

Un algorithme d'identification de frontières soumises à des conditions aux limites de Signorini

Slim Chaabane, Mohamed Jaoua

► **To cite this version:**

Slim Chaabane, Mohamed Jaoua. Un algorithme d'identification de frontières soumises à des conditions aux limites de Signorini. RR-3453, INRIA. 1998. <inria-00073237>

HAL Id: inria-00073237

<https://hal.inria.fr/inria-00073237>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Un algorithme d'identification de frontières
soumises à des conditions aux limites de Signorini*

Slim CHAABANE & Mohamed JAOUA

N° 3453

Juillet 1998

THÈME 4



*Rapport
de recherche*

Un algorithme d'identification de frontières soumises à des conditions aux limites de Signorini

Slim CHAABANE* & Mohamed JAOUA†

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projets MIAOU

Rapport de recherche n° 3453 — Juillet 1998 — 16 pages

Résumé : On s'intéresse dans ce travail à un problème inverse non linéaire d'identification d'une frontière inconnue γ par des mesures de surfaces, les conditions aux limites imposées sur cette frontière γ étant de type Signorini. Le problème est d'abord transformé en un problème d'optimisation de forme, par la définition d'une fonction de type Kohn-Vogelius, dont nous montrons que le seul minimum est la frontière recherchée, et que le gradient dans une direction donnée θ ne dépend que du seul état u^0 , et non de sa dérivée Lagrangienne $u^1(\theta)$.

Mots-clés : Problèmes inverses géométriques, identification, conditions aux limites de Signorini, détection de frontières, dérivation par rapport au domaine, fonctionnelle de Kohn-Vogelius, optimisation de forme.

This work was partially achieved during visits of the first author at INRIA Sophia Antipolis, supported by the french-tunisian cooperation within the CMCU research program number 98F 1403 and entitled *Analyse harmonique et approximation méromorphe appliquées à l'optimisation et aux problèmes inverses*.

* ENIT-Lamsin, BP 37, 1002 Tunis-Belvédère, Tunisie & Faculté des Sciences de Monastir, Route de Kairouan 5000 Monastir, Tunisie

† ENIT-Lamsin and UTC, BP 529, 60205 Compiègne cedex France

An algorithm for the identification of boundaries submitted to Signorini boundary conditions

Abstract: This work deals with a non linear inverse problem of reconstructing an unknown boundary γ , the boundary conditions prescribed on γ being of Signorini type, by using boundary measurements. The problem is turned into an optimal shape design one, by constructing a Kohn & Vogelius-like cost function, the only minimum of which is proved to be the unknown boundary. Furthermore, we prove that the derivative of this cost function with respect to a direction θ depends only on the state u^0 , and not on its Lagrangian derivative $u^1(\theta)$.

Key-words: geometrical inverse problems, identification, Signorini type boundary conditions, unknown boundary, domain derivatives, Kohn-Vogelius function, optimal shape design.

0 Extended English Abstract

We are interested in this work in the study of a geometrical inverse problem, which consists in finding the shape of an unknown part γ of the boundary $\partial\Omega$ of a two-dimensional body Ω , by using thermal measurements on some part M of the boundary. The two extremal points of the unknown boundary γ are supposed to be fixed, while Signorini type boundary conditions are prescribed on γ .

Most the numerical algorithms developed for identification purposes are based on a least squares approach: a cost function, to be minimized, is defined as the quadratic gap between the measured data, and the corresponding response computed by solving - using the prescribed flux ϕ - a Neumann boundary value problem on the domain. The unknown part of the boundary is then updated. Kohn & Vogelius [12, 1987] improved this approach by proposing a “variational” cost function, representing the energy gap between the “Neumann” solution u_N , and the “Dirichlet” one u_D computed using the measured data f on the part M . By setting the boundary conditions in a right way, one can get an expression of the cost function as a sum of two uncoupled compliance functions, the derivatives of which - with respect to the domain - turn out not to depend on the domain derivatives of u_N and u_D . Such a result is of great interest if one has in mind to use a gradient algorithm to minimize this cost function. This idea was first numerically tested in [10, 1990]. It generalizes quite well to several other situations, and many authors have made use of it to implement numerical algorithms.

In non linear cases however, both features described above are lost. A coupling term remains in the cost function, generating the presence of the derivatives of u_D and u_N in its own derivative. The reason is that there are actually two different partitions of the unknown boundary γ into a “Dirichlet part” γ_D where the Dirichlet condition $u = 0$ holds, and a “Neumann” part γ_N , where the Neumann condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ is fulfilled. The first partition is related to u_N , and the second one to u_D .

It seems therefore natural to force the partition in the associated Dirichlet problem, by replacing its Signorini boundary condition on γ by a mixed Neumann-Dirichlet one, using for that the partition derived from the Neumann solution u_N . Such a trick is actually possible because the Neumann-Signorini solution u_N is smooth enough [9, 1992], so that γ_N is an open subset of γ , and γ_D a closed one, and the mixed boundary conditions on γ_N and γ_D makes sense.

