

***Une Méthode Optimale d'Eléments Finis de Classe  $C^0$   
d'Approximation du Bilaplacien 2D:  
Analyse Théorique et Résultats Numériques***

Mohamed AMARA , Fadi EL DABAGHI

**N° 3068**

Décembre 1996

————— THÈME 4 —————



***rapport  
de recherche***



# Une Méthode Optimale d'Eléments Finis de Classe $C^0$ d'Approximation du Bilaplacien 2D: Analyse Théorique et Résultats Numériques

Mohamed AMARA<sup>\*</sup>, Fadi EL DABAGHI<sup>†</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet M3N

Rapport de recherche n° 3068 — Décembre 1996 — 26 pages

**Résumé :** La décomposition  $\psi - \omega$  du problème du bilaplacien et particulièrement la méthode d'éléments finis mixte proposée par Ciarlet-Raviart induisent des estimations d'erreur a priori d'ordre  $O(h^{k-1})$ ,  $k \geq 2$ . La méthode décrite dans cet article converge pour  $k \geq 1$  sans aucune condition de régularité sur  $\omega$  ou  $\psi$  et donne une estimation en  $O(h^k)$  en cas de régularité.

**Mots-clé :** vecteur de courant, vorticité, bilaplacien,  $\psi - \omega$ , éléments finis mixtes, estimations d'erreur, Navier-Stokes.

(Abstract: pto)

E-mail : mohamed.amara@univ-pau.fr , dabaghi@squatina.inria.fr

Travail supporté en partie par l'accord CMCU 496B366 intitulé *Méthodes de simulation numérique* entre l'INRIA et l'École Polytechnique de Tunisie.

<sup>\*</sup> Labo de Maths Appliquées, Univ. de Pau et des Pays de l'Adour, Av. de l'Université, 64000 Pau, France

<sup>†</sup> INRIA - Projet M3N, B.P. 105 Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

# An Optimal $C^0$ Finite Element Algorithm for the 2D Biharmonic Problem: Theoretical Analysis and Numerical Results

**Abstract:** The aim of this paper is to give a new method for the numerical approximation of the biharmonic problem. This method is based on the mixed method given by Ciarlet-Raviart and have the same numerical properties of the Glowinski-Pironneau method. The error estimate associated to these methods are of order  $O(h^{k-1})$  for  $k \geq 2$ . The algorithm proposed in this paper converges even for  $k \geq 1$ , without any regularity condition on  $\omega$  or  $\psi$ . We have an error estimate of order  $O(h^k)$  in case of regularity.

**Key-words:** stream vector, vorticity, biharmonic,  $\psi - \omega$ , mixed finite element, error estimates, Navier-Stokes.

## 0 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné, plan, de frontière  $\Gamma$  continuellement lipschitzienne. Pour tout  $f$ , le problème  $\Delta^2\psi = f$  dans  $H^{-2}(\Omega)$  avec  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  admet une unique solution. Les techniques de résolution conforme de ce problème nécessitent l'utilisation d'éléments finis de classe  $C^1$ ; l'approche par les méthodes mixtes a donné, dans le cas d'une régularité minimale sur  $f$ , un certain nombre de méthodes; on peut se référer à Bernardi- Girault- Maday [3], Girault- Giroire- Sequeira [8], Girault- Raviart [9], Brezzi- Fortin [4], Ruas [12]. On suppose dans la suite que  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . On s'intéresse particulièrement à la méthode proposée par Ciarlet- Raviart [7], qui permet d'utiliser des éléments finis de classe  $C^0$  se basant sur la décomposition en  $(\psi - \omega)$  avec  $\omega = -\Delta\psi$ .

La discrétisation induite utilise des espaces d'éléments finis de degré  $k$  avec  $k \geq 1$ . Si  $k \geq 2$ ,  $\psi \in H^{k+1}(\Omega)$  et  $\omega \in H^k(\Omega)$ , on a l'estimation d'erreurs

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \tilde{C}h^{k-1} \left( |\omega|_{k,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right)$$

où  $\omega_h$  et  $\psi_h$  sont les approximations de  $\omega$  et  $\psi$ . Le cas  $k=1$  nécessite une analyse plus fine et Scholz [13] montre que si  $\psi \in H^3(\Omega)$ , on a convergence de la méthode.

