

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Elément Fini Optimal de Classe  $C^0$   
pour des Problèmes de Fissures Planes***

Mohamed AMARA , Amna CHATTI , Fadi EL DABAGHI

**No 3379**

Mars 1998

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



***Rapport  
de recherche***





## Elément Fini Optimal de Classe $C^0$ pour des Problèmes de Fissures Planes

Mohamed AMARA\*<sup>†</sup>, Amna CHATTI\*<sup>‡</sup>, Fadi EL DABAGHI\*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet M3N

Rapport de recherche n 3379 — Mars 1998 — 3379 pages

**Résumé :** On s'intéresse au calcul des coefficients de propagation de fissures en utilisant une méthode d'éléments finis mixte de classe  $C^0$  basée sur une technique directe de type Strang-Fix ou sur la caractérisation par fonctions singulières duales. L'opérateur traité est le bilaplacien dans le problème  $\Delta^2 \psi = f$  décomposé en deux laplaciens  $-\Delta \psi = \omega$  et  $-\Delta \omega = f$ . Les singularités ne sont pas portées, lors de la discrétisation, par  $\psi$  mais par  $\omega$ . On obtient ainsi des erreurs en  $O(h^{1/2})$  avec la technique de Strang-Fix pour les deux premiers coefficients. Par contre, pour le même cas de régularité des données, on obtient des erreurs en  $O(h^2)$  pour tous les coefficients par la méthode des fonctions singulières duales.

**Mots-clé :** bilaplacien,  $\psi - \omega$ , fonctions singulières duales, éléments finis mixtes, estimations d'erreur, fissure.

(Abstract: *pto*)

E-mail: [mohamed.amara@univ-pau.fr](mailto:mohamed.amara@univ-pau.fr), [amna.chatti@inria.fr](mailto:amna.chatti@inria.fr), [dabaghi@squatina.inria.fr](mailto:dabaghi@squatina.inria.fr)

Travail supporté en partie par l'accord CMCU 496B366 intitulé *Méthodes de simulation numérique* entre l'INRIA et l'Ecole Polytechnique de Tunisie.

\* INRIA - Projet M3N, B.P. 105 Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

<sup>†</sup> Labo de Maths Appliquées - CNRS UPRES-A-5033, Univ. de Pau, Av. de l'Université, 64000 Pau, France

<sup>‡</sup> LAMSIN, ENIT, BP 37 Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11  
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

## An Optimal $C^0$ Finite Element for Plane Crack Problems

**Abstract:** The aim of this paper consists in the computation of plane crack propagation coefficients using a  $C^0$  mixed finite element method. These coefficients are obtained directly by a Strang-Fix approach or characterized by dual singular functions. The operator is the bilaplacian involved in the problem  $\Delta^2 \psi = f$  decomposed in two laplacians  $-\Delta \psi = \omega$  and  $-\Delta \omega = f$ . In the discrete problem, the singular functions are no more set up on  $\psi$  but on  $\omega$ . The error estimation for the two first coefficients gives  $O(h^{1/2})$  with the Strang-Fix method while we get, under the same regularity hypothesis and for all the coefficients, an error  $O(h^2)$  when one uses dual singular functions.

**Key-words:** biharmonic,  $\psi - \omega$ , mixed finite element, dual singular functions, error estimates, crack.

## 0 Introduction

On considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur bilaplacien dans un domaine polygonal, borné  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$ . Ce travail porte sur le problème décrit par les équations suivantes:

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta^2 \psi = f & \text{dans } \Omega, \\ \psi = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_n \psi = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Delta^2 = \Delta\Delta$  et  $\partial_n$  est la dérivée normale sur  $\partial\Omega$ . L'ouvert  $\Omega$  étant polygonal, la régularité de la solution  $\psi$  ne dépend pas uniquement de la régularité des données  $f$ ,  $u_0$  et  $g$  mais également de la géométrie du domaine  $\Omega$ . Cette solution est singulière au voisinage des sommets non convexes de l'ouvert; elle se décompose en deux parties, l'une régulière et l'autre formée d'une somme finie des fonctions singulières liées à la géométrie de l'ouvert ( Grisvard [12], Kondratiev [13] ).

Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $(u_0, g)$  vérifient des conditions minimales que l'on précisera, la solution se décompose en  $\psi = \psi^r + \sum_{j=1}^N \lambda_j S_j$  où  $\psi^r \in H^3(\Omega)$  est la partie régulière alors que  $(S_i)_{i=1,N}$  représentent les fonctions singulières et  $(\lambda_i)_{i=1,N}$  les coefficients de singularité.

Dans le cas d'un ouvert fissuré, les coefficients de singularités liés au sommet de la fissure sont les coefficients de propagation de la fissure. Leur calcul permet, outre le fait de mieux caractériser la solution  $\psi$ , de connaître a priori les directions et les intensités de la propagation de la fissure.

Le problème (P) qui modélise en Mécanique des Structures, le déplacement vertical d'une plaque, admet, sous des hypothèses convenables sur  $f$ ,  $u_0$  et  $g$ , une solution dans  $H^2(\Omega)$ ; son approximation par des éléments finis conformes nécessite des espaces discrets de classe  $C^1$  (on doit utiliser dans ce cas des polynômes de degré 5). Dans le cas d'une régularité minimale sur  $f$ ,  $u_0$  et  $g$ , l'approche par les méthodes mixtes de décomposition  $(\omega - \psi)$  avec  $\omega = -\Delta\psi$  du bilaplacien en deux problèmes de laplacien permet d'utiliser des éléments finis de classe  $C^0$ . Cette approche a donné lieu à un certain nombre de travaux; on peut se référer à Bernardi-Girault-Maday[4], Brezzi-Fortin[6], Ciarlet-Raviart[8], Girault-Giroire-Sequeira[9], Girault-Raviart[10], Ruas[15].

La discrétisation induite utilise des espaces d'éléments finis de degré  $k$  avec  $k \geq 1$ . Si  $k \geq 2$  et sous les hypothèses de régularité  $\psi \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $\omega \in H^k(\Omega)$ , on a les estimations d'erreur suivantes:

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{k-1} (|\omega|_{k,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega})$$

Le cas  $k = 1$  nécessite une analyse plus fine et Sholz[16] montre que si  $\Omega$  est convexe, on a tout de même convergence de la méthode.

La méthode proposée par Amara[1] et Amara-Dabaghi[2], consistant à perturber la formulation approchée en introduisant un terme prenant en compte les sauts des dérivées normales de la rotation sur les interfaces, améliore les estimations d'erreur a priori précédentes. Cette nouvelle formulation discrète donne un comportement d'ordre  $O(h^k)$  pour  $k \geq 1$ . De plus, elle est inconditionnellement convergente pour tout  $k \geq 1$  sans aucune hypothèse de régularité particulière sur  $\psi$  ou  $\omega$ .

Dans le cas d'un ouvert fissuré, le calcul des solutions approchées du problème (P) par cette méthode d'éléments finis mixte nécessite la prise en compte des singularités afin d'obtenir un taux d'erreur satisfaisant. Cette prise en compte passe par une bonne approximation des coefficients de ces singularités. Dans ce but, plusieurs approches existent :

- i) l'adjonction des fonctions singulières à la base de l'espace d'approximation,
- ii) le raffinement des maillages au voisinage des sommets, adapté aux singularités,
- iii) l'utilisation des fonctions singulières duales.

Dans ce travail, on va utiliser une méthode qui mêle la première et la troisième approche. L'introduction des fonctions singulières est faite sur la rotation  $\omega$  et non sur la fonction courant  $\psi$ . Cette technique nous assure pour l'erreur a priori  $\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}$  un comportement en  $O(h)$  si  $\psi^r \in H^3(\Omega)$ .

On rappelle dans le paragraphe 1, les résultats de régularité sur le bilaplacien ainsi que la méthode des fonctions singulières duales permettant d'écrire directement les coefficients de singularité sans avoir à calculer  $\psi$  ou  $\omega$ .

Dans le paragraphe 2, on adapte la méthode proposée par Amara[1] et Amara-Dabaghi[2] pour des éléments finis affines ( de degré  $k = 1$ ) en introduisant les fonctions singulières dans la rotation  $\omega$ . Cette approche permet d'obtenir les coefficients de singularité comme coefficients des fonctions de base.

Cette technique, appelée de Strang et Fix, est étudiée dans le paragraphe 3 et les estimations d'erreur a priori sur les coefficients de singularité sont données. On obtient un résultat de convergence en  $O(h^{1/2})$  sur les deux premiers coefficients dans le cas régulier.

Dans le paragraphe 4, on présente l'adaptation de la méthode duale et on montre l'amélioration sur les estimations a priori sur les coefficients avec un comportement en  $O(h)$  dans le cas le moins régulier à  $O(h^2)$  dans le cas le plus régulier pour tous les coefficients.

Enfin, et avant la conclusion, des essais numériques sont présentés et commentés dans le paragraphe 5.

# 1 Singularités du bilaplacien - Fonctions Duales

## 1.1 Singularités du bilaplacien

On considère un ouvert borné, polygonal, convexe  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  présentant une fissure  $F$  ayant pour sommet l'origine  $O$ . La frontière  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$  se décompose en  $N+2$  segments notés  $(\Gamma_i)_{0 \leq i \leq N+1}$  (voir figure 0). On supposera dans la suite, sans nuire à la généralité de l'étude, que les angles des autres coins sont de mesure inférieure ou égale à  $\pi$ . Pour tout point  $M$  de  $\bar{\Omega}$ , on note par respectivement  $(x, y)$  et  $(r, \theta)$  ses coordonnées cartésiennes et polaires prises par rapport au sommet  $O$ ; on a alors:

$$r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta .$$

Les composantes de  $\partial\Omega$  sont caractérisées par

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= F_+ = \{M = (r, \theta) \in \partial\Omega; \theta = 0\}, \\ \Gamma_{N+1} &= F_- = \{M = (r, \theta) \in \partial\Omega; \theta = 2\pi\}, \\ \Gamma &= \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i, \quad F = F_+ \cup F_- \end{aligned} \tag{1}$$

et ainsi  $\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \bar{F}$  avec  $\bar{F} \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ .

Les sommets de  $\partial\Omega$  sont définis par

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= \bar{\Gamma}_i \cap \bar{\Gamma}_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N, \\ O &= \bar{F}_+ \cap \bar{F}_- = E_0 = E_{N+2}. \end{aligned} \tag{2}$$

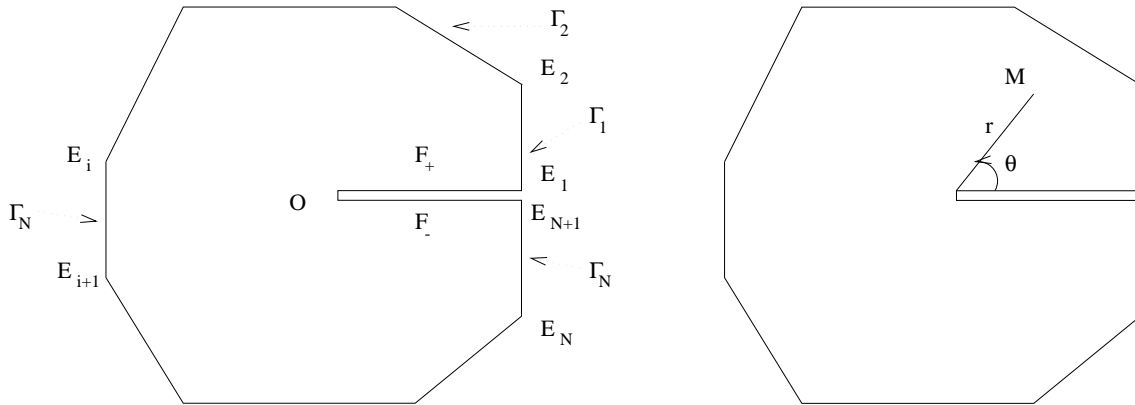


FIG.0 Exemple de Domaine polygonal avec fissure



Les résultats de régularité sur le Bilaplacien ( Kondratiev [13 ], Grisvard [12 ]) nous donnent :

