$ ,  $k_x = -|k|$ ,  $k_y = 0$ . Nous avons utilisé un maillage structuré en triangles, comportant une quinzaine de points par longueur d'onde

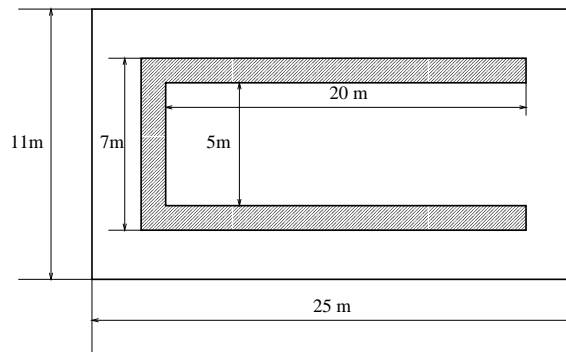
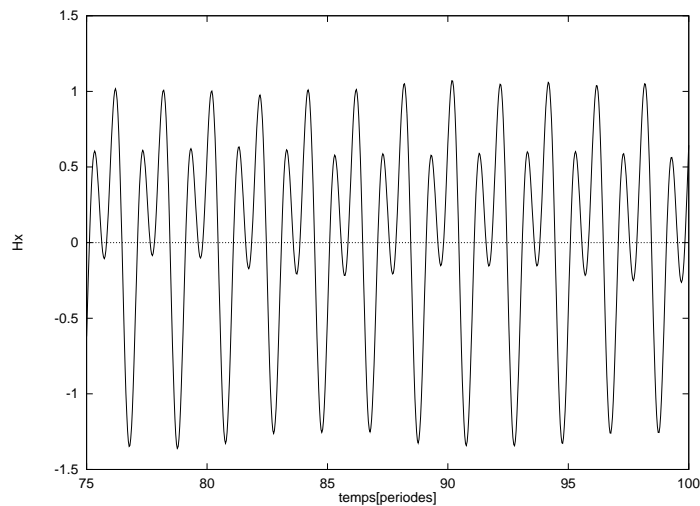


FIG. 3 – Cavité métallique rectangulaire semi-ouverte

( $\lambda = \sqrt{2}$ ). On décide maintenant de suivre l'évolution en temps de la composante  $H_x$  du champ magnétique en un point à l'intérieur de la cavité métallique et de l'énergie du champ électromagnétique. Dans un deuxième temps, nous

FIG. 4 –  $H_x(t)$ -cavité rectangulaire

allons illuminer une cavité métallique circulaire par une onde harmonique. On choisira comme domaine de calcul une boite  $\Omega = ]0, 11m[ \times ]0, 11m[$  et le champ

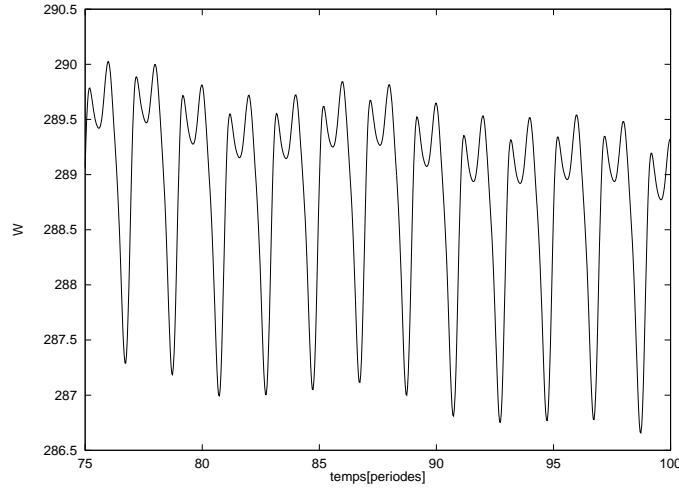


FIG. 5 – Énergie du champ électromagnétique-cavité rectangulaire

incident sera donné par les formules:

$$\begin{aligned}
 H_x &= -\frac{k_y}{|k|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right), \\
 H_y &= +\frac{k_x}{|k|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right), \\
 E_z &= \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}\right)\right),
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

avec les mêmes valeurs des paramètre  $\omega, k_x, k_y$  comme dans le cas précédent. On constate que les régimes périodiques sont très difficilement atteints dans le premier cas, tandis que dans le deuxième cas on n'observe aucune périodicité (à cause de la géométrie plus compliquée). En effet, la méthode classique ne permet pas de calculer des bonnes approximations des solutions périodiques, même pour des longs temps de calcul ( quelques centaines de périodes ). Dans le paragraphe suivant nous allons appliquer la méthode (*MAL*) afin de calculer des bonnes approximations des solutions périodiques.