Cette méthode possède un autre avantage décrit par Ciarlet- Glowinski [6] et mis en valeur par Glowinski- Pironneau [10]. Le problème approché est ramené en un problème d'opérateur frontière qui permet d'utiliser des techniques numériques adéquates (de type gradient conjugué) pour sa résolution.

Le but de cet article est d'écrire la décomposition  $\psi - \omega$  dans un cadre variationnel naturel à savoir  $\omega$  dans  $L^2(\Omega)$  avec  $\Delta\omega$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  et  $\psi$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Cette décomposition et les propriétés des espaces fonctionnels induits sont décrits dans Bernardi- Girault- Maday [3], Girault- Giroire- Sequeira [8], Ruas [12]. Ce cadre va nous permettre de définir une méthode approchée de classe  $C^0$  ayant un bon comportement. On cherche  $\omega_h$  et  $\psi_h$  dans respectivement  $X_h$ , espace d'éléments finis de degré  $k \geq 1$ , et  $M_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$ . La constante de compatibilité entre les espaces  $X_h$  et  $M_h$  est indépendante de  $h$  mais la forme bilinéaire  $\mathbf{a}$  associée à  $X_h$  est elliptique pour la norme de  $L^2(\Omega)$  et de ce fait, la constante d'ellipticité dépend de  $h$ . Pour pallier à cet inconvénient, on utilise dans un cadre approché, une technique proposée sur un autre problème dans un cadre continu par Brezzi- Fortin- Marini [5]. Le principe général avait été décrit par Nitsche [11]. Cette technique, décrite dans Amara [1], consiste à changer la forme  $\mathbf{a}$  en une autre forme  $\mathbf{a}_h$  dont la constante d'ellipticité est indépendante de  $h$ . Cette nouvelle formulation reste consistante. On obtient ainsi une méthode inconditionnellement convergente pour  $k \geq 1$ , i.e. sans aucune condition de régularité sur  $\omega$  ou  $\psi$ . Dans le cas où  $\omega \in H^{k+1}(\Omega)$  et  $\psi \in H^{k+1}(\Omega)$ , on obtient

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \|\Delta\omega - \Delta\omega_h\|_{-1,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \tilde{C}h^k \left( |\omega|_{k+1,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right).$$

La méthode proposée conserve la propriété de la méthode originelle; on peut réécrire ce problème en se basant sur un opérateur frontière approché. Ceci permet, pour la résolution numérique, d'utiliser une technique de gradient conjugué nécessitant la résolution de deux problèmes de Laplace-Dirichlet par itération.

Avec l'élément fini  $P^1$ , les premiers résultats numériques confirment l'efficacité de la méthode proposée, notamment en ce qui concerne le calcul de  $\omega$  au voisinage de la frontière de  $\Omega$ ; ceci corrobore d'une part les résultats obtenus dans le calcul des propagations de fissure dans Amara -Chatti -El Dabaghi [12] et d'autre part laisse présager de l'apport qualitatif important dans la résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

## 1 Méthode mixte en $\psi - \omega$

On considère  $H^{-1}(\Omega)$  l'espace dual de  $H_0^1(\Omega)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1,\Omega}$  le produit de dualité entre  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ . On définit

$$\begin{aligned} \forall v \in L^2(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{0,\Omega} &= \left( \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad , \\ \forall v \in H^1(\Omega) \quad , \quad |v|_{1,\Omega} &= \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad , \\ \forall v \in H^1(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{1,\Omega} &= \left( \|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad , \\ \forall v \in H^{-1}(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{-1,\Omega} &= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega}}{| \varphi |_{1,\Omega}} \quad . \end{aligned}$$