**Théorème 1**

Soient  $f \in H^{-2}(\Omega)$ ,  $\Psi$  et  $\psi \in H^2(\Omega)$  tels que

$$\Delta^2 \psi = f \quad \text{dans } H^{-2}(\Omega) \quad \text{et } \psi - \Psi \in H_0^2(\Omega).$$

1) Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in H^3(\Omega)$ , la solution  $\psi$  se décompose en

$$\psi = \psi^r + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 \quad \text{où } \psi^r \in H^3(\Omega), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \quad (3)$$

avec

$$S_1(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left( \sin \frac{3}{2}\theta - 3 \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et } S_2(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left( \cos \frac{3}{2}\theta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4)$$

et il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que

$$\|\psi^r\|_{3,\Omega} + |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq C \left( \|f\|_{-1,\Omega} + \|\Psi\|_{3,\Omega} \right). \quad (5)$$

2) Si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ , la solution  $\psi$  se décompose en

$$\psi = \psi_r + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 \quad \text{où } \psi_r \in H^4(\Omega), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbf{R} \quad (6)$$

avec

$$S_3(r, \theta) = r^{\frac{5}{2}} \left( \sin \frac{5}{2}\theta - 5 \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et } S_4(r, \theta) = r^{\frac{5}{2}} \left( \cos \frac{5}{2}\theta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (7)$$

$S_1$  et  $S_2$  ayant été définis en (4); et il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que

$$\|\psi^r\|_{4,\Omega} + |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4| \leq C \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|\Psi\|_{4,\Omega} \right). \quad (8)$$

## Remarques

- Les fonctions singulières  $(S_i)_{1 \leq i \leq 4}$  définies par (4) et (7) ont les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \Delta^2 S_i = 0 & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \gamma_0(S_i) = \gamma_1(S_i) = 0 & \text{sur } F. \end{cases} \quad (9)$$

De plus, on a

$$S_1, S_2 \in H^{2+a}(\Omega), S_3, S_4 \in H^{3+a}(\Omega), \quad \forall a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (10a)$$

$$S_1, S_2 \in W^{3,p}(\Omega), S_3, S_4 \in W^{4,p}(\Omega), \quad \forall p \in \left[1, \frac{4}{3}\right], \quad (10b)$$

- Le calcul effectif des coefficients de singularité  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4}$  peut être mené en utilisant la technique de Strang-Fix d'adjonction de ces fonctions singulières à l'espace d'approximation. On récupère ces coefficients comme solution directe du problème.
- La seconde technique, introduite par Blum-Dobrowolski [5], Moussaoui [14], est basée sur l'utilisation des fonctions singulières duales. Par cette méthode, les coefficients de singularité sont obtenus comme un produit direct entre ces fonctions singulières duales et les données  $f$  et  $\Psi$  du problème.

## 1.2 Fonctions singulières duales

On présente dans ce paragraphe les fonctions singulières duales liées au bilaplacien ainsi que leur propriétés ([5],[14]). On considère les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} T_1^*(r, \theta) &= r^{-1} S_1(r, \theta), & T_2^*(r, \theta) &= r^{-1} S_2(r, \theta) \\ T_3^*(r, \theta) &= r^{-3} S_3(r, \theta), & T_4^*(r, \theta) &= r^{-3} S_4(r, \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes, pour  $1 \leq i \leq 4$ ,

$$\begin{cases} \Delta^2 T_i^* = 0 & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \gamma_0(T_i^*) = \gamma_1(T_i^*) = 0 & \text{sur } F \end{cases} \quad (12)$$

avec

$$T_1^*, T_2^* \in H^{a+1}(\Omega), T_3^*, T_4^* \in H^a(\Omega), \quad \forall a \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (13a)$$

$$T_1^*, T_2^* \in W^{2,p}(\Omega), T_3^*, T_4^* \in W^{1,p}(\Omega), \quad \forall p \in \left[1, \frac{4}{3}\right]. \quad (13b)$$

On remarque que, pour toute partie ouverte non vide  $\omega$  de  $\Omega$  telle que  $O \notin \partial\omega$ , on a  $T_i^*|_{\bar{\omega}} \in C^\infty(\bar{\omega})$  pour  $1 \leq i \leq 4$  et le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi_i^* = 0 & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \gamma_0(\Phi_i^*) = \gamma_0(T_i^*) & p.p. \text{ sur } \partial\Omega, \\ \gamma_1(\Phi_i^*) = \gamma_1(T_i^*) & p.p. \text{ sur } \partial\Omega, \\ \Phi_i^* \in H^2(\Omega), \end{cases} \quad (14)$$

admet une solution unique.

On définit alors les fonctions singulières duales  $(S_i^*)_{1 \leq i \leq 4}$  en posant:

$$S_i^* = T_i^* - \Phi_i^* \quad i = 1, 4. \quad (15)$$

Ces fonctions  $S_i^*$  possèdent les propriétés suivantes, pour  $1 \leq i \leq 4$

$$\begin{cases} \Delta^2 S_i^* = 0 & p.p. \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0(S_i^*) = \gamma_1(S_i^*) = 0 & p.p. \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16)$$

De plus, on a

$$S_1^*, S_2^* \in H_0^{a+1}(\Omega), S_3^*, S_4^* \in H^a(\Omega), \quad \forall a \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (17a)$$

$$S_1^*, S_2^* \in W_0^{2,p}(\Omega), S_3^*, S_4^* \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall p \in \left[1, \frac{4}{3}\right]. \quad (17b)$$

### Remarques

- Dans le cas où  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in H^3(\Omega)$ , seules interviendront les fonctions duales  $S_1^*$  et  $S_2^*$ , alors que dans le cas où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ , les quatre fonctions duales agiront.
- Les fonctions singulières  $S_3$  et  $S_4$  sont plus régulières que  $S_1$  et  $S_2$  alors que, à l'inverse, les fonctions singulières duales  $S_1^*$  et  $S_2^*$  sont plus régulières que  $S_3^*$  et  $S_4^*$ .

### 1.3 Caractérisation des coefficients de singularité

En utilisant ces fonctions singulières duales, on décrit dans ce paragraphe le calcul direct des coefficients de singularité à partir des 4 fonctions singulières duales  $(S_i^*)_{1 \leq i \leq 4}$  et des données  $f$  et  $\Psi$  du problème ([5],[14]). On note par  $\rho^* = d(O, \Gamma)$  la distance de  $O$  à  $\Gamma$  et on considère l'ensemble des fonctions de troncatures

$$\mathcal{T} = \left\{ \chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+); \exists r_0, r_1, 0 < r_0 < r_1 < \rho^*, \chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & \text{si } r_1 \leq r \end{cases} \right\}$$

On définit, pour tout  $\rho \in ]0, \rho^*[$ , les constantes

$$\alpha_{ij}(\rho) = \int_{r=\rho} (\Delta T_i^* \partial_r S_j - S_j \partial_r \Delta T_i^* + T_i^* \partial_r \Delta S_j - \Delta S_j \partial_r T_i^*) r d\theta, \quad 1 \leq i, j \leq 4.$$

On remarque que, pour tout  $\chi \in \mathcal{T}$  et pour  $1 \leq i \leq 4$ , on a

$$\begin{aligned} (1 - \chi)T_i^* &\in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), (1 - \chi)\Phi_i^* \in H^4(\Omega) \\ (1 - \chi)S_i^* &\in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, on a } \Delta^2(1 - \chi)S_i^* &= -\Delta^2\chi S_i^*, \\ \Delta^2(1 - \chi)T_i^* &= -\Delta^2\chi T_i^*, \\ \Delta^2(1 - \chi)\Phi_i^* &= -\Delta^2\chi\Phi_i^*. \end{aligned}$$

#### Proposition 1

Les constantes  $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  sont indépendantes de  $\rho$  et valent:

$$\alpha_{ij} = a_i \pi \delta_{ij} \quad \text{avec } a_1 = 8, a_2 = a_3 = 24 \text{ et } a_4 = -120. \quad (18a)$$

De plus, on a pour  $1 \leq i, j \leq 4$  et pour tout  $\chi \in \mathcal{T}$

$$\alpha_{ij} = \int_{\Omega} \Delta S_j \Delta [(1 - \chi)S_i^*] d\Omega + \int_{\Omega} S_j \Delta^2 [(\chi S_i^*)] d\Omega, \quad 1 \leq i, j \leq 4. \quad (18b)$$

#### Démonstration

Soient  $\chi \in \mathcal{T}$  et  $1 \leq i, j \leq 4$ , on note

$$\begin{aligned}
 \beta_{i,j}(\chi) &= \int_{\Omega} \Delta S_j \Delta [(1 - \chi) S_i^*] d\Omega - \int_{\Omega} S_j \Delta^2 [(1 - \chi) S_i^*] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ \Delta S_j \Delta [(1 - \chi) T_i^*] + S_j \Delta^2 (\chi T_i^*) \right\} d\Omega \\
 &\quad - \int_{\Omega} \left\{ \Delta S_j \Delta [(1 - \chi) \Phi_i^*] + S_j \Delta^2 (\chi \Phi_i^*) \right\} d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma} \left\{ \partial_n S_j \Delta [(1 - \chi) T_i^*] - S_j \partial_n \Delta (1 - \chi) T_i^* \right\} d\Gamma \\
 &\quad - \int_{\Omega} \Delta S_j \Delta \Phi_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ S_j \partial_n \Delta \chi \Phi_i^* - \partial_n S_j \Delta (\chi \Phi_i^*) \right\} d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \left( \partial_n S_j \Delta T_i^* - S_j \partial_n \Delta T_i^* - \partial_n \Phi_i^* \Delta S_j + \Phi_i^* \partial_n \Delta S_j^* \right) d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \left( \partial_n S_j \Delta T_i^* - S_j \partial_n \Delta T_i^* - \partial_n T_i^* \Delta S_j + T_i^* \partial_n \Delta S_j \right) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

On a, pour tout  $\rho \in ]0, \rho^*[$ ,  $B = \{(r, \theta) \in \Omega; \rho < r\}$

$$\begin{aligned}
 \beta_{i,j}(\chi) - \alpha_{ij}(\rho) &= \int_{\partial B} \left( \partial_n S_j \Delta T_i^* - S_j \partial_n \Delta T_i^* \right) d\Gamma - \int_{\partial B} \left( \partial_n T_i^* \Delta S_j + T_i^* \partial_n \Delta S_j^* \right) d\Gamma \\
 &= \int_B \left( \Delta S_j \Delta T_i^* - S_j \Delta^2 T_i^* \right) d\Omega - \int_B \left( \Delta T_i^* \Delta S_j - T_i^* \Delta^2 S_j \right) d\Omega \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d'où  $\alpha_{ij}(\rho)$  et  $\beta_{i,j}(\chi)$  sont respectivement indépendantes de  $\rho$  et  $\chi$ . ♠

Ensuite, on considère l'ensemble  $W$  défini par

$$W = \left\{ \varphi \in H^3(\Omega); \gamma_0 \varphi = \gamma_1 \varphi = 0 \text{ p.p. sur } F \right\}.$$

et on énonce les résultats suivants:

**Proposition 2**

On a, pour tout  $\chi \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta^2 \varphi, \chi S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Omega} \varphi \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega &= 0 \quad i = 1, 2, \quad \forall \varphi \in W, \\
 \int_{\Omega} \chi S_i^* \Delta^2 \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \varphi \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega &= 0 \quad i = 3, 4, \quad \forall \varphi \in W \cap H^4(\Omega),
 \end{aligned}$$

**Théorème 2**

Sous les notations du théorème 1, on a :

1) si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in W$ , on a

$$\pi a_i \lambda_i = -\langle f, S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta S_i^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta S_i^*) d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad (19a)$$

2) si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega) \cap W$ , on a

$$\pi a_i \lambda_i = - \int_{\Omega} f S_i^* d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta S_i^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta S_i^*) d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (19b)$$

**Démonstration**

1) Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in W$ , on a pour  $i = 1, 2$ , et pour tout  $\chi \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} \langle f, S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} &= \langle \Delta^2 \psi^r, S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} \\ &= \langle \Delta^2 \psi^r, (1 - \chi) S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} + \langle \Delta^2 \psi^r, \chi S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} \\ &= \int_{\Omega} \Delta \psi^r \Delta [(1 - \chi) S_i^*] d\Omega + \int_{\Omega} \psi^r \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega \end{aligned}$$

(d'après la proposition précédente.)

