

Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible

Philippe P. Pebay

▶ **To cite this version:**

Philippe P. Pebay. Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible. [Rapport de recherche] RR-3369, INRIA. 1998. inria-00073320

HAL Id: inria-00073320
https://inria.hal.science/inria-00073320

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible.

Philippe P. PEBAY

No 3369

4 mars 1998

THÈME 4



ISSN 0249-6399

INRIA
ROCQUENCOURT

Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible.

Philippe P. PEBAY*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3369 — 4 mars 1998 — 46 pages

Résumé : Ce rapport propose une méthode de redéfinition *a priori* d'un champ de contraintes de surface triangulé, afin d'en proposer un équivalent qui soit Delaunay-admisssible. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une face dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points auquel elle appartient, en particulier dans le cas où ceux-ci ne sont pas en position générale, est établie. Un algorithme de subdivision des faces, piloté par un critère géométrique et complété par des bascules d'arêtes est présenté. Un jeu représentatif d'exemples illustre l'approche choisie.

Mots-clé : Triangulation, triangulation de Delaunay, triangulation contrainte, triangulation surfacique.

(Abstract: pto)

* E-mail : Philippe.Pebay@inria.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

Construction of a surface Delaunay conforming triangulation.

Abstract: This report presents a method suitable to redefine *a priori* a field of constraints of a surface triangulation. The resulting surface triangulation is Delaunay conforming. A necessary and sufficient condition to demonstrate the existence of a face in any Delaunay triangulation of the convex hull of the given set of points (which doesn't satisfy the general position criterion) is provided. An algorithm based on triangle subdivision, governed by a geometric estimator, and on edge swapping operations is given. A representative set of examples illustrates the method.

Key-words: Triangulation, Delaunay-triangulation, constrained triangulation, surface triangulation.

Table des matières

Introduction **4**

1 Rappels et généralités **6**
1.1 Diagramme de Voronoï 6
1.2 Triangulation de Delaunay 7
1.3 Triangulation contrainte 10
1.4 Cas de la dimension 2 11
1.4.1 Forçage des contraintes 11
1.4.2 Cassage des contraintes 12
1.4.3 Construction d'une contrainte Delaunay-admissible 13
1.5 Cas de la dimension 3 14
1.5.1 Forçage des contraintes 15
1.5.2 Cassage des contraintes 16
1.5.3 Construction d'une contrainte Delaunay-admissible 16

2 Triangulation de Delaunay fortement admissible **17**
2.1 Classification 17
2.1.1 L'indicatrice de classification 17
2.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-conformité 23
2.1.3 Delaunay-conformité forte 25
2.2 Subdivision 31
2.2.1 Pilotage des subdivisions 32
2.2.2 Bascules d'arêtes 36
2.3 Extensions 37
2.3.1 Insertion des points 37
2.3.2 Bascules d'arêtes 37
2.4 Schéma général 38

3 Exemples d'application **39**
3.1 Création d'une contrainte Delaunay-admissible 39
3.2 Application au maillage volumique 40

4 Conclusions et perspectives **45**

Bibliographie **46**

Introduction

De nombreuses applications font appel à des maillages, et en particulier à des triangulations de domaines complexes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Par exemple, des recouvrements plans, surfaciques ou volumiques d'objets bi ou tridimensionnels sont nécessaires à la conception assistée par ordinateur, à la simulation numérique ou encore à la visualisation graphique. Dans ce cadre, la méthode de Delaunay est une approche parmi d'autres, comme l'utilisation des octrees [Shephard,Georges-1991], le recours à des méthodes frontales [Löhner-1996] ou l'emploi des voxels [Frey-1993] pour le développement de générateurs automatiques de maillages. Son principal atout réside dans sa rapidité à générer une triangulation, et par suite un maillage.

Une triangulation de Delaunay est une triangulation de l'enveloppe convexe d'un nuage de points, possédant certaines propriétés remarquables (boule vide, maximisation du minimum des angles, dualité avec le diagramme de Voronoï associé aux sommets) ; cependant, elle ne peut intrinséquement pas tenir compte de contraintes topologiques. Or de nombreuses applications pratiques (comme la simulation numérique par la méthode des éléments finis) exigent que le maillage de l'objet E qu'elles considèrent, recouvrement polyédrique d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ respecte une contrainte topologique Γ. Celle-ci, définie comme une liste d'arêtes et éventuellement de faces contient généralement une contrainte de bord ∂E, approchée par un recouvrement polygonal ou polyédrique, ainsi que d'autres objets topologiques devant apparaitre explicitement dans la triangulation, par exemple des interfaces. Par suite, l'application considérée n'est possible que si la triangulation préserve l'intégrité de la contrainte, ou à défaut en contient un équivalent topologique et géométrique. Dans ce contexte, il est donc nécessaire de contraindre la méthode de Delaunay à respecter, en un certain sens, la contrainte Γ, ce qui conduit à envisager deux types d'approches :

- récuperation *a posteriori* des exigences topologiques de la contrainte, si la préservation de l'intégrité de celle-ci est requise ;
- redéfinition *a priori* de la contrainte, si un équivalent topologique et géométrique de celle-ci satisfait l'utilisateur, de telle sorte qu'elle apparaisse dans la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage des sommets [1].

Les méthodes de récupération *a posteriori* de la frontière, peuvent être considérées comme abouties en dimension 2 [Borouchaki-1994]. En revanche, elles sont

1. Ainsi, étant satisfaite automatiquement, la contrainte n'en est plus une.

plus délicates en dimension 3, car certaines des propriétés d'existence ou d'optimalité de la solution valables dans $\mathbb{R}^2$ ne s'étendent pas à $\mathbb{R}^3$. Ruppert et Seidel [Ruppert,Seidel-1992], ont d'ailleurs mis en évidence l'inexistence d'algorithmes de complexité polynomiale valables en général. Des algorithmes de robustesse raisonnable ont été proposés [George-1997] [Weatherill,Hassan-1994], mais ils ne résolvent pas le problème de certaines configurations bloquées. De surcroit, la triangulation résultante n'est en général pas de Delaunay, dès lors qu'elle est obtenue par modifications locales d'une triangulation initiale vérifiant cette propriété. Cet aspect prend toute son acuité pour certaines méthodes d'approximation du squelette d'un polygone ou d'un polyèdre qui se basent sur une triangulation exactement de Delaunay.

La redéfinition *a priori* de la contrainte, de telle sorte que celle-ci soit construite par un algorithme basé sur la méthode de Delaunay, présente le double avantage de faire l'économie d'une triangulation initiale d'une part ; d'assurer qu'une triangulation préservant l'integrité d'un équivalent topologique et géométrique de la contrainte, et possédant la propriété de Delaunay peut être construite d'autre part. En dimension 2, le problème a été résolu, et un algorithme basé sur la subdivision des arêtes contraintes est proposé par exemple par [George,Borouchaki-1997]. En revanche, dans le cas de la dimension 3, le problème reste ouvert. En effet, l'inclusion du disque minimal contenant une portion d'un segment dans le disque de celui-ci, fondement de la convergence pour la méthode citée n'est plus valable dans le cas des faces. Ce résultat essentiel dans $\mathbb{R}^2$ ne s'étendant pas à $\mathbb{R}^3$, une extension simple de la méthode est impossible. Signalons enfin une méthode de récupération *a posteriori* avec redéfinition de la contrainte, préservant la conformité au sens de Delaunay proposée par [Sapidis,Perrucio-1991]. On peut la qualifier d'hybride dans la mesure où la récupération intervient après triangulation, bien que l'intégrité de la contrainte ne soit pas préservée. Elle n'a pas à notre connaissance été étendue en dimension 3.

Considérant que, pour certains problèmes, les méthodes *a posteriori* sont soit inadaptées (en raison de la non-conformité au sens de Delaunay par exemple), soit sous-optimales ou sans résultat (cas des configurations bloquées de $\mathbb{R}^3$), nous proposons dans cet article une réponse *a priori* en dimension 3. L'approche proposée, basée sur un algorithme itératif de subdivision des faces constituant la contrainte, intègre une stratégie gouvernant la progression des découpages, ainsi qu'un opérateur de bascule d'arête lorsque cette opération est compatible avec la relation d'équivalence définie d'une part, avec la conformité au sens de Delaunay d'autre part. Les principales propriétés de la triangulation de Delaunay sont rappelées dans la Section 1. Nous exposons ensuite notre méthode dans la Section 2. Des exemples illustrent les performances en Section 3, enfin des extensions sont évoquées en conclusion.

1 Rappels et généralités

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points deux à deux distincts de $\mathbb{R}^d$, pour $d \in \{2;3\}$, dont on note P_i les points. On rappelle qu'un *maillage conforme* d'une partie Ω de $\mathbb{R}^d$ est un recouvrement polyédrique de celle-ci, tel que toute face d'un des polyèdres constitutifs soit face d'un autre élément ou appartienne à la frontière. En particulier, une *triangulation* est un maillage conforme dont tous les éléments sont des simplexes de $\mathbb{R}^d$. Dans cet article, les maillages considérés sont des triangulations de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que leurs éléments sont respectivements des triangles et des tétraèdres.

1.1 Diagramme de Voronoï

Seul un bref rappel est donné. On se reportera à [Voronoï-1908] ou à l'abondante littérature connexe et plus accessible pour plus de détails.

Définition 1.1 *Pour tout point $P_i \in \mathcal{S}$, la* cellule de Voronoï *de P_i relative à $\mathcal{S}$ est définie comme :*

$$V_i^{\mathcal{S}} = \{M \in \mathbb{R}^d : (\forall\ P_j \in \mathcal{S})\ MP_i \leqslant MP_j\}$$

Définition 1.2 *On appelle* points, arêtes *et éventuellement* faces de Voronoï de $\mathcal{S}$ *les intersections de cellules de dimensions respectives 1, 2 et 3.*
L'ensemble des points, arêtes et éventuellement faces de Voronoï constitue le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}$, *noté* $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

Définition 1.3 *Si, pour $d = 2$, $\mathcal{S}$ ne contient aucun triplet de points alignés ou de quadruplet de points cocycliques, ou si, pour $d = 3$, $\mathcal{S}$ ne contient aucun quadruplet de points coplanaires ou quintuplet de points cosphériques, on dit que les points de $\mathcal{S}$ sont en* position générale.

La position générale assure que dans $\mathbb{R}^2$ toutes les 4-intersections de cellules sont vides ; dans $\mathbb{R}^3$ toutes les 5-intersections de cellules sont vides, et toutes les 4-intersections sont de dimension inférieure ou égale à un. La Figure 1 illustre en deux dimensions les cellules de Voronoï associées à un nuage de points ; on remarquera que ceux-ci ne sont pas en position générale.

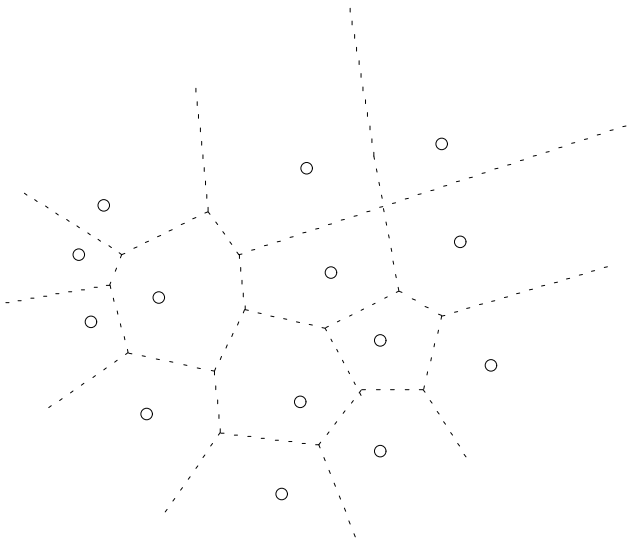


FIG. 1 – Diagramme de Voronoï (exemple en deux dimensions).

1.2 Triangulation de Delaunay

On rappelle les principales propriétés de la triangulation de Delaunay. On note $\mathcal{S}_k$, pour $1 \leqslant k \leqslant card(\mathcal{S})$, le sous-ensemble constitué des k premiers points de $\mathcal{S}$.

Définition 1.4 *Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de $\mathcal{S}$, le segment $[P_iP_j]$ est appelé* arête de Delaunay *si :*

- *pour $d = 2$, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ est une arête de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.*
- *pour $d = 3$, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ est une face de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.*

Pour tout triplet (P_i, P_j, P_k) de points distincts de $\mathcal{S}$, le triangle ou la face $P_iP_jP_k$ est de Delaunay *ou* Delaunay-conforme *si :*

- *pour $d = 2$, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \cap V_k^{\mathcal{S}}$ est un sommet de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.*
- *pour $d = 3$, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \cap V_k^{\mathcal{S}}$ est une arête de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.*

Exclusivement en dimension 3, un tétraèdre est Delaunay-conforme *dès lors que ses quatre faces le sont.*

On énonce à présent quelques résultats essentiels, en vue de l'obtention d'une méthode pratique de génération de triangulations de Delaunay.