This idea works quite well, although the two parts of the cost function remain weakly coupled by the way of the γ -partition. We first prove that this cost function, defined by :

$$J(\gamma) = \int_{\Omega_\gamma} \left| \nabla u_N^0 - \nabla u_D^0 \right|^2 \quad (1)$$

has a unique minimum, which is the unknown boundary. In order to compute the derivative of the cost function with respect to the domain, we use a “Lagrangian” representation, that is to consider perturbed domains Ω_h which are images by a mapping $Id + h\theta$ of the original domain Ω , where θ is the direction of perturbation, and we define the derivative as :

$$\frac{\partial J}{\partial \Omega}(\Omega) . \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\gamma_h) - J(\gamma)}{h} \quad (2)$$

Both Dirichlet and Neumann solutions on the perturbed domain, transported on the original domain Ω by $u^h := u_h \circ (Id + h\theta)$, expands with respect to the parameter h [17, 1992]:

$$u_D^h = u_D^0 + hu_D^1 + ho_1(h) \quad (3)$$

and :

$$u_N^h = u_N^0 + hu_N^1 + ho_2(h) \quad (4)$$

where u_N^1 and u_D^1 are actually the domain derivatives of the solutions with respect to the direction θ . u_N^h defines a new partition of the Signorini boundary γ in γ_N^h and γ_D^h . To prove that the derivative of the cost function does not actually depend on u_N^1 and u_D^1 , we needed first to prove a continuity result on this partition, namely :

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(\gamma_N^h, \gamma_N) = 0 \quad (5)$$

This result was obtained under the assumption that the number of connected components in γ_N^h is bounded regardless to h . The expressions of the domain derivatives are therefore the following :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(\gamma_h) - J(\gamma)}{h} = 2 \int_{\Omega} (\langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle - \langle D\theta \nabla u_D^0, \nabla u_D^0 \rangle) - \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta (|\nabla u_N^0|^2 - |\nabla u_D^0|^2) \quad (6)$$

If $u_N^0 \in H^2(\operatorname{supp}(\theta))$, then we can get a boundary integral expression of this derivative :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(\gamma_h) - J(\gamma)}{h} = \int_{\gamma_D} \left[\left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_D^0}{\partial n} \right)^2 \right] \theta_n + \int_{\gamma_N} \left[\left(\frac{\partial u_D^0}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial \tau} \right)^2 \right] \theta_n \quad (7)$$

These expressions allow us to implement a gradient algorithm to solve our inverse problem. The first numerical results obtained are quite good, the computing time being dramatically reduced by the linearization (from Signorini to mixed boundary conditions on the auxiliary Dirichlet problem), and by the use of the above gradient expressions, which do not depend on the derivatives of the solution. To us however, the main interest of this work seems to be the way used to overcome the difficulties arising from the non linear boundary conditions. This way seems to be extendable to the thermo elastic coupled problem, which is a more relevant problem from a physical viewpoint.

1 Introduction

Soit Ω un domaine simplement connexe de classe C^2 de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega = \gamma \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec γ , Γ_D et Γ_N ne s'intersectant qu'au extrémités et γ désigne la partie inconnue de la frontière $\partial\Omega$.

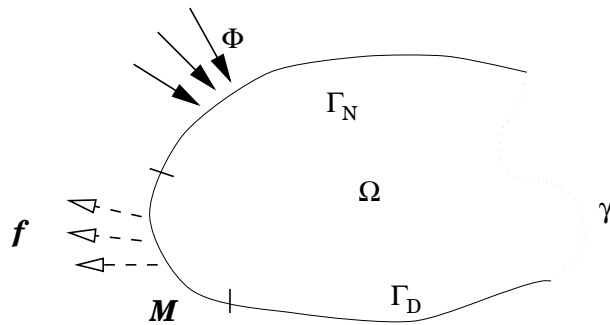


FIG. 1 – Le domaine et sa frontière

Considérons le problème de Signorini:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \phi & \text{sur } \Gamma_N \\ u \geq 0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \quad u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (8)$$

où ϕ désigne le flux de chaleur imposé sur Γ_N vérifiant :

$$\phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N); \phi \neq 0 \text{ sur } \Gamma_N$$

L'inconnue du problème est la frontière γ , que l'on s'efforcera de déterminer au moyen de mesures effectuées sur une partie M de Γ_N , de mesure positive. Désignant par Γ_{ad} l'ensemble des frontières γ admissibles, partie d'une courbe de Jordan de classe $C^{1,\beta}$; $\beta > 0$ ayant leurs deux extrémités fixés, le problème d'identification peut être formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \gamma \in \Gamma_{ad} \text{ tel que} \\ u_\gamma, \text{ solution de (8), vérifie } u_\gamma|_M = f \end{array} \right. \quad (9)$$

Dans un précédent travail [4], nous avons montré que sous les hypothèses de régularité énoncées ci-dessus, une seule mesure de frontière ($u_\gamma = f \in H^{\frac{1}{2}}(M)$) suffit pour déterminer la frontière inconnue γ de manière unique (résultat d'identifiabilité). Dans ce même travail, nous avons aussi montré un résultat de stabilité locale lipschitzienne, signifiant une dépendance continue de la frontière identifiée par rapport à la mesure effectuée, ce qui permet d'envisager la mise en oeuvre d'algorithmes numériques d'identification.

Ces derniers sont le plus souvent basés sur une approche de type "moindres carrés" : on définit une fonction coût mesurant l'écart quadratique entre les températures mesurées et celles que l'on calcule en utilisant le flux imposé, pour une réalisation donnée de la frontière inconnue γ , que l'on s'efforce ensuite de minimiser par un algorithme approprié, la frontière étant ajustée à chaque itération. Ce choix n'est évidemment pas le seul possible, Kohn et Vogelius ([11],[12]) en ayant d'ailleurs proposé un meilleur, basé sur l'écart énergétique, pour une réalisation donnée γ de la frontière inconnue, entre la solution du problème de Neumann défini en utilisant le flux imposé comme condition aux limites, et celle du problème aux limites de Dirichlet défini en tirant parti de la donnée mesurée sur M . Dans les cas linéaires, il apparaît que cette fonctionnelle est dérivable par rapport au domaine, et que sa dérivée lagrangienne ne dépend que de l'état, et non de la dérivée lagrangienne de celui-ci . Cette approche se révèle en outre apte à la généralisation , ainsi qu'à des développements numériques, comme l'ont illustré plusieurs travaux ([10], [13], [7], [15], ...).

