

# Comparaison d'une méthode stochastique et d'une méthode déterministe appliquées à l'équation de Burgers

Mireille Bossy, Loula Fezoui, Serge Piperno

► **To cite this version:**

Mireille Bossy, Loula Fezoui, Serge Piperno. Comparaison d'une méthode stochastique et d'une méthode déterministe appliquées à l'équation de Burgers. [Rapport de recherche] RR-3093, INRIA. 1997, pp.28. <inria-00073598>

**HAL Id: inria-00073598**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073598>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Comparaison d'une méthode stochastique et  
d'une méthode déterministe appliquées à  
l'équation de Burgers*

Mireille Bossy, Loula Fezoui, Serge Piperno

**N° 3093**

Janvier 1997

————— THÈME 4 —————



*Rapport  
de recherche*



## Comparaison d'une méthode stochastique et d'une méthode déterministe appliquées à l'équation de Burgers

Mireille Bossy<sup>\*</sup>, Loula Fezoui<sup>\*\*</sup>, Serge Piperno<sup>\*\*\*</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projets Caiman et Omega

Rapport de recherche n° 3093 — Janvier 1997 — 28 pages

**Résumé :** L'objet de ce travail est de comparer sur un modèle simple, l'équation de Burgers, deux méthodes numériques très différentes dans leur principe et leurs propriétés. La première méthode, assez classique et largement utilisée aujourd'hui, repose sur une formulation faible de l'équation considérée comme une loi de conservation, vérifiée sur chaque partie appelée cellule ou volume fini du domaine de calcul. La deuxième méthode appartient à la famille des algorithmes particuliers probabilistes. Dans cette approche, la solution de l'équation de Burgers est interprétée comme la fonction de répartition de la loi d'un processus aléatoire gouvernée par une équation de type McKean–Vlasov.

Nous comparons les deux méthodes sur des cas-tests visqueux et non-visqueux.

**Mots-clé :** Equation de Burgers, algorithme particulière probabiliste, méthodes vortex, volumes finis, interpolation MUSCL, limiteurs, schémas TVD

*(Abstract: pto)*

\* . Projet Omega, Mireille.Bossy@inria.fr  
\*\* . Projet Caiman, fezoui@inria.fr  
\*\*\* . Projet Caiman, Serge.Piperno@inria.fr

## Comparison of a Stochastic Method and a Determinist Method Applied to Burgers Equation

**Abstract:** The aim of this work is to compare two very different numerical methods, on the simple model of Burgers equation. The first method is based on a weak formulation of Burgers equation, seen as a conservation law satisfied on each part of the computational domain called cell or finite volume. The second method is a stochastic particle method. In this approach, the solution of Burgers equation is interpreted as the cumulative distribution function of the law of a stochastic process. This law satisfies a P.D.E. of McKean–Vlasov type.

We compare this two methods on viscous and inviscid test cases.

**Key-words:** Burgers equation, stochastic particle methods, vortex method, finite volume methods, MUSCL interpolation, limiters, TVD schemes

## Introduction

L'objet de ce travail est de comparer sur un modèle simple, l'équation de Burgers, deux méthodes numériques très différentes dans leur principe et leurs propriétés. La première méthode, assez classique et largement utilisée aujourd'hui, repose sur une formulation faible de l'équation considérée comme une loi de conservation, vérifiée sur chaque partie appelée cellule ou volume fini du domaine de calcul.

Avec la méthode choisie ici, on traite séparément les termes de convection et les termes de diffusion. On peut ainsi, d'une part, prendre en compte les caractéristiques propres à l'opérateur hyperbolique non-linéaire et d'autre part, supprimer simplement les termes de diffusion dans les cas de pure convection. Notons que ce procédé s'étend aux équations de Navier-Stokes compressibles en deux ou trois dimensions [5].

La deuxième méthode présentée ici appartient à la famille des algorithmes particuliers probabilistes. Dans cette approche, la solution de l'équation de Burgers est interprétée comme la fonction de répartition de la loi d'un processus aléatoire gouverné par une équation de type McKean–Vlasov [2].

Notons qu'ici l'opérateur de diffusion joue un rôle essentiel et ne saurait donc être supprimé pour obtenir des solutions de convection. Ces dernières sont alors obtenues en prenant un coefficient de viscosité très petit mais non-nul. L'impact de cette viscosité résiduelle sur les solutions de convection est comparé numériquement ici à l'effet dissipatif induit par la technique dite des limiteurs utilisée dans l'approche déterministe pour atténuer voire supprimer les oscillations parasites. Notons aussi que l'algorithme probabiliste utilisé ici se confond avec la méthode des vortex aléatoires lorsqu'on l'applique aux équations de Navier-Stokes incompressibles [7].

Le rapport se présente comme suit:

dans les première et deuxième parties, nous décrivons respectivement la méthode déterministe et l'approche probabiliste.

Dans la troisième partie, nous présentons et discutons les critères retenus pour comparer les résultats numériques obtenus.

Dans la dernière partie, des solutions numériques sont présentées et comparées aux solutions exactes de l'équation. Nous comparons aussi les erreurs obtenues à un instant donné pour des coûts de calcul fixés.