Mais  $\psi = \psi^r + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$  et

$$\sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha_{ij} = \pi \lambda_i a_i = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \left( \int_{\Omega} \Delta S_j \Delta (1 - \chi) S_i^* d\Omega + \int_{\Omega} S_j \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega \right)$$

d'où

$$\langle f, S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} + \sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ \Delta \psi \Delta [(1 - \chi) S_i^*] + \psi \Delta^2 (\chi S_i^*) \right\} d\Omega.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta \psi \Delta (1 - \chi) S_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \psi \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Delta \psi \Delta (1 - \chi) S_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \psi \Delta^2 (1 - \chi) S_i^* d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta (1 - \chi) S_i^*) d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta (1 - \chi) S_i^*) d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta S_i^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta S_i^*) d\Gamma. \end{aligned}$$

2) Si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega) \cap W$ , on a pour  $i = 1, 2$ , et pour tout  $\chi \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f S_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} S_i^* \Delta^2 \psi^r d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (1 - \chi) S_i^* \Delta^2 \psi^r d\Omega + \chi S_i^* \Delta^2 \psi^r d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Delta \psi^r \Delta [(1 - \chi) S_i^*] d\Omega + \int_{\Omega} \psi^r \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega \end{aligned}$$

(d'après la proposition 2)

Mais  $\psi = \psi^r + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4$  et

$$\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_{ij} = \pi \lambda_i a_i = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \left( \int_{\Omega} \Delta S_j \Delta (1 - \chi) S_i^* d\Omega + \int_{\Omega} S_j \Delta^2 (\chi S_i^*) d\Omega \right)$$

d'où

$$\int_{\Omega} f S_i^* d\Omega + \sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ \Delta \psi \Delta [(1 - \chi) S_i^*] + \psi \Delta^2 (\chi S_i^*) \right\} d\Omega,$$

et on déduit le résultat de la même manière que précédemment.

### Remarques

- On remarque que la régularité de la solution ne dépend pas uniquement de la régularité de  $f$  ou  $\Psi$  mais aussi de la configuration du domaine, c'est à dire que le coefficient de singularité peut être non nul même si  $f$  est très régulière.
- La connaissance de  $S^*$  nous permet de déterminer les coefficients de singularités sans avoir à calculer la solution approchée du problème. Il suffit donc d'avoir une approximation de  $(S_i^*)_{i=1,4}$  dans un espace d'éléments finis mixtes classique ou particulier, ce qui revient à avoir une approximation de  $(\Phi_i^*)_{i=1,4}$  dans cet espace.

## 2 Approximation du problème par la méthode optimisée

### 2.1 Formulation Variationnelle Mixte

On adapte dans ce paragraphe les résultats sur la formulation variationnelle mixte en  $(\omega, \psi)$  présenté dans [4] et [9] en précisant en particulier le cadre fonctionnel. Soient

$f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^3(\Omega)$  et  $\psi$  la solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = f & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \psi - \Psi \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (20a)$$

On note  $\omega = -\Delta\psi$  et  $\omega \in L^2(\Omega)$ , le problème (18) se découple alors en

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \omega & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta\omega = f & \text{dans } H^{-1}(\Omega), \\ \psi - \Psi \in H_0^2(\Omega), \omega \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (20b)$$

avec la formulation variationnelle associée:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \omega v d\Omega + \int_{\Omega} \Delta\psi v d\Omega = 0 & \forall v \in L^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} \omega \Delta\theta = - \langle f, \theta \rangle_{-1,1,\Omega}, & \forall \theta \in H_0^2(\Omega) \\ \psi - \Psi \in H_0^2(\Omega), \omega \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (20c)$$

On introduit l'espace fonctionnel suivant:

$$H^{-1}(\Delta, \Omega) = \{ \theta \in L^2(\Omega), \Delta\theta \in H^{-1}(\Omega) \}$$

muni de la norme naturelle

$$\forall \theta \in H^{-1}(\Delta, \Omega), \quad \|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega}^2 = \|\theta\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta\theta\|_{-1,\Omega}^2. \quad (21)$$

$H^{-1}(\Delta, \Omega)$  est un espace de Hilbert (cf Bernardi-Girault-Maday[4], Girault-Giroire-Sequeira[9]);  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^{-1}(\Delta, \Omega)$ . On a aussi  $H^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Delta, \Omega)$ .

On définit les formes bilinéaires suivantes:

$$\begin{aligned} \forall \theta, \delta \in L^2(\Omega), \quad a(\theta, \delta) &= \int_{\Omega} \theta \delta d\Omega, \\ \forall \theta \in H^{-1}(\Delta, \Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad b(\theta, v) &= \langle \Delta\theta, v \rangle_{-1,1,\Omega}. \end{aligned} \quad (22)$$

On remarque que  $\forall \theta \in H^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$ , on a:

$$b(\theta, v) = - \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla v d\Omega. \quad (23)$$



L'application trace  $\gamma_0$  est définie, linéaire et continue de  $H^{-1}(\Delta, \Omega)$  sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Par ailleurs, les formes  $a$  et  $b$  sont continues et il existe  $\gamma > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  tel que

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \gamma |v|_{1,\Omega} &\leq \sup_{\theta \in H^{-1}(\Delta, \Omega)} \frac{b(v, \theta)}{\|\theta\|_{-1, \Delta, \Omega}}, \\ \forall \theta \in L^2(\Omega), \quad a(\theta, \theta) &= \|\theta\|_{0, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Dans la suite, on considère les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{pour tout } f \in H^{-1}(\Omega), \text{ on pose } F(\eta) = -\langle f, \eta \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega) \\ \bullet \text{pour tout } \Psi \in H^3(\Omega), \Phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ tel que } \Psi - \Phi \in H_0^1(\Omega), \text{ on pose} \\ \quad G(\theta) = \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \Phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\theta) \gamma_1(\Psi) d\Gamma \quad \forall \theta \in H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (24)$$

où  $\Phi$  est par construction un relèvement de  $\Psi|_{\partial\Omega}$ .

### Proposition 3

*Sous les hypothèses (24), la forme linéaire  $G$  se prolonge en une unique forme linéaire continue sur  $H^{-1}(\Delta, \Omega)$ .*

### Démonstration

On a,  $\forall \theta \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla (\Phi - \Psi) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \Psi d\Omega - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\theta) \gamma_1(\Psi) d\Gamma \\ &= -\langle \Delta \theta, \Phi - \Psi \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Omega} \theta \Delta \Psi d\Omega \end{aligned}$$

d'où

$$|G(\theta)| \leq \left( |\Phi - \Psi|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta \Psi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega}.$$

$G$  étant linéaire et  $H^1(\Omega)$  dense dans  $H^{-1}(\Delta, \Omega)$ ,  $G$  se prolonge donc de manière unique en une forme linéaire et continue sur  $H^{-1}(\Delta, \Omega)$ .

### Théorème 3

Sous les hypothèses (24), le problème ,

$$\begin{cases} a(\omega, \theta) + b(\theta, \tilde{\psi}) = G(\theta) & \forall \theta \in H^{-1}(\Delta, \Omega), \\ b(\omega, \eta) = F(\eta) & \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \\ \omega \in H^{-1}(\Delta, \Omega), \tilde{\psi} \in H_0^1(\Omega), \psi = \tilde{\psi} + \Phi \end{cases} \quad (25)$$

admet une solution unique. De plus,  $(\omega, \psi)$  est solution du problème (20a).

### Démonstration

L'existence et l'unicité sont assurées par le théorème de Babuska-Brezzi [6]. L'interprétation de ce problème nous donne

$$a(\omega, \theta) + b(\theta, \tilde{\psi}) = \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \Phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \theta \gamma_1(\Psi) \, d\Gamma \quad \forall \theta \in H^1(\Omega),$$

or

$$b(\theta, \tilde{\psi}) = \langle \Delta \theta, \tilde{\psi} \rangle_{-1,1,\Omega} = \langle \Delta \tilde{\psi}, \theta \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et

$$G(\theta) = - \int_{\Omega} \Phi \Delta \theta \, d\Omega$$

d'où

$$\omega = -\Delta \psi \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ avec } \psi = \tilde{\psi} + \Phi.$$

De plus,  $\psi \in H^1(\Omega)$  avec  $\Delta \psi \in L^2(\Omega)$ , donc la dérivée normale  $\gamma_1(\psi) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ; et on a par Green:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1(\psi), \gamma_0(\theta) \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} &= \int_{\Omega} \theta \Delta \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \theta \, d\Omega \quad \forall \theta \in H^1(\Omega), \\ &= \int_{\Omega} \theta \Delta \psi \, d\Omega - b(\theta, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \Phi \, d\Omega \\ &= -a(\omega, \theta) - b(\theta, \tilde{\psi}) + \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \Phi \, d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \theta \gamma_1(\Psi) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

On déduit que  $\forall \theta \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\langle \gamma_1(\psi), \gamma_0(\theta) \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega} = \langle \gamma_1(\Psi), \gamma_0(\theta) \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}$$

et par conséquence

$$\gamma_1(\psi) = \gamma_1(\Psi) \quad \text{dans} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On a obtenu que

$$\psi - \Psi \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta(\psi - \Psi) \in L^2(\Omega), \quad \gamma_1(\psi - \Psi) = 0$$

On en déduit que  $\psi - \Psi \in H_0^2(\Omega)$ .

Enfin on a

$$b(\omega, \eta) = -\langle f, \eta \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui entraîne que

$$-\Delta\omega = f \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega).$$

On a donc bien résolu le problème (20a).

## 2.2 Discrétisation

Soit  $T_h$  une décomposition régulière de  $\bar{\Omega}$  en triangles  $K$ . On note, pour chaque triangle  $K$ ,  $h_K$  son diamètre et  $mesK$  son aire. On pose  $h = \max_{K \in T_h} h_K$  et on suppose qu'il existe une constante  $\hat{C} > 0$  indépendante de  $h$ , telle que

$$\hat{C}h_K^2 \leq mesK \quad \forall K \in T_h. \quad (26)$$

On considère le sous espace suivant de  $H^1(\Omega)$  :

$$X = \{\theta \in H^1(\Omega); \forall K \in T_h, \theta|_K \in H^2(K)\}$$

et on se donne les espaces discrets suivants:

$$X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h \in P_1(K), \forall K \in T_h\}$$

$$M_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$$

où  $P_1(K)$  représente l'espace des fonctions polynomiales affine sur  $K$ . On a

$$X_h \subset X \subset H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad H^2(\Omega) \subset X$$

Soit  $\mathcal{C}_h$  l'ensemble des côtés internes de  $T_h$ . Pour chaque élément  $T$  de  $\mathcal{C}_h$ , il existe deux triangles  $K$  et  $K'$  tel que  $T = \partial K \cap \partial K'$  et on note par  $mesT$  la longueur du côté  $T$ ; on introduit, pour tout  $\theta \in X$ , le saut  $[\partial_n \theta]$  de la dérivée normale de  $\theta$ , sur les côtés de  $T_h$  par

$$[\partial_n \theta] = \partial_n^K \theta^K + \partial_n^{K'} \theta^{K'} \quad \text{sur } T \quad (27)$$

avec  $\partial_n^K \theta^K$  la dérivée normale de  $\theta|_K$  sur  $\partial K$ .