Les conditions aux limites non linéaires posent toutefois des difficultés particulières : la fonction coût de Kohn & Vogelius ne peut plus s'exprimer comme somme de deux compliances découplées (l'une relative au problème de Neumann, et l'autre au problème de Dirichlet), à des cas linéaires, de sorte que sa dérivée lagrangienne ne peut s'exprimer indépendamment de celle de l'état. Ce couplage est imputable au fait que les deux partitions de la frontière inconnue γ (entre une partie où la solution u s'annule, et une autre où c'est sa dérivée normale qui s'annule) ne sont pas identiques pour la solution de Dirichlet et celle de Neumann. Il paraît alors naturel d'y remédier en forçant la partition de la frontière γ pour le problème auxiliaire, ce qui en constitue une linéarisation (on résout un problème mêlé au lieu d'un problème de Signorini), et a donc pour effet annexe de réduire considérablement les coûts de calcul dans l'algorithme subséquent. La fonctionnelle ainsi définie s'écrit alors comme la somme de deux termes faiblement couplés, sa dérivée lagrangienne ne dépendant cependant que des seuls états, et ce grâce à un résultat de continuité de la partition Dirichlet-Neumann de la frontière inconnue par rapport au domaine.

Dans la suite on désignera par Ω_γ le domaine Ω de frontière inconnue γ , l'état u correspondant sera noté u_γ .

2 Fonctionnelles de Kohn et Vogelius

Dans la suite, on suppose que l'on connaît la température f sur tout le support de ϕ , et on désigne par u_N^0 la solution de (8), et par u_{DS}^0 la solution du problème de Dirichlet-Signorini suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u_{DS}^0 & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_\gamma \\ u_{DS}^0 & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ u_{DS}^0 & = & f \quad \text{sur } \text{supp}(\phi) \\ \frac{\partial u_{DS}^0}{\partial n} & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \setminus \text{supp}(\phi) \\ u_{DS}^0 \geq 0 \quad \frac{\partial u_{DS}^0}{\partial n} \geq 0 \quad u_{DS}^0 \frac{\partial u_{DS}^0}{\partial n} = 0 & \text{sur } & \gamma \end{array} \right. \quad (10)$$

La fonctionnelle de Kohn-Vogelius associée à ce problème inverse est alors la suivante :

$$K(\gamma) = \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u_N^0 - \nabla u_{DS}^0|^2 \quad (11)$$

soit encore :

$$K(\gamma) = \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u_N^0|^2 + \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u_{DS}^0|^2 - 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla u_{DS}^0 \rangle$$

Cette fonctionnelle contenant un terme de couplage $\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla u_{DS}^0 \rangle$, sa dérivée par rapport aux domaines dans une direction θ dépend des dérivées lagrangienne $u_N^1(\theta)$ et $u_{DS}^1(\theta)$ des états u_N^0 et u_{DS}^0 , ce qui conduit à des algorithmes lourds à mettre en oeuvre numériquement. On s'intéresse dans la suite à modifier cette fonctionnelle de manière à obtenir une nouvelle fonctionnelle ayant le même point critique, mais dont la dérivée par rapport au domaine s'exprime indépendamment des dérivées lagrangiennes des états.

2.1 Construction de la fonctionnelle J

La résolution du problème (8) nous permet de définir les surfaces de contacts γ_D et γ_N par :

$$\gamma_D = \{x \in \gamma; u_N^0(x) = 0\} \quad ; \quad \gamma_N = \{x \in \gamma; u_N^0(x) > 0\} \quad (12)$$

Désignons par u_D^0 la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u_D^0 & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_\gamma \\ u_D^0 & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ u_D^0 & = & f \quad \text{sur } \text{supp}(\phi) \\ \frac{\partial u_D^0}{\partial n} & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \setminus \text{supp}(\phi) \\ \frac{\partial u_D^0}{\partial n_b} & = & 0 \quad \text{sur } \gamma_N \\ u_D^0 & = & 0 \quad \text{sur } \gamma_D \end{array} \right. \quad (13)$$

On définit alors la fonction coût J par :

$$J(\gamma) = \int_{\Omega_\gamma} |\nabla u_N^0 - \nabla u_D^0|^2 \quad (14)$$

Théorème 1 *Il existe une et une seule frontière $\gamma \in \Gamma_{ad}$ telle que :*

$$J(\gamma) \leq J(\gamma') \quad \forall \gamma' \in \Gamma_{ad}$$

De plus, γ est la solution du problème inverse (9).

Preuve: Il est clair que pour γ solution du problème inverse $u_N^0 = u_D^0$, donc γ est un minimum pour J avec $J(\gamma) = 0$.

Soit γ_1 un autre minimum de J , $J(\gamma_1) = 0$, donc $u_N^0 = u_D^0$. Il en résulte que, pour cette frontière γ_1 , u_N^0 vérifie le problème (8) avec $u_N^0 = f$ sur M . Le résultat d'identifiabilité (cf [4]) nous donne alors que $\gamma_1 = \gamma$. ■

3 Dérivation de la fonction coût

3.1 Dérivation Lagrangienne

Soit θ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 dans un voisinage de Ω_γ , nul dans un voisinage de $\Gamma_D \cup \Gamma_N$, non identiquement nul sur γ et porté par la normale sur γ . Pour $h > 0$ assez petit, le champs $Id + h\theta$ constituera une cinématique virtuelle dans la direction θ .