## 1 Description de la méthode déterministe

Dans cette section, nous présentons une méthode déterministe relativement classique pour la résolution de l'équation de Burgers visqueuse:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \mu u_{xx}. \quad (1)$$

Lorsque la viscosité  $\mu$  est nulle, cette équation, posée pour l'instant au sens faible, se rapproche par bien des aspects aux équations d'Euler en une dimension, qui régissent les

écoulements mono-dimensionnels de fluides parfaits. Lorsque  $\mu$  est non-nulle, on se rapproche des écoulements mono-dimensionnels visqueux régis par les équations de Navier-Stokes.

On s'intéresse dans un premier temps au cas  $\mu = 0$ . L'équation des Burgers est écrite ici sous forme conservative (loi de conservation pour la variable  $u$ ). Elle est hyperbolique, et le flux  $f(u) = u^2/2$  est non-linéaire et strictement convexe.

Comme pour les équations d'Euler, il n'existe pas nécessairement de solution régulière de l'équation de Burgers. Des solutions "faibles" d'une certaine régularité existent. Elles sont régulières par morceaux et vérifient des relations de saut (Rankine–Hugoniot) le long des discontinuités, dont la vitesse est donnée par  $s = (u_G + u_D)/2$ , où  $u_G$  et  $u_D$  désignent respectivement les états à gauche et à droite de la discontinuité.

### 1.1 Méthode des volumes finis

En restant proche de la formulation conservative, on s'assure que les solutions obtenues sont bien des solutions faibles de l'équation initiale. Parmi toutes les solutions faibles, la viscosité numérique apportée par nos schémas sélectionne la solution faible entropique, donc physique.

La forme intégrale de l'équation initiale de conservation nous assure que, pour un intervalle  $[a, b]$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^b u(x, t) dx \right) = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (2)$$

On choisit donc une formulation en volumes finis. On applique la forme intégrale précédente à des cellules (intervalles en une dimension), qui constituent une partition du domaine. Les inconnues numériques considérées,  $u_i^n$ , représentent des approximations à l'instant  $t^n$  de la moyenne de  $u$  sur la cellule  $\mathcal{C}_i$ . On choisira un maillage régulier, tel que:

$$\begin{cases} x_i &= i\Delta x \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= (i + \frac{1}{2})\Delta x \\ \mathcal{C}_i &= [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \end{cases} \quad (3)$$

### 1.2 Schéma conservatif

On utilise alors un schéma dit conservatif, qui s'écrit en fonction de *flux numériques*  $\phi_i$  sous la forme:

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\mathcal{C}_i} + (\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}) = 0. \quad (4)$$

Le flux numérique  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  représente un flux de la cellule  $\mathcal{C}_i$  vers la cellule  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Il dépend des états successifs  $\dots, u_i, u_{i+1}, \dots$  par l'intermédiaire d'une *fonction de flux numérique*  $\phi$ , c'est-à-dire

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(\dots, u_i, u_{i+1}, \dots). \quad (5)$$

Dans le schéma (4), le traitement de la partie temporelle n'a pas encore été précisé. Il est clairement dissocié du traitement de la partie spatiale. Ainsi, on pourra considérer parallèlement des schémas en temps (Runge–Kutta explicites à plusieurs pas) et des flux numériques plus ou moins précis en espace.

### 1.3 Méthode de Godunov

En chaque interface située en  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , le flux numérique  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  peut être approché (après translation) par le flux en  $x = 0$  de la solution de l'équation de Burgers pour la donnée initiale suivante:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_G, & \text{si } x < 0 \\ u_D, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (6)$$

avec  $u_G = u_i$  et  $u_D = u_{i+1}$ . Ce type de problème est appelé problème de Riemann (si  $u_G \neq u_D$ ). La méthode de Godunov est un schéma en volumes finis dont le flux numérique s'appuie sur un solveur de Riemann exact, c'est-à-dire sur le flux en chaque interface des solutions aux problèmes de Riemann locaux.

Pour l'équation de Burgers, les seules solutions entropiques bornées d'un problème de Riemann sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \underline{\text{choc } u_G > u_D} : \quad u(x, t) &= \begin{cases} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{u_G + u_D}{2} \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{u_G + u_D}{2} \end{cases} \\ \underline{\text{détente } u_G < u_D} : \quad u(x, t) &= \begin{cases} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < u_G \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_G < \frac{x}{t} < u_D \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > u_D \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Ainsi, le flux de Godunov, pris en  $u = u(0, t)$ , s'écrit:

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G, u_D) = \begin{cases} u_G^2/2 & \text{si } 0 \leq u_G \leq u_D \text{ ou } u_G \geq |u_D| \\ u_D^2/2 & \text{si } u_G \leq u_D \leq 0 \text{ ou } |u_G| \leq -u_D \\ 0 & \text{si } u_G \leq 0 \leq u_D \end{cases}, \quad (8)$$

et on prend pour flux numérique  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\text{Godunov}}(u_i, u_{i+1})$ .

Dans ce qui précède, on a omis de préciser le schéma en temps utilisé, et notamment en quel instant sont prises les valeurs  $u_i$ . Pour un schéma explicite Euler-avancé, la méthode présentée ci-dessus est stable et monotone [12] sous la condition de type CFL  $\Delta t^n \|u^n\|_{L^\infty} \leq \Delta x$ .