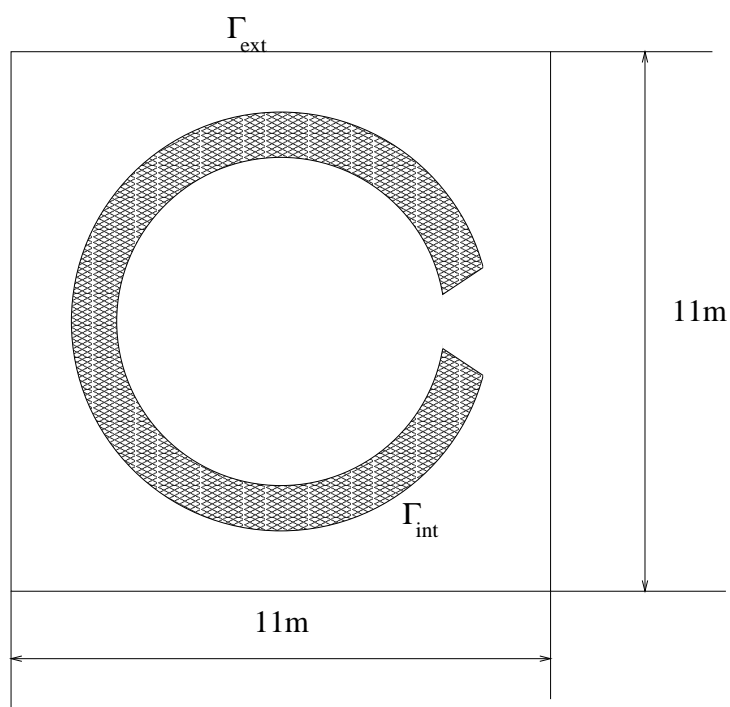
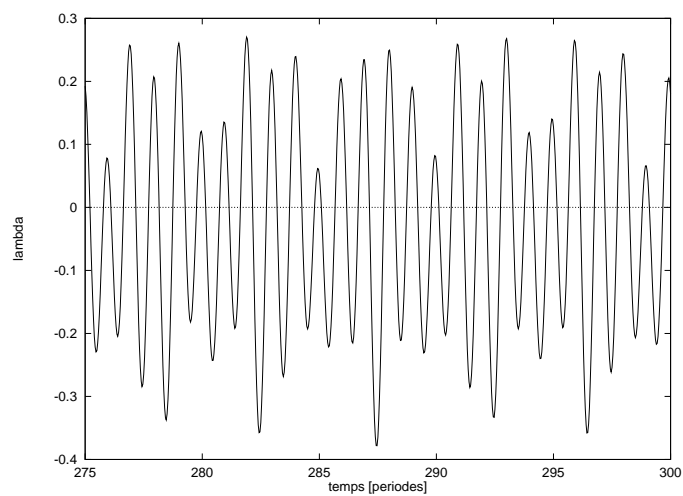