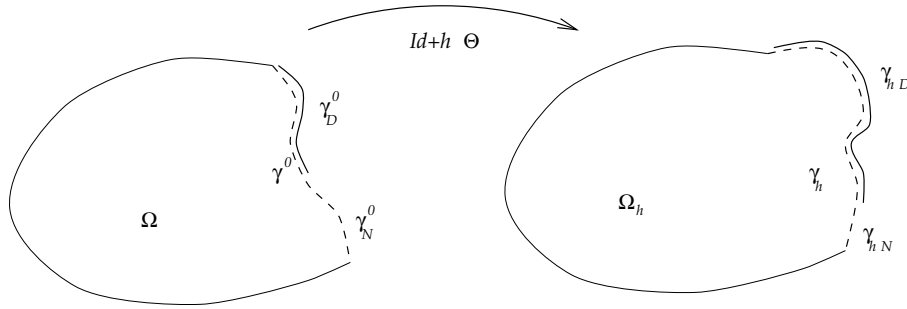


FIG. 2 – Perturbation du domaine Ω

Désignons par $\Omega_h = (Id + h\theta)(\Omega_\gamma)$, et par u_{hN} (resp. u_{hD}) la solution du problème (8) (resp. la solution du problème (13)) posé dans Ω_h et par u_N^h (resp. u_D^h) son transporté sur le domaine d'origine Ω_γ .

$$u_N^h = u_{hN} \circ (Id + h\theta)$$

et

$$u_D^h = u_{hD} \circ (Id + h\theta)$$

Désignons par u_N^1 (resp u_D^1) les dérivées lagrangiennes de u_N^0 (resp de u_D^0) et par $\gamma_h = (Id + h\theta)(\gamma)$.

3.2 Continuité de la partition de γ par rapport au domaine

Définissons à présent $\gamma_D^h = \{x \in \gamma; u_N^h(x) = 0\}$ et $\gamma_N^h = \{x \in \gamma; u_N^h(x) > 0\}$.

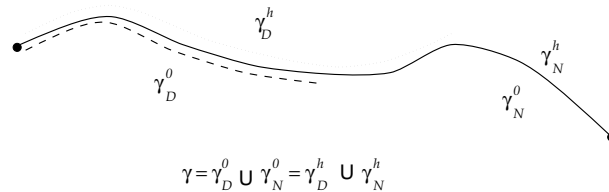


FIG. 3 – Les deux partitions de la frontière γ

Nous avons d'abord le résultat suivant :

Lemme 1 Désignant par μ la mesure de Lebesgue sur γ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(\gamma_D^h \setminus \gamma_D) = 0 \quad (15)$$

Preuve :

Le développement limité du premier ordre de u_N^h (cf [17]), nous donne, pour une constante $c > 0$, la majoration suivante :

$$\left| u_N^h - u_N^0 \right|_{L^1(\gamma)} \leq c h \quad (16)$$

ce qui, puisque $u_N^h \equiv 0$ sur γ_D^h , nous donne :

$$\int_{(\gamma_D^h \setminus \gamma_D)} |u_N^0| = \int_{(\gamma_D^h \setminus \gamma_D)} |u_N^h - u_N^0| \leq c h$$

Puisque $u_N^0 > 0$ sur $(\gamma_D^h \setminus \gamma_D)$, on peut déduire que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(\gamma_D^h \setminus \gamma_D) = 0$. ■

Il n'est toutefois pas possible d'étendre ce raisonnement à la dérivée normale, pour obtenir un résultat similaire sur $(\gamma_N^h \setminus \gamma_N)$, et achever ainsi la preuve de la continuité de la partition. La raison est en double :

- D'une part, γ_N ne peut être caractérisé (même à un ensemble négligeable près) comme la partie de γ sur laquelle $\frac{\partial u_N^0}{\partial n}$ s'annule. Dans [4], nous montrons en fait que :

$$\overset{\circ}{\gamma}_D = \left\{ x \in \gamma; \frac{\partial u_N^0}{\partial n} > 0 \right\} \quad (17)$$

- D'autre part, le transport de γ_h sur γ ne conserve pas la dérivée normale, mais plutôt la dérivée co-normale de u_N^h , à laquelle nous nous proposons maintenant de nous intéresser.

3.2.1 Continuité de la dérivée co-normale

Commençons par rappeler le problème variationnel vérifié par u_N^h . Notons par $F_h := Id + h\theta$, $M_h := (DF_h)^{-1}$, u_N^h est alors [17] solution du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a^h(u, v - u) \geq \int_{\Gamma_N} \phi(v - u) \forall v \in K \end{array} \right. \quad (18)$$

où K désigne le convexe fermé de $H^1(\Omega_\gamma)$ défini par :

$$K = \left\{ u \in H^1(\Omega_\gamma); u|_{\Gamma_D} = 0; u \geq 0 \text{ p.p. sur } \gamma \right\} \quad (19)$$

Et a^h la forme bilinéaire définie sur $H^1(\Omega_\gamma)$ par :

$$a^h(u, v) = \int_{\Omega_\gamma} \det(DF_h) \left\langle (M_h^t M_h) \nabla u, \nabla v \right\rangle \quad (20)$$

La forme bilinéaire a^h est continue, coercive sur le sous-espace de Hilbert :

$$V = \{v \in H^1(\Omega_\gamma); v = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_D\}$$

En prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\gamma)$ et en appliquant (18) à chacune des fonctions test $v_1 = \varphi + u_N^h$ et $v_2 = u_N^h - \varphi$ qui appartiennent toutes deux au convexe K , on déduit par intégration par parties que :

$$\operatorname{div}[\det(DF_h)(M_h {}^t M_h)\nabla u_N^h] = 0 \quad (21)$$

Et par suite u_N^h appartient à l'ensemble :

$$\{u, u \in H^1(\Omega_\gamma); \operatorname{div} [\det(DF_h)(M_h {}^t M_h)\nabla u] \in L^2(\Omega_\gamma)\}$$

On peut définir la dérivée co-normale (voir par exemple [14]) comme la forme linéaire continue sur $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ de la manière suivante :

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\gamma)$ et si $\tilde{\varphi}$ est un relèvement de φ dans $H^1(\Omega_\gamma)$ vérifiant $\tilde{\varphi} = 0$ sur $(\partial\Omega_\gamma \setminus \gamma)$

$$\left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle = a^h(u_N^h, \tilde{\varphi}) \quad (22)$$

