



**HAL**  
open science

# Une méthode non incrémentale d'homogénéisation de structures élastomères : application aux composites unidirectionnels

Mathias Brieu, F. Devries, Jocelyne Erhel

► **To cite this version:**

Mathias Brieu, F. Devries, Jocelyne Erhel. Une méthode non incrémentale d'homogénéisation de structures élastomères : application aux composites unidirectionnels. [Rapport de recherche] RR-3341, INRIA. 1998. inria-00073348

**HAL Id: inria-00073348**

**<https://inria.hal.science/inria-00073348>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Une méthode non incrémentale*  
*d'Homogénéisation de Structures Elastomères*  
**Application aux composites unidirectionnels**

M. Brieu, F. Devries, J. Erhel

**N<sup>o</sup> 3341**

Janvier 1998

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



*rapport  
de recherche*





# Une méthode non incrémentale d'Homogénéisation de Structures Elastomères *Application aux composites unidirectionnels*

M. Brieu\*, F. Devries†, J. Erhel‡

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Aladin

Rapport de recherche n° 3341 — Janvier 1998 — 25 pages

**Résumé :** Ce rapport présente une méthode d'homogénéisation de matériaux composites à constituants élastomère (ou caoutchouc). La simulation numérique qui permet d'obtenir leur comportement homogénéisé non linéaire équivalent est réalisée grâce à un algorithme performant.

**Mots-clé :** Homogénéisation, matériaux hyper élastiques, méthode non incrémentale

*(Abstract: pto)*

\* LM<sup>2</sup>S, Université PARIS VI - Tour 66, 5<sup>ième</sup> étage, 4, place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05, email : brieu@lmmc.jussieu.fr

† LM<sup>2</sup>S, Université PARIS VI - Tour 66, 5<sup>ième</sup> étage, 4, place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05, email : brieu@ccr.jussieu.fr

‡ IRISA, Projet ALADIN, Campus de Beaulieu, 35042 Cedex Rennes, email : jocelyne.erhel@irisa.fr

# An Unincremental Homogenization Method for Elastomer Structure

## *Applied to unidirectional composites*

**Abstract:** This report describes the development of an homogenization method for non linear composites (for example composite made with rubber). Numerical simulation which obtains their equivalent homogenized behaviour is performed with a very efficient algorithm.

**Key-words:** Homogenization , hyper-elastic structure , unincremental method

## 1 Introduction

Les élastomères sont de nos jours de plus en plus utilisés dans les industries automobile, spatiale, aéronautique, ferroviaire ou l'industrie des pneumatiques pour assumer des tâches de liaison, d'amortissement ou encore d'étanchéité. L'adjonction d'éléments renforçants au sein de la phase élastomère est de même une pratique de plus en plus fréquente. Cette association a pour objectif essentiel d'étendre le domaine exploitable des propriétés mécaniques de l'élastomère de base en améliorant celles-ci, quel que soit le domaine de sollicitation (C. G'Sell, A. Coupard, 1997 [16]). Néanmoins l'utilisation de ce type de composites soulève le problème essentiel de la connaissance précise de leur comportement homogène équivalent à partir de la connaissance du comportement des différents constituants.

Les matériaux élastomères et de façon plus générale les matériaux hyperélastiques ont été largement étudiés et on peut trouver dans la littérature un grand nombre d'informations sur la nature de leurs comportements. On pourra citer entre autre P.G. Ciarlet, G. Geymonat, 1982 [10]; J.L. Davet, 1985 [12] ou encore J. Lambert-Diani, C. Rey, 1997 [21].

On trouve également un certain nombre d'articles traitant, que ce soit de près ou de loin, de ce type de matériaux composites. On peut citer A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, 1978 [1] qui mettent en place entre autres le problème d'homogénéisation à résoudre pour ce type de composites; N. Triantafyllidis, B.N. Maker, 1985 [31]; P.G. Geymonat, S. Muller, N. Triantafyllidis, 1993 [18] qui s'intéressent aux instabilités et enfin J.R. Willis, 1985 [32]; D.R.S. Talbot, J.R. Willis, 1987 [30]; P. Ponte-Castaneda, 1989 [25] qui proposent des méthodes d'estimation des bornes de la densité d'énergie homogénéisée. Il est clair que des méthodes permettant d'atteindre uniquement un encadrement du comportement réel ne sont pour l'industriel pas satisfaisantes. Il semble donc nécessaire de pouvoir caractériser le plus précisément possible le comportement homogène équivalent.

Les difficultés rencontrées dans ce cadre proviennent essentiellement de la technique d'homogénéisation utilisée afin de prendre en compte la nature des

opérateurs non linéaires rencontrés, cette non linéarité étant essentiellement due au comportement des différents constituants.

F. Devries, 1996 [13] a récemment proposé une méthode d'homogénéisation applicable à ce type de milieu mettant également en évidence la nature non-linéaire des problèmes à traiter, et par conséquent les difficultés générées par leurs nécessaires résolutions. Il propose à cet effet une technique incrémentale de résolution de ces problèmes. Néanmoins l'inconvénient de cette méthode est le besoin d'une discrétisation fine du chargement si l'on souhaite obtenir avec une bonne précision la réponse de la structure au chargement qui lui est imposé.

Il semble donc nécessaire de trouver une méthode de résolution plus performante permettant d'éviter de résoudre ces problèmes de façon incrémentale. On trouve de nombreux ouvrages dans la littérature numérique consacrés à la résolution de problèmes d'élasticité non linéaire. On pourra citer R. Glowinsky, P. Le Tallec, 1982 [19]; P. Le Tallec, M. Vidrascu, 1985 [23] qui proposent différentes méthodes de résolution, M. Bernadou, P.G. Ciarlet, J. Hu, 1982 [2] qui pour leur part traitent des conditions de convergence des méthodes incrémentales. Enfin P. Ladeveze, 1996 [20] qui propose dans le cas de problèmes non linéaires de type plasticité, une méthode de résolution non incrémentale dont le principe repose sur le découplage des équations (linéaires et non linéaires) constitutives du problème posé. Cette dernière méthode permet de résoudre ce type de problèmes en linéarisant au minimum les équations constitutives du problème. C'est cette méthode que nous avons retenue et adaptée à notre type de problème.