Théorème 1.1 (Propriété de la boule vide) *Sous les hypothèse précédentes, $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ constitue un maillage conforme de l'enveloppe convexe $Conv(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$, appelé* recouvrement de Delaunay *de $\mathcal{S}$. En particulier, c'est une triangulation appelée* triangulation de Delaunay *de $\mathcal{S}$ si et seulement si les points de $\mathcal{S}$ sont en position générale.*

De plus, T est un élément (pas nécessairement simplicial) de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{B}_T$, la boule fermée circonscrite à T, ne contient pas d'autre point de $\mathcal{S}$ que les sommets de T.

On peut donc déduire de l'unique recouvrement de Delaunay (Figure 2) $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ au moins une triangulation de Delaunay (Figure 3), même si les points ne sont pas en position générale, en subdivisant en triangles en dimension 2, tétraèdres en dimension 3, les éléments non simpliciaux de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$. Il n'y a pas conséquent plus unicité de cette triangulation de Delaunay.

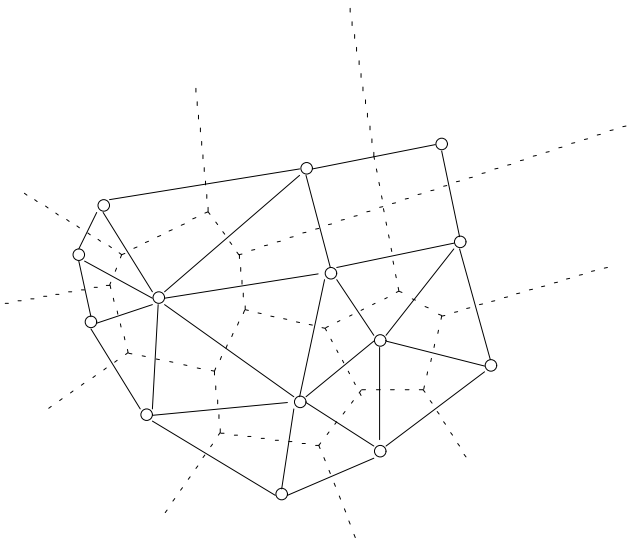


FIG. 2 – Recouvrement de Delaunay (exemple en deux dimensions).

Théorème 1.2 (Lemme Général de Delaunay) *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points $\mathcal{S}$. Si la propriété de la boule vide*

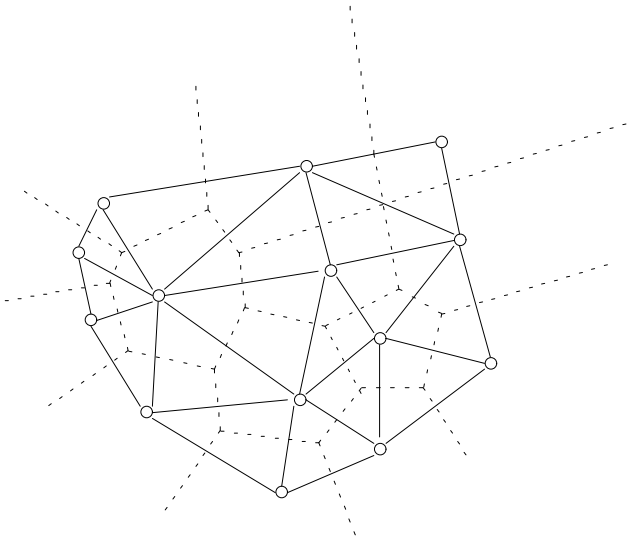


FIG. 3 – Une triangulation de Delaunay (exemple en deux dimensions).

est satisfaite pour toute configuration de deux éléments adjacents de $\mathcal{T}$, alors elle est vraie sur tout $\mathcal{T}$ et celle-ci est une triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

On trouvera une preuve de ces théorèmes dans [Delaunay-1934]. Le théorème suivant permet le développement d'algorithmes de maillage automatique, par insertion successive des sommets de l'objet considéré. Il est énoncé ici dans $\mathbb{R}^3$, en convenant de désigner par fP le tétraèdre dont les sommets sont ceux de la face f et le point P.

Théorème 1.3 *Pour $4 \leqslant k \leqslant card(\mathcal{S})$, on suppose connu $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$, et on appelle, lorsqu'ils existent, $T_1, T_2, ..., T_p$ les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ tels que $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{T_i}$ contienne P_k. Alors :*

- *Si $P_k \in Conv(\mathcal{S}_{k-1})$, alors $C = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} T_i$ est un polyèdre étoilé par rapport à P_k, appelé* cavité *de celui-ci. De plus, considèrant les s faces f_j^C de C :*

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup (\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s} f_j^C P_k) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- *Si* $P_k \notin Conv(\mathcal{S}_{k-1})$ *et s'il existe au moins* T_1, *alors* $C = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} T_i$ *est un polyèdre dont* s' *faces* f_j^C *ne sont pas visibles de* P_k, *et de plus :*

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup (\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s'} f_j^C P_k) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- *Si* $P_k \notin Conv(\mathcal{S}_{k-1})$ *et s'il n'existe aucun* T_i, *alors, considérant les* s'' *faces* f_j *de* $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ *visibles par* P_k *:*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \cup (\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant s''} f_j P_k) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

On a bien évidemment le théorème homologue dans $\mathbb{R}^2$ en remplaçant les faces par les arêtes, et les tétraèdres par les triangles.

1.3 Triangulation contrainte

On cherche à ce que la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points respecte, en un sens que nous allons préciser, une contrainte d'ordre topologique. La condition la plus forte consiste naturellement à exiger de la triangulation qu'elle contienne exactement les éléments de la contrainte.

Définition 1.5 *On appelle* champ de contraintes *d'un ensemble fini de points distincts* $\mathcal{S}$ *un ensemble fini d'arêtes en dimension 2, d'arêtes et de faces en dimension 3 dont les extrémités sont dans* $\mathcal{S}$, *et qui ne s'intersectent pas hormis éventuellement sur leurs bords.*

Définition 1.6 *On dit qu'une triangulation* vérifie exactement *un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement dans celle-là.*

Au sens de la Définition 1.6, deux cas de figure peuvent se présenter concernant la triangulation de Delaunay $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ et un champ de contraintes associé Γ :

- soit $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ vérifie exactement Γ ;
- soit $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ ne vérifie pas exactement Γ ; dans ce cas, on peut modifier localement $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ pour faire apparaitre les constituants de Γ.

Par conséquent, compte tenu de l'unicité du recouvrement de Delaunay, la satisfaction forte de la contrainte conduit à une triangulation qui n'est pas de Delaunay en général, dès lors qu'après modifications locales elle ne contient plus nécessairement le recouvrement de Delaunay.

Consécutivement, on est amené à proposer une définition plus faible, mais d'application plus générale :

Définition 1.7 *On dit qu'une triangulation* vérifie faiblement *un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement ou par recouvrement dans celle-là.*

En ce dernier sens, deux approches permettent de produire une triangulation vérifiant la contrainte. Elles consistent à :

- donner une subdivision de la contrainte plus aisée à retouver par modifications locales de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
- subdiviser Γ en un nouveau champ de contraintes Γ' dont tous les eléments soient Delaunay-admissibles. Ainsi, ils seront tous construits par une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}'$, nuage de points obtenu par ajout à $\mathcal{S}$ des sommets de Γ' non présents dans Γ.

Pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées au sujet de la Définition 1.6, la première approche ne peut satisfaire une exigence générale de Delaunay-conformité. En revanche, une éventuelle solution obtenue par la seconde est par définition Delaunay-conforme. La difficulté est de déterminer $\mathcal{S}'$, avec un nombre raisonnable de points supplémentaires.

1.4 Cas de la dimension 2

Nous exposons brièvement les principales méthodes de récupération de la frontière en dimension 2, qui conduisent à affirmer que le problème est résolu dans ce cas.

1.4.1 Forçage des contraintes

Soit une triangulation $\mathcal{T}$ de $Conv(\mathcal{S})$ ne vérifiant pas exactement un champ de contraintes Γ. On rappelle (voir la Figure 4) que le retournement d'arêtes est un opérateur topologique local en dimension 2, et qu'il ne peut être appliqué que si la

réunion des deux faces adjacentes concernées est convexe de bord quadrilatéral[2]. La méthode de forçage des contraintes repose sur les deux résultats suivants, dont on trouvera une démonstration dans [George,Borouchaki-1997].

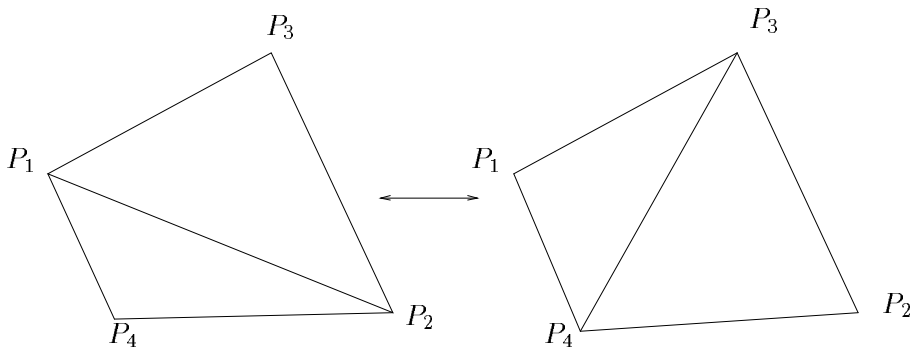


FIG. 4 – Bascule d'arête (exemple en dimension 2).

Théorème 1.4 *Pour tout domaine de frontière polygonale simple non croisée, il existe une triangulation sans point interne.*

Théorème 1.5 *À partir d'une triangulation quelconque de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points $\mathcal{S}$, on peut construire toute triangulation de cette enveloppe par bascules successives d'arêtes.*

En corollaire, les mêmes auteurs proposent un algorithme *a posteriori*, récupérant exactement la frontière par un nombre fini d'échanges d'arêtes. La triangulation résultante satisfait exactement le champ de contraintes ; dès lors elle n'est pas en général de Delaunay.

1.4.2 Cassage des contraintes

Dans ce cas, on va se contenter de produire une triangulation vérifiant faiblement la contrainte. Supposons donc donnée une triangulation $\mathcal{T}$ de $Conv(\mathcal{S})$ ne vérifiant pas faiblement un champ de contraintes Γ. Le principe proposé par [Borouchaki-1994] consiste en la retriangulation de chaque triangle intersecté par une arête contrainte, de telle sorte qu'une subdivision de celle-ci existe dans la triangulation finale (voir

2. C'est-'a-dire dont le bord ne peut être recouvert par trois segments, ce qui aboutirait, après bascule, à la création d'un triangle dégénéré.

la Figure 5). Cette méthode *a posteriori* produit une triangulation qui n'est pas de Delaunay. Elle ne respecte pas l'intégrité de la contrainte, puisqu'elle ne la satisfait qu'au sens faible. Il s'agit donc d'une approche de transition entre forçage de la contrainte et reformulation *a priori* sous exigence de Delaunay-conformité, méthode qui va à présent être développée.

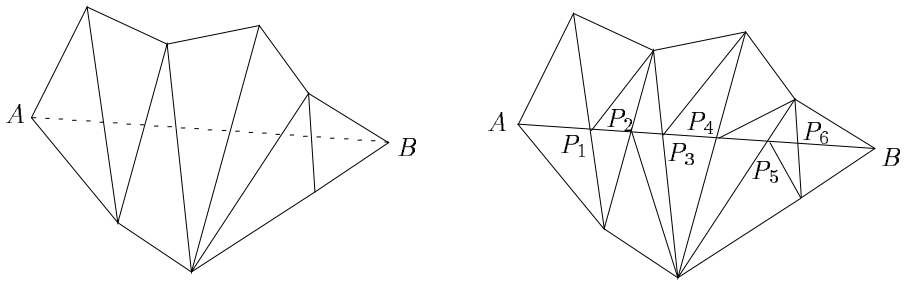


FIG. 5 – Cassage des arêtes en dimension 2.

1.4.3 Construction d'une contrainte Delaunay-admissible

Par définition, on exige que la triangulation finale soit de Delaunay ; sous cet impératif, comme on l'a vu au Paragraphe 2.4, on ne peut se satisfaire que d'une vérification faible du champ de contraintes. Le théorème suivant, dont on trouvera une démonstration dans [George,Borouchaki-1997] permet de distinguer parmi les arêtes de Γ celles qui sont Delaunay-admissibles de celles qui ne le sont pas.