FIG. 6 – Cavité métallique circulaire

FIG. 7 –  $H_x(t)$ -cavité circulaire



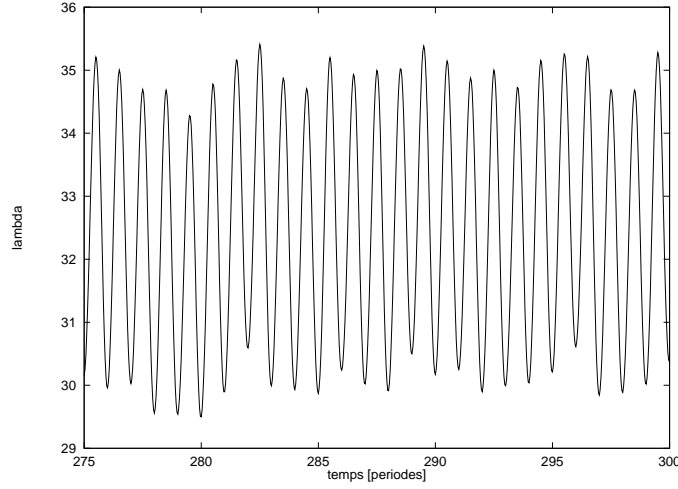


FIG. 8 – Énergie du champ électromagnétique-cavité circulaire

### 3.2 Méthode de l'absorption limite pour le système de Maxwell

On présente maintenant la méthode (*MAL*) appliquée au système des équations de Maxwell. Comme dans la section précédente, nous introduisons une perturbation proportionnelle au champ électromagnétique. Le système perturbé des équations de Maxwell en trois dimensions d'espace s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda(t)\vec{H} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0, \\ \lambda(t)\vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Pour fermer le système, il faudra préciser l'évolution en temps de la fonction inconnue  $\lambda(\cdot)$ , qui sera donnée par une équation supplémentaire du type (36). Lorsque nous calculons des solutions périodiques du système classique de Maxwell (non-perturbé) par la méthode (*MAL*), on doit considérer les points suivants:

- (i) s'assurer que l'état périodique est bien atteint,

(ii) s'assurer que le paramètre  $\lambda$  converge rapidement vers zéro.

Le point (i) revient à la définition d'un bon critère de périodicité. Nous avons d'abord utilisé le critère proposé dans [21]. Si la solution est supposée harmonique :

$$Q(t, x) = Q_0(x) \cos(\omega t + \varphi),$$

alors elle vérifie l'équation différentielle en temps :

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0,$$

ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 + \omega^2 Q^2 dx = \text{const.}$$

Nous proposons ici un critère basé sur un calcul en utilisant la norme  $L^2$  du champ  $Q$  et de sa dérivée temporelle  $\frac{dQ}{dt}$  à chaque pas de temps. Le critère  $\mathcal{C}^1$  est donné par :

$$\mathcal{C}^1 = \frac{\left| \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 (ndt) + \omega^2 Q^2 (ndt) - \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 ((n-1)dt) - \omega^2 Q^2 ((n-1)dt) \right\} dx \right|}{\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 ((n-1)dt) + \omega^2 Q^2 ((n-1)dt) \right\} dx}.$$

Toutefois, si le champ  $Q$  n'est pas une onde harmonique, le critère  $\mathcal{C}^1$  ne sera plus satisfait ( par exemple une combinaison de deux ondes planes ). Un nouveau critère, plus général, doit être utilisé. On pourra prendre comme base du critère l'énergie évaluée sur la totalité du domaine et à chaque période en temps :

$$\mathcal{C}^2(Q(nT)) = \frac{\left| \int_{\Omega} \{ Q^2(nT, x) - Q^2((n-1)T, x) \} dx \right|}{\int_{\Omega} Q^2((n-1)T, x) dx}, \quad n \geq 1.$$

Finalement, le critère  $\mathcal{C}^2$  peut être amélioré en calculant le résidu de la façon suivante :

$$\mathcal{C}^3(Q(nT)) = \frac{\int_{\Omega} |Q(nT, x) - Q((n-1)T, x)|^2 dx}{\int_{\Omega} Q^2((n-1)T, x) dx}, \quad n \geq 1.$$

