Étude d'une classe de [bêta-gamma] schémas en formulation volumes finis pour des problèmes hyperboliques.

Frédéric Bonnet, Mihai Bostan, Loula Fezoui

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

ÉTUDE D'UNE CLASSE DE β-γ SCHÉMAS EN FORMULATION VOLUMES FINIS POUR DES PROBLÈMES HYPERBOLIQUES.

Frédéric Bonnet, Mihai Bostan et Loula Fezoui.

N° 3288

octobre 1997

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

ÉTUDE D'UNE CLASSE DE β-γ SCHÉMAS EN FORMULATION VOLUMES FINIS POUR DES PROBLÈMES HYPERBOLIQUES.

Frédéric Bonnet, Mihai Bostan et Loula Fezoui.

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 3288 — octobre 1997 — 28 pages

Résumé : Dans la perspective de construire des schémas numériques précis en temps et en espace pour la résolution de problèmes hyperboliques, nous étudions une classe de schémas : les β-γ schémas. La discrétisation spatiale repose sur la méthode des volumes finis tandis que l'intégration en temps est prise en compte via un schéma explicite multi-pas (Runge-Kutta d'ordre 3). A l'aide d'études sur les équations équivalentes et sur la stabilité, nous définissons des critères afin de pouvoir choisir de façon optimale les paramètres β et γ dans le cadre de l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle. Une application de ces schémas aux équations de Maxwell instationnaires est également proposée.

Mots-clé : équation d'advection, équations équivalentes, stabilité, volume fini, β-γ schémas, Runge-Kutta, système de Maxwell.

(Abstract: pto)

ACCURACY AND STABILITY OF HIGH-ORDER UPWIND β-γ SCHEMES IN FINITE VOLUME FORMULATION FOR LINEAR HYPERBOLIC PROBLEMS.

Abstract: In order to solve numerically linear hyperbolic problems, we propose to study high-order upwind schemes : the β-γ schemes. The solver presented here is based on a finite volume formulation. We choose third order explicit Runge-Kutta time discretization. We study the accuracy and the stability in order to evaluate the best parameters β and γ. Finally, we test these schemes both on advection equation and on Maxwell system.

Key-words: advection equation, modified equations, stability analysis, finite volume, β-γ schemes, Runge-Kutta, Maxwell system.

Table des matières

Introduction

Dans la perspective de construire des schémas numériques précis en temps et en espace pour la résolution de systèmes hyperboliques en plusieurs dimensions (telles que les équations de Maxwell), on propose ici l'étude d'un schéma numérique opérant sur des maillages plans, triangulaires ou rectangulaires. La discrétisation spatiale repose sur la méthode des volumes finis. L'intégration en temps sera prise en compte via un schéma explicite multi-pas (Runge-Kutta). De tels schémas ont été étudiés notamment dans [1, 2] pour l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. Bien que les schémas qui ressortent de ces études soient d'ordre élevé (ordre 3 ou 4), ils présentent un certain nombre d'inconvénients. En effet, le schéma d'ordre trois, obtenu à l'aide d'une approximation de type MUSCL et d'un β schéma [3] (avec $\beta = \frac{1}{3}$) pour la discrétisation spatiale et d'une méthode de Runge-Kutta à 3 pas pour l'intégration temporelle, présente une diffusion résiduelle qui est jugée encore trop importante pour les applications considérées. En particulier, ce caractère diffusif du schéma entraine une détérioration des solutions sur de longs temps de calcul (quelques dizaines de périodes). Une alternative à ce schéma est l'utilisation d'un schéma d'ordre 4 basé sur le même type d'approximation (MUSCL) mais où l'ordre de diffusion résiduel a été atténué. Cependant, le schéma ainsi construit est un schéma centré. Il est connu que de tels schémas sont susceptibles d'engendrer des oscillations parasites sur la solution. L'utilisation des techniques dites de limiteurs permet de réduire ces oscillations [4]. Cependant, ces méthodes réintroduisent de la diffusion numérique difficile à analyser et à contrôler. De plus, ce schéma nécessite l'utilisation d'un schéma explicite de Runge-Kutta à 4 pas qui se révèle trop coûteux en temps de calcul.
Nous proposons donc dans ce rapport un schéma intermédiaire entre le schéma d'ordre trois jugé trop diffusif pour nos applications et le schéma d'ordre quatre centré et coûteux. Ce nouveau schéma sera appelé *nouveau schéma d'ordre trois.*
Dans un premier temps on propose ce schéma dans le cadre de l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle pour des maillages rectangulaires et triangulaires. Pour chacun des schémas obtenus on proposera une étude de l'équation équivalente associée ainsi qu'une étude détaillée de la stabilité du schéma considéré. Après quelques illustrations numériques sur l'équation d'advection 2D, nous dégageons les valeurs optimales des paramètres β et γ. Enfin, on présentera une application de ces schémas à la résolution des équations de Maxwell en trois dimensions. Les résultats obtenus avec le nouveau schéma d'ordre 3 en maillage tétraédrique ou cubique sont comparés en terme de précision avec ceux obtenus avec le schéma d'ordre 3 classique.

1 Étude d'un cas modèle

Nous proposons ici d'étudier l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. La discrétisation spatiale reposera sur deux types de maillage : triangles et rectangles. On explicitera alors dans chacun des cas considérés le schéma numérique auquel on aboutit. Pour chacun de ces schémas on présentera l'équation équivalente que l'on obtient ainsi qu'une étude de la stabilité.