Le propos de ce rapport est ainsi de proposer une méthode d'homogénéisation non incrémentale de structures composites à constituants de comportements hyper-élastiques permettant, en utilisant une méthode de résolution adaptée, d'obtenir leur réponse homogénéisée avec un coût de calcul réduit.

La première partie de ce rapport est d'une part une présentation de la nature de notre problème, et d'autre part une explication de la technique de résolution adoptée ainsi que sa mise en oeuvre.

La deuxième partie est une présentation des résultats permettant de prouver les performances de cette méthode.

## 2 Présentation de la méthode

On considère une structure hétérogène qui occupe dans son état non déformé le domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que l'état initial est libre d'effort. On considère de plus que les hétérogénéités du milieu sont réparties périodiquement de période notée  $Y$ , et que leurs tailles sont très petites devant la taille de la structure.

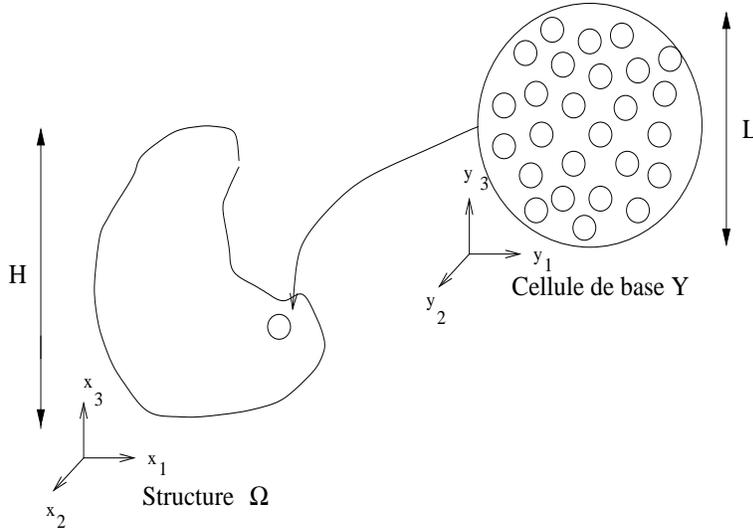


FIG. 1: Structure  $\Omega$  et cellule de base  $Y$

On est donc en présence de deux échelles de grandeur respectivement associées aux tailles  $H$  de la structure et  $L$  de la période de base  $Y$  :

- l'échelle macroscopique liée à la grandeur  $H$ , pour laquelle la taille des hétérogénéités est petite. Le repère qui lui est associé est  $(O, \mathbf{x})$ .
- l'échelle microscopique liée à la grandeur  $L$  est définie par l'intermédiaire d'une dilatation de rapport  $\varepsilon = L/H \ll 1$ . Par rapport à cette échelle la taille des hétérogénéités est de l'ordre de l'unité. Le repère qui lui est associé est  $(O, \mathbf{y})$  (avec  $\mathbf{y} = \varepsilon \mathbf{x}$ ).

On suppose que les efforts volumiques sont négligeables et que le problème est quasi-statique. On a alors à résoudre le problème hétérogène ci-dessous :

Soit  $S_{\text{ad}}$  l'espace des champs macroscopiques admissibles défini par :

$$(1) \quad S_{\text{ad}} = \{ (\mathbf{U}, \mathbf{T}) / \mathbf{U} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{U} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{T} \in [L^2(\Omega)]^9, \text{div}_x \mathbf{T} \in [L^2(\Omega)]^3 \}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{T}^\varepsilon) \in S_{\text{ad}} \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_x \mathbf{T}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^\varepsilon = \frac{\partial e^\varepsilon}{\partial \mathbf{F}^\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{F}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^\varepsilon = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \end{cases}$$

- où
- $\Omega$  est la structure étudiée,
  - $\partial\Omega$  est la surface extérieure de  $\Omega$ ,
  - $\mathbf{T}^\varepsilon$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,
  - $\mathbf{F}^\varepsilon$  est le tenseur gradient de déformation,
  - $e^\varepsilon$  est la densité d'énergie qui est connue,
  - $\text{div}_x, \text{div}_y, \nabla_x, \nabla_y$  les opérateurs divergence et gradient par rapport aux variables  $x$  et  $y$ .

Considérant ici des problèmes pour lesquels le paramètre  $\varepsilon$  est très petit devant 1, le nombre d'hétérogénéités au sein de la structure est très grand et leur taille est très petite devant la taille de la structure. Ainsi une discrétisation du problème (2), par exemple par la méthode des éléments finis, conduirait à un système de très grande taille. En effet si l'on veut être à même de considérer l'ensemble des hétérogénéités, il faudrait dans le cas d'une résolution éléments finis considérer un maillage d'une extrême finesse. C'est pour pallier cette difficulté que nous allons mettre en oeuvre une technique d'homogénéisation.

## 2.1 Homogénéisation

Afin de supprimer le problème posé par le grand nombre d'hétérogénéités réparties au sein du milieu composite considéré, on cherche à associer à la structure un milieu homogène de comportement mécanique équivalent. Pour

ce faire on montre (A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, 1978 [1]; H. Dumontet, 1992 [15]; F. Devries, 1996 [13]) que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, la solution du problème (2) tend vers celle du problème suivant, où on note par  $\mathbf{T}$  le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff macroscopique, par  $\mathbf{F}$  le tenseur gradient de déformation macroscopique, et par  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{f}$  leurs homologues microscopiques :

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Problème Macroscopique : Trouver } (\mathbf{U}, \mathbf{T}) \in S_{\text{ad}} \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_x \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \\ S_{\text{ad}} \text{ défini par (1)} \end{cases}$$

où la densité d'énergie homogénéisée  $\mathbf{E}$  est implicitement définie par les relations suivantes :

$$(4) \quad \begin{array}{l} \text{Relations Macroscopique – Microscopique} \\ \text{ou Relations de couplage} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_Y \\ \mathbf{F} = \langle \mathbf{f} \rangle_Y \end{array} \right.$$

liant les champs macroscopiques solutions du problème macroscopique (3) à leurs homologues microscopiques solutions de :