### 1.4 Extension à l'ordre trois

La partie spatiale est seulement d'ordre un, car la construction des problèmes de Riemann locaux s'appuie sur les valeurs moyennes par cellules de la grandeur  $u$ . Une extension possible



à une précision d'ordre supérieur est fournie par la méthode MUSCL [18] (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws). L'idée fondamentale est la suivante. Du traitement de la partie spatiale du schéma conservatif d'ordre un, on garde la même fonction de flux numérique. Cependant, pour augmenter l'ordre de précision, les arguments de la fonction de flux numérique sont obtenus par une interpolation spatiale dans chaque cellule.

Le flux s'écrit désormais:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\text{Godunov}}(u_{i+\frac{1}{2}-}, u_{i+\frac{1}{2}+}). \quad (9)$$

Les états interpolés de chaque côté de l'interface de cellules consécutives (en  $x_{i+\frac{1}{2}}$ ),  $u_{i+\frac{1}{2}-}$  et  $u_{i+\frac{1}{2}+}$ , sont donnés par :

$$u_{i+\frac{1}{2}-} = u_i + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (10)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}+} = u_{i+1} - \frac{1}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right], \quad (11)$$

où on a utilisé le symbole  $\Delta u_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1} - u_i$ ;  $\beta$  est un paramètre de décentrage. On obtient dans les cellules des pentes centrées quand  $\beta = 0$ , et des pentes totalement décentrées quand  $\beta = 1$ .

Pour l'équation linéaire d'advection ( $f(u) = cu$ ), l'analyse de l'erreur de troncature de ce schéma donne:

$$\varepsilon^x = (1-3\beta)\frac{|c|\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \beta\frac{|c|\Delta x^3}{4}u_{xxxx} + O(\Delta x^4). \quad (12)$$

Ce schéma est donc d'ordre trois en espace quand  $\beta = 1/3$  pour l'advection linéaire (il est seulement d'ordre deux pour l'équation de Burgers [11]). Dans tous les cas, on utilisera le schéma temporel explicite suivant (de type Runge-Kutta à trois pas d'ordre trois dans le cas général):

$$\begin{cases} u_i^* &= u_i^n + \frac{1}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ u_i^{**} &= u_i^n + \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{3}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \phi_{i+\frac{1}{2}}^{**} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \end{cases} \quad (13)$$

où les valeurs "étoilées" des flux sont calculées à partir des grandeurs  $u$  numériques "étoilées" correspondantes.

## 1.5 Caractère TVD, adjonction de limiteurs

Pour l'advection linéaire, le schéma global obtenu est linéaire et d'ordre supérieur à un, il ne peut donc pas être TVD (Total Variation Diminishing) [9, 10]. Cette propriété signifie qu'un schéma ne crée pas d'extremum local, il vérifie donc le principe du maximum et n'oscille pas près des discontinuités.

Pour obtenir un schéma TVD, on utilise des limiteurs de pente. L'analyse faite par Sweby [16] sur l'élimination des oscillations parasites a mené à différents limiteurs, dont certains sont adaptés à l'extension MUSCL pour  $\beta = 1/3$  de schémas décentrés [15] parmi lesquels celui que nous utilisons [14].

Le flux numérique entre deux cellules est encore donné par la formule (9). Les états interpolés  $u_{i+\frac{1}{2}-}$  et  $u_{i+\frac{1}{2}+}$  sont désormais calculés à partir de "pentes limitées":

$$u_{i+\frac{1}{2}-} = u_i + \frac{\varphi_i^+}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (14)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}+} = u_{i+1} - \frac{\varphi_i^-}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right]. \quad (15)$$

Les limiteurs  $\varphi_i^+$  et  $\varphi_i^-$  sont donnés par

$$\varphi_i^+ = \varphi \left( \frac{\Delta u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}} \right) \quad \text{et} \quad \varphi_i^- = \varphi \left( \frac{\Delta u_{i+\frac{3}{2}}}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}} \right) \quad (16)$$

La fonction de limitation  $\varphi$  est choisie de telle sorte que le schéma reste d'ordre trois (pour l'advection linéaire d'une donnée régulière) et soit TVD pour un pas de temps aussi grand que possible. On a choisi la fonction suivante:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ (3r^4 - 7r^3 + 3r^2 + 3r)/2 & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ (3r^2 - 6r + 19)/(r^3 - 3r + 18) & \text{si } 1 \leq r \end{cases} \quad (17)$$

Le schéma global obtenu avec ce limiteur et une intégration en temps explicite Euler-avancée est TVD pour un nombre de Courant  $\nu \leq 0.604$ . Lorsqu'on utilise le schéma explicite d'ordre trois de Runge-Kutta à trois pas (13), le schéma global obtenu est cette fois TVD jusqu'à  $\nu \leq 1.05$ .

## 1.6 Terme de diffusion et conditions aux limites

Pour conclure la description de la méthode, nous considérons maintenant le cas de l'équation visqueuse. Le membre de droite de (1) est traité comme un terme source. Il est discrétisé en différences finies par

$$\mu u_{xx} \simeq \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}. \quad (18)$$

Cette approximation est d'ordre deux. Ceci est suffisant puisque la viscosité apportée par notre méthode volumes finis est d'ordre un (aux endroits où la solution est la moins régulière).