Théorème 1.6 *Soient $P_1 \neq P_2$ appartenant à un ensemble fini de points $\mathcal{S}$. Alors le segment $[P_1P_2]$ est Delaunay-conforme (au sens de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$) si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :*

(i) Le disque ouvert de diamètre $[P_1P_2]$ ne contient aucun point de $\mathcal{S}$.

(ii) Le disque ouvert de diamètre $[P_1P_2]$ contient les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ de $\mathcal{S}$, tous dans le même demi-plan ouvert limité par la droite (P_1P_2). Considèrant parmi eux Q_k tel que le disque ouvert circonscrit à P_1, P_2 et Q_k soit de rayon maximal, alors celui-ci ne contient aucun point de $\mathcal{S}$.

La classification des arêtes étant effectuée, il reste à traiter les arêtes de Γ qui ne sont pas de Delaunay.

Or, puisque deux cercles dont les diamètres ont pour support une même droite sont tangents, il vient le lemme suivant :

Lemme 1.1 *Soient P_1, P_2 et P_3 trois points tels que $P_1 \neq P_3$ et $P_2 \in]P_1P_3[$. Alors les cercles de diamètres respectifs $[P_1P_2]$ et $[P_2P_3]$ sont tangents intérieurement au cercle de diamètre $[P_1P_3]$.*

Par conséquent, les disques ayant pour diamètres les arêtes obtenues par subdvisions sont inclus dans ceux des arêtes originelles, d'où un résultat justifiant la convergence en un nombre fini d'itérations.

Théorème 1.7 *Soient $P_1 \neq P_2$ appartenant à un ensemble fini de points $\mathcal{S}$ tels que le segment $[P_1P_2]$ ne soit pas Delaunay-conforme (au sens de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$). Pour tout point Q de $\mathcal{S}$ parmi les s contenus dans le disque ouvert de diamètre $[P_1P_2]$, on définit Q^*, projeté orthogonal de Q sur $[P_1P_2]$. Alors les disques ouverts de diamètres $[P_1Q^*]$ et $[Q^*P_2]$ contiennent chacun un nombre de points de $\mathcal{S}$ strictement inférieur à s.*

[George,Borouchaki-1997] proposent un algorithme basé sur ces propriétés, dont la convergence est assurée par le nombre fini de points de $\mathcal{S}$. L'intérêt majeur de cette méthode réside dans la connaissance *a priori* des arêtes de Γ qui ne sont pas Delaunay-conformes, ce qui évite d'avoir à construire une première triangulation. En outre, on a l'assurance que Γ', subdivision de Γ, sera exactement trouvée par une triangulation de Delaunay, ce qui revient à dire que Γ sera vérifiée faiblement.

Une autre approche, présentée par [Sapidis,Perrucio-1991], consiste à subdiviser les arêtes manquantes *a posteriori*, ce qui implique la construction d'une triangulation initiale. L'idée générale est, pour une arête manquante donnée, de détecter les triangles dont le disque circonscrit contient une partie non vide de celle-ci, puis d'insérer un point par composante connexe des intersections non vides de ces disques. Lors d'une triangulation ultérieure, les subdivisions de l'arête seront retrouvées.

1.5 Cas de la dimension 3

Alors qu'en dimension 2, le problème de la vérification exacte pour une triangulation quelconque comme celui de la vérification faible avec Delaunay-conformité sont résolus, le cas de la dimension 3 reste très ouvert.

En effet, un certain nombre de résultats établis en dimension 2 ne s'étendent pas à la dimension 3, interdisant des extrapolations naturelles des méthodes développées plus haut.

Plus particulièrement, l'exigence de Delaunay-conformité qui nous préoccupe porte ici sur un champ de contraintes constitué d'arêtes et de faces, et ces dernières posent de redoutables difficultés.

1.5.1 Forçage des contraintes

L'obstacle majeur à une telle méthode en dimension 3 réside dans le fait que le Théorème 1.1 n'a pas d'équivalent pour un domaine de frontière polyèdrale, et en particulier triangulaire. Le polyèdre de Schönhart (*cf.* [Schönhart-1928], bas de la Figure 6), impossible à trianguler avec des tétraèdres non dégénérés dont les sommets sont ceux du polyèdre fournit un contre-exemple simple.

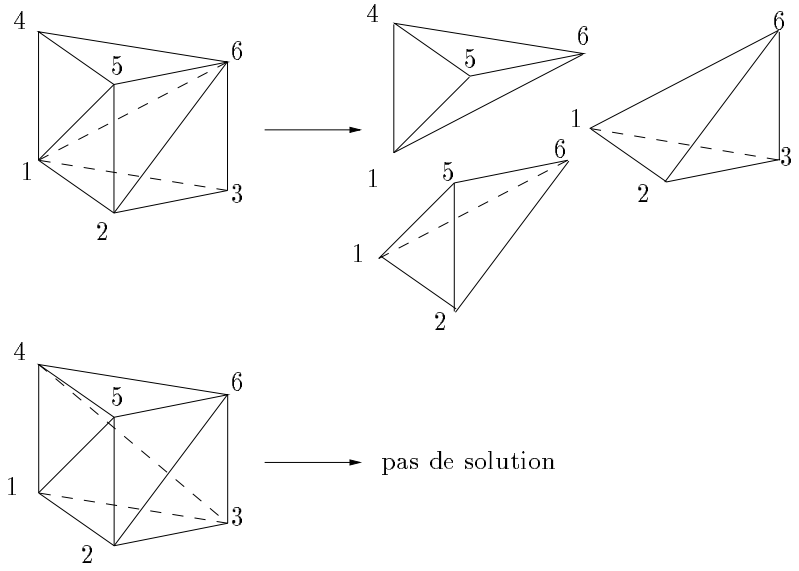


FIG. 6 – Prisme triangulaire et polyèdre de Schönhart non triangulable.

Dès lors, il n'existe pas en général de solution exacte au problème, à moins de s'autoriser à ajouter des points internes, appelés *points de Steiner*. Par exemple, dans le cas du polyèdre de Schönhart, l'ajout d'un seul point interne[3] règle le problème.

Aucune réponse n'a pour l'heure été apportée concernant le nombre minimal de points de Steiner à ajouter, ni sur la possibilité de trouver leur position en un temps polynomial ([Ruppert,Seidel-1992]).

3. Tout point interne de ce polyèdre est visible de chacune de ses faces.

Cependant, une méthode empirique est proposée par [George,Borouchaki-1997], à partir d'opérateurs de transformation locale d'une triangulation. Cette approche est d'une grande complexité et, si elle conduit au résultat dans la plupart des cas, elle fournit en revanche une triangulation qui n'est pas de Delaunay.

1.5.2 Cassage des contraintes

La méthode décrite en dimension 2 a été étendue à la dimension 3 à partir des constatations suivantes ([Borouchaki-1994]) :

- l'existence des trois arêtes d'une faces n'impliquant pas que cette dernière soit présente dans une triangulation, il faut donc agir directement sur les faces ;
- à la différence de la dimension 2, il existe plusieurs types d'intersection entre une face et l'intérieur de l'un des éléments, il faut donc définir différents opérateurs de cassage.

Cette extension ne change évidemment pas la nature de la méthode, qui reste une récupération *a posteriori* et au sens faible de la frontière.

1.5.3 Construction d'une contrainte Delaunay-admissible

Comme en dimension 2, on exige que la triangulation finale soit de Delaunay ; les remarques du Paragraphe 1.3 restant valables en dimension 3, on doit se contenter d'une vérification faible du champ de contraintes.

De plus, comme on l'a vu précédemment, l'existence exacte ou par subdivision des trois arêtes d'une face n'implique pas l'existence de celle-ci (alors que l'inverse est évidemment vrai). Par conséquent, ce sont les faces qu'il convient de rendre faiblement admissibles. Or, et ici se trouve le point d'achoppement, le Lemme 1.1 n'a pas d'equivalent pour les sphères minimales circonscrites aux faces. Dès lors, une extension naturelle de la méthode est impossible.

2 Triangulation de Delaunay fortement admissible

Nous proposons à présent notre méthode de redéfinition *a priori* du champ de contraintes, de telle sorte que celle-ci soit construite par un mailleur de Delaunay. Il s'agit donc d'une vérification faible du champ de contraintes initial. Puisque nous avons vu qu'il convient de traiter directement les faces, il faut pouvoir distinguer, à l'intérieur du champ de contraintes, celles qui sont Delaunay-conformes, et qui par suite seront construites par le mailleur de Delaunay, de celles qui ne le sont pas.

2.1 Classification

Un ensemble fini de points distincts $\mathcal{S}$ et un champ de contraintes associé Γ étant donnés, il est nécessaire de distinguer les faces de Γ qui seront dans toute triangulation de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas. Pour ces dernières, nous avons jugé pertinent d'identifier les principales caractéristiques, ce qui permet entre autres le développement algorithmique d'un test de Delaunay-conformité.

2.1.1 L'indicatrice de classification

L'indicatrice Θ présentée dans ce paragraphe a pour objet la classification des faces de Γ, permettant de décider de leur Delaunay-conformité et par suite, de leur traitement éventuel.

Définition 2.1 *On appelle* petite sphère *(respectivement* petite boule*) d'un triangle non dégénéré la sphère (respectivement la boule) ayant pour grand cercle le cercle circonscrit à ce triangle.*

Remarquons que la petite sphère est la plus petite des sphères passant par les trois sommets du triangle. On conviendra de noter $\partial\mathcal{B}_{ijk}$ (respectivement $\mathcal{B}_{ijk}$) la petite sphère (respectivement la petite boule) fermée associée à la face limitée par le triangle non dégénéré $P_iP_jP_k$.

Définition 2.2 *Soit f une face dont les sommets P_i, P_j et P_k sont des points de $\mathcal{S}$ deux à deux distincts de $\mathcal{S}$. On convient de noter $\mathcal{H}^+_{ijk}$ et $\mathcal{H}^-_{ijk}$ les deux demi-espaces ouverts limités par le plan $(P_iP_jP_k) = \mathcal{H}_{ijk}$. On définit alors le* type *de f, noté $\Theta(f)$, de la façon suivante :*

- *Si $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k\}$, alors $\Theta(f) = 0$* (Figure 7).

- *Si* $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k\} \coprod \mathcal{E}$, *avec* $\mathcal{E} = \{Q_1, ..., Q_r\}$ *tel que* $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+_{ijk}$ *ou* $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^-_{ijk}$, *on désigne par* Q^* *un point de* $\mathcal{E}$ *tel que la boule* $\mathcal{B}_t$ *circonscrite au tétraèdre* $t = P_iP_jP_kQ^*$ *soit de rayon maximal;*
  - *si* $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$ *ou si* $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k, Q^*\}$, *alors* $\Theta(f) = 1.0$ (Figure 8) ;
  - *si* $\overset{\circ}{B}_t \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$, *alors* $\Theta(f) = 1.1$ (Figure 9) ;
  - *si* $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$ *et* $\overset{\circ}{B}_t \cap \mathcal{S} = \varnothing$ *et* $(\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, P_k, Q^*\} = \mathcal{F} \neq \varnothing$, *alors :*
    - *si* $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}^+_{ijk}$ *ou si* $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}^-_{ijk}$, *alors* $\Theta(f) = 1.2.0$ (Figure 10) ;
    - *si* $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \neq \varnothing$ *et* $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \neq \varnothing$, *alors* $\Theta(f) = 1.2.1$ (Figure 11).
- *Si, outre* P_i, P_j *et* P_k, $\mathcal{B}_{ijk}$ *contient des points de* $\mathcal{S}$ *de part et d'autre de* $\mathcal{H}_{ijk}$, *et aucun dans celui-ci, alors* $\Theta(f) = 2$ (Figure 12).
- *Si* $\mathcal{B}_{ijk}$ *contient un ensemble de points* $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ *autres que* P_i, P_j *et* P_k, *dont certains dans le disque fermé* $\Delta_{ijk} = \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}$ *:*
  - *si les points de* $\mathcal{E}$ *sont tous dans le même demi-espace ouvert limité par* $\mathcal{H}_{ijk}$, *alors* $\Theta(f) = 3.1$ (Figure 13) ;
  - *si des points de* $\mathcal{E}$ *sont de part et d'autre de* $\mathcal{H}_{ijk}$, *alors* $\Theta(f) = 3.2$;
  - *si* $\mathcal{E}$ *ne contient pas d'autres points que ceux de* Δ_{ijk}, *alors* $\Theta(f) = 3.3$.