Soit  $s_{\text{ad}}$  l'espace des champs microscopiques admissibles défini par :

$$(5) \quad s_{\text{ad}} = \left\{ (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) / \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \in [H^1(Y)]^3, \boldsymbol{\tau} \in [L^2(Y)]^9, \text{div}_y \mathbf{T} \in [L^2(Y)]^3 \right\}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \text{Problème Microscopique : Trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \in s_{\text{ad}} \text{ tel que} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_y \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f} = \mathbf{F} + \nabla_y \mathbf{u} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti – périodique} \end{array} \right. \end{cases}$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure unitaire à  $\partial Y$ ,  $e(\mathbf{y}, \mathbf{f})$  les densités d'énergie des différents constituants qui sont connues,  $Y$  la période de base de la

structure, permettant de reproduire l'ensemble de la structure et où on note par  $\langle f \rangle_Y$  la moyenne sur la période  $Y$  de toute fonction  $f$ , définie par :

$$\langle f \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy, \text{ avec } |Y| \text{ la mesure de } Y.$$

On constate que ces problèmes sont non linéaires. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre une technique de résolution appropriée.

Il existe de nombreuses méthodes de résolution pour ce type de problèmes non linéaires ; on pourra citer par exemple M. Sibony, J.C. Marden, 1988 [28] ; W.C. Rheinboldt, 1974 [26] qui pour leur part présentent un ensemble de méthodes. Parmi l'ensemble des méthodes existantes les plus utilisées sont les méthodes dites de type Newton ; on pourra citer à ce sujet par exemple J. Ortega, W.C. Rheinboldt, 1970 [24] ; W.C. Rheinboldt, 1981 [27]. Ces méthodes permettent de résoudre des problèmes non linéaires de façon itérative. En partant de la fonctionnelle non linéaire du problème à traiter, cette méthode linéarise celle-ci au voisinage d'un point de départ, et résout le problème linéaire ainsi obtenu, puis l'opération est répétée à nouveau au voisinage de cette nouvelle solution et ce jusqu'à convergence. Ces méthodes supposent une linéarisation globale de l'ensemble du problème. F. Devries propose lui une méthode où le problème est linéarisé par une prise en compte incrémentale du chargement où chaque incrément de chargement est très petit devant l'unité. Ceci engendre une résolution incrémentale de problèmes linéaires. En contre-partie la qualité de la réponse dépend implicitement de la finesse du partitionnement du chargement choisi. Nous développons ici une méthode de résolution différente des précédentes dont l'intérêt est double, puisqu'elle nous permet d'une part d'éviter d'avoir à résoudre ces problèmes de façon incrémentale et d'autre part de linéariser au minimum l'ensemble des équations.

## 2.2 Méthode de résolution des problèmes non linéaires

On se propose ici de résoudre les problèmes non linéaires précédents par utilisation d'une méthode non incrémentale initialement utilisée dans le cas de structures élastoplastiques (P. Ladeveze, 1996 [20], J.Y. Cognard, 1989 [11], P. Boisse, 1987 [4]). Avant de mettre en oeuvre cette méthode il est important de noter que contrairement aux méthodes classiques où l'on recherche soit les champs de déplacements ( $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{u}$ ), soit les champs de contraintes ( $\mathbf{T}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ), ici

nous allons rechercher simultanément l'ensemble des variables en recherchant le champ  $((\mathbf{U}, \mathbf{T}); (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}))$ . Pour ce faire on commence par décomposer l'ensemble  $S_{\text{ad}} \times s_{\text{ad}}$  en deux ensembles :

- l'ensemble NL des champs satisfaisant les équations non linéaires,
- l'ensemble L des champs satisfaisant les équations linéaires.

La solution  $\mathbf{S}$  du problème se situe alors à l'intersection de ces deux ensembles.

Afin de déterminer cette solution  $\mathbf{S}$ , on détermine tout d'abord une approximation  $S^0 \in L$  puis des "aller-retour" entre L et NL permettront d'obtenir à convergence du processus, la solution finale  $\mathbf{S}$ .

Pour réaliser les différentes itérations de L sur NL et de NL sur L supposons que l'on connaisse une approximation  $S^n \in L$ , c'est à dire vérifiant les équations linéaires. Une application, à définir, notée  $H^+$ , permettra de construire  $S^{n+\frac{1}{2}} = H^+(S^n)$  avec  $S^{n+\frac{1}{2}} \in L$ . Une autre application, notée  $H^-$ , permettra ensuite de construire  $S^{n+1}$ , image de  $S^{n+\frac{1}{2}}$  par  $H^-$  dans L. L'algorithme sera stoppé dès que la "distance" entre  $S^n$  et  $S^{n+1}$  sera "petite".

Pour plus de détails sur les différentes familles d'applications  $H^+$  et  $H^-$  et les critères de convergence à satisfaire nous renvoyons le lecteur au livre de P. Ladeveze, 1996 [20].