On définit la forme bilinéaire suivante sur  $X \times X$ :

$$A_h(\theta, \delta) = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} mesT \int_T [\partial_n \theta][\partial_n \delta] dT \quad (28)$$

et on pose  $\forall \theta \in X$

$$|\theta|_h = \sqrt{A_h(\theta, \theta)}. \quad (29)$$

On remarque que  $\forall \theta \in H^2(\Omega)$ , on a

$$[\partial_n \theta] = 0 \quad p.p. \text{ sur } T, \forall T \in \mathcal{C}_h.$$

De même,  $\forall \theta \in X$ , on a

$$\Delta \theta \in L^2(\Omega) \text{ si et seulement si } [\partial_n \theta] = 0 \quad p.p. \text{ sur } T, \forall T \in \mathcal{C}_h.$$

• On note

$$\omega_{S_i} = -\Delta S_i \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (30)$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{S_i} &= 0 \quad 1 \leq i \leq 4, \\ \omega_{S_1}, \omega_{S_2} &\in H^a(\Omega) \text{ et } \omega_{S_3}, \omega_{S_4} \in H^{1+a}(\Omega) \quad \forall a \in [0, \frac{1}{2}[, \\ \omega_{S_1}, \omega_{S_2} &\in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } \omega_{S_3}, \omega_{S_4} \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall p \in [1, \frac{4}{3}[. \end{aligned}$$

On considère l'espace discret  $Y_h^N$ ,  $N \in \{2, 4\}$ , défini par

$$Y_h^N = \begin{cases} X_h \oplus \{\omega_{S_1}\} \oplus \{\omega_{S_2}\} & \text{pour } N = 2, \\ X_h \oplus \{\omega_{S_1}\} \oplus \{\omega_{S_2}\} \oplus \{\omega_{S_3}\} \oplus \{\omega_{S_4}\} & \text{pour } N = 4. \end{cases} \quad (31)$$

On a immédiatement le résultat d'approximation suivant:

#### Théorème 4

Soient  $\beta \geq 0$ , un coefficient de stabilisation, et  $N = 2$  ou  $4$ , sous les notations (24) et les hypothèses  $f \in H^{\frac{N}{2}-2}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^{\frac{N}{2}+2}(\Omega)$ , le problème suivant

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_h \theta_h^r d\Omega + \beta A_h(\omega_h^r, \theta_h^r) + b(\theta_h^r, \tilde{\psi}_h) &= \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \theta_h^r d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \theta_h^r d\Gamma, \quad \forall \theta_h^r \in X_h \\ \int_{\Omega} \omega_h \omega_{S_i} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \omega_{S_i} d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \omega_{S_i} d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq N \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_h^r \nabla \eta_h d\Omega &= \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta_h \in M_h \\ \omega_h &= \omega_h^r + \sum_{i=1}^N \lambda_{h_i} \omega_{S_i} \in Y_h^N, \quad \tilde{\psi}_h \in M_h, \lambda_h \in \mathbf{R}^N, \omega_h^r \in X_h, \psi_h = \tilde{\psi}_h + \Phi \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

admet une solution unique.

- On note

$$V_h^f = \left\{ \theta_h \in X_h; \int_{\Omega} \nabla \theta_h \nabla \eta_h d\Omega = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega} \quad \forall \eta \in M_h \right\}.$$

Si  $(\omega, \psi)$  et  $(\omega_h, \psi_h)$  sont les solutions respectives des problèmes (25) et (32) avec  $\beta > 0$ , on pose

$$E_h = \| \omega - \omega_h \|_{0,\Omega} + | \psi - \psi_h |_{1,\Omega} + \sqrt{\beta} \| \Delta(\omega - \omega_h) \|_{-1,\Omega} + \sqrt{\beta} | \omega_h^r |_h \quad (33)$$

#### Proposition 4

Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $\Omega$  telle que  $\forall \theta \in V_h^f$ ,

$$E_h \leq C \text{Max}(1, \sqrt{\beta}) \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} | \psi |_{2,\Omega} + \| \omega^r - \theta_h^r \|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta} | \theta_h^r |_h + \sqrt{\beta} | \omega^r - \theta_h^r |_{1,\Omega} \right\}$$

#### Démonstration

Etape 1:

Soit  $\theta_h^r \in V_h^f$ , on pose

$$\theta_h = \theta_h^r + \sum_{i=1}^N \lambda_i \omega_{S_i} \text{ et } \sigma_h = \omega_h - \theta_h = \omega_h^r - \theta_h^r + \sum_{i=1}^N (\lambda_{h_i} - \lambda_i) \omega_{S_i}$$

On remarque que

$$\omega - \theta_h = \omega^r - \theta_h^r \text{ et } \sigma_h = \omega_h - \omega + \omega^r - \theta_h^r.$$

Par ailleurs on a

$$\int_{\Omega} \nabla \sigma_h \nabla \eta_h d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\omega^r - \theta_h^r) \nabla \eta_h d\Omega = 0 \quad \forall \eta_h \in M_h$$

et en notant  $\sigma_h^r = \omega_h^r - \theta_h^r$ , on a alors

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \sigma_h) + \beta A_h(\sigma_h^r, \sigma_h^r) &= a(\omega_h - \omega, \sigma_h) + \beta A_h(\omega_h^r, \sigma_h^r) + a(\omega^r - \theta_h^r, \sigma_h) - \beta A_h(\theta_h^r, \sigma_h^r) \\ &= \int_{\Omega} \nabla (\psi_h - \psi) \nabla \sigma_h^r + a(\omega^r - \theta_h^r, \sigma_h) - \beta A_h(\theta_h^r, \sigma_h^r) \\ &= \int_{\Omega} \nabla (\eta_h - \tilde{\psi}) \nabla \sigma_h^r + a(\omega^r - \theta_h^r, \sigma_h) - \beta A_h(\theta_h^r, \sigma_h^r) \quad \forall \eta_h \in M_h \end{aligned}$$

d'où

$$\|\sigma_h\|_{0,\Omega}^2 + \beta |\sigma_h^r|_h^2 \leq \inf_{\eta_h \in M_h} |\tilde{\psi} - \eta_h|_{1,\Omega} \|\Delta \sigma_h^r\|_{-1,\Omega} + \|\omega^r - \theta_h^r\|_{0,\Omega} \|\sigma_h\|_{0,\Omega} + \beta |\theta_h^r|_h |\sigma_h^r|_h$$

D'autre part, on dispose des deux inégalités suivantes démontrées dans Amara-Dabaghi[2]:

il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , tel que

$$\|\Delta \theta_h^r\|_{-1,\Omega} \leq C |\theta_h^r|_h, \quad \forall \theta_h \in X_h$$

$$\forall \theta_h \in X_h, \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla \theta_h \nabla \eta_h d\Omega = 0 \quad \forall \eta_h \in M_h, \text{ on a, } |\theta_h|_h \leq C \|\Delta \theta_h^r\|_{-1,\Omega}.$$

On en déduit que

$$\|\sigma_h\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta} |\sigma_h^r|_h \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} |\tilde{\psi}|_{2,\Omega} + \|\omega^r - \theta_h^r\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta} |\theta_h^r|_h \right\}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \|\Delta(\omega - \omega_h)\|_{-1,\Omega} &= \|\Delta(\omega^r - \omega_h^r)\|_{-1,\Omega} \leq \|\Delta(\omega^r - \theta_h^r)\|_{-1,\Omega} + \|\Delta\sigma_h^r\|_{-1,\Omega} \\ &\leq |\omega^r - \theta_h^r|_{1,\Omega} + C|\sigma_h^r|_h \end{aligned}$$

et

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} \leq \|\omega^r - \omega_h^r\|_{0,\Omega} + \|\sigma_h\|_{0,\Omega}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta}(\|\Delta(\omega - \omega_h)\|_{-1,\Omega} + |\omega_h^r|_h) \\ \leq C\left\{\frac{h}{\sqrt{\beta}}|\psi|_{2,\Omega} + \|\omega^r - \theta_h^r\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta}|\theta_h^r|_h + \sqrt{\beta}|\omega^r - \theta_h^r|_{1,\Omega}\right\} \end{aligned}$$

Etape 2:

On a

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq |\psi_h - \xi_h|_{1,\Omega} + |\psi - \xi_h|_{1,\Omega} \quad \forall \xi_h \in M_h \quad \forall \theta_h^r \in V_h^f$$

et

$$|\psi_h - \xi_h|_{1,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} \nabla(\psi_h - \xi_h) \nabla(\psi - \xi_h) d\Omega + a(\omega - \omega_h, \psi_h - \xi_h) + \beta A(\omega_h^r, \psi_h - \xi_h)$$

Or

$$|\psi_h - \xi_h|_h \leq \|\Delta(\psi_h - \xi_h)\|_{-1,\Omega} \leq c|\psi_h - \xi_h|_{1,\Omega}$$

d'où

$$|\psi_h - \xi_h|_{1,\Omega} \leq c(|\psi - \xi_h|_{1,\Omega} + \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \beta|\omega_h^r|_h).$$

En couplant ces relations, on obtient ainsi le résultat désiré. ♠

Pour expliciter ces estimations d'erreurs a priori, on a besoin de résultats préliminaires que l'on donne dans la suite.

Pour tout  $\tau \in W^{1,1}(\Omega)$ , on définit  $\tau_h = P_h(\tau)$  tel que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \tau_h \nabla \theta_h d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \tau \nabla \theta_h d\Omega & \forall \theta_h \in X_h \\ \int_{\Omega} \tau_h d\Omega = \int_{\Omega} \tau d\Omega \end{cases} \quad (34)$$

On note, si  $\tau \in H^1(\Omega)$ ,

$$\mathcal{E}_h(\tau) = \inf_{\theta_h \in X_h} |\tau - \theta_h|_{1,\Omega} \quad (35)$$

On a en ce cas

$$|\tau - \tau_h|_{1,\Omega} = \mathcal{E}_h(\tau) \quad \text{ainsi que} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}_h(\tau) = 0$$

### Proposition 5

• Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que  $\forall \tau \in H^{1+s}(\Omega)$ ,  $s \in ]0, 1]$ ,

$$\mathcal{E}_h(\tau) = |\tau - P_h(\tau)|_{1,\Omega} \leq Ch^s |\tau|_{1+s,\Omega} \quad (36a)$$

• Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que  $\forall \tau \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|\tau - P_h(\tau)\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_h(\tau) \quad (36b)$$

### Démonstration

Soit  $\tau \in H^1(\Omega)$ ,  $\tau_h = P_h(\tau)$ , on considère

$$\mu \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \mu d\Omega = 0$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \mu \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} (\tau - \tau_h) v d\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ce problème admet une unique solution qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta \mu = \tau - \tau_h & p.p. \text{ dans } \Omega \\ \gamma_1(\mu) = 0 & p.p. \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (37)$$

Les résultats de régularité du laplacien, Grisvard[12], Kondratiev [13], pour un problème de Neumann nous donnent la décomposition suivante de  $\mu$  :

$$\mu = \mu^r + \alpha s_N \quad (38)$$

où

- $\mu^r \in H^2(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $s_N(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \cos(\theta)$ ,
- $\exists C > 0$ , ne dépend que de  $\Omega$ , telle que :  $|\alpha| + \|\mu^r\|_{2,\Omega} \leq C \|\tau - \tau_h\|_{0,\Omega}$ ,



- $\inf_{\theta_h \in X_h} |s_N - \theta_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \|\tau - \tau_h\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\tau - \tau_h) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\mu - \theta_h) \nabla (\tau - \tau_h) d\Omega \quad \forall \theta_h \in X_h \\ &\leq \left\{ \inf_{\theta_h \in X_h} |\mu^r - \theta_h|_{1,\Omega} + |\alpha| \inf_{\theta_h \in X_h} |s_N - \theta_h|_{1,\Omega} \right\} |\tau - \tau_h|_{1,\Omega} \\ &\leq C \left\{ h |\mu^r|_{2,\Omega} + |\alpha| h^{\frac{1}{2}} \right\} |\tau - \tau_h|_{1,\Omega} \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\tau - \tau_h\|_{0,\Omega} |\tau - \tau_h|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\tau - \tau_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}} |\tau - \tau_h|_{1,\Omega}$$

### Proposition 6

Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\Omega$  et de  $h$ , telle que  $\forall \tau \in W^{1,1}(\Omega), \forall \delta \in H^2(\Omega)$ ,

$$|P_h(\tau)|_h \leq C \left\{ h \|\Delta \delta\|_{0,\Omega} + \sup_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^N} \frac{\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \left( P_h(\tau) - \delta - \sum_{i=1}^N \alpha_i \omega_{S_i} \right) d\Omega}{|\varphi|_{1,\Omega}} \right\} \quad (39)$$

### Démonstration

Soit  $\tau \in H^1(\Omega)$ , on note  $\tau_h = P_h(\tau)$  et on considère la fonction  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  telle que