Pour finir la description complète de la méthode, nous précisons maintenant le traitement des conditions aux limites. Dans l'ensemble du rapport, nous avons traité les conditions aux limites de manière faible (c'est-à-dire par l'intermédiaire de flux numériques) aux limites du domaine. Pour ne pas fausser les résultats numériques, nous avons systématiquement considéré un domaine de calcul assez large pour que la valeur au bord du domaine de la

solution exacte puisse être considérée comme égale à la valeur exacte à l’infini sur l’intervalle de temps considéré. Cette manière de procéder rend la comparaison avec la méthode probabiliste plus facile. Cependant, la prise en compte d’un domaine spatial très large est clairement un handicap pour la méthode déterministe, comme le montre la section suivante.

## 1.7 Comportement général

La méthode volumes finis présentée ci-dessus pour  $\mu = 0$  est conservative (l’intégrale en espace de la grandeur  $u$  sur un intervalle dépend uniquement des flux aux bords de l’intervalle). On l’utilise avec le schéma explicite (13) et un pas de temps tel que  $\nu \leq 1.05$ . La méthode est donc TVD (pas d’oscillation ni création d’extremum). La méthode est localement d’ordre trois (analyse sur l’erreur de troncature) seulement aux points où la solution est régulière et de dérivée non-nulle ( $u_x \neq 0$ ) [14].

Pour les discontinuités et les extrema de  $u$ , le schéma est seulement d’ordre un et produit localement une diffusion de l’ordre de  $|u|\Delta x$ . Ainsi, l’erreur en norme  $L^2$  dépend du pas d’espace et de la solution exacte. Pour une faible viscosité  $\mu$ , les solutions exactes à forts gradients seront d’autant plus mal approchées que le pas d’espace est grand. Pour de fortes viscosités, les solutions exactes seront très régulières et approchées indépendamment du pas d’espace  $\Delta x$ .

Nous pouvons terminer cette description détaillée de la méthode déterministe par une évaluation du temps de calcul nécessaire pour une simulation. Le temps de calcul dépend de la durée d’intégration  $T$ , de la largeur de l’intervalle d’intégration  $L$ , de  $\|u\|_\infty$ , du pas d’espace  $\Delta x$  et du pas de temps  $\Delta t$ . Pour des raisons de stabilité [6], on prend

$$\Delta t = \frac{\nu \Delta x^2}{\|u\|_\infty \Delta x + 2\mu}, \quad (19)$$

avec  $\nu = 1$  pour que le schéma soit TVD. Le temps de calcul total de la simulation est alors estimé par

$$CPU \simeq K(T, L) \frac{\|u\|_\infty \Delta x + 2\mu}{\nu \Delta x^3}, \quad (20)$$

où la constante  $K(T, L)$  ne dépend que de  $T$  et  $L$ , et bien sûr des schémas en temps et en espace choisis. Pour chaque simulation, on peut donc ajuster le pas d’espace  $\Delta x$  pour obtenir le temps de calcul désiré. L’estimation précédente fait apparaître une très nette différence quand  $\Delta x \rightarrow 0$  entre des calculs non-visqueux (coût en  $\Delta x^{-2}$ ) et des calculs avec viscosité (coût en  $\Delta x^{-3}$ ).

## 2 Description de la méthode particulière probabiliste

### 2.1 Introduction

En toute généralité, les algorithmes particuliers probabilistes pour les E.D.P. paraboliques sont fondés sur la simulation de trajectoires de particules animées d’un mouvement

aléatoire. La solution de l'équation est approchée par un lissage de la mesure empirique des particules qui se présente sous la forme d'une combinaison linéaire de masses de Dirac centrées sur les positions des particules.

Notons que l'aléa introduit dans la dynamique des particules vient de l'interprétation probabiliste du terme diffusif de l'E.D.P.. Notons enfin que dans le cas d'E.D.P. paraboliques non-linéaires, les algorithmes probabilistes peuvent être fondamentalement différents suivant la nature de la non-linéarité de l'équation. Ainsi la non-linéarité de l'équation de Burgers en dimension 1 incite à utiliser l'algorithme particulière pour une classe d'équations que nous appelons *équation de McKean–Vlasov* :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial t} = \mu \Delta V_t - \operatorname{div} \left( V_t \int_{\mathbb{R}^d} b(x, y) V_t(dy) \right), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ V_{t=0} = V_0. \end{cases} \quad (21)$$

La fonction  $b$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  qui intervient dans la partie non-linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*.

Nous relierons l'équation de Burgers à une équation de McKean–Vlasov de la manière suivante : considérons l'équation de Burgers dans  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (22)$$

Supposons pour le moment que la condition initiale  $u_0$  est telle que (22) ait une unique solution classique  $u$  et posons  $V_t(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$ . Alors,  $V_t$  vérifie au sens des distributions l'équation de McKean–Vlasov

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( V_t \int_{\mathbb{R}} H(x - y) V_t(y) dy \right), \\ V_{t=0} = V_0 \end{cases} \quad (23)$$

de noyau d'interaction discontinu,  $b(x, y) = H(x - y)$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ 1 & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

En introduction, nous présentons brièvement l'algorithme particulière dans le cadre général d'une équation de McKean–Vlasov, puis nous détaillerons le cas de l'équation de Burgers.