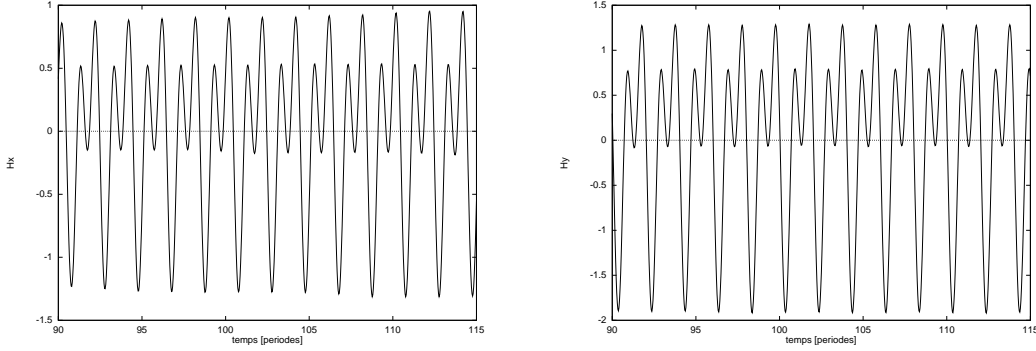


FIG. 9 –  $H_x/H_y$  dans la cavité rectangulaire

Contrairement au premier cas, quand le résidu  $\mathcal{C}^1$  était calculé à chaque pas de temps, on observe que les résidus  $\mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3$  sont à calculer seulement à chaque période. Maintenant, on peut compléter le système (46) par l'équation :

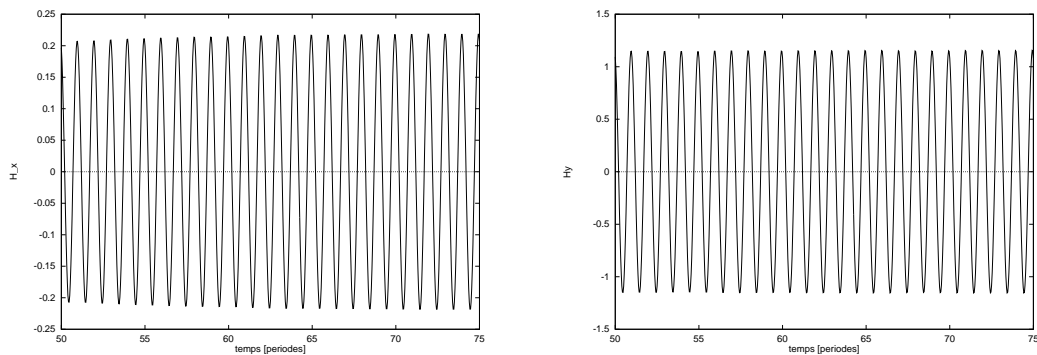
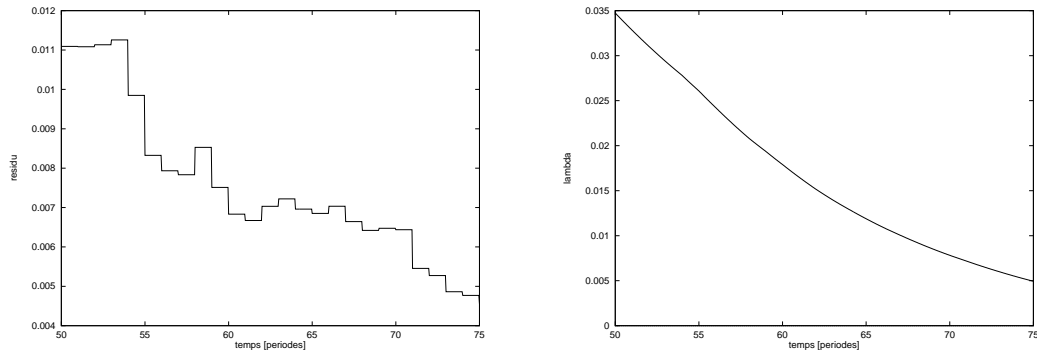
$$\frac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(\mathcal{C}(H, E)) \cdot \lambda(t) = 0, \quad t > 0, \quad (47)$$

avec la condition initiale :

$$\lambda(0) = \lambda_0,$$

où  $\mathcal{R} = \chi_{[-\eta, \eta]}$ . Nous reprenons maintenant les expériences numériques du paragraphe précédent, en utilisant (46) et (47). On a choisit comme valeur initiale  $\lambda_0 = 0.1$  pour la cavité rectangulaire et  $\lambda_0 = 0.5$  pour la cavité circulaire. Comme résidu nous avons utilisé  $\mathcal{C}^3$  pour la combinaison d'ondes planes et  $\mathcal{C}^1$  pour l'onde harmonique. Nous présentons l'évolution en temps des composantes du champ électromagnétique. On constate que les régimes périodiques sont bien atteints, après une cinquantaine de périodes, les résidus étant de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Au même temps il faut s'assurer que les solutions obtenues vérifient le système classique de Maxwell, ce qui revient à une décroissance rapide du paramètre  $\lambda$  vers zéro. En effet, on observe des valeurs de l'ordre de  $10^{-5}$  pour l'absorption  $\lambda$  après 150 périodes.