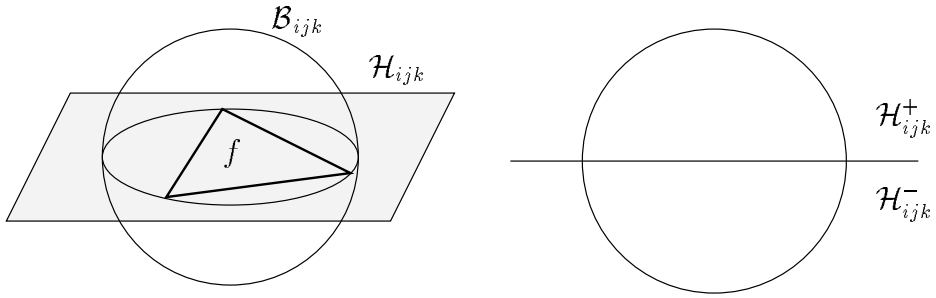


FIG. 7 – Cas $\theta(f) = 0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

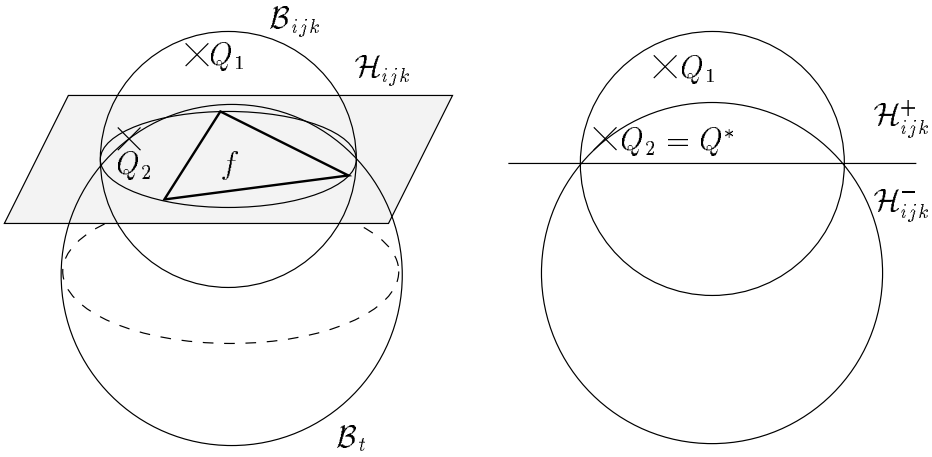


FIG. 8 – Cas $\theta(f) = 1.0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

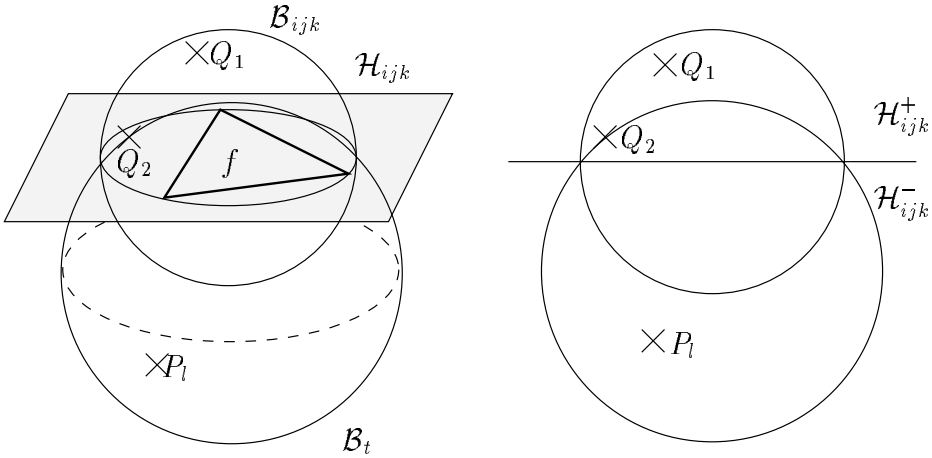


FIG. 9 – Cas $\theta(f) = 1.1$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

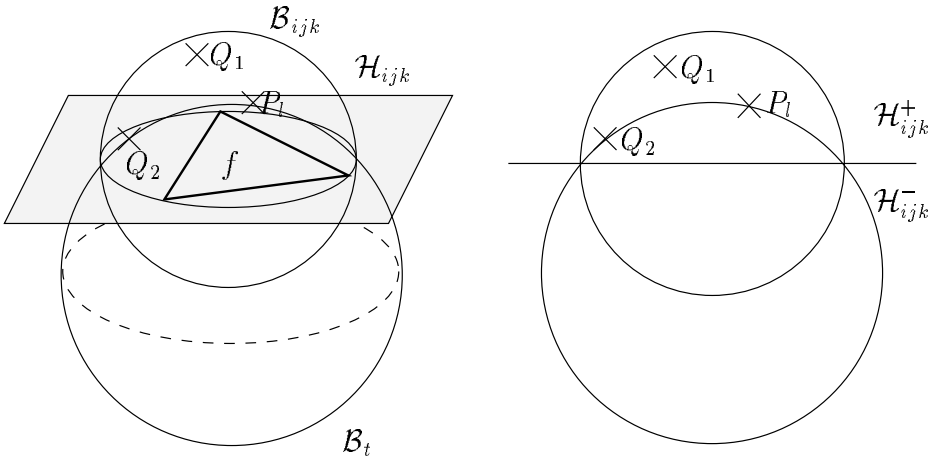


FIG. 10 – Cas $\theta(f) = 1.2.0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

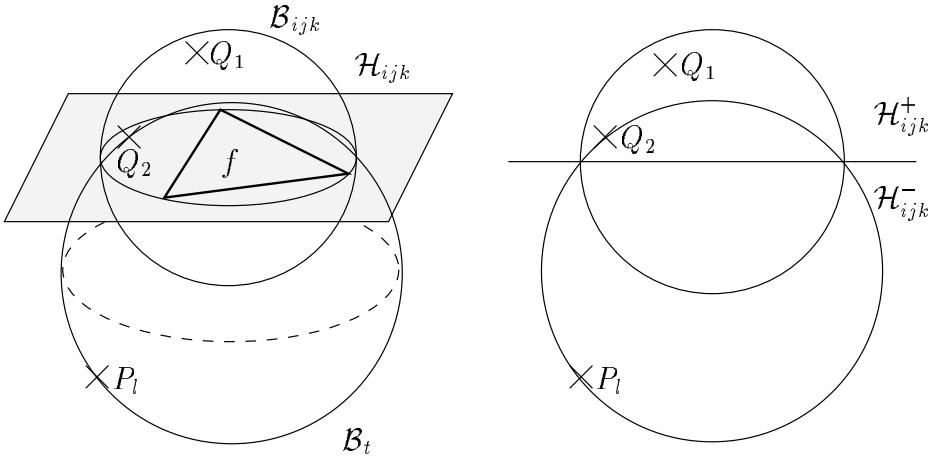


FIG. 11 – Cas $\theta(f) = 1.2.1$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

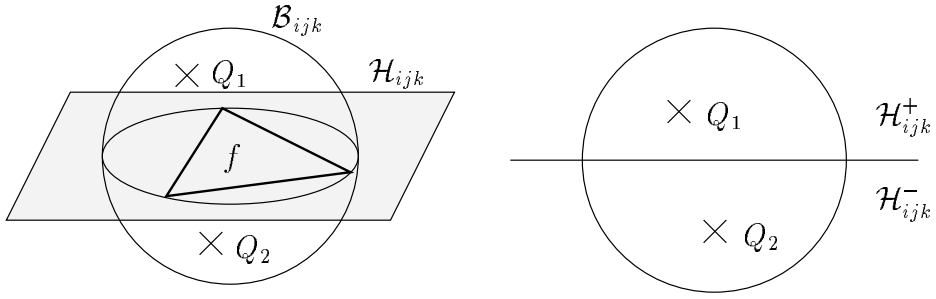


FIG. 12 – Cas $\theta(f) = 2$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

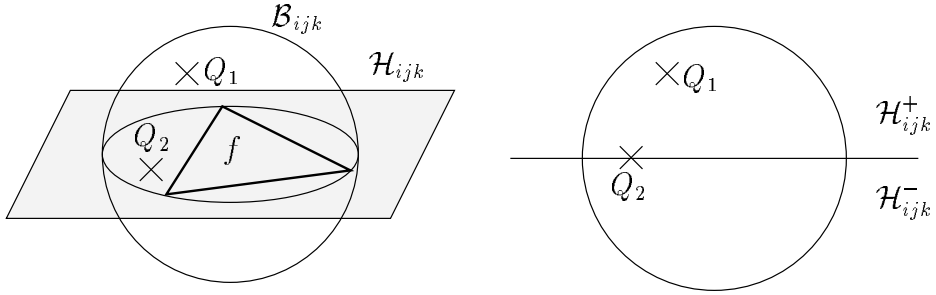


FIG. 13 – Cas $\theta(f) = 3.1$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}_{ijk}$.

On remarquera que les deux cas conduisant à $\Theta(f) = 1.0$ admettent une unique situation commune, pour $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$ et $\mathcal{E} = \{Q^*\}$.

Par ailleurs, si $\Theta(f) = 1.1$, on montre aisément que $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$. En effet, si $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$, alors

$$\{Q_1, ..., Q_r\} \subset \partial\mathcal{B}_{ijk}$$

donc

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{ijk}$$

or,

$$\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$$

donc

$$\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} = \mathring{\mathcal{B}}_{ijk} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle Q^* est le point de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{B}_t$ soit de rayon maximal, et par suite, $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$.

Enfin, pour $\Theta(f) = 1.1$, l'importante propriété qui suit entraine en particulier que Q^* est le seul point parmi les Q_s de $\mathcal{E}$ pour lequel la boule ouverte circonscrite à $P_iP_jP_kQ_s$ puisse être vide.

Lemme 2.1 *Pour $\Theta(f) = 1.1$, avec les notations correspondantes de la Définition 2.2, on a :*

- *si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+_{ijk}$ alors $\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \cap \mathcal{S} = \varnothing$;*
- *si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^-_{ijk}$ alors $\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \cap \mathcal{S} = \varnothing$.*

Preuve : Sans perte de généralité, il suffit de montrer l'assertion dans le cas où $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^+_{ijk}$. Puisque $\mathcal{B}_t$ et $\mathcal{B}_{ijk}$ sont des boules sécantes en Δ_{ijk}, on a

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}^-_{ijk}$$

or, il a été montré dans les remarques suivant la Définition 2.2 que

$$Q^* \in \mathring{\mathcal{B}}_{ijk}$$

de plus, en notant $\partial\mathcal{B}_t$ la sphère frontière de $\mathcal{B}_t$,

$$Q^* \in \partial\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

donc

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

Supposons alors que

$$(\exists\, M \in \mathcal{S}) \quad M \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

donc, d'après ce qui précède

$$M \in \mathcal{E}$$

or, en convenant que $t' = P_i P_j P_k M$, on a

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} = \Delta_{ijk}$$

donc, en appliquant le même raisonnement que ci-dessus,

$$\mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

ce qui entraine en particulier que l'arc $\partial\mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$ a un rayon de courbure plus grand que celui de $\partial\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$, contredisant l'hypothèse de maximalité du rayon de $\partial\mathcal{B}_t$. Par suite, il ne peut pas exister de tel point M, d'où

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \cap \mathcal{S} = \varnothing.$$

□

2.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-conformité

Théorème 2.1 *Si $\Theta(f) \in \{0\,;\,1.0\,;\,1.2.0\}$, alors f est contenue dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.*

Preuve : Il suffit de prouver que f est contenue dans le recouvrement de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ pour s'assurer qu'elle sera présente dans toute triangulation de Delaunay de celle-ci. On utilise les notations de la Définition 2.2, et l'on désigne par O_f le centre de $\mathcal{B}_{ijk}$.