La condition initiale  $V_0$  de l'équation de McKean–Vlasov (21) est supposée être une fonction (plus généralement une mesure) de masse totale finie. Lorsque  $V_0$  est une densité de probabilité, la théorie probabiliste de la *propagation du chaos*, permet de relier l'équation de McKean–Vlasov (21) à un système de particules interagissant entre elles. La dynamique

de ces particules est décrite par le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} X_t^i = \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b(X_s^i, X_s^j) ds + \sqrt{2\mu} w_t^i, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } V_0, \text{ pour } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (24)$$

Les  $(w_t^i, i = 1, \dots, N)$  sont une famille de mouvements browniens  $d$ -dimensionnels indépendants entre eux. Cependant, en raison du noyau d'interaction  $b$ , les trajectoires des particules sont a priori dépendantes entre elles. Quand le nombre  $N$  de particules présentes dans le système augmente, on remarque que le poids  $1/N$  de l'interaction entre deux particules diminue. Étudier la propagation du chaos du système de particules (24) consiste à étudier le passage à la limite  $N \rightarrow \infty$ . Ainsi, quand  $N$  tend vers l'infini, on peut se représenter le système comme un "océan" de particules dont les trajectoires ont la même loi de probabilité mais sont maintenant indépendantes entre elles (voir par exemple [17], pour un exposé détaillé de la propagation du chaos). Le corollaire intéressant de ce phénomène est que la combinaison linéaire de masses de Dirac  $1/N \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^i}$  appelée mesure empirique des particules converge au sens des mesures vers la solution  $V_t$  de (23). En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction  $V_t$ .

Cette interprétation probabiliste fournit un algorithme simple de résolution de (23) qui consiste à simuler le système de particules (24); la condition initiale  $V_0$  est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui détermine les positions initiales des particules. On déplace ensuite les particules en simulant une réalisation du système (24), (voir [2], pour un exposé détaillé de l'algorithme et sa vitesse de convergence dans le cas de noyaux d'interaction réguliers).

Un exemple bien connu d'application est l'algorithme de *vortex aléatoire* pour la résolution de l'équation de Navier–Stokes incompressible en dimension 2 développé par Chorin [4]. Nous en exposons brièvement le principe ici; le système d'équations de Navier–Stokes pour les variables vitesse et pression  $(\vec{V}, P)$  se transforme en un système d'équations pour le tourbillon et la vitesse  $(W = \text{rot}(\vec{V}), \vec{V})$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + (K * W) \cdot \nabla W = \nu \Delta W, & (*) \\ V = (K * W), \text{ div}(K * W) = 0, \\ W(0, \cdot) = \text{rot}(V_0)(\cdot). \end{cases}$$

où  $K$  est le noyau de *Biot-Savart*, défini par  $K(x) = \frac{1}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}(-x_2, x_1)$ .

L'E.D.P. (\*) est une équation de McKean–Vlasov de noyau d'interaction  $K$ . Le traitement numérique impose une étape préliminaire de régularisation du noyau singulier  $K$ . Puis, on simule les trajectoires des particules ou *gouttes de vortex* auxquelles on associe des masses suivant la condition initiale. Si le domaine présente une frontière, en plus du déplacement du tourbillon, il faut prendre en compte le phénomène de création de tourbillon sur le bord du domaine et satisfaire la condition de *non-glissement*; voir par exemple Chorin & Marsden [3], Hald [8], Long [13].

## 2.2 Le cas de l'équation de Burgers

Considérons à nouveau l'équation de Burgers dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}, & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (25)$$

Supposons pour le moment que la condition initiale  $u_0$  est telle que (25) ait une unique solution classique  $u$ . En posant  $V_t(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$  nous relierons l'équation de Burgers à l'équation de McKean–Vlasov

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( V_t \int_{\mathbb{R}} H(x-y) V_t(dy) \right), \\ V_{t=0} = V_0 \end{cases} \quad (26)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. On peut alors montrer que la solution classique de l'équation de Burgers de condition initiale  $u_0(x) = \int_{-\infty}^x V_0(y) dy$  est donnée par

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^x V_t(y) dy.$$

De plus, si  $V_0$  est une mesure de probabilité, le système de particules

$$\begin{cases} X_t^{i,N} = \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) ds + \sqrt{2\mu} w_t^i \\ X_{t=0}^{i,N} = X_0^i, \text{ variable aléatoire de loi } V_0 \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (27)$$

possède la propriété de *propagation du chaos* (cf. [1]). Ainsi, la mesure empirique  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}$  converge vers la mesure  $V_t$ , unique solution de l'équation (26) et par intégration de la mesure empirique, la fonction

$$\bar{u}^N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(x - X_t^{i,N})$$

converge vers  $u(t, x)$  quand  $N$  tend vers l'infini. Ainsi, il ne reste plus qu'à expliciter la simulation numérique du système (27) pour obtenir un algorithme de résolution de l'équation (25).