- $\forall K \in \tau_h, \phi|_K \in P_2(K)$ ,
- $\forall S$  sommet de  $T_h, \phi(S) = 0$ ,
- $\forall T$  côté de  $\mathcal{C}_h, M$  milieu du côté  $T, \phi(M) = h_T [\partial_n \tau_h]$  sur  $T$

On a alors par construction,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \tau_h d\Omega = \sum_K \int_K \nabla \phi \nabla \tau_h dK = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \int_T \phi [\partial_n \tau_h] dT = \frac{2}{3} |\tau_h|_h^2 \quad (40)$$

Par inégalités inverses, on obtient que

$$\|\phi\|_{0,K} \leq \hat{C} h_K \left( \sum_{T \subset \partial K \cap \mathcal{C}_h} [\partial_n \tau_h]_T^2 h_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\|\phi\|_{0,\Omega} \leq \hat{C}h|\tau_h|_h \quad (41)$$

et

$$|\phi|_{1,K} \leq \frac{\hat{C}}{h_K} \|\phi\|_{0,K} \leq \hat{C}|\tau_h|_h \quad (42)$$

On déduit de (40), (41) et (42) que  $\forall \delta \in H^2(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}|\tau_h|_h^2 &= \int_{\Omega} \nabla\phi \nabla\tau_h d\Omega = \int_{\Omega} \nabla\phi \nabla(\tau_h - \delta) d\Omega - \int_{\Omega} \phi \Delta\delta d\Omega \\ &\leq \left( \frac{\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla(\tau_h - \delta) d\Omega}{|\phi|_{1,\Omega}} \right) |\phi|_{1,\Omega} + \|\phi\|_{0,\Omega} \|\Delta\delta\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

d'où

$$|\tau_h|_h \leq C \left\{ \sup_{\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla(\tau_h - \delta) d\Omega}{|\phi|_{1,\Omega}} + h \|\Delta\delta\|_{0,\Omega} \right\} \quad (43)$$

D'autre part, on remarque que  $\forall \alpha \in \mathbf{R}^N$ , on a

$$\sup_{\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla(\tau_h - \delta) d\Omega}{|\phi|_{1,\Omega}} = \sup_{\Phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla \left( \tau_h - \delta - \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta S_i \right) d\Omega}{|\phi|_{1,\Omega}}$$

car  $\forall \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla \Delta S_i d\Omega = 0$

et on obtient ainsi le résultat désiré.

### Corollaire

$$1) \forall \tau \in H^1(\Omega), |P_h(\tau)|_h \leq \hat{C}(\mathcal{E}_h(\tau) + h \|\Delta\delta\|_{0,\Omega} + |\tau - \delta|_{1,\Omega}) \quad \forall \delta \in H^2(\Omega).$$

$$2) \forall \tau \in H^2(\Omega), |P_h(\tau)|_h \leq \hat{C}h|\tau|_{2,\Omega}$$

On obtient alors le résultat suivant:

**Théorème 5**

Soient  $(\omega, \psi)$  et  $(\omega_h, \psi_h)$  les solutions respectives des problèmes (25) et (32) avec  $\beta > 0$ . On note par  $E_h$ , donné par (33), l'erreur entre ces solutions, alors il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que

$$E_h \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} |\psi|_{2,\Omega} + (h^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta}) \mathcal{E}_h(\omega^r) + \sqrt{\beta} |P_h(\omega^r)|_h \right\} \quad (44)$$

où  $\omega = \omega^r + \sum_{i=1}^N \lambda_i \omega_{S_i}$ ,  $\omega^r \in H^{\frac{N}{2}}(\Omega)$

On note pour la suite

$$K_3 = \|f\|_{-1,\Omega} + \|\Psi\|_{3,\Omega}, \quad K_4 = \|f\|_{-1,\Omega} + \|\Psi\|_{4,\Omega}$$

et on déduit les corollaires suivants, sous les hypothèses que  $\beta$  est bornée indépendamment de  $h$ .

**Corollaire 1**

Si  $N = 2$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in H^3(\Omega) \cap W$ , alors on a

1)  $\forall \delta \in H^2(\Omega)$ ,

$$E_h \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} K_3 + (h^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta}) \mathcal{E}_h(\omega^r) + \sqrt{\beta} \inf_{\delta \in H^2(\Omega)} (h \|\Delta \delta\|_{0,\Omega} + |\omega^r - \delta|_{1,\Omega}) \right\} \quad (45)$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$ , avec  $a \in [0, 1[$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_h = 0$$

3) Pour  $\beta = h^{2a}$ , avec  $a \in ]0, 1[$ , on a

$$E_h \leq CK_3 (h^{1-a} + h^{\frac{1}{2}} + h^a) \quad (46)$$

4) Cas optimal:  $\beta = h$ ,  $a = \frac{1}{2}$ , on a

$$E_h \leq CK_3 h^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

**Corollaire 2**

Si  $N = 2$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega) \cap W$ , alors on a

1)

$$E_h \leq CK_4 \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h + \sqrt{h\beta} \right\} \quad (48)$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$ , avec  $a \in ]-\frac{1}{2}, 1[$ , on a

$$E_h \leq CK_4 \left\{ h^{1-a} + h + h^{\frac{1}{2}+a} \right\} \quad (49)$$

3) Cas optimal:  $\beta = h^{\frac{1}{2}}$ ,  $a = \frac{1}{4}$ , on a

$$E_h \leq CK_4 h^{\frac{3}{4}} \quad (50)$$

**Corollaire 3**

Si  $N = 4$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega) \cap W$ , alors on a

1)

$$E_h \leq CK_4 \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h^{\frac{3}{2}} + h\sqrt{\beta} \right\} \quad (51)$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$ , avec  $a \in ]-1, 1[$ , on a

$$E_h \leq CK_4 \left( h^{1-a} + h^{\frac{3}{2}} + h^{1+a} \right). \quad (52)$$

3) Cas optimal:  $\beta = 1$ ,  $a = 0$ , on a

$$E_h \leq CK_4 h. \quad (53)$$

On remarque que le choix optimal pour  $\beta = h^{2a}$  dépend de la régularité de  $f$  et  $\Psi$  ainsi que du nombre de fonctions singulières introduites dans la discrétisation :

- $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^3(\Omega)$ ,  $N = 2$  :  $\beta = h$ ,  $E_h = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$
- $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$ ,  $N = 2$  :  $\beta = h^{\frac{1}{2}}$ ,  $E_h = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{4}})$
- $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$ ,  $N = 4$  :  $\beta = 1$ ,  $E_h = \mathcal{O}(h)$

### 3 Estimation d'erreur sur les coefficients de singularités: Méthode de Strang-Fix

On remarque que la solution  $(\omega_h, \psi_h)$  du problème (32) fait apparaître naturellement les coefficients  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$ , comme coefficients associés aux fonctions de base  $(\omega_{S_i})_{1 \leq i \leq N}$ . Ces coefficients  $(\lambda_{h_i})_{1 \leq i \leq N}$  approchent les coefficients de singularités. On va étudier l'erreur a priori  $|\lambda_i - \lambda_{h_i}|$  selon les différents cas de régularité sur les données. On montre pour cela des résultats intermédiaires.

On définit pour  $1 \leq i \leq 4$ , les espaces

$$Z_h^i = \left\{ \sum_{1 \leq i \neq k \leq 4} \beta_k \omega_{S_k}; \beta \in \mathbf{R}^3 \right\} \text{ et } R_h^i = X_h \oplus Z_h^i \quad (54)$$

et on considère le problème variationnel suivant:

$$\begin{cases} a(\tau_{h_i}, \theta_h) = a(\omega_{S_i}, \theta_h); \quad \forall \theta_h \in R_h^i \\ \tau_{h_i} \in R_h^i. \end{cases} \quad (55)$$

on remarque que  $\tau_{h_i}$  approche  $\omega_{S_i}$  sur l'espace  $R_h^i$  constitué de  $X_h$  et des  $(\omega_{S_j})_{j \neq i}$  et en notant  $\delta_{h_i} = \omega_{S_i} - \tau_{h_i}$ , on a donc

$$\begin{aligned} a(\delta_{h_i}, \theta_h) &= 0 \quad \forall \theta_h \in X_h \\ a(\delta_{h_i}, \omega_{S_j}) &= 0 \quad 1 \leq j \neq i \leq 4 \end{aligned} \quad (56)$$

#### Proposition 7

Il existe deux constantes  $\hat{C}_0, \hat{C}_1$  indépendantes de  $h$ , telles que

$$\hat{C}_0 h^{\frac{1}{2}} \leq \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} \leq \hat{C}_1 h^{\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2 \quad (57)$$

$$\hat{C}_0 h^{\frac{3}{2}} \leq \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} \leq \hat{C}_1 h^{\frac{3}{2}} \quad i = 3, 4 \quad (58)$$

#### Démonstration

- Etape 1:

On a

$$\int_{\Omega} \delta_{h_i} \theta_h d\Omega = 0 \quad \forall \theta_h \in R_h^i$$

d'où

$$\|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \delta_{h_i} \omega_{S_i} d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{h_i} (\omega_{S_i} - \theta_h) d\Omega \quad \forall \theta_h \in R_h^i$$

et

$$\|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} \leq \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega} \quad \forall \theta_h \in R_h^i.$$

On décompose  $\Omega = \overbrace{\overline{\Omega}_{h_1} \cup \overline{\Omega}_{h_2}}^{\circ}$  avec

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_{h_1} &= \bigcup_{K \in T_h, 0 \in K} \overline{K}, \\ \overline{\Omega}_{h_2} &= \bigcup_{K \in T_h, 0 \notin K} \overline{K}. \end{aligned} \quad (59)$$

Pour tout sommet  $S$  de  $T_h$ ,  $S \neq O$  (l'origine), on définit  $\theta_h \in X_h$  tel que

$$\theta_h(S) = \omega_{S_i}(S) \text{ et } \theta_h(O) = 0$$

$\theta_h$  est l'interpolé de Lagrange de  $\omega_{S_i}$  dans  $\Omega_{h_2}$ .

On a  $\omega_{S_i}|_{\Omega_{h_2}} \in H^2(\Omega_{h_2})$  d'où  $\|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega_{h_2}} \leq \hat{C}h^2 |\omega_{S_i}|_{2,\Omega_{h_2}}$ , et on vérifie qu'il existe  $\hat{C} > 0$  indépendante de  $h$  tel que

$$\Omega_{h_2} \subset \{(r, \theta); r > \hat{C}h \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\}. \quad (60)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |\omega_{S_i}|_{2,\Omega_{h_2}} &\leq \hat{C}h^{-\frac{3}{2}} \text{ pour } i=1,2 \\ &\leq \hat{C}h^{-\frac{1}{2}} \text{ pour } i=3,4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega_{h_2}} &\leq \hat{C}h^{\frac{1}{2}} \text{ pour } i=1,2 \\ &\leq \hat{C}h^{\frac{3}{2}} \text{ pour } i=3,4 \end{aligned} \quad (61)$$

Par ailleurs, il existe  $\hat{C} > 0$  indépendante de  $h$  tel que

$$\Omega_{h_1} \subset \{(r, \theta); 0 < r < \hat{C}h \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\} = D_h$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\omega_{S_i}\|_{0,\Omega_{h_1}} &\leq \|\omega_{S_i}\|_{0,D_h} \leq \hat{C}h^{\frac{1}{2}} && \text{pour } i=1,2 \\ &\leq \hat{C}h^{\frac{3}{2}} && \text{pour } i=3,4, \end{aligned} \quad (62)$$

et on vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_{0,\Omega_{h_1}} &\leq \hat{C}h^{\frac{1}{2}} && \text{pour } i=1,2 \\ &\leq \hat{C}h^{\frac{3}{2}} && \text{pour } i=3,4 \end{aligned} \quad (63)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega_{h_1}} + \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,\Omega_{h_2}} \leq Ch^{\frac{1}{2}} \text{ si } i = 1, 2 \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \text{ si } i = 3, 4 \end{aligned} \quad (64)$$

•Etape 2:

Soit  $K$  un triangle de  $T_h$  tel que  $O \in \partial K$  et  $\text{mes}(\{\partial K \cap \{\theta = 0\}\}) > 0$ . On note  $\theta_K$  l'angle de sommet  $O$  dans  $K$ . Il existe  $\theta_0 > 0$  indépendant de  $h$  tel que  $0 < \theta_0 \leq \theta_K$  et il existe  $h_0 > 0$ ,  $\hat{C} > 0$  indépendante de  $h$  tel que

$$0 < \hat{C}h_0 \leq h \quad (65)$$

et l'ensemble  $D$  défini par:

$$D = \{(r, \theta); 0 < r < h_0, 0 < \theta_0 \leq \theta_K\} \quad (66)$$

est inclus dans  $K$ . On définit ensuite l'ensemble

$$T_h^i = \left\{ \theta_h = \theta_h^R + \sum_{1 \leq k \leq 4, k \neq i} \beta_k \omega_{S_k}; \theta_h^R \in P_1(D), \beta \in \mathbf{R}^3 \right\}. \quad (67)$$

Le problème

$$\begin{cases} \int_D \rho_{h_i} \theta_h = \int_D \omega_{S_i} \theta_h, & \forall \theta_h \in T_h^i \\ \rho_{h_i} \in T_h^i \end{cases} \quad (68)$$

admet une solution unique et on a

$$\|\omega_{S_i} - \rho_{h_i}\|_{0,D} = \inf_{\theta_h \in T_h^i} \|\omega_{S_i} - \theta_h\|_{0,D}$$

d'où

$$\|\omega_{S_i} - \rho_{h_i}\|_{0,D} \leq \|\delta_{h_i}\|_{0,D} \leq \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega}. \quad (69)$$

•Etape 3:

par

Il existe  $\hat{C}_{2i}, \hat{C}_{3i} > 0$ , indépendantes de  $h$  telles que

$$\begin{aligned} \|\omega_{S_i} - \rho_{h_i}\|_{0,D} &= \hat{C}_{2i} h^{\frac{1}{2}} \text{ pour } i=1,2 \\ &= \hat{C}_{3i} h^{\frac{3}{2}} \text{ pour } i=3,4. \end{aligned} \quad (70)$$

On a

$$\|\omega_{S_i} - \rho_{h_i}\|_{0,D}^2 = \|\omega_{S_i}\|_{0,D}^2 - \|\rho_{h_i}\|_{0,D}^2$$

avec

$$\begin{aligned} \|\omega_{S_i}\|_{0,D}^2 &= \int_0^\theta \int_0^{h_0} |\omega_{S_i}(r, \theta)|^2 r dr d\theta = C_i^* h_0 \text{ si } i=1,2 \\ &= C_i^* h_0^3 \text{ si } i=3,4 \end{aligned} \quad (71)$$

On note l'ensemble

$$\hat{D} = \{(r, \theta); 0 < r < 1, 0 < \theta \leq \theta_0\} \subset K. \quad (72)$$

et l'application

$$\begin{aligned} F: \hat{D} &\longrightarrow D \\ (\hat{r}, \hat{\theta}) &\longmapsto (r, \theta) \text{ avec } r = h_0 \hat{r}, \theta = \hat{\theta} \end{aligned} \quad (73)$$

d'où

$$\int_D \phi(r, \theta) r dr d\theta = h_0^2 \int_{\hat{D}} \hat{\phi}(\hat{r}, \hat{\theta}) \hat{r} d\hat{r} d\hat{\theta},$$

avec

$$\hat{\phi}(\hat{r}, \hat{\theta}) = \phi \circ F(\hat{r}, \hat{\theta}) \quad \forall (r, \theta) \in D, \forall \phi \in L^1(D). \quad (74)$$

On a

$$\begin{aligned} \omega_{S_i} &= r^{-\frac{1}{2}} g_i(\theta) \quad \text{pour } i = 1, 2 \\ &= r^{\frac{1}{2}} g_i(\theta) \quad \text{pour } i = 3, 4 \end{aligned} \quad (75)$$

$$\hat{\omega}_{S_i} = h_0^{-\frac{1}{2}} \hat{r}^{-\frac{1}{2}} g_i(\hat{\theta}) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (76)$$



$$= h_0^{\frac{1}{2}} \hat{r}^{\frac{1}{2}} g_i(\hat{\theta}) \quad \text{pour } i = 3, 4 \quad (77)$$

Par définition ,

$$\int_D \rho_{h_i} \theta_h = \int_D \omega_{S_i} \theta_h, \quad \forall \theta_h \in T_h^i$$

où

$$\rho_{h_i} = \rho_{h_i}^r + \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} \omega_{s_j} \quad \rho_{h_i}^r \in P_1(D) \quad \text{et } \alpha_{ii} = 0.$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{D}} \hat{\rho}_{h_i} \hat{\theta}_h = \int_{\hat{D}} \hat{\omega}_{S_i} \hat{\theta}_h \quad \forall \theta_h \in T_h^i, \\ \hat{\theta}_h = \theta_h \circ F, \quad \hat{\rho}_{h_i} \in \hat{T}_h^i \quad \text{où } \hat{T}_h^i = T_h^i \circ F. \end{array} \right. \quad (78)$$

On note que  $\hat{T}_h^i = \left\{ \theta_{h_i}^R + \sum_{j=1}^4 \hat{\beta}_{ij} \hat{\omega}_{s_j}; \quad \theta_{h_i}^R \in P_1(\hat{D}); \hat{\beta}_{i,k} \in \mathbf{R} \text{ et } \hat{\beta}_{ii} = 0 \right\}$

et

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{s_1} &= \hat{r}^{-\frac{1}{2}} g_i(\hat{\theta}) && \text{pour } i = 1, 2 \\ &= \hat{r}^{\frac{1}{2}} g_i(\hat{\theta}) && \text{pour } i = 3, 4 \end{aligned}$$

Le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{D}} \hat{\gamma}_{h_i} \hat{\theta}_h = \int_{\hat{D}} \hat{\omega}_{S_i} \hat{\theta}_h \quad \forall \theta_h \in \hat{T}_h^i, \\ \hat{\gamma}_{h_i} \in \hat{T}_h^i, \end{array} \right. \quad (79)$$

admet une unique solution indépendante de h. On en déduit que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{h_i} &= h_0^{-\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_{h_i} && \text{si } i=1,2 \\ &= h_0^{\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_{h_i} && \text{si } i=3,4 \end{aligned} \quad (80)$$

et

$$\begin{aligned} \|\rho_{h_i}\|_{0,D}^2 &= h_0^2 \|\hat{\rho}_{h_i}\|_{0,\hat{D}}^2 = h_0 \|\hat{\gamma}_{h_i}\|_{0,\hat{D}}^2 && \text{si } i = 1, 2 \\ &= h_0^3 \|\hat{\gamma}_{h_i}\|_{0,\hat{D}}^2 && \text{si } i = 3, 4 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \|\omega_{S_i} - \rho_{h_i}\|_{0,D}^2 &= \hat{C}_{2i} h && \text{si } i = 1, 2 \\ &= \hat{C}_{3i} h^3 && \text{si } i = 3, 4 \end{aligned} \quad (82)$$

**Théorème 6**

Soient  $(\omega, \psi)$  et  $(\omega_h, \psi_h)$  les solutions respectives des problèmes (25) et (32), on a

1) Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^3(\Omega)$  et  $N = 2$  alors

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ h^{-\frac{1}{2}} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + K_3 h^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (83)$$

2) Si  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$  et  $N = 2$  alors

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ h^{-\frac{1}{2}} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + CK_4 h \right\} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (84)$$

3) Si  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$  et  $N = 4$  alors

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ h^{-\frac{1}{2}} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + K_4 h^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (85a)$$

$$\sum_{i=3}^4 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ h^{-\frac{3}{2}} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + K_4 h^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (85b)$$

**Démonstration**

On a

$$a(\omega - \omega_h, \delta_{h_i}) = a(\omega^r, \delta_{h_i}) + (\lambda_i - \lambda_{h_i}) a(\omega_{S_i}, \delta_{h_i})$$

car

$$a(\delta_{h_i}, \theta_h^r) = 0 \quad \forall \theta_h \in X_h \text{ et } a(\delta_{h_i}, \omega_{S_j}) = 0 \quad i \neq j.$$

De plus, on a

$$a(\omega_{S_i}, \delta_{h_i}) = a(\delta_{h_i}, \delta_{h_i}).$$

On en déduit que

$$a(\omega - \omega_h, \delta_{h_i}) = a(\omega^r - \theta_h^r, \delta_{h_i}) + (\lambda_i - \lambda_{h_i}) \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega}^2$$

d'où

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} \leq \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \inf_{\theta_h^r \in X_h} \|\omega^r - \theta_h^r\|_{0,\Omega}$$

Par conséquent, on a

- si  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^3(\Omega)$  et  $N = 2$  ou  $N = 4$

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} \leq \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \hat{C}h |\omega^r|_{1,\Omega}, \text{ pour } 1 \leq i \leq 2$$

- si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \|\delta_{h_i}\|_{0,\Omega} &\leq \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \hat{C}h^2 |\omega^r|_{2,\Omega}, \text{ si } N = 4, 1 \leq i \leq N \\ &\leq \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \hat{C}h^{\frac{3}{2}} (\|f\|_{0,\Omega} + \|\Psi\|_{4,\Omega}) \text{ si } N = 2, 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

**Corollaire 1**

Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^3(\Omega)$  et  $N = 2$ , on a alors pour  $\beta = h^{2a}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| &\leq c \left\{ K_3 \left( h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}-a} \right) + \left( 1 + h^{a-\frac{1}{2}} \right) \mathcal{E}_h(\omega^r) \right. \\ &\quad \left. + h^{a-\frac{1}{2}} \inf_{\delta \in H^2(\Omega)} \left( h \|\Delta \delta\|_{0,\Omega} + |\omega^r - \delta|_{1,\Omega} \right) \right\} \quad \forall \delta \in H^2(\Omega) \end{aligned} \quad (86)$$

**Corollaire 2**

Si  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$  et  $N = 2$ , alors pour

1)  $\beta = h^{2a}$  et  $a \in ]0, \frac{1}{2}[$ , on a

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq c \left( h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}-a} + h^a \right) K_4 \quad (87)$$

2) Cas optimal: pour  $\beta = h^{\frac{1}{2}}$  et  $a = \frac{1}{4}$ , on a

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq ch^{\frac{1}{4}} K_4 \quad (88)$$

**Corollaire 3**

Si  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Psi \in H^4(\Omega)$  et  $N = 4$ , on a alors

1)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| &\leq c \left( h^{\frac{1}{2}-a} + h + h^{\frac{1}{2}+a} \right) K_4 \\ \sum_{i=3}^4 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| &\leq c \left( 1 + h^{-\frac{1}{2}-a} + h^{a-\frac{1}{2}} \right) K_4 \end{aligned} \quad (89)$$

2) *Cas optimal: pour  $\beta = 1$  et  $a = 0$* 

$$\sum_{i=1}^2 |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq ch^{\frac{1}{2}} K_4 \quad (90)$$

**Remarques**

- Si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in H^3(\Omega)$ , on n'obtient pas de résultat de convergence a priori pour  $\lambda_i - \lambda_{h_i}$ .
- Si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ , là aussi on ne peut rien déduire sur le comportement de  $\lambda_i - \lambda_{h_i}$  pour  $i = 3, 4$ .

## 4 Estimations d'erreur sur les coefficients de singularités - Méthode Duale

On va donner une estimation d'erreur sur les coefficients de singularités par une méthode qui utilise à la fois les fonctions singulières et les fonctions duales. On rappelle que les coefficients de singularités sont caractérisés par les relations

1) *si  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in W$ , on a*

$$\pi a_i \lambda_i = -\langle f, S_i^* \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta S_i^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta S_i^*) d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

2) *si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega) \cap W$ , on a*

$$\pi a_i \lambda_i = - \int_{\Omega} f S_i^* d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \gamma_1(\Delta S_i^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\Delta S_i^*) d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

avec  $S_i^*$  fonction singulière duale. Il nous faut approcher  $S_i^*$  dans  $\Omega$  et  $\Delta S_i^*$  sur  $\Gamma$ .