1. Si $\Theta(f) = 0$, alors

   $$(\forall\, P \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j, P_k\}) \quad O_f P_i = O_f P_j = O_f P_k < O_f P$$

   ce qui entraine que

   $$O_f \in V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \cap V_k^{\mathcal{S}} \neq \varnothing$$

or, puisque les cellules de Voronoï sont des polyèdres d'intérieurs disjoints, une 3-intersection est de dimension au plus un. De plus, $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ formant un pavage de polyèdres convexes de l'espace, une 3-intersection réduite à un point implique que celui-ci appartienne à au moins une autre cellule, ce qui est incompatible avec l'inégalité stricte ci-dessus. Cette 3-intersection est donc une arête de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. Par suite,

$$f = P_i P_j P_k \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

2. Si $\Theta(f) = 1.0$, alors

   – si $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$, l'intérieur de $\mathcal{B}_{ijk}$ ne contient aucun point de $\mathcal{S}$, donc d'après le Théorème 1.1,

   $$\Pi = Conv(P_i, P_j, P_k, Q_1, ..., Q_r) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

   or, tous les Q_m se trouvant dans un même demi-espace ouvert limité par le plan $(P_i P_j P_k)$, f est donc une face de Π. Par suite,

   $$f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

   – si $\mathcal{B}_t$ ne contient pas d'autres points de $\mathcal{S}$ que les sommets de t, alors, pour les mêmes raisons que ci-dessus,

   $$(\exists\, Q^* \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_k Q^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

   donc, en particulier,

   $$f = P_i P_j P_k \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

3. Si $\Theta(f) = 1.2.0$ alors, d'après le Théorème 1.1,

   $$\Pi = Conv(\{P_i, P_j, P_k, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

   et comme précedemment, puisque $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}^+_{ijk}$ ou $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}^-_{ijk}$, f est donc une face de Π, entrainant

   $$f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

□

Il est clair que le théorème établi ci-dessus ne constitue pas une condition nécessaire dès lors que les points de $\mathcal{S}$ ne sont pas en position régulière, condition que l'on ne peut supposer satisfaite sous peine de perdre en généralité, et surtout d'être peu réaliste eu égard aux applications numériques. Par exemple, supposons donnée une face $f = P_iP_jP_k$ telle que, outre P_i, P_j et P_k, $\mathcal{B}_{ijk}$ contienne des points de $\mathcal{S}$ tous sur $\partial\mathcal{B}_{ijk}$, mais pas tous dans le même demi-espace limté par $(P_iP_jP_k)$. Le recouvrement de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ contient alors un polyèdre Π inscrit dans $\partial\mathcal{B}_{ijk}$. Par suite, tout recouvrement simplicial de Π s'appuyant sur les sommets de celui-ci satisfait le critère de la boule (ouverte) vide, donc toute triangulation de Π s'appuyant sur les sommets de celui-ci et dont au moins un élément a f pour face permet de retrouver celle-ci tout en étant Delaunay-conforme. Or, d'après la Définition 2.2, $\Theta(f) = 2$, qui n'est donc pas contradictoire avec la Delaunay-conformité de f, au moins pour une certaine triangulation.

D'après ce qui précède, le Théorème 2.1 n'est pas nécessaire à la conformité ; en particulier, il a été mis en évidence que dans certains cas, une triangulation sous contrainte forte du recouvrement de Delaunay permet de retrouver la face recherchée. Cependant, puisque dans le cadre d'une approche *a priori* toute intervention pendant ou après la triangulation est interdite, il faut donc être certain que toute triangulation de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ contienne f.

2.1.3 Delaunay-conformité forte

Les remarques précédentes font apparaitre la nécessité d'une conformité renforcée de telle sorte que l'existence soit assurée dans toute triangulation de Delaunay.

Définition 2.3 *On dit qu'une arête ou une face est* fortement Delaunay-conforme *si elle appartient au recouvrement de Delaunay de* $Conv(\mathcal{S})$.

On remarquera que la Delaunay-conformité forte d'une face entraine celle de chacune de ses arêtes, la réciproque étant évidemment fausse. Par ailleurs, puisque les éléments du recouvrement de Delaunay sont contenus dans toute triangulation du même nom, une face est donc fortement Delaunay-conforme si et seulement si elle est contenue dans toute triangulation de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$, ce qui est précisément la condition exigée. On établit d'abord un lemme géométrique, d'une importance cruciale pour la suite.

Lemme 2.2 *Soient deux boules* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sécantes en un disque contenu dans le plan* $\mathcal{H}$ *et un point* $P_l \in \partial\mathcal{B}$, *sphère frontière de* $\mathcal{B}$.

– *Si* $P_l \in \mathcal{H}^+$ *et* $P_l \notin \mathcal{B}'$, *ou si* $P_l \in \mathcal{H}^-$ *et* $P_l \in \mathcal{B}'$, *alors* $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$;

– *si* $P_l \in \mathcal{H}^-$ *et* $P_l \notin \mathcal{B}'$, *ou si* $P_l \in \mathcal{H}^+$ *et* $P_l \in \mathcal{B}'$, *alors* $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$.

Preuve : Seule la preuve de la première assertion est détaillée ici ; on en déduit la seconde par symétrie. On distingue les deux cas de figure :

1. Si $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$ (Figure 14) alors, sachant que $P_l \in \partial\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, on a

   $$P_l \in \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$$

   et

   $$P_l \notin \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$$

   donc

   $$\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+ \not\subset \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$$

   or, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des boules sécantes en un disque de support $\mathcal{H}$ donc

   $$\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+ \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$$

   donc nécessairement

   $$\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+.$$

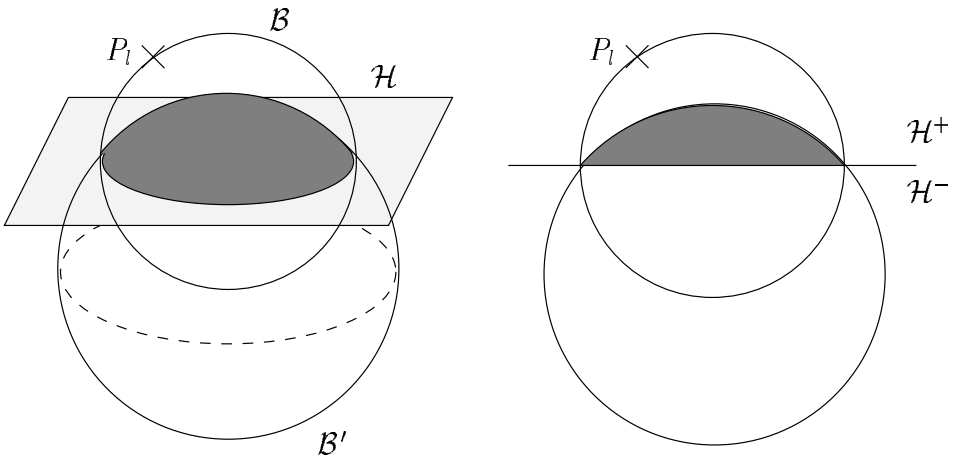


FIG. 14 – Cas $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}$; $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$ est en gris foncé.

2. Si $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \in \mathcal{B}'$ (Figure 15), on sait également, par hypothèse, que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \subset \mathcal{H}$ et $P_l \in \partial\mathcal{B}$. Par suite, $P_l \notin \partial\mathcal{B}'$ et

$$P_l \in (\mathcal{B}' \setminus \partial\mathcal{B}') \cap \mathcal{H}^- = \overset{\circ}{\mathcal{B}'} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraine, $\overset{\circ}{\mathcal{B}'} \cap \mathcal{H}^-$ étant ouvert, qu'il existe une boule $\mathcal{B}_{P_l}$ centrée en P_l telle que

$$\mathcal{B}_{P_l} \subset \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$$

c'est-à-dire

$$(\forall\, M \in \mathcal{B}_{P_l}) \quad M \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$$

or, puisque $P_l \in \partial\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$,

$$\mathcal{B}_{P_l} \not\subset \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$$

donc

$$(\exists\, M_0 \in \mathcal{B}_{P_l}) \quad M_0 \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraine

$$\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \not\subset \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$$

or $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étantt des boules sécantes en un disque de support $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^- \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$$

donc nécessairement

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui équivaut (par réflexion de plan $\mathcal{H}$) à

$$\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+.$$

□

Pour le sens fort de la Delaunay-conformité, on énonce une condition nécessaire et suffisante :

Théorème 2.2 *f est fortement Delaunay-conforme si et seulement si*

$$\Theta(f) \in \{0\,;\, 1.0\,;\, 1.2.0\}.$$

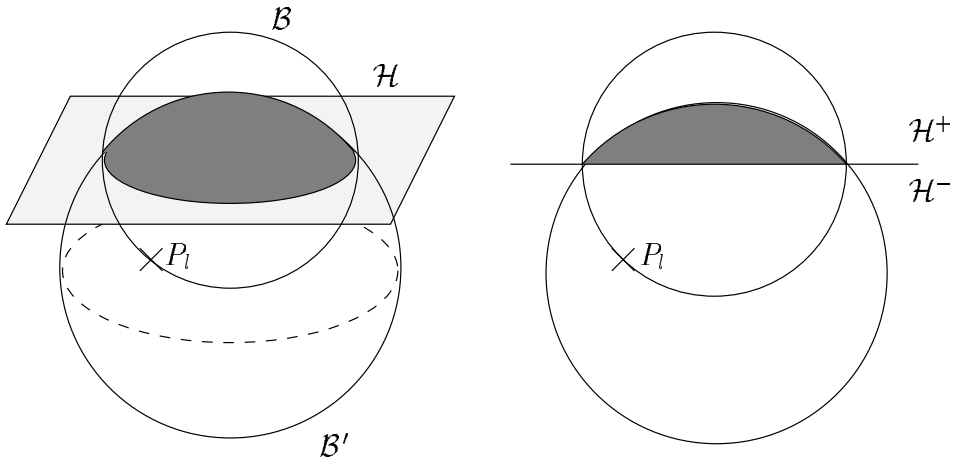


FIG. 15 – Cas $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \in \mathcal{B}'$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à $\mathcal{H}$; $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$ est en gris foncé.

Preuve : On distingue les différents cas, liés à la valeur de Θ. O_f désigne le centre de $\mathcal{B}_{ijk}$, et les notations sont celles de la Définition 2.2.

1. Si $\Theta(f) \in \{0\,;\,1.0\,;\,1.2.0\}$ alors le Théorème 2.1 appliqué à la Définition 2.3 entraine que f est fortement Delaunay-conforme.

2. Si $\Theta(f) = 1.1$, fixons les idées en considérant que $Q^* \in \mathcal{H}^+_{ijk}$; on ne détaille pas le raisonnement si $Q^* \in \mathcal{H}^-_{ijk}$, puisqu'il est similaire à réflexion par rapport à $(P_iP_jP_k)$ près. Pour tout $P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}$ on note $t_l = P_iP_jP_kP_l$, et l'on distingue deux sous-cas.

   (a) Si $P_l \in \mathcal{H}^+_{ijk}$ (c'est en particulier le cas si $P_l \in \mathcal{E}$) alors, d'après le Lemme 2.1,
   $$P_l \notin \mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$
   et deux cas de figure se présentent alors :

      i. si $P_l \in \mathcal{B}_t$ alors $P_l \in \partial\mathcal{B}_t$, la sphère circonscrite à t. Par suite,
      $$\mathcal{B}_{t_l} = \mathcal{B}_t$$
      donc
      $$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} = \mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \varnothing\,;$$

ii. si $P_l \notin \mathcal{B}_t$ alors, d'après le Lemme 2.2

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

et en particulier,

$$Q^* \in \mathring{\mathcal{B}}_{t_l}$$

d'où

$$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing .$$

(b) Si $P_l \in \mathcal{H}^-_{ijk}$, on doit alors distinguer trois hypothèses :

i. si $P_l \in \mathring{\mathcal{B}}_t$ alors, d'après le Lemme 2.2,

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

et en particulier,

$$Q^* \in \mathring{\mathcal{B}}_{t_l}$$

d'où

$$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing ;$$

ii. si $P_l \in \partial\mathcal{B}_t$ alors, pour les mêmes raisons qu'en (a)-i,

$$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} = \mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \varnothing ;$$

iii. si $P_l \notin \mathcal{B}_t$ alors, d'après le Lemme 2.2,

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}^-_{ijk}$$

or, d'après le Lemme 2.1,

$$\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{H}^-_{ijk}$$

donc

$$(\forall\, M \in \mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S}) \quad M \in \mathcal{B}_{t_l}$$

d'où

$$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing .$$

On a donc prouvé que de façon générale

$$(\forall\ P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}) \quad \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$$

et par suite, compte tenu du fait que si $P_l \in \mathcal{H}_{ijk}$ alors $P_iP_jP_kP_l$ est dégénéré,

$$(\forall\ P_l \in \mathcal{S}) \quad P_iP_jP_kP_l \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

soit finalement

$$f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

3. Si $\Theta(f) = 1.2.1$ alors, d'après le Théorème 1.1,

$$\Pi = Conv(\{P_i, P_j, P_k, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

or, puisque $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \neq \varnothing$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \neq \varnothing$,

$$\overset{\circ}{f} \subset \overset{\circ}{\Pi}$$

et par suite,

$$f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

4. Si $\Theta(f) = 2$, alors soit $\mathcal{E} = (\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, P_k\}$. On distingue deux sous-cas :