FIG. 10 –  $H_x/H_y$  dans la cavité circulaireFIG. 11 – Résidu  $C^1$ /paramètre  $\lambda$  dans la cavité circulaire

## 4 Application au système de Vlasov-Maxwell

On propose dans cette partie d'effectuer quelques expériences numériques pour illustrer la précision et la vitesse de convergence vers les régimes périodiques de la méthode (MAL) appliquée au transport de particules chargées soumises aux champs électromagnétiques.

### 4.1 Présentation des équations

Le modèle le plus général pour la simulation du transport de particules chargées sans collisions repose sur les équations couplées de Vlasov et de Maxwell:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} (E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (48)$$

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{H}) = -\vec{j}, \end{cases} \quad (49)$$

où le couplage est donné par la densité de courant :

$$\vec{j}(t, x) = \int_v \vec{v} f(t, x, v) dv. \quad (50)$$

Ici  $(t, x, v)$  représente le temps, la position et la vitesse,  $f$  est la fonction de distribution de particules chargées,  $(E, H)$  est le champ électromagnétique. Pour l'approximation numérique des équations de Maxwell, on utilise la méthode volumes finis introduite dans le paragraphe 3.1. L'équation de Vlasov (48) est approchée numériquement en utilisant une méthode déterministe qui repose sur une approximation de la fonction de distribution  $f$  par une combinaison de fonctions de Dirac :

$$f(t, x, v) = \sum_{k=1}^N w_k f_k \delta(x - x_k(t)) \otimes \delta(v - v_k(t)), \quad (51)$$

où  $N$  est le nombre de particules,  $w_k$  est le volume dans l'espace des phases de la cellule associée à la particule  $k$  et  $f_k$  est le poids de la particule  $k$ . Les

fonctions  $(x_k(t), v_k(t))$  vérifient le système différentiel:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = v_k(t), \\ \frac{dv_k}{dt} = \frac{q}{m}(E(t, x_k(t)) + v_k(t) \wedge (\mu_0 H(t, x_k(t)))). \end{cases} \quad (52)$$

La densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}(t, x) = q \sum_{k=1}^N w_k f_k \vec{v}_k(t) \delta(x - x_k(t)).$$

Le champ électromagnétique dans chaque point  $x_k(t)$  est interpolé à l'aide des fonctions  $P^1$  et la densité de courant au noeud  $S_i$  du maillage est calculée par :

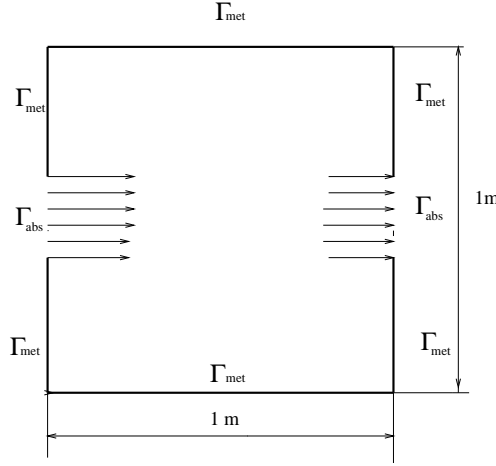
$$\begin{aligned} \vec{j}(t, S_i) &= \frac{1}{V_i} \int \vec{j}(t, x) \phi_i(x) dx \\ &= \frac{q}{V_i} \sum_{k=1}^N w_k f_k \vec{v}_k(t) \phi_i(x_k(t)), \end{aligned}$$

où  $V_i = \int \phi_i(x) dx$  et  $\phi_i$  est la fonction  $P^1$  associée au noeud  $S_i$ .