On a

$$S_i^* = T_i^* - \Phi_i^* \quad 1 \leq i \leq 4$$

Soit  $\chi$  une fonction de troncature, on note

$$\varphi_i^* = -(1 - \chi)T_i^* + \Phi_i^* \in H_0^2(\Omega).$$

on a

$$S_i^* = \chi T_i^* - \varphi_i^*.$$

On pose

$$\rho_i^* = -\Delta \varphi_i^* \in L^2(\Omega),$$

$$F_i = \Delta^2(\chi T_i^*) \in L^2(\Omega), \text{ avec } \|F_i\|_{0,\Omega} \leq C \text{ indépendante de } \chi.$$

On a donc

$$\Delta^2 \varphi_i^* = +F_i \quad p.p \text{ dans } \Omega$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \Delta S_i^* &= \Delta(\chi T_i^*) - \Delta \varphi_i^* = \rho_i^* \quad \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n \Delta S_i^* &= \partial_n \Delta(\chi T_i^*) - \partial_n \Delta \varphi_i^* = \partial_n \rho_i^* \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\lambda_i$  est caractérisé par  $S_i^*$  dans  $\Omega$  et par  $\rho_i^*$ ,  $\partial_n \rho_i^*$  sur  $\Gamma$ .

Le problème suivant

$$\begin{cases} a_h(\rho_{h_i}^*, \theta_h) + b(\theta_h, \varphi_{h_i}^*) = 0, & \forall \theta_h \in Y_h^N \\ b(\rho_{h_i}^*, \eta_h) = \int_{\Omega} \eta_h F_i d\Omega & \forall \eta_h \in M_h \\ \rho_{h_i}^* \in Y_h^N, \varphi_{h_i}^* \in M_h \end{cases} \quad (91)$$

admet une solution unique avec  $Y_h^N$  défini par (31). On note que l'on ne prend pas en compte les singularités pour l'inconnue  $\varphi_{h_i}^*$  mais qu'elles sont introduites pour  $\rho_{h_i}^*$ . On remarque que  $\rho_{h_i}^*$  approche  $\rho_i^*$  et  $\varphi_{h_i}^*$  approche  $\varphi_i^*$ , de même on définit l'approximation  $S_{h_i}^*$  de  $S_i^*$  par la relation

$$S_{h_i}^* = \chi T_i^* - \varphi_{h_i}^* \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Les coefficients de singularités sont définis naturellement par la méthode duale en posant:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } f \in H^{-1}(\Omega), \Psi \in H^3(\Omega) \cap W \text{ et } i = 1, 2 \\ \pi a_i \lambda_{h_i} = -\langle f, S_{h_i}^* \rangle_{-1,1,\Omega} + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \rho_{h_i}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \partial_n \rho_{h_i}^* d\Gamma \\ \text{si } f \in L^2(\Omega), \Psi \in H^4(\Omega) \cap W \text{ et } i = 3, 4 \\ \pi a_i \lambda_{h_i} = -\int_{\Omega} f S_{h_i}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \rho_{h_i}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi) \partial_n \rho_{h_i}^* d\Gamma \end{array} \right\} \quad (92)$$

On sait par ailleurs, que pour  $1 \leq i \leq 4$ , on a la décomposition de  $\varphi_i^*$  en parties régulière et singulières

$$\varphi_i^* = \varphi_i^r + \sum_{j=1}^4 \mu_{i,j} S_j, \quad \varphi_i^r \in H^4(\Omega).$$

L'approximation de  $\varphi_i^*$ , sans tenir compte des contributions singulières/régulières, est

$$\varphi_{h_i}^* = \varphi_{h_i}^r \in M_h,$$

la décomposition de  $\rho_i^*$  en parties régulière et singulières s'écrit

$$\rho_i^* = \rho_i^r + \sum_{j=1}^N \mu_{i,j} \omega_{s_j} \quad \text{avec } \rho_i^r \in H^2(\Omega), \rho_i^r = -\Delta \varphi_i^r, \mu_{i,j} \in \mathbb{R},$$

l'approximation de  $\rho_i^*$  en tenant compte des contributions singulières/régulières est alors

$$\rho_{h_i}^* = \rho_{h_i}^r + \sum_{j=1}^N \mu_{h_i,j} \omega_{s_j} \quad \text{avec } \rho_{h_i}^r \in X_h, \mu_{h_i,j} \in \mathbb{R}$$

On note

$$\mathcal{F}_i(\beta) = \|\rho_i^* - \rho_{h_i}^*\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta} \|\Delta(\rho_i^* - \rho_{h_i}^*)\|_{-1,\Omega} + |\varphi_i^* - \varphi_{h_i}^*|_{1,\Omega} + \sqrt{\beta} |\rho_{h_i}^*|_h$$

et on a d'après les corollaires 3.2 et 3.3, les estimations a priori suivantes:

$$\mathcal{F}_i(\beta) \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h + \sqrt{h\beta} \right\} \|F_i\|_{0,\Omega} \quad \text{si } N = 2 \quad (93a)$$

$$\mathcal{F}_i(\beta) \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h^{\frac{3}{2}} + h\sqrt{\beta} \right\} \|F_i\|_{0,\Omega} \quad \text{si } N = 4. \quad (93b)$$

**Théorème 7**

On a l'estimation d'erreur suivante,

$$\begin{aligned} \forall \theta_h \in X_h, \forall \eta_h \in M_h, \quad 1 \leq i \leq N, \\ |\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ \|\omega - \theta_h\|_{0,\Omega} + \|\Delta(\omega - \theta_h)\|_{-1,\Omega} \right. \\ \left. + \sqrt{\beta} |\theta_h|_h + |\tilde{\psi} - \eta_h|_{1,\Omega} \right\} \mathcal{F}_i(\beta) \end{aligned} \quad (94)$$

**Démonstration**

On a pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \pi a_i(\lambda_i - \lambda_{h_i}) &= -\langle f, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i \rangle_{-1,1,\Omega} + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \\ &= \langle \Delta \omega, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i \rangle_{-1,1,\Omega} + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \\ &= b(\omega, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \end{aligned}$$

de même, pour  $i = 3, 4$

$$\begin{aligned} \pi a_i(\lambda_i - \lambda_{h_i}) &= -\int_{\Omega} f(\varphi_{h_i}^* - \varphi_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \Delta \omega(\varphi_{h_i}^* - \varphi_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \\ &= b(\omega, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \end{aligned}$$

On en déduit que pour  $1 \leq i \leq 4$ ,

$$\begin{aligned} \pi a_i(\lambda_i - \lambda_{h_i}) &= b(\omega, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \\ &= b(\omega - \theta_h, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) + b(\theta_h, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma \quad \forall \theta_h \in X_h, \\ &= b(\omega - \theta_h, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) - a(\rho_{h_i}^* - \rho_i, \theta_h) - \beta A_h(\rho_{h_i}^r, \theta_h) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma, \\ &= b(\omega - \theta_h, \varphi_{h_i}^* - \varphi_i) + a(\rho_{h_i}^* - \rho_i, \omega - \theta_h) - \beta A_h(\rho_{h_i}^r, \theta_h) - a(\rho_{h_i}^* - \rho_i, \omega) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi)(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma_0(\Psi)(\partial_n \rho_{h_i}^* - \partial_n \rho_i^*) d\Gamma, \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
a(\omega, \rho_{h_i}^* - \rho_i) &= - \int_{\Omega} (\rho_{h_i}^* - \rho_i) \Delta \psi d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla (\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma \\
&= -b(\rho_{h_i}^* - \rho_i, \tilde{\psi} - \eta_h) + \int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla (\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Omega - \int_{\Gamma} \gamma_1(\Psi) \gamma_0(\rho_{h_i}^* - \rho_i^*) d\Gamma \\
&\quad \text{pour tout } \eta_h \in M_h
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat désiré.

### Corollaire 1

Si  $N = 2$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\Psi \in H^3(\Omega) \cap W$ , on a  
1)

$$\begin{aligned}
|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} K_3 + (h^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta}) \mathcal{E}_h(\omega^r) + \right. \\
\left. \sqrt{\beta} \inf_{\delta \in H^2(\Omega)} (h \|\Delta \delta\|_{0,\Omega} + |\omega^r - \delta|_{1,\Omega}) \right\} \left( \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h + \sqrt{h\beta} \right) \|F_i\|_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{95}$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$  avec  $a \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned}
|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq C \left\{ h^{1-a} K_3 + (h^{\frac{1}{2}} + h^a) \mathcal{E}_h(\omega^r) + \right. \\
\left. h^a \inf_{\delta \in H^2(\Omega)} (h \|\Delta \delta\|_{0,\Omega} + |\omega^r - \delta|_{1,\Omega}) \right\} (h^{1-a} + h + h^{\frac{1}{2}+a}) \|F_i\|_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{96}$$

3) En ce cas

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq \hat{C} \left( h^{1-a} + (h^{\frac{1}{2}} + h^a) \mathcal{E}_h(\omega^r) + h^a \right) (h + h^{1-a} + h^{\frac{1}{2}+a}) \|F_i\|_{0,\Omega}$$

4)  $\forall a \in [0, 1[$ , on a  $\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_i - \lambda_{h_i}| = 0$

5) Si  $a = \frac{1}{2}$  alors  $|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq \hat{C}h$

### Corollaire 2



Si  $N = 2$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ , on a

1)

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h + \sqrt{\beta h} \right\}^2$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$  avec  $a \in ]-\frac{1}{2}, 1[$ , on a

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 \left\{ h^{1-a} + h + h^{\frac{1}{2}+a} \right\}^2 \|F_i\|_{0,\Omega}. \quad (97)$$

3) Pour  $\beta = h^{\frac{1}{2}}$  et  $a = \frac{1}{4}$ , on a

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 h^{\frac{3}{2}}. \quad (98)$$

### Corollaire 3

Si  $N = 4$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\Psi \in H^4(\Omega)$ , on a

1)

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 \left\{ \frac{h}{\sqrt{\beta}} + h^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\beta h} \right\}^2$$

2) Pour  $\beta = h^{2a}$  avec  $a \in ]-1, 1[$ , on a

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 \left( h^{1-a} + h^{\frac{3}{2}} + h^{1+a} \right)^2 \quad (99)$$

3) Pour  $\beta = 1$  et  $a = 0$ , on a

$$|\lambda_i - \lambda_{h_i}| \leq CK_4 h^2. \quad (100)$$

### Remarques

- On a donc trois méthodes de détermination des coefficients  $\lambda_{h_i}$ , l'une est directe et les autres sont obtenues en utilisant les fonctions  $S_{h_i}^*$  et  $\rho_{h_i}^*$  approchant les fonctions duales  $S_i^*$  et leur laplacien  $-\Delta S_i^*$ .
- Le calcul de  $S_{h_i}^*$  et  $\rho_{h_i}^*$  est fait indépendamment de  $f$  et peut être effectué une fois pour toute; cette fonction n'est liée qu'au domaine  $\Omega$  et à la triangulation  $\Gamma_h$ .

- La deuxième méthode semble particulièrement intéressante dans la situation où l'on doit résoudre un grand nombre de fois le premier problème avec des seconds membres différents et lorsque seule est désirée la connaissance de la valeur des coefficients de singularités et non les solutions approchées en elle mêmes.

Enfin, nous présentons dans le tableau qui suit la synthèse des estimations d'erreurs obtenues dans ce paragraphe.