### 2.2.1 Choix des ensembles L et NL

L'examen des équations constituant les problèmes (3), (6) ainsi que celui des relations de couplage (4) conduit à définir les ensembles NL et L comme suit :

$$(7) \quad \text{NL} = \left\{ \begin{array}{l} ((\mathbf{U}, \mathbf{T}); (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) / ((\mathbf{U}, \mathbf{T}); (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) \in S_{\text{ad}} \times s_{\text{ad}}, \\ \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}); \text{vérifiant les équations (9)} \end{array} \right\}$$

$$(8) \quad \text{L} = \left\{ \begin{array}{l} ((\mathbf{U}, \mathbf{T}); (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) / ((\mathbf{U}, \mathbf{T}); (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau})) \in S_{\text{ad}} \times s_{\text{ad}}, \\ \text{vérifiant les équations (9) et (10)} \end{array} \right\}$$

où  $S_{\text{ad}}$  et  $s_{\text{ad}}$  sont respectivement définis par (1) et (5)

avec :

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{f} = \mathbf{F} + \nabla_y \mathbf{u} & \text{dans } Y \\ \begin{cases} \mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_Y \\ \mathbf{F} = \langle \mathbf{f} \rangle_Y \end{cases} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \text{Au niveau Macroscopique} \\ \text{Au niveau Microscopique} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \text{conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti-périodique} \end{cases} \end{cases}$$

### 2.2.2 Schéma itératif

Pour démarrer le processus on choisit comme approximation initiale la solution obtenue en Hypothèses des Petites Perturbations, c'est à dire la solution obtenue en considérant les différents constituants comme élastiques, linéaires, ou encore en imposant  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \equiv \mathbf{1}$ . Notons que cette solution, noté  $S^0$ , appartient à  $L$ .

Connaissant  $S^0$ , il s'agit ensuite de construire  $S^{n+1}$  à partir de la connaissance de  $S^n$ . Cette construction se fait en deux étapes :

- choix de  $H^+ : L \rightarrow \text{NL}$  (itération  $n + \frac{1}{2}$ )
- choix de  $H^- : \text{NL} \rightarrow L$  (itération  $n + 1$ )

#### 1. Application $H^+$ de $L$ dans $\text{NL}$

Pour définir  $S^{n+\frac{1}{2}} \in \text{NL}$ , nous choisissons une application dite "verticale", c'est à dire telle que :  $\mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = H^+(\mathbf{f}^n, \boldsymbol{\tau}^n) \equiv \mathbf{f}^n$

Nous avons choisi cette application car elle est extrêmement simple d'utilisation, et conduit néanmoins à des résultats très satisfaisants comme nous le verrons.

A l'issue de cette application  $H^+$ , l'approximation  $S^{n+\frac{1}{2}} \in NL$  est connue et définie par  $S^{n+\frac{1}{2}} = \left( \left( \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \right); \left( \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right)$  tel que :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \left( \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \text{ tel que : } \nabla_y \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle_Y \\ \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \text{ tel que : } \nabla_x \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{1} \\ \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle_Y \end{array} \right.$$

## 2. Application $H^-$ de NL dans L

Pour déterminer  $S^{n+\frac{1}{2}}$  sur L en  $S^{n+1}$  on choisit un opérateur dit "tangent" à NL au point  $S^{n+\frac{1}{2}}$ , c'est à dire tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{n+1} &= H^- \left( \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f}^2} \left( \mathbf{y}, \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \left( \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(12) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{n+1} &= \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left( \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \text{avec } \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f}^2} \left( \mathbf{y}, \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Afin de trouver le champ  $S^{n+1} \in L$  associé à  $S^n$  par (12), il est alors nécessaire de résoudre l'ensemble des problèmes suivants :

Problème Microscopique : Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\tau}^{n+1}) \in S_{ad}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau}^{n+1} = 0 & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}^{n+1} + \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } Y \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}^{n+1} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti-périodique} \end{array} \right.$$

avec  $s_{ad}$  définie par (5)

Relations de couplage Micro Macro

$$\begin{cases} \mathbf{T}^{n+1} = \langle \boldsymbol{\tau}^{n+1} \rangle_Y \\ \mathbf{F}^{n+1} = \langle \mathbf{f}^{n+1} \rangle_Y \end{cases}$$

Problème Macroscopique : Trouver  $(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{T}^{n+1}) \in \mathcal{S}_{\text{ad}}$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $\mathcal{S}_{\text{ad}}$  définie par (1)

Pour résoudre le problème microscopique, explicitons sa loi de comportement. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{n+1} &= \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left( \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \text{Or } \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{F}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}^{n+1} \\ &= \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}^{n+1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$(13) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{n+1} &= \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\nabla_x \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} \\ \text{avec } \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} &= \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left( \mathbf{1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi au niveau microscopique, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\nabla_x \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti-périodique} \end{cases}$$

avec  $(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\tau}^{n+1}) \in \mathcal{S}_{\text{ad}}$  ( $\mathcal{S}_{\text{ad}}$  défini par (5)). c'est donc un problème avec une précontrainte  $\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}}$ . En utilisant la linéarité de ce problème, on introduit la décomposition suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{s}^{n+1} + \mathbf{t}^{n+1} \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{w}^{n+1} \end{cases}$$

où  $(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{s}^{n+1}) \in \mathcal{S}_{\text{ad}}$  et  $(\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{t}^{n+1}) \in \mathcal{S}_{\text{ad}}$  ( $\mathcal{S}_{\text{ad}}$  défini par (5)) sont solutions de :

$$(14) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_y \mathbf{s}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \mathbf{s}^{n+1} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\nabla_x \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_y \mathbf{v}^{n+1}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{v}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \mathbf{s}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_y \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_y \mathbf{w}^{n+1} + \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} & \text{dans } Y \\ \mathbf{w}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \mathbf{t}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{cases}$$

On observe de nouveau que le problème (14) est un problème linéaire. En utilisant ce caractère, on décompose sa solution sur les composantes de  $\nabla_x \mathbf{U}^{n+1}$ . Posons ainsi :

