

# Réduction du conditionnement pour les problèmes de discrétisation microlocale

Armel De La Bourdonnaye, Marc Tolentino

► **To cite this version:**

Armel De La Bourdonnaye, Marc Tolentino. Réduction du conditionnement pour les problèmes de discrétisation microlocale. RR-3277, INRIA. 1997. <inria-00073412>

**HAL Id: inria-00073412**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073412>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Réduction du conditionnement pour les  
problèmes de discrétisation microlocale***

Armel de La Bourdonnaye — Marc Tolentino

**N° 3277**

Octobre 1997

THÈME 4



***R*** ***apport  
de recherche***



# Réduction du conditionnement pour les problèmes de discrétisation microlocale

Armel de La Bourdonnaye\* , Marc Tolentino\*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 3277 — Octobre 1997 — 34 pages

**Résumé :** Dans cet article, nous analysons les propriétés de conditionnement des systèmes linéaires venant de la discrétisation microlocale. Ces systèmes utilisent des fonctions de base localement oscillantes pour modéliser des problèmes de propagation d'onde en régime harmonique. Ces problèmes étant très mal conditionnés, nous proposons d'abord une analyse de la difficulté en terme de *sur-discrétisation* ; celle-ci créant des ondes évanescentes.

La première solution que nous regardons est de projeter le problème sur l'espace orthogonal à ces modes. Nous faisons cela sur un problème modèle mais ça n'est pas une solution satisfaisante pour des systèmes de taille importante. Nous proposons alors de transformer le système à l'aide d'une base d'ondelettes. Il apparaît que cette transformation différencie fortement les gros coefficients des petits. Ceci nous permet de réaliser un filtrage de la matrice transformée pour obtenir un système réduit qui est bien conditionné.

Il s'agit ici d'un usage non classique des ondelettes puisqu'elles agissent dans le domaine spectral. Nous obtenons finalement une méthode qui n'utilise qu'un degré de liberté par longueur d'onde environ pour simuler des problèmes de diffraction.

\* projet CAIMAN; E-mail : [armel.de\\_La\\_Bourdonnaye@sophia.inria.fr](mailto:armel.de_La_Bourdonnaye@sophia.inria.fr) ; [mtolen@sophia.inria.fr](mailto:mtolen@sophia.inria.fr)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis

2004, route des Lucioles, B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Téléphone : 04 93 65 77 77 - International : +33 4 93 65 77 77 — Fax : 04 93 65 77 65 - International : +33 4 93 65 77 65  
à partir du 01/01/1998

Téléphone : 04 92 38 77 77 - International : +33 4 92 38 77 77 — Fax : 04 92 38 77 65 - International : +33 4 92 38 77 65

**Mots-clé :** Propagation d'ondes, équation de Helmholtz, Discrétisation micro-locale, ondelettes, systèmes linéaires, conditionnement.

*(Abstract: pto)*

# Wavelets for reducing of the conditioning number for microlocal discretization problems

## **Abstract:**

In this paper, we analyze the conditioning properties of systems arising from microlocal discretizations. These systems are using oscillating basis functions to model wave problems in harmonic regim. Facing severe condition numbers, we first interpret the difficulty as coming from an *over-discretization* which creates evanescent waves. The first solution we investigate is to project the problem on the orthogonal of these modes. This is done on a model problem but it is not a satisfactory solution on real-size systems.

Then we propose to transform the linear system by using a wavelet basis. It appears that this transformation discriminates strongly small and big matrix coefficients. This allows to filter the transformed system to obtain a reduced one which is both better conditioned and smaller.

The use of the wavelets is an original one since the transformation is done in the spectral domain thanks to the microlocal discretization. We finally obtain a method that uses about one degree of freedom by wavelength to simulate scattering problems.

**Key-words:** Wave propagation, Helmholtz equation, Microlocal discretization, wavelets, linear systems, conditioning number.

# 1 Introduction

Dans le domaine de la simulation de la propagation d'ondes en régime harmonique en milieu non borné, de nombreuses tentatives ont été faites pour diminuer la complexité des méthodes de discrétisation pour les problèmes à haute fréquence. Parmi celles-ci, la discrétisation microlocale vise, par des fonctions de base adaptées au comportement des ondes à haute fréquence, à diminuer le remplissage des matrices d'équations intégrales et le nombre de degrés de liberté nécessaires pour les méthodes volumiques. Cette méthode est apparue, de manière implicite, dans un article de F.X. Canning [2], puis a été développée et précisée dans [6], [4], [9], [5] et [7] pour les équations intégrales principalement et a été intégrée à une méthode volumique par O. Cessenat et B. Desprès dans [3]. Le principe de base consiste à multiplier des fonctions de localisation spatiale par des fonctions oscillantes de type

$$e^{ik\xi_j \cdot x}$$

où  $x$  est la variable,  $k$  le nombre d'onde du problème et les  $\xi_j$  sont des vecteurs de module 1. La nécessité d'un nombre minimal de degrés de liberté impose de vérifier un critère qui correspond au critère de maillage classique en  $\lambda/5$  ou  $\lambda/10$  où

$$\lambda = 2\pi/k$$

est la longueur d'onde du problème. Ce critère est sous-optimal car pour un segment dont la longueur est un multiple de la longueur d'onde, il suffit de discrétiser en  $\lambda/2$  avec des fonctions qui sont orthornormées pour la norme  $L^2$ . Cependant, dans le cas où le segment n'est pas un nombre entier de longueurs d'onde, ou bien sur une surface quelconque (comme dans le cas des équations intégrales), on ne dispose plus de base orthogonale explicite de fonctions oscillantes. Ceci explique que le nombre de degrés de liberté est plus important que le strict minimum imposé par le critère de Shannon. Un deuxième défaut de cette méthode est qu'elle conduit à des conditionnements très élevés, même pour des problèmes de taille raisonnable en termes de degrés de liberté. Nous verrons dans la suite que ce défaut est la conséquence de la sous optimalité du nombre de degrés de liberté. En effet, la «surdiscrétisation» crée des ondes évanescentes et ce sont ces ondes (qui ne rayonnent pas) qui correspondent aux très faibles valeurs propres qui détériorent le conditionnement.

Le rapport s'organise comme suit. Dans une première partie, nous mettrons en évidence les problèmes de conditionnement à la fois sur une discrétisation des équations intégrales et sur un problème modèle unidimensionnel. Dans la deuxième partie, nous montrerons sur ce problème comment on peut à la fois améliorer le conditionnement et réduire la complexité algorithmique grâce à l'utilisation d'ondelettes dans le domaine spectral. Dans la troisième partie, nous appliquerons cette méthode aux équations intégrales. Nous terminerons par quelques perspectives.