En prenant un relèvement continu \mathcal{R} de $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ dans $H^1(\Omega_\gamma)$, on obtient pour une constante c_h strictement positive la majoration suivante :

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle \right| \leq c_h \|R\| \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \gamma}$$

■

Lemme 2 *Il existe $O(h) \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$, borné indépendamment de h , tel que :*

$$\frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} = \frac{\partial u_N^0}{\partial n} + h O(h) \quad (23)$$

Preuve :

Soit $\varphi \in D(\gamma)$ et $\tilde{\varphi}$ un prolongement de φ sur $H^1(\Omega_\gamma)$ / $\tilde{\varphi} = 0$ sur $(\partial\Omega_\gamma \setminus \gamma)$. Alors :

$$\left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} - \frac{\partial u_N^0}{\partial n}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega_\gamma} \det(DF_h) \langle (M_h {}^t M_h)\nabla u_N^h, \nabla \tilde{\varphi} \rangle - \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla \tilde{\varphi} \rangle \quad (24)$$

Nous avons :

$$\det(DF_h)(M_h {}^t M_h)\nabla u_N^h = \nabla u_N^0 + h w + h o(h)$$

avec :

$$w = \operatorname{div} \theta \nabla u_N^0 - (D\theta + {}^t D\theta)\nabla u_N^0 + \nabla u_N^1$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} o(h) = 0 \text{ dans } (L^2(\Omega_\gamma))^2$$

On a donc :

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} - \frac{\partial u_N^0}{\partial n}, \varphi \right\rangle \right| = h \left| \int_{\Omega_\gamma} \langle W, \nabla \tilde{\varphi} \rangle + \int_{\Omega_\gamma} \langle o(h), \nabla \tilde{\varphi} \rangle \right|$$

Et on déduit l'existence d'une constante c_1 strictement positive telle que :

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} - \frac{\partial u_N^0}{\partial n}, \varphi \right\rangle \right| \leq c_1 h \|\tilde{\varphi}\|_{1, \Omega_\gamma}$$

En choisissant $\tilde{\varphi} = \mathcal{R}(\varphi)$, on obtient pour une constante $c > 0$ indépendante de φ et de h la majoration suivante :

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} - \frac{\partial u_N^0}{\partial n}, \varphi \right\rangle \right| \leq ch \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \gamma}$$

■

3.2.2 Continuité de la partition de γ

Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 3 $\frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} = 0$ sur γ_N^h

Preuve : Soit $\varphi \in D(\gamma)$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset \gamma_N^h$, et soit $\tilde{\varphi} = \mathcal{R}(\varphi)$.
On a :

$$\left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle = a^h(u_N^h, \tilde{\varphi})$$

Or :

$$a^h(u_N^h, \tilde{\varphi}) = \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_{hN}, \nabla \tilde{\varphi}_h \rangle \text{ avec : } \tilde{\varphi}_h = \tilde{\varphi} \circ F_h^{-1}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial u_N^h}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle = 0$$

■

Théorème 2 Désignons par d la distance de Hausdorff sur γ . Alors, si γ_N^h a un nombre de composantes connexes borné par L indépendamment de h , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} d(\gamma_N^h, \gamma_N) = 0$$

Preuve :

(γ_D, γ_N) et (γ_D^h, γ_N^h) forment deux partitions de γ , il nous suffit donc de montrer, compte tenu du lemme 1 que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(\gamma_N^h \setminus \gamma_N) = 0$.

À un difféomorphisme près on peut supposer que $\gamma =]0, 1[$ et que :

$$\gamma_N^h = \bigcup_{i=1}^L]x_i^h, y_i^h[$$

avec :

$$0 \leq x_1^h \leq y_1^h \leq x_2^h \leq y_2^h \leq \dots \leq x_L^h \leq y_L^h \leq 1$$

Supposons que la suite bornée $\mu(\gamma_N^h \setminus \gamma_N)$ a une valeur d'adhérence $\lambda > 0$. On peut alors en extraire une sous suite encore indexée par h telle que :

$$\begin{cases} 1 - \text{les suites } x_i^h \text{ et } y_i^h \text{ convergent vers } x_i \text{ et } y_i \forall i \in \{1, 2, \dots, L\} \\ 2 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(\gamma_N^h \setminus \gamma_N) = \lambda > 0 \end{cases} \quad (25)$$

On aura alors pour un certain $i_0 \in \{1, 2, \dots, L\}$

$$\mu(]x_{i_0}, y_{i_0}[\setminus \gamma_N) > 0 \quad (26)$$

Soit $\varphi \in D(]x_{i_0}, y_{i_0}[)$. Grâce à (25), on sait qu'il existe un nombre réel $h_0 > 0$ tel que pour tout $h < h_0$, on ait $\text{supp}(\varphi) \subset]x_{i_0}^h, y_{i_0}^h[$.

Or, $\frac{\partial u_N^h}{\partial \nu} = 0$ sur $]x_{i_0}^h, y_{i_0}^h[$. En appliquant le lemme 2 à φ , on obtient après passage à la limite en h :

$$\left\langle \frac{\partial u_N^0}{\partial n}, \varphi \right\rangle = 0$$

Il en résulte que $\frac{\partial u_N^0}{\partial n} = 0$ sur $]x_{i_0}, y_{i_0}[$. Sur l'ensemble $(]x_{i_0}, y_{i_0}[\setminus \gamma_N)$, qui est de mesure positive d'après (26), on a donc $\frac{\partial u_N^0}{\partial n} = 0$. Or cet ensemble contient des ouverts, car γ_N a un nombre fini de composantes connexes, et ces ouverts sont dès lors contenus dans γ_D° ce qui contredit (17). ■

3.3 Dérivation de la fonction coût

Lemme 4 Désignons par u_D^1 la dérivée Lagrangienne du problème (13), si γ_N^h a un nombre borné de composantes connexes, alors on a :