$\mathbf{v}^{n+1} = -\chi^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} + \mathbf{z}(x)$ , où  $\mathbf{z}(x)$  est une fonction arbitraire que l'on ignorera donc par la suite. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ij}^{n+1} &= \mathbf{q}_{ijpq}^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \mathbf{U}_p^{n+1}}{\partial \mathbf{x}_q} - \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial \mathbf{y}_q} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \right) \\ &= \mathbf{q}_{ijpq}^{n+\frac{1}{2}} \left( \delta_{pk} \delta_{ql} - \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial \mathbf{y}_q} \right) \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Ainsi  $(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{s}^{n+1}) \in \mathbf{s}_{\text{ad}}$  ( $\mathbf{s}_{\text{ad}}$  défini par (5)) est tel que :

$$(16) \quad \begin{cases} \mathbf{s}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \\ \mathbf{v}^{n+1} = -\boldsymbol{\chi}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \end{cases}$$

où  $(\boldsymbol{\sigma}^{kl}, \boldsymbol{\chi}^{kl}) \in \mathbf{s}_{\text{ad}}$  ( $\mathbf{s}_{\text{ad}}$  défini par (5)) est solution du problème suivant :

$$(17) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{kl} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{kl} = \mathbf{q}_{ijpq}^{n+\frac{1}{2}} \left( \delta_{pk} \delta_{qh} - \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) & \text{dans } Y \\ \chi^{kl} & Y \text{ p\u00e9riodique} \\ \boldsymbol{\sigma}^{kl}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - p\u00e9riodique} \end{cases}$$

Ces probl\u00e8mes sont facilement solubles, ainsi que le probl\u00e8me microscopique (15) qui est un probl\u00e8me de type \u00e9lastique avec pr\u00e9contrainte.

Apr\u00e8s la r\u00e9solution de ces diff\u00e9rents probl\u00e8mes nous connaissons partiellement les champs microscopiques. En effet ces champs ne seront compl\u00e8tement connus que lorsque les champs macroscopiques le seront. N\u00e9anmoins, nous sommes en mesure de r\u00e9soudre le probl\u00e8me macroscopique.

En effet, par d\u00e9finition on a :

$$\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_y \mathbf{w}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l}$$

Alors en utilisant les relations de couplage entre les \u00e9chelles microscopique et macroscopique, il vient :

$$\mathbf{T}^{n+1} = \left\langle \boldsymbol{\sigma}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \right\rangle_Y + \left\langle \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_y \mathbf{w}^{n+1} \right\rangle_Y$$

ou encore :

$$\mathbf{T}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ijkl}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} + \mathbf{P}_{ij}^{n+1}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{Q}_{ijkl}^{n+1} = \left\langle \mathbf{q}_{ijpq}^{n+\frac{1}{2}} \left( \delta_{pk} \delta_{ql} - \frac{\partial \chi_k^{pq}}{\partial y_l} \right) \right\rangle_Y \\ \mathbf{P}_{ij}^{n+1} = \left\langle \mathbf{p}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}_{ijpq}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{w}_p^{n+1}}{\partial y_q} \right\rangle_Y \end{cases}$$

Ainsi  $(\mathbf{T}^{n+1}, \mathbf{U}^{n+1}) \in S_{\text{ad}}$  ( $S_{\text{ad}}$  d\u00e9fini par (1)) est solution du probl\u00e8me suivant :

$$(18) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_x \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{Q}^{n+1} \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{P}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{U}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Notons que les champs  $\chi^{pq}$  et  $\mathbf{w}^{n+1}$  étant déjà calculés, ce problème est du même type que (15) et sa résolution ne pose donc pas de difficultés.

Enfin, une fois ce problème résolu, les champs microscopiques à l'itération  $n+1$  peuvent être calculés comme suit :

$$(19) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{w}^{n+1} - \chi^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left( \nabla_y \mathbf{w}^{n+1} - \nabla_y \chi^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}_k^{n+1}}{\partial x_l} \right) + \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

### 3 Application aux composites unidirectionnels

#### 3.1 Discrétisation en espace

Comme nous venons de le voir, le calcul de la réponse d'une structure composite à constituants hyperélastiques pour une sollicitation donnée, nécessite la résolution de problèmes macroscopique et microscopique couplés qui peuvent générer des coûts de calculs dissuasifs.

Pour procéder à ces résolutions, il est nécessaire d'effectuer une discrétisation spatiale tant au niveau macroscopique que microscopique. Nous avons choisi, comme il est usuel de le faire en mécanique des milieux continus, une discrétisation par la méthode des éléments finis. Si le chargement macroscopique est quelconque, les déformations induites ne seront pas constantes sur l'ensemble des éléments de la discrétisation macroscopique de la structure.

Comme les problèmes microscopiques dépendent implicitement du tenseur gradient de déformation macroscopique, le calcul, à une itération donnée, de la matrice de raideur de chacun des éléments finis de la discrétisation macroscopique nécessitera la résolution de l'ensemble des problèmes cellulaires.

Il sera ainsi nécessaire de résoudre à chaque itération un ensemble de problèmes microscopiques par élément fini de la discrétisation macroscopique.

Par contre, si l'on considère que l'on impose des chargements macroscopiques induisant un tenseur gradient de déformation macroscopique constant sur l'ensemble de la structure, alors l'obtention de la réponse de la structure ne nécessitera de résoudre qu'un seul ensemble de problèmes microscopiques à chaque itération, puisque le comportement homogène équivalent est le même sur l'ensemble de la structure. Précisons qu'à cette fin et pour résoudre les problèmes microscopiques (14) et (15) les codes ont été développés en utilisant le code éléments finis Modulf ([3]).

Parmi les chargements macroscopiques qui induisent des tenseurs gradient de déformation macroscopique constants sur l'ensemble de la structure, rapporté à un repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , (structure choisie ci-dessous de forme parallélépipédique  $\{|x_1| \leq L_1, |x_2| \leq L_2, |x_3| \leq L_3\}$ ) nous avons choisi de considérer ceux répertoriés dans le tableau suivant :

|   |   |
|---|---|
| Traction uni-axiale<br>d'axe $(O, x_i)$                                 | $\mathbf{U}_N = \pm U, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i  = L_i$<br>$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$   |
| Traction bi-axiale<br>dans le plan $(O, x_i, x_j)$                      | $\mathbf{U}_N = \pm U_i, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i  = L_i$<br>$\mathbf{U}_N = \pm U_j, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_j  = L_j$<br>$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$   |
| Cisaillement simple<br>dans le plan $(O, x_i, x_j)$<br>d'axe $(O, x_i)$ | $\begin{cases} \mathbf{U}_i = kx_j \\ \mathbf{U}_p = \mathbf{U}_q = 0 \end{cases}$ sur $ x_i  = L_i$ et $ x_j  = L_j$<br>où $p \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}; q \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}; p \neq q$<br>$\mathbf{U}_N = 0, \mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$ |
| Cisaillement pur<br>dans le plan $(O, x_i, x_j)$<br>d'axe $(O, x_i)$    | $\mathbf{U}_n = U_i, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i  = L_i$<br>$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur $ x_j  = L_j$<br>$\mathbf{U}_N = 0, \mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$   |