## 4.2 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe les solutions numériques obtenues, dans un premier temps, par la méthode classique ( $\lambda = 0$ ) et dans un deuxième temps en utilisant la méthode (MAL). Le domaine de calcul sera une boîte 2D rectangulaire  $]0, 1m[ \times ]0, 1m[$  et on considère le mode *Transverse Électrique* ( $E_z = 0$ ). On impose des conditions limites absorbantes et métalliques comme indiqué dans la figure. Deux espèces de particules chargées sont injectées dans le domaine, par la partie gauche de la frontière absorbante, à la fréquence de résonance de la boîte :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

FIG. 12 – *Cavité métallique/absorbante*

Les fonctions de distributions des deux espèces de particules sont données par :

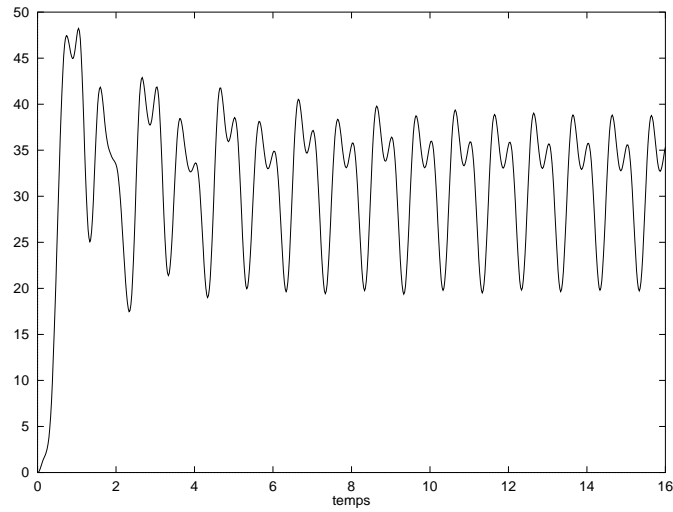
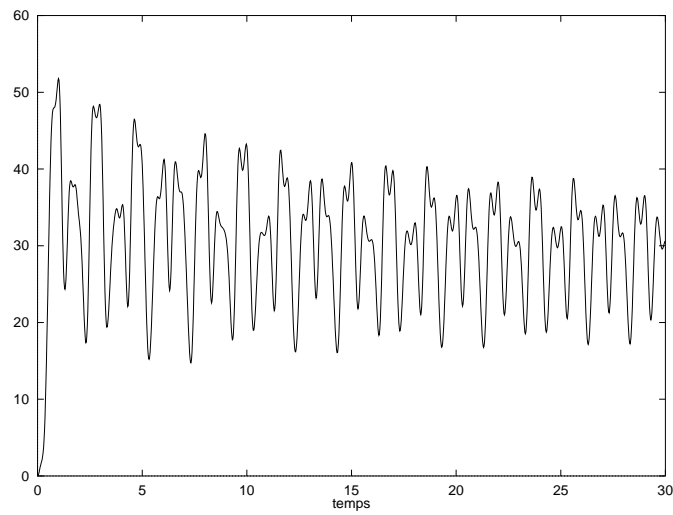
$$g_e(t, x, v) = \begin{cases} -|e|(2 + \cos(\omega t)) \cdot \delta(v - 3), & x = 0, v_x > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (53)$$

et :

$$g_i(t, x, v) = \begin{cases} +|e|(2 + \sin(\omega t)) \cdot \delta(v - 3), & x = 0, v_x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (54)$$

Plusieurs expériences numériques ont été faites, selon la largeur de la bande d'injection qui jouera le rôle du petit paramètre  $\varepsilon$  introduit dans la section 2.1, compte tenu du fait que les conditions limites absorbantes ont un effet dissipatif. En utilisant la méthode classique (pas de perturbation,  $\lambda = 0$ ) on observe un bon comportement des solutions périodiques après une dizaine de périodes si la frontière absorbante représente 50% de la frontière totale. Si  $\Gamma_{abs}$  est réduite à 20% ou à 10%, des difficultés apparaissent pour capter les solutions périodiques. Nous avons représenté les solutions calculées sur un temps de l'ordre de quelques dizaines de périodes, mais en effet, les régimes périodiques semblent très difficilement à atteindre même pour des grands temps de calcul (des centaines de périodes).