   (a) si $\mathcal{E} \subset \partial\mathcal{B}_{ijk}$, alors

   $$\Pi = Conv(\mathcal{E}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

   or $\mathcal{E}$ contient des points dans $\mathcal{H}^+_{ijk}$ et $\mathcal{H}^-_{ijk}$, donc

   $$\overset{\circ}{f} \subset \overset{\circ}{\Pi}$$

   et par suite,

   $$f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}\ ;$$

   (b) si $\mathcal{E} \not\subset \partial\mathcal{B}_{ijk}$, alors pour tout $P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}$ on note $t_l = P_iP_jP_kP_l$. De la même manière que pour $\Theta(f) = 1.1$, l'utilisation du Lemme 2.2 permet d' écrire que

   $$\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}^-_{ijk} \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}^+_{ijk} \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}^+_{ijk}$$

or, puisque $\mathcal{B}_{ijk}$ contient des points de part et d'autre de $\mathcal{H}_{ijk}$, on en déduit que

$$\mathring{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing.$$

De façon générale, on a donc

$$(\forall\ P_l \in \mathcal{S}) \quad P_iP_jP_kP_l \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

et par suite,

$$f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

5. Si $\Theta(f) = 3.x$, il suffit de considérer les seuls points de $\mathcal{E} \cap \Delta_{ijk}$. On se ramène alors à un problème de Delaunay-conformité bidimensionnelle du triangle f dans le plan $(P_iP_jP_k)$ (voir [George,Borouchaki-1997]). Le critère du disque vide appliqué au triangle $P_iP_jP_k$ prouve que celui-ci n'appartient pas au recouvrement de Delaunay de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S} \cap (P_iP_jP_k)$, ce qui permet d'affirmer que, *a fortiori*

$$f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

□

2.2 Subdivision

Le Théorème 2.2 permettant de discriminer les faces qui seront présentes dans toute triangulation de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas nécessairement, il convient de se donner une méthode de traitement de ces dernières. La voie que nous avons choisie consiste a diviser les faces non conformes en deux sous-faces, pour éviter une croissance trop rapide du nombre de faces induite par des découpages plus complexes d'une part. Or, comme cela a été dit dans la Section 1, le Lemme 1.1 n'a pas d'équivalent en dimension 3. *A contrario*, on a le résultat suivant :

Lemme 2.3 *Soient t et t' deux triangles non dégénérés partageant deux sommets et tels que le troisième sommet de t' appartienne à l'intérieur d'une des arêtes de t. Alors, en désignant par $\mathcal{B}_t$ et $\mathcal{B}_{t'}$ leurs petites boules respectives :*

1. $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} \neq \varnothing$
2. $\mathcal{B}_{t'} \not\subset \mathcal{B}_t$

Preuve : Par hypothèse, $\mathcal{B}_t \neq \mathcal{B}_{t'}$ et $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'}$ contient au moins deux points distincts, donc ces deux boules sont sécantes en un disque ayant pour support le plan $\mathcal{H}$, qui coupe perpendiculairement le plan des triangles selon une droite ayant pour support l'arête commune de ceux-ci. Donc,

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} \neq \varnothing.$$

De plus, en désignant par P, $\mathcal{H}^+$ et $\partial\mathcal{B}$ respectivement le sommet de t' appartennant à l'intérieur d'une des arêtes de t, le demi-espace ouvert limité par $\mathcal{H}$ et contenant P et la sphère frontière de $\mathcal{B}_{t'}$, on a :

$$P \in \partial\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+$$

donc, d'après le Lemme 2.2

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraine en particulier que

$$\mathcal{B}_{t'} \not\subset \mathcal{B}_t.$$

□

Une conséquence immédiate de ce résultat est que les petites boules associées aux deux sous-faces obtenues par subdivision d'une face donnée sont susceptibles de contenir des points qui n'appartenaient pas à la petite boule de cette dernière. Par suite, il est impossible de formuler un équivalent du Théorème 1.7 en dimension 3 ; dès lors, la convergence d'une méthode basée sur des subdivisions successives de faces n'est en rien naturelle. Le problème se posant quel que soit le point inséré sur l'une des arêtes, nous choisissons, afin de simplifier les opérations de subdivision et par suite de gagner en rapidité, de couper au milieu des arêtes. Ces choix étant motivés par des considérations n'assurant pas la convergence de la méthode, il est donc nécessaire de la gouverner.

2.2.1 Pilotage des subdivisions

La Delaunay-conformité étant une propriété globale, toute subdivison d'une face est susceptible d'avoir des conséquences sur la conformité d'autres faces ; par conséquent, il est nécessaire de concevoir un algorithme cassant une seule face par itération et examinant la nouvelle situation dans son ensemble avant de recommencer.

Par suite, si plus d'une face de la contrainte n'est pas Delaunay-conforme, se pose le problème du choix de celle qui sera subdivisée.

Dans une première approche, nous avons décidé de traiter prioritairement les faces dont la petite boule contient le plus de points du nuage, ce qui revient à tenter de faire tendre vers zéro la suite des $u_n = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N_n} \mathcal{I}(i)$, où N_n et $\mathcal{I}(i)$ désignent respectivement le nombre de faces à l'itération n et le nombre de points du nuage contenus dans la petite boule fermée de la face i, hormis les sommets de celle-ci. En effet, si

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant N_n} \mathcal{I}(i) = 0$$

alors

$$(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant N_n) \quad \mathcal{I}(i) = 0$$

donc

$$(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant N_n) \quad \theta(f_i) = 0$$

et par suite,

$$(\forall\ 1 \leqslant i \leqslant N_n) \quad f_i \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

Bien évidemment, la condition $u_n = 0$ est très forte puisque, on l'a vu, les faces f pour lesquelles $\theta(f)$ vaut 1.0 ou 1.2.0 sont elles aussi fortement Delaunay-conformes ; dès lors, l'algorithme peut terminer pour une valeur de u_n non nulle. Nous pensons cependant que s'intéresser au supremum présente l'avantage d'un contrôle global sur les faces, raison pour laquelle nous avons fait le choix de cette approche. En pratique, l'algorithme est muni d'un tas (heap), ordonné selon les valeurs croissantes de $\mathcal{I}$ et mis à jour après chaque itération, au cours de laquelle la face se trouvant au sommet du tas a été subdvisée.

Une face f à subdvidiser étant fixée, se pose le problème du choix de l'arête e à découper, *i.e.*, celle dont le milieu sera ajouté au nuage de points. Or, afin de préserver la conformité au sens des éléments finis de la contrainte, condition nécessaire à sa Delaunay-conformité, le découpage de e en e_1 et e_2 entraine la subdivision de toutes les faces qui lui sont adjacentes, donc de f et éventuellement d'une autre face f'. En particulier, si la contrainte est un polyèdre, chaque arête admet exactement deux faces adjacentes. Par conséquent, il convient d'examiner les trois possibiltés de subdvision possibles pour une face donnée, ainsi que leurs effets sur les faces adjacentes ; nous introduisons donc une nouvelle définition, illustrée par la Figure 16.

Définition 2.4 *Soit une face f dont les faces adjacentes relativement à ses arêtes e_1, e_2 et e_3 sont respectivement f^1, f^2 et f^3, s'identifiant éventuellement à $\varnothing$ dans*

le cas où il n'y a pas d'adjacence. Pour $i \in \{1;2;3\}$*, on appelle* motif de subdivision i de f *le quadruplet*

$$\Phi_f^i = (f_1, f_2, f_1^i, f_2^i)$$

où f_1*,* f_2*,* f_1^i *et* f_2^i *désignent les sous faces issues respectivement de* f *et* f^i *par cassage de l'arête* e_i*.*

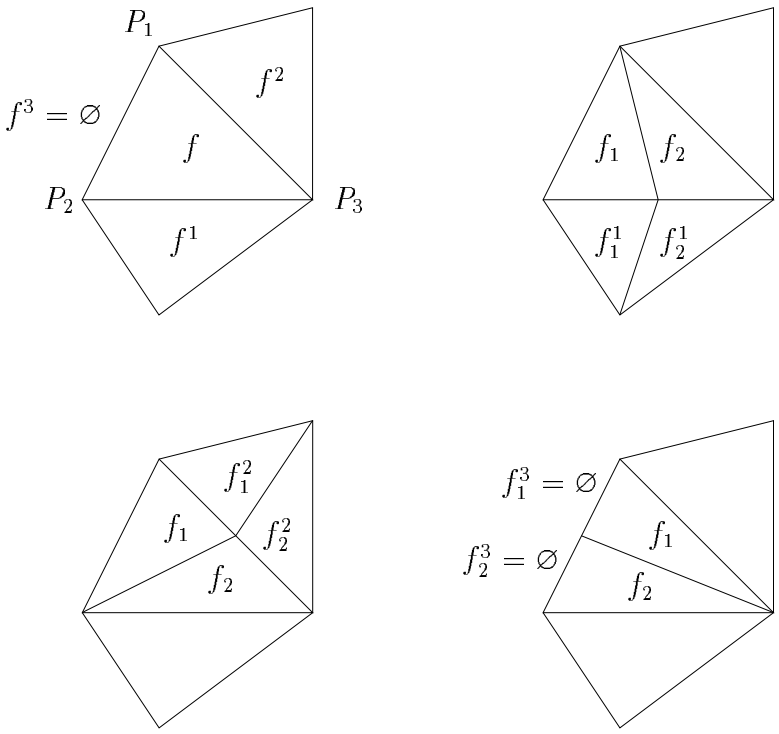


FIG. 16 – Une face comportant deux adjacences et ses trois motifs de subdivision.

Le choix du motif de subdvision est le point-clé de la convergence de la méthode, puisque s'il est fait aléatoirement à chaque itération ou au contraire fixé au départ, alors l'algorithme diverge presque systématiquement, à l'exception de cas géométriquement très simples. Par conséquent, il apparait nécessaire de formuler une heuristique de choix, à défaut d'un résultat théorique géneral, dont l'existence même nous semble peu évidente.

Plusieurs fonctions d'évaluation ont été testées, permettant à l'algorithme de décider du motif optimal au sens défini par un seul ou une combinaison de ces

évaluateurs. Nous en présentons quelques exemples d'autant plus succintement qu'ils se sont révélés d'inopérants à peu efficaces.

- augmentation du nombre de faces Delaunay-conformes ;
- rapport du nombre de faces produites non Delaunay-conformes (de 0 à 4) au nombre initial (1 ou 2) ;
- rapport du nombre total de points du nuage dans les petites boules finales au nombre dans les petites boules initiales ;
- rapport du rayon maximal des petites boules finales sur le rayon maximal initial.

En fait, s'ils paraissent intéressants *a priori*, ces estimateurs comportent cependant des optima locaux correspondant à des cas dégénérés induisant une divergence de l'algorithme. Par exemple, le deuxième estimateur cité admet un cas limite pour lequel le rapport vaut 1, lorsque l'arête commune est réduite à un point. Or cette valeur correspond à un motif n'aggravant pas la situation, en termes de nombre de faces Delaunay-conformes ; par suite, un motif se rapprochant de cette valeur 1 peut être considéré comme meilleur que les deux autres, conduisant rapidement (décroissance en $1/2^n$) à la création d'une face dégnénérée, à la précision des calculs près.

Une propriété fondamentale des triangulations de Delaunay est qu'elles maximisent les minima des angles des éléments créés, ce qui a pour effet de minimiser les sphères ou cercles circonscrits. Il est clair par exemple qu'à périmètre fixé, le triangle dont le cercle circonscrit est de rayon minimal est équilatéral. Par conséquent, nous avons jugé pertinent de nous intéresser aux angles des faces composant les motifs.

Définition 2.5 *À tout motif* Φ_f^i *on associe son* angle minimal α_f^i *défini par*

$$\alpha_f^i = \min_{\substack{\phi \in \mathbf{\Phi}_f^i \\ \phi \neq \varnothing}} \min_{1 \leqslant j \leqslant 3} \widehat{\phi^j}$$

où $\widehat{\phi^j}$ *désigne l'angle au sommet* j *de la face* ϕ.

L'heuristique que nous proposons consiste à choisir un motif dont l'angle minimal est maximal parmi les trois motifs possibles ; pour cette raison, nous disons que cette méthode est de type *max-min*. Cette approche s'est révélée très efficace, sans pour

autant prétendre à la convergence en général. En effet, certains cas se ramenant à des problèmes locaux de Delaunay-conformité bidimensionnelle aboutissent à des subdivisions récursives des sous-faes issues d'un même face originelle, jusqu'à créer des singularités, à la précision des calculs près. Pour cette raison, il convient de traiter spécifiquement ce type de non-conformité.

2.2.2 Bascules d'arêtes

On utilise ici les propriétés des triangulations de Delaunay en dimension 2, puisque la configuration locale formée par deux faces coplanaires adjacentes s'identifie à celle de deux triangles de $\mathbb{R}^2$. L'opérateur de bascule d'arête défini en dimension 2 s'étend donc naturellement à de telles faces, sous conditions de convexité et de quadrilatéralité stricte du domaine qu'elles limitent.

Définition 2.6 *On dit que l'arête commune e à deux faces coplanaires f et f' est* Delaunay-basculable *si le recouvrement de Delaunay de $Conv(f \cup f')$ est composé de deux faces adjacentes dont aucune ne possède e pour arête. Par abus de langage et lorsqu'aucune confusion n'est possible, on dira que f et f' sont basculables.*

Il est clair que ce critère est local, et par suite ne peut assurer la Delaunay-conformité de f ou f' ; cependant, il permet d'énoncer une condition nécessaire.