Auparavant, remarquons que la propagation du chaos explique et justifie la convergence de l'algorithme, lorsque  $V_0$  est une loi de probabilité, donc lorsque la condition initiale de l'équation de Burgers  $u_0$  est une fonction de répartition. Il est cependant facile d'étendre

l'algorithme pour toute fonction  $u_0$  dont la dérivée est une mesure de masse finie sur  $\mathbb{R}$  : nous supposons que la condition initiale  $u_0$  est de la forme

$$u_0(x) = a + \int_{-\infty}^x V_0(dy), \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}} V_0(dx) = M, \quad (28)$$

où  $a$  et  $M$  sont des constantes quelconques. Dans ce cas, au lieu d'affecter à chaque particules le même poids de  $\frac{1}{N}$ , l'algorithme manipule des particules dont les poids peuvent être différents et dont la valeur est fixée à l'initialisation. La solution de l'équation de McKean–Vlasov garde une masse constante au cours du temps, il est donc important que l'algorithme conserve cette propriété. Pour fixer les idées, nous donnons une méthode générique pour initialiser les particules et leurs poids:  $u_0$  étant donnée, on détermine  $V_0$  de telle sorte que  $V_0$  vérifie (28). On se fixe un entier  $N$  pair et on désigne par  $y_0^i$  pour  $i = 1, \dots, N$  les positions initiales des particules.  $V_0$  se décompose (de façon non-unique) en une mesure  $V_0^+$  de masse positive  $M^+$  et une mesure  $V_0^-$  de masse négative  $-M^-$ . On détermine les  $N/2$  premières positions des particules à partir de  $V_0^+$  et les  $N/2$  particules restantes à partir de  $V_0^-$  en posant

$$y_0^i = \begin{cases} \inf\left\{y; \frac{1}{M^+} \int_{-\infty}^y V_0^+(dz) = \frac{i}{N}\right\}, & i = 1, \dots, N/2 - 1, \\ \inf\left\{y; \frac{1}{M^+} \int_{-\infty}^y V_0^+(dz) = 1 - \frac{1}{2N}\right\}, & i = N/2 \\ \\ \inf\left\{y; \frac{1}{M^-} \int_{-\infty}^y V_0^-(dz) = \frac{i}{N}\right\}, & i = N/2 + 1, \dots, -1, \\ \inf\left\{y; \frac{1}{M^-} \int_{-\infty}^y V_0^-(dz) = 1 - \frac{1}{2N}\right\}, & i = N. \end{cases}$$

On a ainsi deux paquets de particules, l'un associé à la masse positive de la mesure  $V_0$ , l'autre associé à sa masse négative. Alors, la fonction en escalier

$$\bar{u}_0^N(x) = a + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{N} H(x - y_0^i),$$

avec  $\begin{cases} M_i = 2M^+, & i = 1, \dots, N/2 \\ M_i = -2M^-, & i = N/2 + 1, \dots, N \end{cases}$

approche  $u_0$ . En pratique, si  $V_0^\pm$  admet une densité régulière, cette méthode assure une vitesse de convergence d'au moins  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\sqrt{\log(N)}\right)$  pour l'erreur d'initialisation  $\|u_0(\cdot) - \bar{u}_0^N(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$  (voir [2]).

On discrétise en temps le système d'équations (27) en tenant compte de l'introduction de la pondération supplémentaire par les  $M_i$ . La méthode la plus simple consiste à utiliser le schéma d'Euler explicite à l'ordre 1 : pour  $T$  fixé, on se donne un pas de temps  $\Delta t$  et  $K \in \mathbb{N}$

tel que  $T = K\Delta t$ . On note  $t_k = k\Delta t$  les instants de discrétisation, pour  $k = 1, \dots, K$ . Le système (27) devient le système en temps discret :

$$\begin{cases} Y_{t_{k+1}}^i &= Y_{t_k}^i + \bar{u}_{t_k}^{N, \Delta t}(Y_{t_k}^i) \Delta t + \sqrt{2\mu} (w_{t_{k+1}}^i - w_{t_k}^i), \\ Y_0^i &= y_0^i. \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad (29)$$

où, à chaque instant  $t_k$ , on approche  $u(t_k, \cdot)$  par la "primitive" de la mesure empirique des particules :

$$\bar{u}_{t_k}^{N, \Delta t}(x) = a + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i H(x - Y_{t_k}^i), \quad k = 1, \dots, K.$$

A chaque pas de temps et pour tout  $i = 1, \dots, N$ , l'accroissement du brownien  $(w_{t_{k+1}}^i - w_{t_k}^i)$  est donné par la simulation d'une réalisation de variable aléatoire gaussienne de loi  $\mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ . L'utilisation de schémas de discrétisation en temps d'ordre plus élevé est discutée dans le paragraphe suivant. Pour le schéma d'Euler, on démontre le résultat de convergence suivant, où le symbole  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique.