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_D^0, \nabla u_D^1 \rangle = 0$$

Preuve: On a ;

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_D^0, \nabla u_D^1 \rangle = - \int_{\Omega_\gamma} \Delta u_D^0 u_D^1 + \int_{\partial\Omega_\gamma} \frac{\partial u_D^0}{\partial n} u_D^1.$$

Or, $\Delta u_D^0 = 0$ dans Ω_γ , $\frac{\partial u_D^0}{\partial n} = 0$ sur $\gamma_N \cup (\Gamma_N \setminus \text{supp}(\phi))$ et $u_D^1 = 0$ sur $\Gamma_D \cup \text{supp}(\phi)$ donc :

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_D^0, \nabla u_D^1 \rangle = \int_{\gamma_D} \frac{\partial u_D^0}{\partial n} u_D^1 \quad (27)$$

Montrons à présent que $u_D^1 = 0$ pp sur γ_D . Pour celà, soit \mathcal{R} un ouvert de γ tel que $\bar{\mathcal{R}} \subset \gamma_D^\circ$. Le théorème 2, nous donne l'existence d'un nombre réel $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h < h_0$, on ait $\mathcal{R} \subset \gamma_D^h$. On en déduit que $u_D^h = 0$ sur \mathcal{R} pour tout $h < h_0$, et par suite que $u_D^1 = 0$ pp sur \mathcal{R} . Or γ_D a un nombre borné de composantes connexes (à un ensemble négligeable près), et il en résulte que $u_D^1 = 0$ sur γ_D , ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 3 Soit $\gamma_h = (Id + h\theta)(\gamma)$. Si γ_N^h a un nombre borné de composantes connexes, alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(\gamma_h) - J(\gamma)}{h} = 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle - 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_D^0, \nabla u_D^0 \rangle - \int_{\Omega_\gamma} \text{div } \theta \left(|\nabla u_N^0|^2 - |\nabla u_D^0|^2 \right)$$

Si en outre u_N^0 et $u_D^0 \in H^2(\text{supp}(\theta))$ on a aussi :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(\gamma_h) - J(\gamma)}{h} = \int_{\gamma_D} \left[\left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_D^0}{\partial n} \right)^2 \right] \theta_n + \int_{\gamma_N} \left[\left(\frac{\partial u_D^0}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial \tau} \right)^2 \right] \theta_n$$

Preuve: Commençons par rappeler (voir par exemple [17]) le problème variationnel vérifié par u_N^1 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N^1 \in \mathcal{S} \text{ vérifiant, pour tout } v \in \mathcal{S} : \\ \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^1, \nabla(v - u_N^1) \rangle \geq \int_{\Omega_\gamma} \left\langle \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial M} + \frac{\partial \theta}{\partial M} \right) \nabla u_N^0, \nabla(v - u_N^1) \right\rangle - \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla(v - u_N^1) \rangle \text{ div } \theta \end{cases} \quad (28)$$

avec :

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in H^1(\Omega_\gamma); u|_{\Gamma_D} = 0; u \geq 0 \text{ p.p. sur } \gamma_D \text{ et } \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla u \rangle = \int_{\Gamma_N} \phi u \right\}$$

Désignons par J^1 , J_N^1 et J_D^1 respectivement les dérivées par rapport au domaine des fonctionnelles J , $J_N := \left| u_N^0 \right|_{1, \Omega_\gamma}^2$ et $J_D := \left| u_D^0 \right|_{1, \Omega_\gamma}^2$. Alors :

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla u_D^0 \rangle = \int_{\Gamma_N} \phi f$$

Ce terme étant constant, sa dérivé par rapport au domaine est nul et par suite $J^1 = J_N^1 + J_D^1$ avec :

$$J_N^1 = \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta \left| \nabla u_N^0 \right|^2 - 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle + 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^1, \nabla u_N^0 \rangle \quad (29)$$

et

$$J_D^1 = \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta \left| \nabla u_D^0 \right|^2 - 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_D^0, \nabla u_D^0 \rangle + 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_D^1, \nabla u_D^0 \rangle \quad (30)$$

En appliquant (28) à la fonction test $v_1 = u_N^1 + u_N^0$, puis à $v_2 = u_N^1 - u_N^0$ qui appartiennent toutes deux aux convexe S , on déduit que :

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle \nabla u_N^0, \nabla u_N^1 \rangle = 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle - \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta \left| \nabla u_N^0 \right|^2$$

ce qui, avec (29), nous donne :

$$J_N^1 = 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle - \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta \left| \nabla u_N^0 \right|^2 \quad (31)$$

Le lemme 4 et (30) nous donnent pour leur part :

$$J_D^1 = \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta \left| \nabla u_D^0 \right|^2 - 2 \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_D^0, \nabla u_D^0 \rangle$$

ce qui achève la démonstration du première partie du théorème.

La deuxième partie de ce théorème s'obtient par intégration par partie. En effet :

$$\int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle = \int_{\Omega_\gamma} \frac{\partial u_N^0}{\partial x} \langle \nabla \theta_1, \nabla u_N^0 \rangle + \int_{\Omega_\gamma} \frac{\partial u_N^0}{\partial y} \langle \nabla \theta_2, \nabla u_N^0 \rangle$$

ce qui, par integration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle &= - \int_{\Omega_\gamma} \theta_1 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial x} \nabla u_N^0 \right) + \int_\gamma \theta_1 \frac{\partial u_N^0}{\partial x} \frac{\partial u_N^0}{\partial n} \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} \theta_2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial y} \nabla u_N^0 \right) + \int_\gamma \theta_2 \frac{\partial u_N^0}{\partial y} \frac{\partial u_N^0}{\partial n} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle &= - \int_{\Omega_\gamma} \theta_1 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial x} \nabla u_N^0 \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} \theta_2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial y} \nabla u_N^0 \right) + \int_\gamma \frac{\partial u_N^0}{\partial n} \langle \theta, \nabla u_N^0 \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