Lemme 2.4 *Si l'arête commune à deux faces coplanaires est Delaunay-basculable, alors aucune de celles-ci n'est Delaunay-conforme.*

Preuve : Elle est immédiate puisque, par hypothèse, la réunion des deux faces forme un convexe quadrilatéral $\mathcal{C}$ dont le recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}$ est formé des deux faces triangulaires partageant sa diagonale différente de e. Par suite, $\mathcal{D}$ ne contient ni f, ni f' ; dès lors, la propriété de la boule vide (Théorème 1.1) n'étant vérifiée localement ni pour f, ni pour f', elle ne peut *a fortiori* l'être sur $Conv(\mathcal{S})$ tout entier. □

Cette condition nécessaire permet d'appliquer l'opérateur de bascule d'arête lorsqu'une configuration d'arête Delaunay-basculable se présente ; il faut donc préciser quel sens est donné à la coplanarité.

1. La coplanarité exacte n'a de sens en calcul numérique que pour deux sous faces issues d'une même face, puisque la valeur des déterminants n'a de sens qu'aux erreurs d'arrondis près. En pratique, à chaque face originelle on affecte une valeur (couleur) qu'elle est la seule à posséder, et dont hériteront successivement ses descendantes éventuelles.

2. La notion que nous venons de définir étant très restrictive, eu égard en particulier aux applications numériques auxquelles sont destinés les maillages, il est également possible de définir une coplanarité relative à la courbure locale de la contrainte, contrôlée à ε près, celui-ci étant choisi par l'utilisateur.

2.3 Extensions

Dans cette section sont envisagées les conséquences pour la représentation d'un objet réel que l'application de la méthode proposée induit en modifiant la topologie de sa discrétisation. L'objet de cet article étant d'établir les fondements théoriques de la méthode et d'en proposer une validation sur un jeu représentatif d'exemples, ces extensions sont brièvement décrites ici.

2.3.1 Insertion des points

Jusqu'alors, le champ de contraintes est considéré comme la seule donnée utilisable, et la méthode proposée construit un recouvrement triangulaire de celui-ci.

Cependant, dans la plupart des applications, le champ de contraintes initial Γ_0 n'est qu'une approximation géométrique linéaire[4] d'un objet dont on n'a en général pas de définition analytique. On associe alors de façon unique un modèle géométrique paramétré $\mathcal{G}$ à Γ_0, au moyen d'une fonction d'interpolation. Par conséquent, les arêtes et faces de Γ_0 ou de l'un des Γ_n fournis par les itérations successives n'ont *a priori* pas d'existence dans $\mathcal{G}$ et, sauf cas particulier, tout point inséré sur une arête n'appartient pas à $\mathcal{G}$.

En pratique, il apparait souhaitable d'insérer les points sur $\mathcal{G}$,ou à une distance maximale ε de celui-ci, afin d'assurer un contrôle sur la validité de l'approximation de $\mathcal{G}$ que constitue la contrainte finale Γ. Il est par exemple envisageable d'utiliser la paramétrisation de $\mathcal{G}$, qui permet d'associer à toute arête de Γ_n un arc tracé sur $\mathcal{G}$ sur lequel sera inséré le nouveau point, comme l'illustre la Figure 17.

2.3.2 Bascules d'arêtes

La restriction du basculement d'arête aux couples de faces adjacentes exactement coplanaires assure que l'approximation du support géométrique n'est pas dégradée par cet opération. Cependant, la coplanarité exacte n'étant assurée que pour des faces

4. La triangulation de surface donnée est généralement une discrétisation du bord d'un domaine fini.

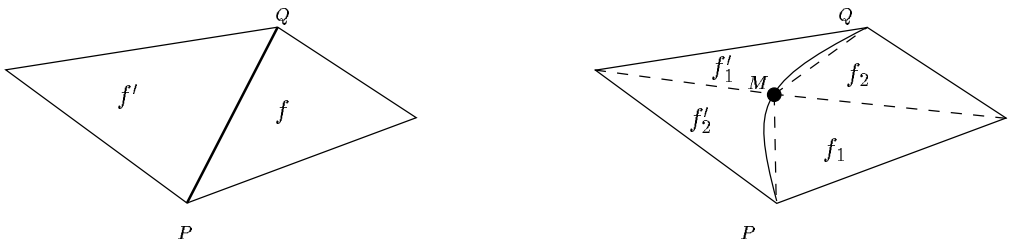


FIG. 17 – Insertion d'un point M sur l'arc associé à l'arête $[PQ]$.

issues des subdivisions successives d'une même face-mère, cette condition limite de façon drastique son emploi et donc son efficacité à prévenir la prolifération.

Or, de nombreuses applications concernent des supports contenant des portions de plans et donc des coplanarités quasi-exactes ou des objets à courbure localement très faible.

Il semble donc cohérent avec l'objectif recherché de s'autoriser des bascules sur des faces non coplanaires, la tolérance relative à la courbure locale étant prédéfinie par l'utilisateur.

2.4 Schéma général

L'algorithme que nous proposons requiert en entrée un champ de contraintes Γ d'un nuage de points $\mathcal{S}$.

1. Initialisation.
   (a) Initialiser les couleurs des faces par détection des coplanarités locales ou (choix de la coplanarité exacte) à l'indice dans la liste des faces.
   (b) Tester la Delaunay-conformité des faces de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ des non-conformes classées par nombre décroissant de points dans les petites boules.
2. Tant que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est non vide faire :
   (a) Pour la face f du sommet de $\mathcal{T}(\Gamma)$, trouver le motif Φ_f^i d'angle minimal.
   (b) Supprimer f et f^i dans Γ, ajouter f_1, f_2, f_1^i et f_2^i.
   (c) Empiler ces quatre dernières faces dans la pile $\mathcal{P}$.

(d) Tant que des couples (ϕ, ψ), avec $\phi \in \mathcal{P}$ et ψ adjacente à ϕ permettent une bascule d'arête, leur appliquer et ajouter ψ à $\mathcal{P}$.

(e) Mettre à jour $\mathcal{T}(\Gamma)$.

3 Exemples d'application

3.1 Création d'une contrainte Delaunay-admissible

Nous présentons dans le Tableau 1 les résultats fournis par l'algorithme précédent, appliqué à un jeu représentatif d'exemples. Initialement, le nuage de points $\mathcal{S}$ est constitué des N_p sommets de la discrétisation de l'objet, le recouvrement triangulaire de celle-ci définissant les N_f faces du champ de contraintes Γ.

Les calculs de qualité sont effectués en utilisant la formule suivante :

$$\mathcal{Q}_f = \alpha \frac{h_f}{\rho_f}$$

où ρ_f, h_f et α désignent respectivement le rayon du cercle circonscrit à f, la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte que la qualité d'une face équilatérale soit égale à 1. Ainsi définie, la qualité d'une face appartient à $[1; +\infty]$, et l'on désignera par $\mathcal{Q}_+$, $\mathcal{Q}_-$ et $\overline{\mathcal{Q}}$ respectivement la meilleure, la plus mauvaise et la moyenne des qualités.

N'_p, N'_f, $\mathcal{Q}'_+$, $\mathcal{Q}'_-$ et $\overline{\mathcal{Q}'}$ sont les quantités correspondantes pour le nuage de points et son champ de contraintes obtenus après subdivision. Le rapport N'_f/N_f, coefficient d'augmentation de taille du champ de contraintes, est noté r.

Les temps de calcul nécessaires sur une station HP-PA 8000 sont tous inférieurs à 20 secondes.

On remarque qu'à une exception près, les qualités ne sont pas dégradées par l'algorithme de subdivision ; on constate même une amélioration globale. Cette observation confirme l'objectif initial de la stratégie *max-min* : construire les faces les moins aplaties possibles à chaque itération, ce qui tend à éloigner l'aire de 0.

L'augmentation du nombre de faces est très variable ; elle est en effet liée au champ de contraintes initial, dès lors que celui-ci peut comporter un nombre N_c compris entre 0 et N_f de faces Delaunay-conformes. Il est clair que plus N_c est petit, plus le nombre du subdivisions potentielles est grand. Par ailleurs, le nombre de coplanarités locales intervient également, puisque les bascules d'arêtes ont pour effet

	N_p	N_f	$\mathcal{Q}_+$	$\mathcal{Q}_-$	$\overline{\mathcal{Q}}$	N'_p	N'_f	$\mathcal{Q}'_+$	$\mathcal{Q}'_-$	$\overline{\mathcal{Q}'}$	r
A	30	56	1.12	2.11	1.61	44	84	1.04	2.96	1.55	1.50
B	220	436	1.03	6.63	2.07	516	1028	1.03	6.63	1.73	2.36
C	658	1312	1.01	7.37	2.19	2033	4062	1.00	13.1	1.75	3.10
D	2506	5008	1.01	14.3	1.58	2779	5554	1.01	14.3	1.63	1.11
E	3503	7018	1.00	10.0	1.35	3763	7538	1.00	10.0	1.36	1.07
F	2649	5290	1.00	12.1	1.89	5630	11252	1.00	20.0	1.67	2.13
G	3605	7302	1.00	11.4	1.72	5786	11664	1.00	9.41	1.69	1.60
H	5157	10354	1.00	6.58	1.26	5289	10618	1.00	6.46	1.26	1.03
I	10714	21476	1.00	5.14	1.17	10884	21816	1.00	5.14	1.17	1.02
J	13183	26406	1.00	6.63	1.21	13291	26622	1.00	6.63	1.21	1.01

TAB. 1 – Statistiques relatives à la subdivision de la contrainte de frontière.

d'éviter les subdivisions. L'algorithme présenté ici ne considérant que les coplanarités exactes, les objets dont le bord présente des zones planes sont donc favorisés.

Les champs de contraintes initiaux et après redéfintion des objets C, D et I sont présentés dans les Figures 18, 19 et 20.

3.2 Application au maillage volumique

Dans le contexte d'un mailleur de Delaunay contraint par forçage[5], l'algorithme que nous proposons permet de redéfinir la contrainte de frontière *a priori* de telle sorte que la triangulation de Delaunay construite par le générateur vérifie faiblement la contrainte initiale. Aucune opération de forçage *a posteriori* ne doit donc être nécessaire, et le maillage obtenu est de Delaunay.

Dans le Tableau 2, N_f et N_m désignent respectivement le nombre de faces de la frontière de l'objet initial et le nombre de faces manquantes après génération d'une triangulation de Delaunay ; ces dernières sont retrouvées par forçage, le maillage final n'étant par conséquent pas de Delaunay.

Les N_e éléments tétraédriques générés par le mailleur ont pour meilleure et pire qualités respectivement Q_+ et Q_-, la qualité d'un tétraèdre $K = ABCD$ étant donnée par :

$$\mathcal{Q}_K = \beta \frac{h_K}{\rho_K}$$

5. GHS3d, Projet GAMMA, INRIA Rocquencourt.

où ρ_K, h_K et β désignent respectivement le rayon de la boule circonscrite à K, la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte que la qualité d'un tétraèdre régulier soit égale à 1.

Les objets dont la contrainte de frontière a été modifiée *a priori* sont également proposés au générateur de maillage, et les résultats correspondants sont présentés dans la partie droite du Tableau 2.

	N_f	N_m	N_e	$\mathcal{Q}_+$	$\mathcal{Q}_-$	N'_f	N'_m	N'_e	$\mathcal{Q}'_+$	$\mathcal{Q}'_-$
A	56	16	62	1.31	4.31	84	0	92	1.24	3.10
B	436	130	628	1.10	9.15	1028	0	2354	1.07	9.15
C	1312	436	2291	1.15	21.1	4062	0	19622	1.03	18.0
D	5008	74	18217	1.05	24.9	5554	0	20785	1.03	19.3
E	7018	98	28135	1.02	11.4	7538	0	30347	1.03	15.8
F	5290	1083	8469	1.06	17.3	11252	0	26386	1.04	16.4
G	7302	720	9620	1.03	18.3	11664	0	23064	1.05	12.6
H	10354	52	36754	1.04	12.2	10618	0	38342	1.03	10.7
I	21476	97	111556	1.02	5.83	21816	0	113492	1.02	5.14
J	26406	30	131803	1.03	5.29	26622	0	133190	1.03	5.75

TAB. 2 – Statistiques relatives au maillage des objets subdivisés.

Il apparait que les champs de contraintes initiaux n'étant pas Delaunay-conformes, un nombre variable des faces qui les constituent n'apparait dans les triangulations de Delaunay générées par le mailleur ; dès lors, celui-ci doit appliquer les méthodes de forçage présentées dans la Section 1.5.1 afin de retrouver la contrainte. Les maillages produits vérifient donc exactement cette dernière, mais ne sont pas de Delaunay.