**Théorème 2.1** (Voir [1]) *On suppose que  $u_0$  est de la forme (28) et que  $V_0^\pm$  est soit une combinaison linéaire de masses de Dirac, soit admet une densité continue à support compact ou à décroissance exponentielle vers 0 à l'infini.*

*Soit  $u(t_k, \cdot)$  la solution au temps  $t_k = k\Delta t$  de l'équation de Burgers (25). Soit  $N$  le nombre de particules et  $\Delta t$  le pas de temps utilisés pour le calcul de la fonction  $\bar{u}_{t_k}$ . Il existe une constante positive  $C$ , dépendante de  $\mu$ ,  $u_0$  et  $T$ , telle que pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$*

$$\mathbb{E} \|u(t_k, \cdot) - \bar{u}_{t_k}^{N, \Delta t}(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \left( \|u_0 - \bar{u}_0^N\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \sqrt{\Delta t} \right). \quad (30)$$

## 2.3 Caractéristiques de la Méthode

Rappelons tout d'abord que la méthode particulière que nous proposons ici pour l'équation de Burgers se limite à des conditions initiales de la forme (28). Pour des conditions initiales de type mesures, on peut utiliser le même type d'algorithme en interprétant directement l'équation de Burgers comme une équation de McKean–Vlasov. Le noyau d'interaction devient la masse de Dirac (régularisée pour les besoins de la simulation) et la solution de l'équation est directement approchée par la mesure empirique des particules. Dans ce cas, l'analyse de la vitesse de convergence est encore en cours.

Notons en suite que l'utilisation de cette méthode suppose a priori qu'on cherche à résoudre l'équation de Burgers pour un coefficient de viscosité  $\mu > 0$ . Dans l'estimation théorique (30), la dépendance de l'erreur par rapport à  $\mu$  n'est pas explicitée. Ce paramètre joue pourtant un rôle important; d'un point de vue probabiliste,  $\mu$  amplifie la variance des variables aléatoires entrant dans la dynamique (29) des particules. Le principe de la propagation du chaos décrit en introduction agit comme une loi des grands nombres sur



le système de particules et génère le terme d'erreur statistique en  $\frac{C}{\sqrt{N}}$  dans la vitesse de convergence. Si on cherche à expliciter la constante  $C$  en fonction de  $\mu$ , il est raisonnable de supposer qu'on a en fait un terme de la forme  $\frac{C'\mu^\alpha}{\sqrt{N}}$ , où  $\alpha$  est proche de  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, il est plus naturel d'utiliser cet algorithme dans des cas de petites viscosités; en particulier, la diminution de la valeur de la viscosité ne nuit pas à la précision de la méthode. Par construction, la mesure empirique des particules approche le gradient de la solution de l'équation de Burgers; les particules sont donc naturellement massées dans les zones de fort gradient de la solution. Le bon comportement de la convergence en fonction de la diminution de la viscosité et le caractère adaptatif du maillage engendré par les particules sont deux des principales caractéristiques des méthodes de vortex aléatoires.

Pour la résolution de l'équation de Burgers sans terme de diffusion, on utilise le fait que la solution visqueuse tend vers la solution entropique du problème non-visqueux quand  $\mu$  tend vers zéro. Ainsi, on utilise la méthode avec un très petit coefficient de viscosité  $\mu$  jouant le rôle d'une viscosité numérique. L'erreur en  $\Delta t$  sur la discrétisation en temps a alors tendance à dominer l'erreur statistique.

Dans l'estimation (30), la convergence de la méthode par rapport au pas de discrétisation en temps est d'ordre  $\sqrt{\Delta t}$ . Or numériquement, on peut observer que l'algorithme converge en  $\Delta t$ . Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où  $\Delta t$  est la vitesse de convergence du schéma d'Euler en norme  $L^2$  (sur l'espace des événements  $\Omega$ ), lorsque la dérive du processus à discrétiser est une fonction lipschitzienne en  $t$  et  $x$  et lorsque le coefficient de diffusion est constant. Or, l'équation (27) vérifie "presque" ces hypothèses si on considère que la dérive  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x - X_t^{j,N})$  approche la solution  $u(t, x)$  de l'équation de Burgers. La démonstration actuelle du théorème 2.1 ne prend pas suffisamment en compte cette double convergence.

Notons enfin que l'utilisation de schémas de discrétisation en temps plus complexes que le schéma d'Euler semble ici raisonnable, au sens où ils sont effectivement simulables (les variables aléatoires qu'ils mettent en jeu sont encore de loi simple, généralement des gaussiennes). On a ainsi pu vérifier que le schéma de Runge-Kutta dit de "Euler modifié", pour les équations différentielles stochastiques (E.D.S.) fournit effectivement des résultats plus précis que le schéma d'Euler simple. Ce schéma est d'ordre 2 pour les E.D.O., mais seulement d'ordre 1 pour les E.D.S. (pour la norme  $L^2(\Omega)$ ); cependant, la vitesse de convergence s'écrit  $C\mu^\beta \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ , où  $0 < \beta < 1$ . Ainsi, plus la viscosité  $\mu$  est faible, *plus le schéma est d'ordre 2*. Les résultats présentés dans la suite ont été obtenus à partir de ce schéma lorsque la viscosité  $\mu$  est inférieure à 1 et avec le schéma d'Euler simple quand  $\mu$  est de l'ordre de 1 et plus.