Nombre de Fonctions singulières	Régularité des données	Méthode Directe		Méthode Duale	
		i=1,2	i=3,4	i=1,2	i=3,4
2	$f \in H^{-1}(\Omega), \Psi \in H^3(\Omega)$	borné		$h$	
2	$f \in L^2(\Omega), \Psi \in H^4(\Omega)$	$h^{\frac{1}{2}}$		$h^{\frac{3}{2}}$	
4	$f \in L^2(\Omega), \Psi \in H^4(\Omega)$	$h^{\frac{1}{2}}$		$h^2$	$h^2$

Tableau des estimations d'erreurs:  $|\lambda_i - \lambda_{h_i}| = O(h^{a_i})$

## 5 Résultats Numériques

Les essais numériques ont été effectués sur un ouvert fissuré avec des maillages uniformes. Les maillages testés ont les caractéristiques décrites dans le tableau suivant:

Maillage	$h$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$
Paramètre N	2	4	8
Pas $h / L$	0.5	0.25	0.125
Nombre de sommets	27	85	297
Nombre de sommets internes	7	45	197
Nombre de triangles	32	128	512

*Caractéristiques des maillages testés*

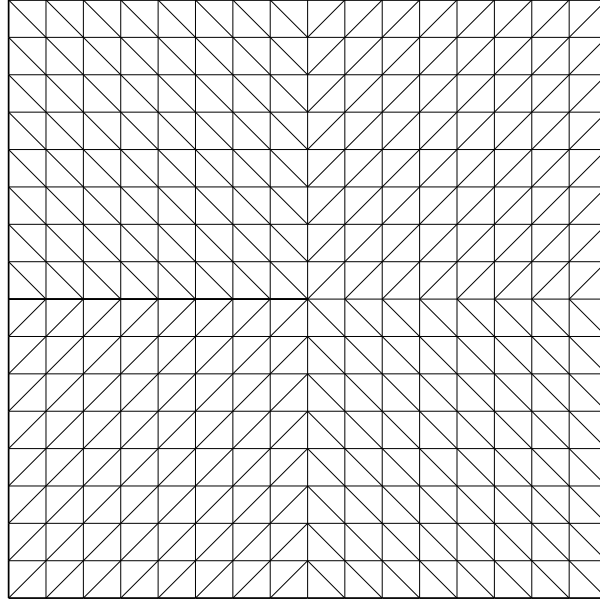


FIG. 1 Ouvert  $\Omega$ -Maillage

Les tests ont porté sur des variations en  $\beta$  ou en maillages. Les calculs ont concernés les deux premières fonctions singulières données par (4).

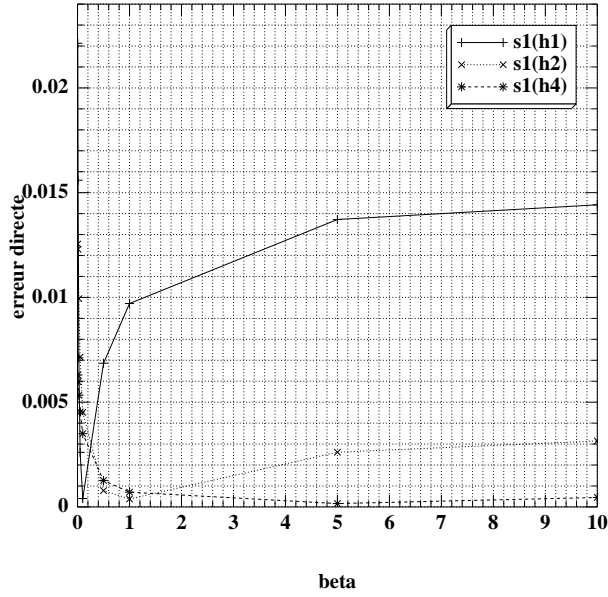
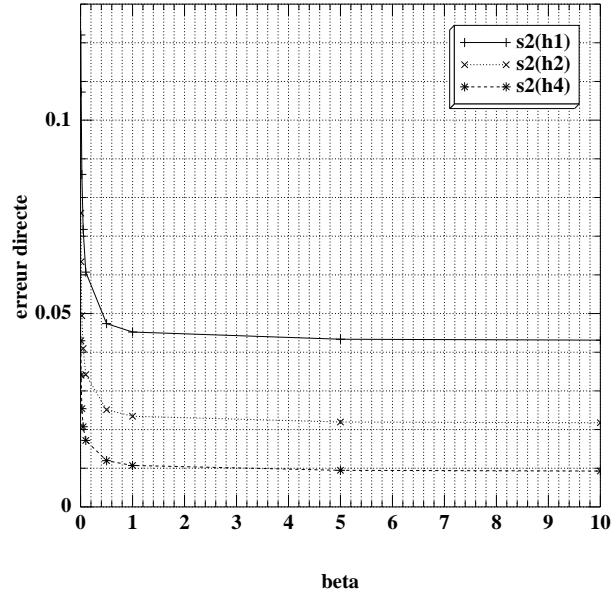
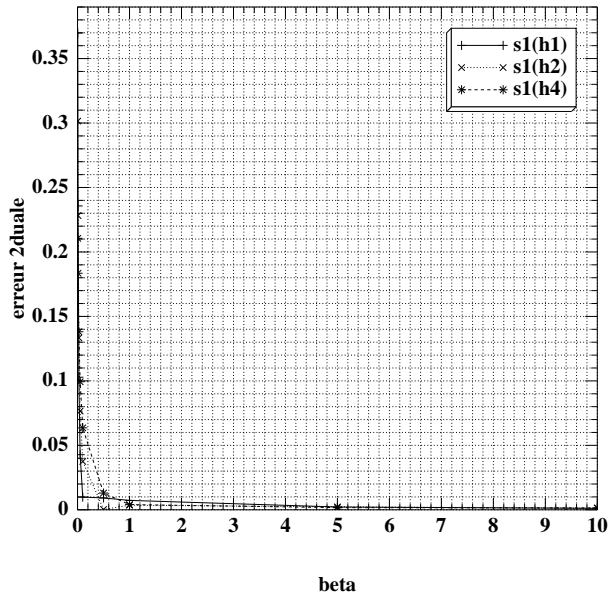
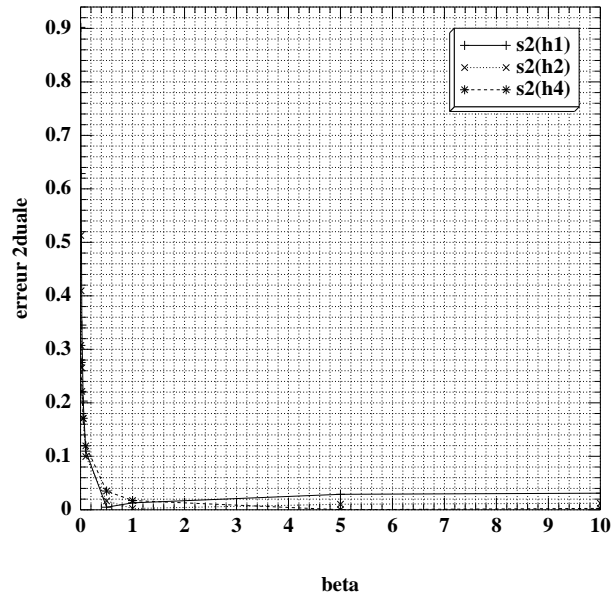
Les essais présentés résolvent le problème suivant, pour  $i = 1, 2$  et  $\chi$  fonction de troncature:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \omega_h \theta_h + \beta A_h(\omega_h^r, \theta_h^r) + b(\theta_h, \psi_h) = 0 \quad \forall \theta_h \in Y_h^2 \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_h^r \nabla \eta_h d\Omega = \int_{\Omega} \eta_h \Delta^2(\chi S_i) \quad \forall \eta_h \in M_h \\ \omega_h \in Y_h^2, \psi_h \in M_h \end{array} \right. \quad (101)$$

la solution exacte est  $\omega = -\Delta(\chi S_i)$  et  $\psi = \chi S_i \in H_0^2(\Omega)$  dès que  $\chi \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ .

On a aussi  $(1 - \chi)S_i \in H^4(\Omega)$  d'où  $\psi = \psi^r + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$  et ceci implique donc que  $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0$  pour  $j \neq i$  et  $\psi^r = (\chi - 1)S_i$ .

On doit donc obtenir pour la méthode directe, les coefficients  $\lambda_{h_1}$  et  $\lambda_{h_2}$  qui approchent respectivement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On présente, sur les figures 2 et 3, les résultats obtenus pour  $i=1$  et 2. Dans le cas des deux singularités, la convergence en maillage apparaît nettement pour tout  $\beta \in [0, 10]$ .

FIG. 2. Erreur  $|\lambda(S1) - \lambda(S1)_h|$ : Méthode directeFIG. 3. Erreur  $|\lambda(S2) - \lambda(S2)_h|$ : Méthode directeFIG. 4. Erreur  $|\lambda(S1) - \lambda(S1)_h|$ : Méthode dualeFIG. 5. Erreur  $|\lambda(S2) - \lambda(S2)_h|$ : Méthode duale

On observe que la première singularité met en valeur un coefficient  $\beta$  optimal où l'erreur est minimale alors que la seconde singularité a un comportement plus écrasé à partir de  $\beta = 1$ . Par contre, les effets de convergence demeurent dans tous les cas.

On présente, sur les figures 4 et 5, les résultats obtenus lors des essais avec la méthode singulière duale. Le comportement est qualitativement du même type pour les 2 singularités. Il apparaît une nette progression dès que l'on a  $\beta > 0$ . Un coefficient  $\beta$  optimal se dégage pour chaque maillage mais sans être particulièrement marqué. On note que les courbes de résultat sont très proches pour la méthode singulière duale. Ceci met en valeur la rapidité de convergence de cette méthode.

## 6 Conclusion

Les méthodes de calcul de solutions singulières et de coefficients de singularités présentées utilisent des éléments finis affines. L'extension à des degrés plus élevés ne posent aucun problème. Les résultats démontrés dans Amara-Dabaghi[2] s'étendent en effet au cas  $k \geq 2$ . On obtient alors des estimations d'erreur a priori plus intéressantes pour la méthode singulière duale et de ce fait, une meilleure convergence sur les coefficients de propagation de fissures mais à un coût d'implémentation numérique évidemment plus élevé.

Par contre, pour la méthode directe, en cas de blocage de la régularité des données  $f$  et  $\Psi$ , élever le degré des polynômes n'améliore pas a priori la qualité des résultats numériques. La méthode présentée s'étend aussi à des ouverts plus réguliers, les fonctions sont en ce cas moins singulières, la qualité des résultats s'améliorant ainsi.

## Références

- [1] Amara M., *Une méthode optimale de classe  $C^0$  d'approximation du bilaplacien*; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 319, pp.1327-1330, Série I, Paris 1994.
- [2] Amara M., El Dabaghi F. *Une méthode optimale d'éléments finis de classe  $C^0$  d'approximation du bilaplacien 2D: analyse théorique et résultats numériques*; Rapport de recherche INRIA, No 3068, décembre 1996.
- [3] Amara M., Moussaoui M., *Aproximation des coefficients de singularités. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Tome 313 serie I, p.338, 1991, France

- 
- [4] Bernardi C., Girault V., Maday Y., *Mixed spectral element approximation of the Navier Stokes equations in the stream function and vorticity formulation*; IMA Journal of Numerical Analysis, 12, pp.565-608, 1992.
- [5] Blum-Dobrowolski, *On finite element method for elliptic equations for domains with corner. Computing. 28. 1982.*
- [6] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and hybrid finite element method*; Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer Verlag New York, 1991.
- [7] Brezzi F., Fortin M., Marini L.D., *Mixed finite element methods with continuous stresses*; Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 3, No 2, pp.275-287, 1993.
- [8] Ciarlet P.G., Raviart P.A., *A mixed method for the biharmonic problem*; Mathematical aspect of finite elements in partial differential equations, Carl de Boor Ed, Academic Press, New York, pp.125-145, 1974.
- [9] Girault V., Giroire J., Sequeira A., *A stream function-vorticity variational formulation for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces*; Math. Meth. in the Applied Sciences, 15 5, pp.345-363, 1992.
- [10] Girault V., Raviart P.A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*; Springer Verlag Berlin, 1986.
- [11] Glowinski R., Pironneau O., *Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem*; SIAM Review, 17, pp.167-212, 1979.
- [12] Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*; Pitman ,Massachusetts 1985.
- [13] Kondratiev V. A. *The smoothness of a solution of Dirichlet's problem for 2nd order elliptic equation in a region with a piecewise smooth boundry, Differential'nye Uravneniya* , 6 (10), 1831-1841 (and Differential Equations, 6, 1392-1401).
- [14] Moussaoui M. , *Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coin.in Singularities and Constructive...*; Grisvard -Wendland et Whiteman ed. Lecture Notes in Math No. 1121 Spinger Verlag 1985.
- [15] Ruas V., *On formulations of vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications*; ZAMM Zangew Math. Mech., 74, 1, pp.43-55, 1994.
- [16] Scholz R., *A mixed method for fourth order problem using finite elements*; RAIRO, Analyse Numérique, 12, pp.85-90, 1978, France.





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399