En revanche, les champs de contraintes redéfinis *a priori* par la méthode de subdivision présentée sont Delaunay-conformes, et à ce titre sont trouvés directement par la triangulation, comme l'atteste la valeur de N'_m dans le Tableau 2. Aucune opération de forçage n'étant alors nécessaire, les maillages obtenus sont donc de Delaunay ; ils vérifient exactement la contrainte redéfinie, et faiblement la contrainte initiale.

Quant à la qualité des éléments produits, fortement liée à celle des faces de la frontière, on constate qu'elle est globalement conservée ou améliorée, au pire peu dégradée.

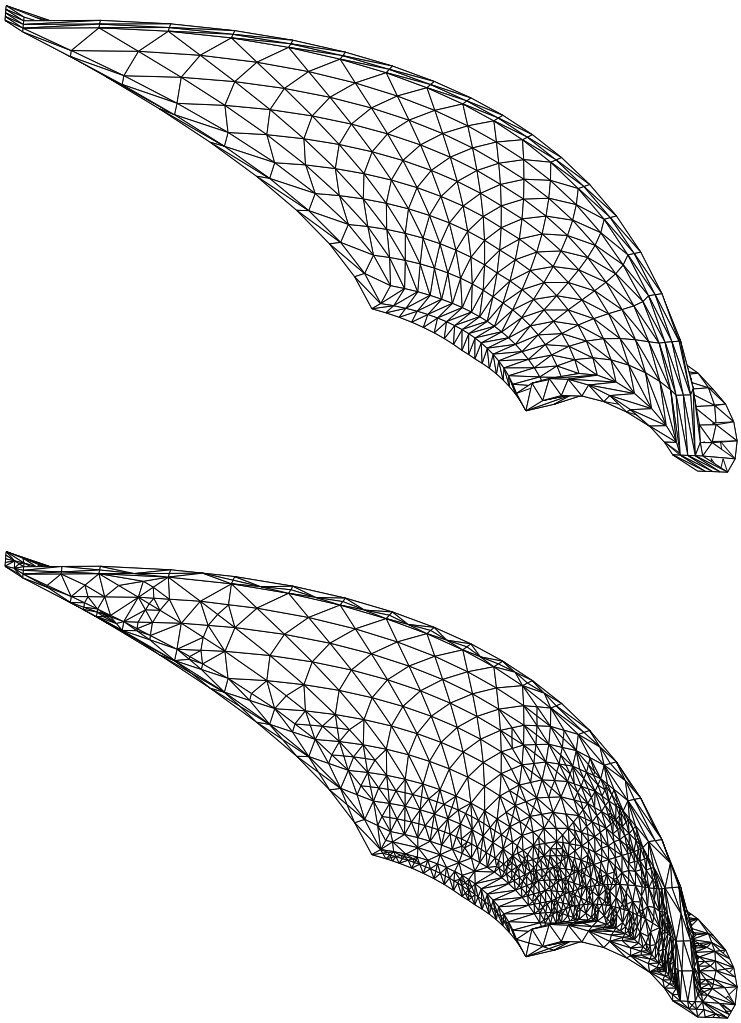


FIG. 18 – Exemple de remaillage de frontière : barrage (objet C). Gauche : pièce originale, droite : remaillage Delaunay admissible.

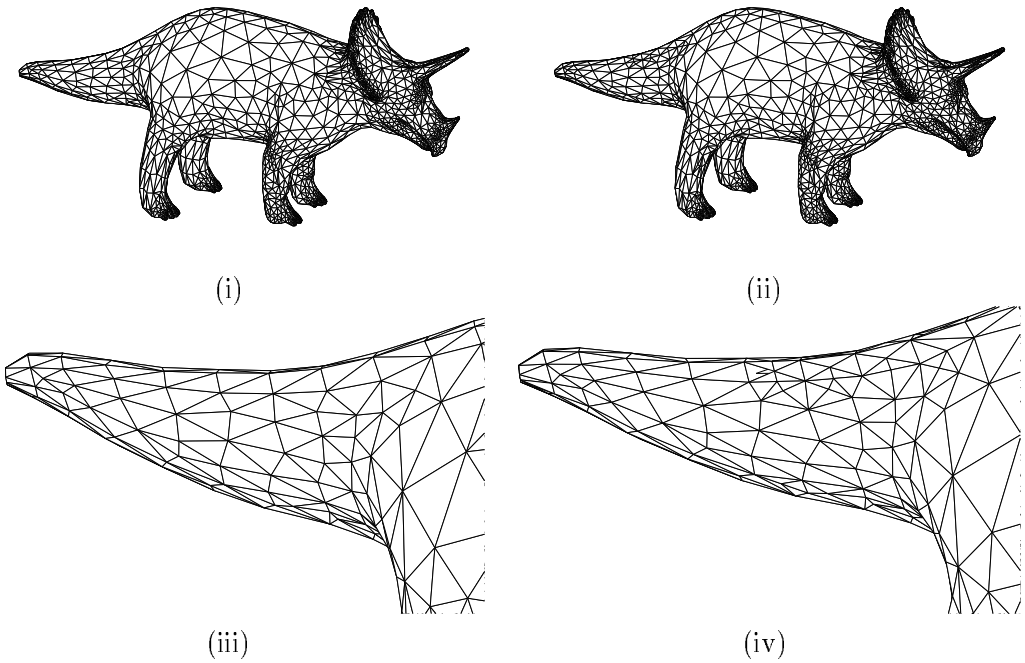


FIG. 19 – Exemple de remaillage de frontière : triceratops (objet D). (i) : pièce originale, (ii) : remaillage Delaunay admissible, (iii) et (iv) : agrandissements d'une même zone dans (i) et (ii).

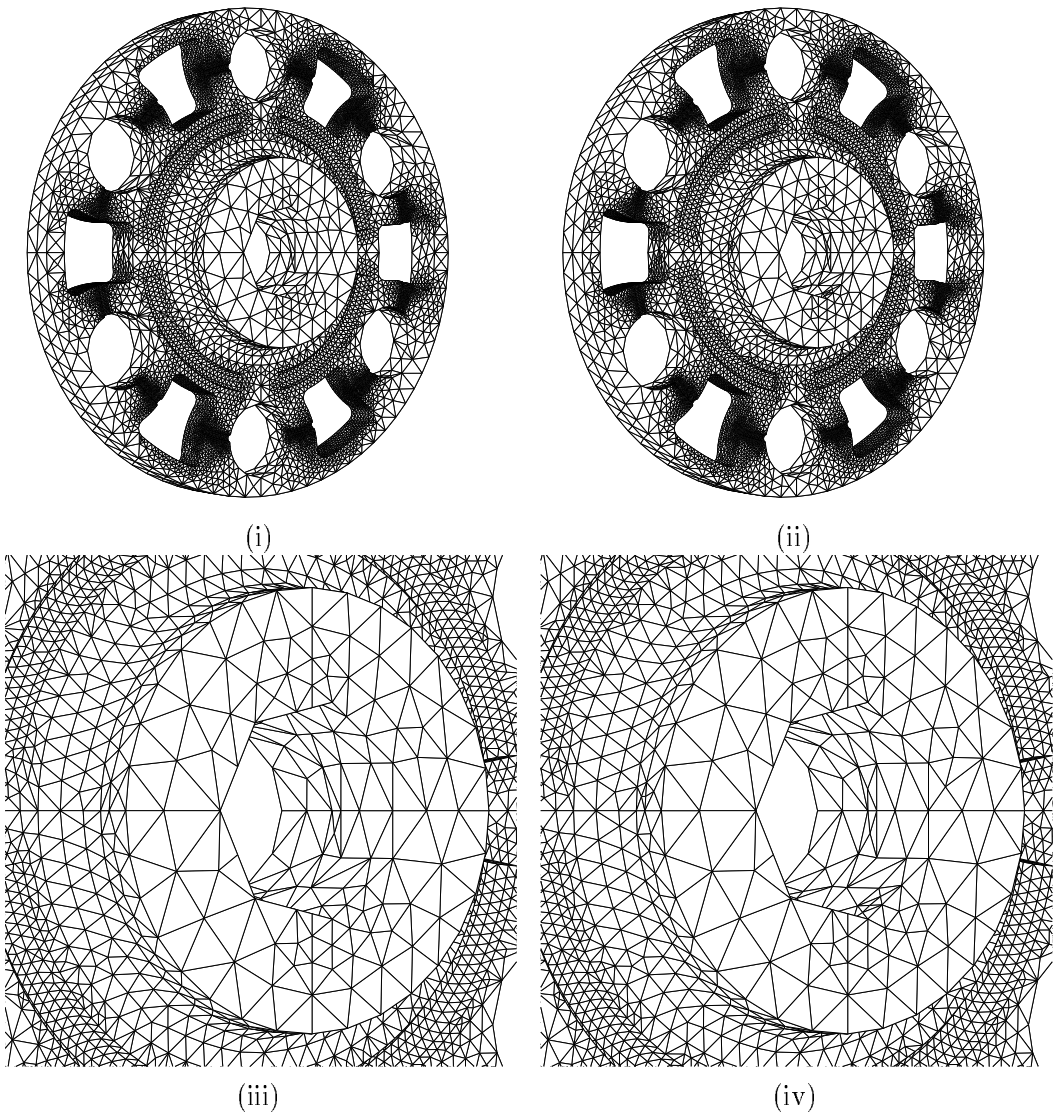


FIG. 20 – Exemple de remaillage de frontière : carrier (objet I). (i) : pièce originale, (ii) : remaillage Delaunay admissible, (iii) et (iv) : agrandissements d'une même zone dans (i) et (ii) (données fournies par ANSYS).

4 Conclusions et perspectives

Après un rappel des principales définitions et propriétés relatives aux triangulations de Delaunay, nous avons brièvement exposé les notions relatives à la vérification exacte ou faible par une triangulation d'une contrainte topologique donnée, dont nous avons proposé de donner une classification des faces constitutives. Dans l'optique d'une redéfintion *a priori* de la contrainte, nous avons établi une condition nécessaire et suffisante d'existence de ses faces dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points concerné. Un algorithme gouverné par un critère lié à la qualité des faces produites, subdivisant les faces non conformes ou basculant leurs arêtes a été proposé, et expérimenté sur un jeu représentatif d'exemples. Enfin, l'approche a été validée par couplage avec un mailleur de Delaunay existant.

Diverses extensions à ce travail sont envisagées ou en cours de développement, parmi lesquelles nous mentionnons :

- l'extension des bascules d'arêtes aux faces non coplanaires, avec un contrôle lié à la courbure locale, afin de limiter le nombre de subdivisions ; les augmentations importantes du nombre de faces constatées plaident clairement en faveur de ce développement ;
- l'insertion des points sur les arcs associés aux arêtes, afin de préserver la proximité de la discrétisation avec son modèle géométrique ;
- l'introduction de traitements spécifiques à certains types de faces, liés à la valeur de l'indicatrice θ ;
- enfin, dans une étape ultérieure, nous envisageons d'utiliser cette méthode comme base d'un générateur de maillages hexaédriques.

Références

[Borouchaki-1994] H. Borouchaki, Triangulation sous contrainte en dimension quelconque, *RR INRIA* **2373**, 1994.

[Delaunay-1934] B. Delaunay, Sur la sphère vide, *Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat.*, 793-800, 1934.

[Frey-1993] P.J. Frey, Génération automatique de maillages 3D dans des ensembles discrets. Application biomédicale aux méthodes d'éléments finis. Thèse, Université de Strasbourg, 1993.

[George *et al.* 1992] P.L. George, F. Hecht and E. Saltel, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **92**, 269-288, 1992.

[George-1997] P.L. George, Improvement on Delaunay based tridimensional automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design* **25** (3-4), 297-317, 1997.

[George,Borouchaki-1997] P.L. George et H. Borouchaki, Triangulation de Delaunay et maillage, Hermes, 1997.

[Löhner-1996] R. Löhner, Extensions and improvements of the advancing-front grid generation technique, *Commun. numer. methods eng.*, **12**, 683-702, 1996.

[Ruppert,Seidel-1992] J. Ruppert and R. Seidel, On the difficulty of triangulating three dimensional nonconvex polyhedra, *Discrete Computational Geometry* **7**, 227-253, 1992.

[Sapidis,Perrucio-1991] N. Sapidis and R. Perucchio, Delaunay triangulations of arbitrarily shaped planar domains, *Computer Aided Geometric Design* **8**, 412-437, 1991.

[Schönhart-1928] E. Schönhart, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, *Mathematisch Annalen* **98**, 309-312, 1928.

[Shephard,Georges-1991] M.S. Shephard and M.K.Georges, Automatic three dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique, *Int. j. numer. meth. eng.*, **32**, 709-749, 1991.

[Voronoï-1908] G. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les parallélloèdres primitifs. *Journal Reine angew. Math.*, **134**, 1908.

[Weatherill,Hassan-1994] N.P. Weatherill and O.Hassan, Efficient three dimensionnal Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints, *Int. j. numer. methods eng.*, **37**, 2005-2039, 1994.



Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399