Or, θ est porté par la normale sur γ , d'où on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \langle D\theta \nabla u_N^0, \nabla u_N^0 \rangle &= - \int_{\Omega_\gamma} \theta_1 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial x} \nabla u_N^0 \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_\gamma} \theta_2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial y} \nabla u_N^0 \right) + \int_\gamma \theta_n \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

On a aussi :

$$\int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} \theta |\nabla u_N^0|^2 = - \int_{\Omega_\gamma} \langle \theta, \nabla (|\nabla u_N^0|^2) \rangle + \int_\gamma \theta_n |\nabla u_N^0|^2 \quad (34)$$

Or :

$$2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial x} \nabla u_N^0 \right) - \frac{\partial}{\partial x} (|\nabla u_N^0|^2) = 2 \frac{\partial u_N^0}{\partial x} \Delta u_N^0 \quad (35)$$

et

$$2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial y} \nabla u_N^0 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (|\nabla u_N^0|^2) = 2 \frac{\partial u_N^0}{\partial y} \Delta u_N^0 \quad (36)$$

(31), (33), (34), (35), et (36) nous donnent, avec l'harmonicité de u_N^0 :

$$J_N^1 = 2 \int_\gamma \theta_n \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 - \int_\gamma \theta_n |\nabla u_N^0|^2$$

et encore :

$$J_N^1 = \int_{\gamma_D} \theta_n \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 - \int_{\gamma_N} \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial \tau} \right)^2 \quad (37)$$

De même on montre que :

$$J_D^1 = - \int_{\gamma_D} \theta_n \left(\frac{\partial u_D^0}{\partial n} \right)^2 + \int_{\gamma_N} \left(\frac{\partial u_D^0}{\partial \tau} \right)^2 \quad (38)$$

■

3.4 Remarques

- Si on impose un flux $\phi \geq 0$ sur Γ_N , le principe du maximum nous permet de déduire que la condition Signorini sur γ se réduit à une condition de type Neumann. En effet, le minimum de ne peut être atteint ni sur Γ_N , ni sur γ puisque $\frac{\partial u_N^0}{\partial n} < 0$ en tout point de la frontière où ce minimum est atteint. En conséquence, le minimum est atteint sur Γ_D , et il est donc nul. On en conclut que γ_D est vide faute de quoi le minimum serait également atteint sur γ_D donc sur γ . L'expression du gradient de la fonctionnelle J devient :

$$J^1 = \int_{\gamma_N} \left[\left(\frac{\partial u_D^0}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial \tau} \right)^2 \right] \theta_n$$

c'est à dire que l'on retrouve des résultats déjà démontrés dans le cas linéaire [3].

- Si on applique un flux $\phi \leq 0$ sur Γ_N , le principe du maximum nous permet de conclure de la même façon que le maximum u_M de u_N^0 ne peut être atteint en un point de Γ_N car on a $\frac{\partial u_N^0}{\partial n} > 0$ en tout point de la frontière où le maximum est atteint. Ce maximum est donc nul, puisqu'il est atteint soit en un point de Γ_D , soit en un point de γ_D . Il en résulte que γ_N est vide car sinon

ce maximum ne serait pas nul. La condition de Signorini sur γ se réduit alors à une condition de type Dirichlet $u_N^0 = 0$ sur γ . Dans ce cas, $\mu(\gamma_N) = 0$, et le théorème 3 nous donne :

$$J^1 = \int_{\gamma_D} \left[\left(\frac{\partial u_N^0}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_D^0}{\partial n} \right)^2 \right] \theta_n$$

c'est à dire que l'on retrouve les résultats de J.R. Roche et J. Sokolowski [15] pour le cas linéaire.

4 Résultats numériques et conclusions

La fonction coût que nous avons définie, et les deux expressions calculées de sa dérivée directionnelle par rapport au domaine, permettent la mise en oeuvre d'un algorithme de gradient pour la résolution numérique du problème inverse de Signorini.

Les calculs ont été effectués pour un domaine carré dont le quatrième "côté" est la frontière inconnue. Celle-ci est paramétrée par un nombre N d'inconnues représentant les ordonnées des points situés aux abscisses $x_i = \frac{i}{N}$; $i = 1, N$. Les extrémités fixes de la frontière γ sont les points $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Une représentation fine de la frontière dès le début de l'algorithme étant apparue dommageable à sa convergence, nous avons opté pour une approche "hiérarchique", que l'on peut décrire de la manière suivante :

- On fixe un nombre N "petit", donnant une représentation grossière de la géométrie inconnue, et on calcule par la méthode du gradient la "meilleure géométrie, c'est à dire celle rendant minimale la fonction coût définie ;
- Lorsque l'algorithme a convergé pour un nombre N de paramètres, on affine la représentation de la géométrie en doublant (par exemple) le nombre d'inconnues, l'initialisation étant évidemment effectuée avec la solution atteinte à l'étape précédente.

La figure 4, qui donne l'évolution des erreurs relatives en normes L^2 et L^∞ montre bien les divers paliers de convergence, correspondant aux étapes hiérarchiques dans la description de la frontière.