Dans le deuxième cas (MAL,  $\lambda > 0$ ) des bonnes approximations des régimes périodiques sont obtenues après une dizaine de périodes, même dans le cas de

FIG. 13 – *Énergie électromagnétique*,  $\lambda_0 = 0$ ,  $CLA = 50\%$ FIG. 14 – *Énergie électromagnétique*,  $\lambda_0 = 0$ ,  $CLA = 20\%$



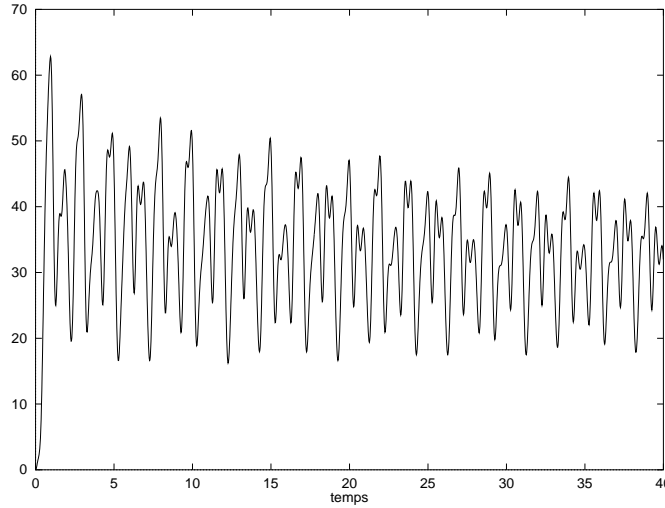
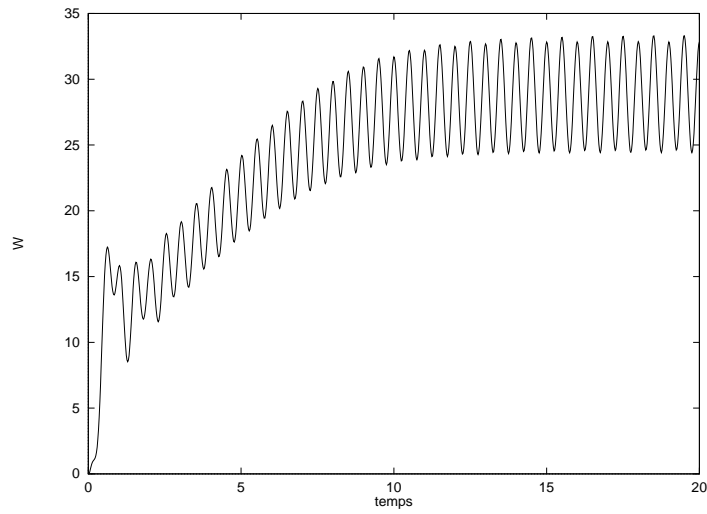
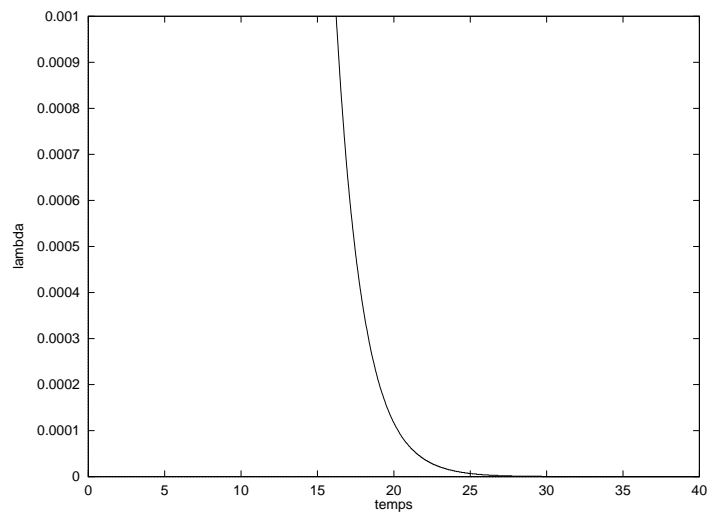


FIG. 15 – Énergie électromagnétique,  $\lambda_0 = 0$ ,  $CLA = 10\%$

$\Gamma_{abs}$  réduite à 10%. L'indépendance du temps de convergence par rapport au facteur dissipatif confirme les résultats de la *Proposition 4*. Nous avons suivi aussi l'évolution en temps du paramètre  $\lambda$ , afin de justifier la convergence des solutions du système perturbé vers les solutions du système classique de Vlasov-Maxwell. Nous observons des valeurs très petits  $\lambda \approx 10^{-4}$  après une vingtaine de périodes.