TAB. 1: *Sollicitations macroscopique étudiées*

( $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ : vecteur contrainte;  $\mathbf{T}_t$ : composante tangentielle de  $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ ;  $\mathbf{U}_N$ : déplacement normal;  $\mathbf{n}$ : vecteur normal extérieur unitaire)

### 3.2 Géométries et constitution mécanique de la cellule de base

Nous considérons un matériau composite dont les renforts, tous alignés dans la même direction et supposés de section circulaire, sont disposés aux sommets d'un réseau carré. Les constituants de ce composite sont supposés homogènes et isotropes. Leurs lois de comportement données ci-dessous, ne dépendent alors que des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du tenseur microscopique de déformations  $\mathbf{c}$  défini par  $\mathbf{c} = {}^t \mathbf{f}$  (P.G. Ciarlet, 1982 [10]), qui dépendent eux même du chargement macroscopique imposé du fait de la dépendance de  $\mathbf{f}$  par rapport à  $\mathbf{F}$  (4) :

- Matrice : Densité d'énergie de type Harth-Smith modifié, 1997 [21]

$$e(I_1, I_2, I_3) = E_1 \int_3^{I_1} e^{E_3(I_1-3)^2} dI_1 + \int_3^{I_2} \frac{E_2}{I_2^{E_4}} dI_2 + E_5 (I_3 - 1) - B \ln I_3$$

$$\text{avec } \begin{cases} \lambda = 4 \left( E_5 + \frac{E_2}{3E_4} \left( 1 - 4 \frac{E_4}{3} \right) \right) \\ \mu = 2 \left( E_1 + \frac{E_2}{3E_4} \right) \\ (\lambda, \mu : \text{coefficients de Lamé du matériau}) \\ B = E_1 + 2 \frac{E_2}{3E_4} + E_5 \end{cases} \quad E_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$$

où nous prenons  $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{Pa}$ ,  $E_2 = 10^6 \text{Pa}$ ,  $E_3 = 0.03$ ,  
 $E_4 = 0.63$ ,  $E_5 = 5 \cdot 10^5 \text{Pa}$ ,  
 ce qui conduit à  $E = 1.5 \cdot 10^6 \text{Pa}$ ,  $\nu = 0.42$

- Fibre : Densité d'énergie de type Ciarlet-Geymonat, 1982 [10] :

$$e(I_1, I_2, I_3) = \frac{E_1}{2} (I_1 - 3) + \frac{E_2}{2} (I_2 - 3) + \frac{E_3}{2} (I_3 - 3) - B \ln I_3$$

$$\text{avec } \begin{cases} E_2 = \mu - E_1 \\ E_3 = \frac{\lambda}{2} - E_2 \\ (\lambda, \mu : \text{coefficients de Lamé du matériau}) \\ B = E_1 + 2E_2 + E_3 \end{cases} \quad E_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 3\}$$

où nous prenons  $E_1 = 1.16 \cdot 10^8 \text{Pa}$ ,  $E = 1.10^9 \text{Pa}$ ,  $\nu = 0.3$

Précisons que la géométrie de la période de base ainsi que l'isotropie de ses constituants conduisent à un comportement homogénéisé orthotrope.

## 4 Performances de la méthode

Afin de valider la méthode choisie ainsi que d'en éprouver les performances, nous présentons ci-dessous une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de la méthode de résolution proposée par F. Devries (méthode d'homogénéisation incrémentale [13] (1996)).

### 4.1 Méthode d'homogénéisation incrémentale

La méthode de résolution des problèmes (3), (4) et (6) proposée par F. Devries consiste à introduire une partition de l'intervalle unité :

$$0 \leq \lambda^0 < \lambda^1 < \dots < \lambda^{N-1} < \lambda^N = 1$$

A cette partition on associe une suite de chargements dont le terme de rang  $n$  est donné par :

$$\mathbf{U}^n = \lambda^n U \text{ où } U \text{ est le chargement imposé.}$$

En introduisant ensuite la décomposition des champs de déplacements microscopique et macroscopique :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \mathbf{V}^n \text{ et } \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{v}^n$$

et sous condition que la partition de  $[0, 1]$  soit telle que :

$$(20) \quad |\nabla_x \mathbf{V}^n|_{[L^2(\Omega)]^3} \ll 1 \text{ et } |\nabla_y \mathbf{v}^n|_{[L^2(Y)]^3} \ll 1$$

à la résolution des problèmes non linéaires couplés (3), (4) et (6) se substitue celle d'une succession de problèmes linéaires.

Cependant il paraît très clair que la précision de la méthode dépend de la finesse du pas de chargement choisi, c'est à dire du nombre d'itérations  $N$  que l'on impose. L'inconvénient majeur de cette méthode de linéarisation par rapport au chargement est ainsi que le nombre d'itérations nécessaire à l'obtention d'une bonne approximation de la réponse macroscopique à un chargement

donné ne peut être connu a priori mais seulement a posteriori. De plus le temps de calcul qu'elle requiert est indépendant du type de sollicitations, et ne dépend que de l'intensité du chargement.

## 4.2 Analyse des performances

Afin de comparer les deux méthodes et algorithmes d'homogénéisation disponibles, nous comparons d'une part leurs précisions respectives et d'autre part les temps de calcul qu'elles requièrent.

### 4.2.1 convergence des méthodes

Il semble clair à l'examen des courbes (Fig. 2) contrainte nominale induite/élongation imposée que la méthode incrémentale de F.Devries tend vers la solution recherchée dans la mesure où le pas de chargement choisi est suffisamment fin. Il est de même visible que les deux méthodes convergent vers la même solution.