### 3 Critères de comparaison des résultats numériques

Au cours de cette étude, nous avons choisi de comparer les performances de méthodes numériques très différentes. Pour chaque méthode, trois quantités jouent un rôle déterminant : la précision de la méthode (mesurée par une erreur entre la solution approchée et la solution

exacte), le temps de calcul nécessaire et la place mémoire utilisée. Nous avons privilégié les deux premières quantités. Plus précisément, nous avons cherché à comparer les erreurs obtenues par chaque méthode pour un temps de calcul donné. Bien entendu, ceci suppose que les programmes pour chaque méthode présentent des degrés similaires d'optimisation et ont été compilés (et exécutés) sur la même machine avec les mêmes options de compilation. Pour ce travail, nous avons utilisé une station de travail SPARC SUNW ULTRA-1 et les options de compilation `-O4 -XTARGET=NATIVE -XCHIP=ULTRA`.

Afin de mieux comparer les méthodes, les diverses simulations numériques ont été calibrées pour demander un temps de calcul  $T_{\frac{\epsilon}{2}}$  de une, cinq ou dix minutes. Il ne reste plus qu'à définir maintenant comment mesurer la précision de chaque méthode.

### 3.1 Choix et mesure de l'erreur

Pour la méthode probabiliste, le critère naturel pour mesurer une erreur entre la solution exacte et la solution approchée est l'erreur  $L^1$  au sens large, puisque les théorèmes de convergence sont formulés pour une erreur  $L^1$ . Pour la méthode déterministe, toute erreur  $L^p$  convient lorsque  $p < \infty$ . L'erreur  $L^\infty$  ne peut pas convenir pour des solutions non-régulières.

Il reste cependant à préciser comment la discrétisation spatiale est prise en compte. Naturellement, on envisage seulement de calculer une erreur  $L^1$  discrète. Pour la méthode probabiliste, on peut raisonnablement choisir d'utiliser l'erreur

$$E_{L^1}^{prob.} = \sum_i \Delta x_i |u_i - u(x_i)|, \quad (31)$$

où les  $u_i$  sont des approximations de  $u$  aux points  $x_i$  et  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ .

Deux problèmes se posent pour évaluer ce type d'erreur pour les solutions approchées fournies par chacune des méthodes probabiliste et déterministe. D'une part, la méthode probabiliste fournit des approximations ponctuelles de la solution exacte en des points répartis irrégulièrement. D'autre part, la méthode déterministe en volumes finis produit des approximations de la valeur moyenne de la solution exacte par cellule. Ces cellules sont de plus de taille constante.

On adopte donc la stratégie suivante. On garde l'erreur  $L^1$  discrète produite par la méthode probabiliste. Pour la méthode déterministe, on utilise un schéma aux différences finies pour transformer les approximations des valeurs moyennes par cellule en valeurs approchées aux centres des cellules. On comparera ainsi des erreurs  $L^1$  sur des approximations de valeurs ponctuelles. Les nuages de points  $x_i$  auraient pu coïncider pour les deux méthodes, si l'on avait considéré des méthodes en volumes finis avec adaptation de maillage.

Nous décrivons maintenant le schéma aux différences finies cité plus haut. Soit  $u$  la solution exacte (supposée localement intégrable) que l'on cherche à approcher et soit  $U$  une primitive de  $u$ . Pour la méthode en volumes finis, les valeurs  $u_i$  obtenues sont des approximations des  $v_i$ , valeurs moyennes de  $u$  sur les intervalles  $C_i$  donnés en (3), de longueur

constante  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ , définies par

$$v_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx = \frac{U(x_{i+\frac{1}{2}}) - U(x_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x}. \quad (32)$$

Dans la mesure où  $u$  est assez régulière, un développement limité donne

$$v_i = u(x_i) + \frac{\Delta x^2}{24} u''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{1920} u^{(4)}(x_i) + O(\Delta x^6). \quad (33)$$

On en déduit donc que

$$v_i - \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{24} = u(x_i) - \frac{3\Delta x^4}{640} u^{(4)}(x_i) + O(\Delta x^6). \quad (34)$$

L'interprétation du résultat précédent est aisée. Il suffit d'ajouter un terme d'antidiffusion exactement opposé au terme de diffusion produit par l'opérateur de moyenne par cellule pour récupérer une approximation très précise des valeurs ponctuelles  $u(x_i)$ . On propose donc de considérer pour la méthode déterministe l'erreur  $L^1$  discrète suivante:

$$E_{L^1}^{det.} = \Delta x \sum_i \left| \frac{26u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{24} - u(x_i) \right|. \quad (35)$$

### 3.2 Calcul des valeurs ponctuelles de la solution exacte

Un dernier obstacle peut nous empêcher d'évaluer les erreurs  $E_{L^1}^{prob.}$  et  $E_{L^1}^{det.}$ . Il n'est pas toujours évident de calculer une valeur ponctuelle de la solution exacte  $u(x_i)$ . D'une part, il faut connaître analytiquement l'unique solution (entropique bornée quand  $\mu \neq 0$ ).

Lorsque la viscosité  $\mu$  est nulle, l'obtention de l'expression analytique de l'unique solution entropique bornée est relativement facile à obtenir quand la solution initiale est simple. Par exemple, nous avons considéré une détente simple, de donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (36)$$

et dont l'unique solution entropique bornée est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ x/t & \text{si } -t < x < t \\ 1 & \text{si } t < x \end{cases}. \quad (37)$$

Nous avons aussi considéré une combinaison de chocs et de détentes, dont la donnée initiale est

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (38)$$