## 5 Conclusions

Le but de notre étude était d'obtenir une méthode pour calculer les régimes périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell, en minimisant si possible la diffusion numérique tout en conservant en coût en temps de calcul raisonable. Pour cela nous avons introduit une perturbation proportionnelle à un petit paramètre  $\lambda$  dans les équations du système de Maxwell afin d'accélérer la convergence vers les régimes périodiques. L'évolution en temps du paramètre  $\lambda$  sera décrite par une équation dont le rôle sera de diminuer la perturbation au fur et à mesure, selon un critère de périodicité. Une étude théorique de la méthode (MAL) a été présentée dans le cadre d'un cas modèle 1D ainsi qu'une

FIG. 16 – Énergie électromagnétique,  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $CLA = 10\%$ FIG. 17 –  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $CLA = 10\%$

estimation de la vitesse de convergence, qui a été validée par des résultats numériques. Les expériences numériques réalisées par cette méthode prouvent son efficacité pour des simulations en électromagnétisme et en transport de particules chargées.

## Références

- [1] C. Greengard and P.A. Raviart, *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson system*, Comm. Pure and Appl. Math. XLIII(1990), pp. 473-507.
- [2] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Marxwell system*, Forum Math., 4(1992), pp. 499-527.
- [3] Y. Guo, *Regularity for the Vlasov equation in a half space*, Indiana Univ. Math. J. 43(1994), pp 255-320.
- [4] Y. Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Marxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys. 154(1993), pp. 245-263.
- [5] B. Bodin, *Modélisation et simulation numérique du régime de Child-Langmuir*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1995).
- [6] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in 3 dimensions for general initial data*, J. Diff. Eq. 95(1992), pp. 281-303.
- [7] P.L. Lions and B. Perthame *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105(1991), pp. 415-430.
- [8] N. Ben.Abdallah *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Preprint.
- [9] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.325, Série I, p.1333-1336, 1997.
- [10] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, soumis à M3AS, 1998.
- [11] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the 1D Vlasov-Marxwell system with boundary conditions*, work in process.

- 
- [12] R. J. Diperna et P. L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Math. XVII(1989), pp. 729-757.
- [13] M. Bezdard, *Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell system*, Semin. Equ. Deriv. Partielles, Ec. Polytech., Cent. Math., Palaiseau Semi 1992-1993, Exp. No.4, pp. 17 (1993).
- [14] A. Arsenev, *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, USSR Comp. Math. and Math. Phys. 15, 1975, pp. 131-143.
- [15] P. Degond, *Regularité de la solution des équations cinétiques en physiques de plasmas*, [J] Semin., Equations Deriv. Partielles 1985-86, Expose No.18, 11 p. (1986).
- [16] P. Degond, *Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity*, [J] Math. Methods Appl. Sci. 8, 533-558 (1986).
- [17] P. Degond, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, [J] Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 19, 519-542 (1986).
- [18] K. Asano and S. Ukai, *On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equation*, [CA] Pattern and waves. Qualitative analysis of nonlinear differential equations, Stud. Math. Appl. 18, 369-383 (1986).
- [19] J.P. Cioni *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*. Thèse de Ph.D., Université de Nice Sophia-Antipolis, 1995.
- [20] J.P. Cioni, L. Fezoui et D. Issautier *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equation*. La Recherche Aérospatiale, no 5, 1994, pp. 319-328.
- [21] R. Löhner and J. Ambrosiano *A finite element solver for the Maxwell equations* GAMNI-SMAI conference on numerical methods for the solution of Maxwell equations, Paris, 1989.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399