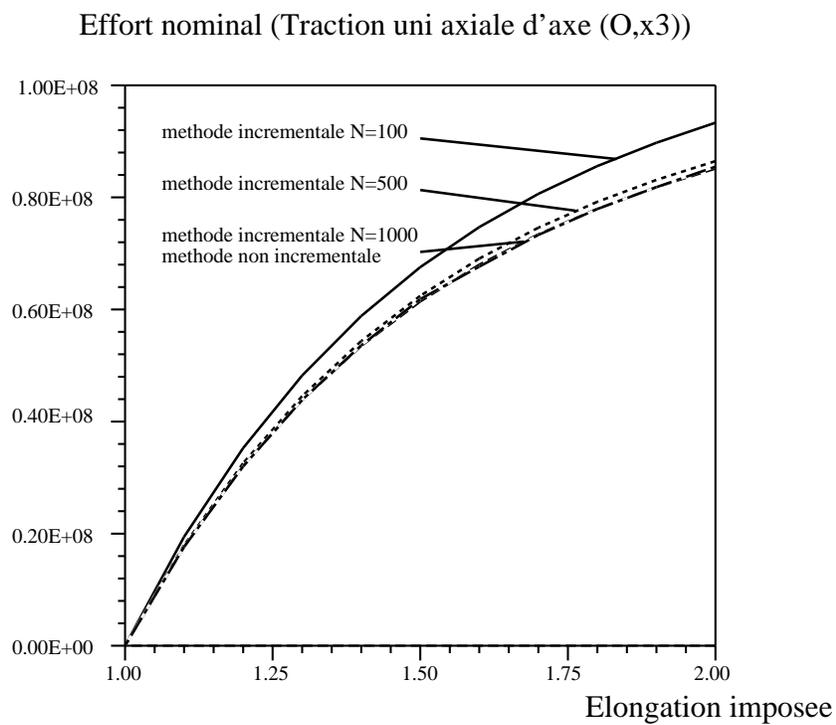
Précisons en outre qu'il a été montré [14] que la méthode d'homogénéisation incrémentale approche correctement la réponse hétérogène de composites à constituants élastiques non linéaires, du moins dans le cadre de son utilisation licite.

### 4.2.2 comparaison des temps cpu

Nous présentons ici une comparaison des temps de calcul de ces deux méthodes dans les différents cas de sollicitations envisagés précédemment (Tab 1). Ces temps de calculs ont été obtenus pour des sollicitations induisant des taux de chargement ( $U/L$  où  $U$  est le chargement et  $L$  la dimension caractéristique dans la direction de sollicitations) de 200%.

On peut constater sur le graphe (Fig. 3) que notre méthode est beaucoup plus performante, puisqu'elle permet des gains de temps pouvant aller jusqu'à un facteur 40.

Remarquons que dans le cas du cisaillement simple les gains sont moins importants. En effet dans ce cas, contrairement aux autres sollicitations macroscopiques, le tenseur gradient de déformation macroscopique est non diagonal,

FIG. 2: *Condition de convergence*

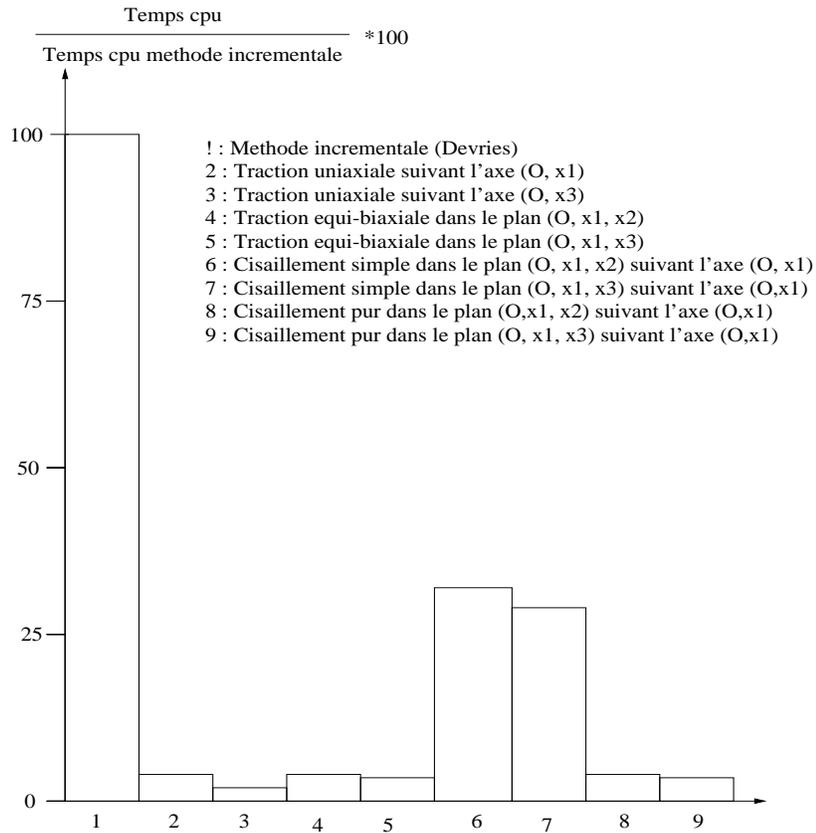


FIG. 3: Comparaison des temps cpu

ce qui a tendance à faire croître le temps de calcul nécessaire pour atteindre la convergence.

Néanmoins, même dans le cas du cisaillement simple, notre méthode réduit d'un facteur trois le temps de calcul, et dans les autres cas de sollicitations, le temps peut être réduit par un facteur allant jusqu'à 40.

Nous pouvons donc affirmer que cette méthode non incrémentale nous permet de réduire de manière non négligeable les temps de calcul.

## 5 CONCLUSION

Ce rapport propose un algorithme de calcul du comportement non linéaire homogène équivalent de matériaux composites à constituants non linéaires.