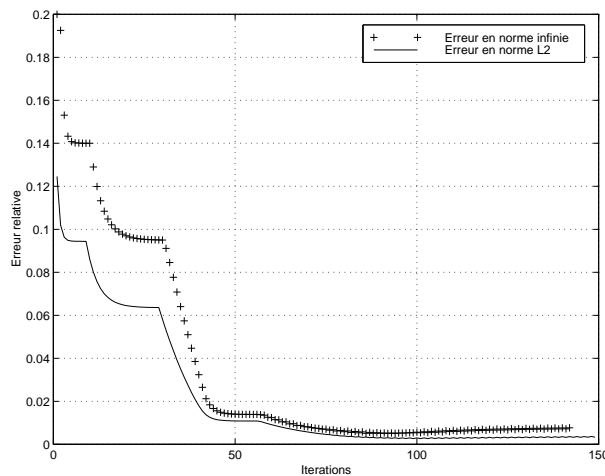


FIG. 4 – Erreur relative sur la frontière

La linéarisation du second problème intervenant dans l'expression de la fonctionnelle J contribue doublement à la diminution des coûts de calcul : d'une part, chaque itération de l'algorithme requiert la résolution d'un problème linéaire et d'un problème non linéaire (au lieu de deux problèmes non linéaires), d'autre part l'expression du gradient ne fait intervenir que les états déjà calculés, et non leurs dérivées.

La reconstruction de la frontière à partir des points obtenus par cet algorithme peut donner lieu à plusieurs stratégies. La reconstruction, à partir des points calculés, d'une frontière affine par morceaux conduit à des résultats peu satisfaisants, et surtout à des problèmes de stabilité de l'algorithme. L'usage d'une procédure de lissage s'avère donc indispensable, même si celle que nous avons adoptée - trop frustrante - soit probablement à la source des difficultés éprouvées par l'algorithme à suivre les changements de courbure de la frontière recherchée (cf. figure 5). Un lissage par splines cubiques devrait permettre d'améliorer ce point.

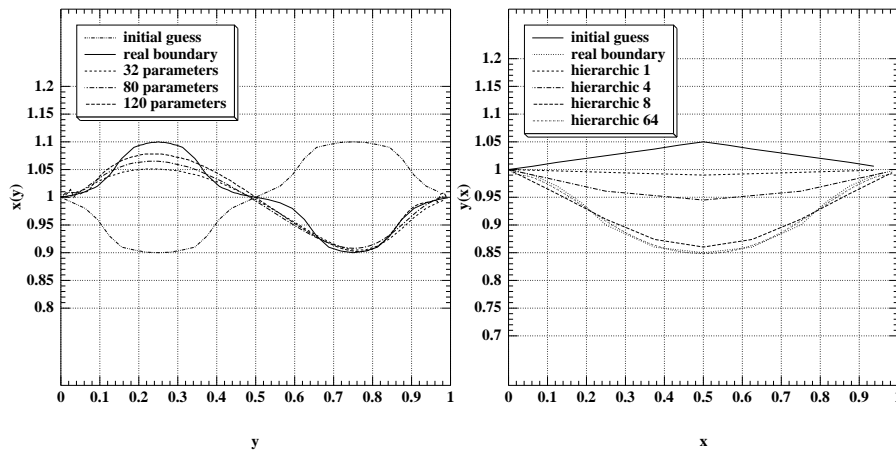


FIG. 5 – Reconstitution de frontières inconnues

En l'état actuel des choses, le nombre d'itérations reste encore assez important, et les temps de calcul relativement élevés. Ceci étant, plus que dans les performances de l'algorithme lui-même, l'intérêt majeur du présent travail nous paraît résider dans la manière de traiter les difficultés liées à la partition de la frontière de Signorini. Cette méthode semble en effet susceptible d'être étendue au problème inverse thermoélastique couplé, qui modélise une situation physiquement plus réaliste.

Références

- [1] **R.A. Adams** (1975) : *Sobolev spaces*. Academic Press, New York
- [2] **G. Alessandrini** (1988) : *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal., **27**, pp. 153-172
- [3] **S. Andrieux, A. Ben Abda, M. Jaoua** (1997) : *On some inverse geometrical problems*, in "PDE methods in control and shape analysis", G. Da Prato and J.P. Zoleśio eds, Marcel Dekker
- [4] **A. Ben Abda, S. Chaabane, F. El Dabaghi, M. Jaoua** (1997) : *On a non linear geometrical inverse problem of Signorini type : identifiability and stability*, Rapport de recherche INRIA 3175, à paraître dans Math. Meth. in the Appl. Sci.

- [5] **A. Friedman, M. Vogelius** (1989) : *Determinig craks by boundary measurements*, Indiana Uni. Math. Jou., **38**, # 3
- [6] **R. Glowinski, J. Lions , R. Trémolières** (1976) : *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, Paris
- [7] **F. Hettlich , W. Rundell** (1996) : *Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem*, Inverse problems, **12**, 251-266
- [8] **V. Isakov, J. Powell** (1990) : *On the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse problems, **6**, pp. 311- 318
- [9] **K. Khodja, M. Moussaoui** (1992) : *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Comm. in P.D.E, **17**, pp. 805-826
- [10] **R.V. Kohn, A. McKenney** (1990) : *Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography* , Inverse problems, **6** , pp. 389-414
- [11] **R.V. Kohn, M. Vogelius** (1985) : *Déterminig conductivity by boundary measurements; Interior results*, Comm. in Pure Appl. Math., **38** , pp. 644-667
- [12] **R.V. Kohn, M. Vogelius** (1987) : *Relaxation of a variational method for impedance computed tomography*, Comm. in Pure Appl. Math., **40**, pp. 745-777
- [13] **K. Kunisch, X. Pan** (1994) : *Estimation of interfaces from boundary measurements*, SIAM J.cont. Opt., **32**, pp.867-894
- [14] **J.L. Lions** (1969) : *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris
- [15] **J.R. Roche, J. Sokolowski** (1996) : *Numerical methods for shape identification problems*, Control and Cybernetics, **25**, pp. 867-894
- [16] **J. Simon** (1980) : *Differentiation with respect to the domaine in boundary value problems*, Num. Func. Anal. Opt., **2**, pp. 649-687
- [17] **J. Sokolowski, J.P. Zolesio** (1992) : *Introduction to shape optimization; shape sensitivity analysis*, Springer Verlag



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399