Sa particularité réside dans le fait que par un judicieux découpage des équations des problèmes à résoudre, on obtient un algorithme itératif non incrémental, ce qui peut présenter un intérêt évident en terme de temps de calcul requis.

Cette méthode est performante tant au niveau des temps de calcul que des résultats mécaniques obtenus. Néanmoins nous venons également de voir que cette méthode n'est actuellement développée que pour des cas de sollicitations simples, et ce afin de minimiser les coûts de calcul.

Afin d'une part d'appliquer cette méthode à des chargements macroscopiques quelconques, mais également à des matériaux composites de géométries plus complexes, tels que les mousses à inclusions sphériques ou encore des composites à fibres courtes et d'autre part de l'adapter à une étude de l'endommagement, il semble nécessaire de paralléliser l'algorithme. C'est dans cette direction que s'orientent actuellement nos travaux.

## Références

- [1] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICALAOU: Asymptotic analysis for periodic structures, Studies in mathematics and its applications, Volume 5, Ed. North-Holland Publishing Company, 1978.

- [2] M. BERNADOU, P.G. CIARLET, J. HU : Sur la convergence des méthodes incrémentales en élasticité nonlinéaire tridimensionnelle, C.R.A.S., 295, I, p.639-642, Paris, 1982.
- [3] M. BERNADOU, P.L GEORGE,A. HASSIN, P. JOLY, A. PERONNET,E. SALTEL, D. STEER, G. VANDERBORRCK, Modulef, Une bibliothèque modulaire d'éléments finis, I.N.R.I.A. Editeur, 1985.
- [4] P. BOISSE : Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques, Thèse de Doctorat, Université de PARIS VI, 1987.
- [5] M. BRIEU, F. DEVRIES : Homogénéisation de composites élastomère. Méthode et algorithme. Soumis aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1997.
- [6] M. BRIEU, F. DEVRIES : Homogénéisation de composites élastomère. Colloque Eléments Finis Polymère, Apollor Eds., Nancy, 1997.
- [7] P.G. CIARLET : The Finite Element Methods for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] P.G. CIARLET : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1982.
- [9] P.G. CIARLET : Elasticité tridimensionnelle, Masson, Paris, 1986.
- [10] P.G. CIARLET, G. GEYMONAT : Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible, C.R.A.S., II, 295, p.423-426, 1982.
- [11] J.Y. COGNARD : Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : La M.A.G.I.T., Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1989.
- [12] J.L. DAVET : Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire :confrontation de modèles et de travaux expérimentaux, Annales des Ponts et Chaussées, 3<sup>ème</sup> trimestre, Paris, 1985.
- [13] F. DEVRIES : Calcul du comportement homogénéisé de composites hyperélastiques, Revue des composites et des matériaux avancés, volume 6, n°2, 1996.
- [14] F. DEVRIES : Homogeneization of elastomer matrix composites. Method and Validation, soumis à Composites Engenering, Part B.
- [15] H. DUMONTET : Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, 1990.

- [16] C. G'SELL, A. COUPARD: Génie mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastiques, Apollor, INPL, LRCCP, Firtech, 1997.
- [17] P.G. GEYMONAT, S. MULLER, N. TRIANTAFYLLIDIS: Quelques remarques sur l'homogénéisation de matériaux élastiques non linéaires, C.R.A.S., I, 311, p.911-916, 1990.
- [18] P.G. GEYMONAT, S. MULLER, N. TRIANTAFYLLIDIS: Homogeneization of nonlinear elastic materials, microscopic loss of rank one convexity, Arch. Rational Mech. Anal. 122,231-290, 1993.
- [19] R. GLOWINSKY, P. LE TALLEC: Elasticité non linéaire: formulation mixte et méthode numérique associée, Comput. Appl. Mech. Engen, R.Glowinsky, J.L. Lions Editors, North Holland Publishing company, INRIA, 1982.
- [20] P. LADEVEZE: Mécanique non linéaire des structures, Etudes en mécanique des matériaux et des structures, Hermès, 1996.
- [21] J. LAMBERT-DIANI, C. REY: Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères: Principe et avantages, Soumis aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1997.
- [22] F. LENE: Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement, Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences Mathématiques, Université Paris VI, 1984.
- [23] P. LE TALLEC, M. VIDRASCU: Une méthode numérique pour les problèmes de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations, Numer. Math. 43, p.199-224, 1985.
- [24] J. ORTEGA, W.C. RHEINBOLDT: Iterative Solution of Non Linear Equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.
- [25] P. PONTE-CASTENADA: The overall constitutive behaviour of nonlinear elastic composites, Proc. Roy. Soc. London, 422, A, p.147-171, 1989.
- [26] W.C. RHEINBOLDT, Methods for solving systems of non linear equations, Society for Industrial and Appl. Mathematics, Philadelphia, 1974.
- [27] W.C. RHEINBOLDT: Numerical analysis of continuation methods for non linear structural problems, Computers and Structures, 13, p.103-113, 1981.

- [28] M. SIBONY, J.Cl. MARDEN : Systèmes linéaires et non linéaires, Analyse numérique, I, Hermann, 1988.
- [29] D. SOULAT : Méthodes de décomposition de domaines et parallélisme en calcul de structures hétérogènes et composites, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1996.
- [30] D.R.S. TALBOT, J.R. WILLIS : Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites. I.M.A.J. Appl. Math., 39, p.215-240, 1987.
- [31] N. TRIANTAFYLLIDIS, B.N. MAKER : On the comparison between microscopic instability mechanisms in a class of fiber reinforced composites, J. Appl. Mech., Transactions of the ASME, 52, p.794-800, 1985.
- [32] J.R. WILLIS : Variational and related methods for the overall properties of composites, in Advances in applied mechanics, 21, Academic Press, New York, p.1-78, 1981.



---

Unit ´e de recherche INRIA Lorraine, Technop ˆole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unit ´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unit ´e de recherche INRIA Rh ˆone-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unit ´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unit ´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

´Editeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399