Les applications traces usuelles sont notées:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &: H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad , \\ \gamma_0 &: H^2(\Omega) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \quad , \\ \gamma_1 &: H^2(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad (\text{trace dérivée normale}), \end{aligned}$$

ces applications sont linéaires, continues et surjectives. On introduit aussi les espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned} H^0(\Delta; \Omega) &= \left\{ \theta \in L^2(\Omega) ; \Delta\theta \in L^2(\Omega) \right\} \quad , \\ H^1(\Delta; \Omega) &= \left\{ \theta \in H^1(\Omega) ; \Delta\theta \in L^2(\Omega) \right\} \quad , \\ H^{-1}(\Delta; \Omega) &= \left\{ \theta \in L^2(\Omega) ; \Delta\theta \in H^{-1}(\Omega) \right\} \quad . \end{aligned}$$

où on peut définir les applications traces suivantes:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &: H^1(\Delta; \Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad , \\ \gamma_1 &: H^0(\Delta; \Omega) \longrightarrow H^{-3/2}(\Gamma) \quad (\text{trace dérivée normale}), \\ \gamma_1 &: H^1(\Delta; \Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad (\text{trace dérivée normale}), \end{aligned}$$

Ces applications sont linéaires, continues et surjectives avec  $H^{-s}(\Gamma)$  l'espace dual de  $H^s(\Gamma)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s,s,\Gamma}$  le produit de dualité entre  $H^{-s}(\Gamma)$  et  $H^s(\Gamma)$ . On a les formules de Green suivantes:

$$\forall \theta \in H^0(\Delta; \Omega), \forall \varphi \in H^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta \, d\Omega - \int_{\Omega} \theta \Delta \varphi \, d\Omega = \langle \gamma_1 \theta, \gamma_0 \varphi \rangle_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \Gamma} - \langle \gamma_0 \theta, \gamma_1 \varphi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$$

$$\forall \theta \in H^1(\Delta; \Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \varphi \, d\Omega = \langle \gamma_1 \theta, \gamma_0 \varphi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$$

$$\forall \theta, \delta \in H^1(\Delta; \Omega) \\ \int_{\Omega} \delta \Delta \theta \, d\Omega - \int_{\Omega} \theta \Delta \delta \, d\Omega = \langle \gamma_1 \theta, \gamma_0 \delta \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} - \langle \gamma_1 \delta, \gamma_0 \theta \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$$

On peut se référer pour ces résultats à Girault-Raviart [9] et Brezzi-Fortin [4].

On a aussi  $H^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Delta; \Omega)$ . On définit l'application suivante  $\rho$  de  $H^{-1}(\Delta; \Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  par:

$$\Delta \rho(v) = \Delta v \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \forall v \in H^{-1}(\Delta; \Omega) . \quad (1)$$

On remarque que l'application  $\rho$  est linéaire, continue et elle vérifie

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \rho(v) &= v, \\ \forall \theta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad |\rho(\theta)|_{1,\Omega} &= \|\Delta \theta\|_{-1,\Omega}, \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad |\rho(v)|_{1,\Omega} &\leq |v|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (2)$$

On remarque que

$$\forall v \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad v - \rho(v) \in H^0(\Delta; \Omega) . \quad (3)$$

On associe à l'espace  $H^{-1}(\Delta; \Omega)$  le produit scalaire et la norme

$$\begin{aligned} \forall \theta, \delta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad \langle \theta, \delta \rangle_{-1,\Delta,\Omega} &= \int_{\Omega} \theta \delta \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \rho(\theta) \nabla \rho(\delta) \, d\Omega, \\ \forall \theta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad \|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega} &= \left( \|\theta\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta \theta\|_{-1,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

PROPOSITION 1 :  $\mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega)$  est un espace de Hilbert et  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega)$ .

PROPOSITION 2 : On a les injections continues suivantes

$$\mathbf{H}^1(\Delta; \Omega) \subset \mathbf{H}^0(\Delta; \Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega) \quad (5)$$

En notant  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$  avec  $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$  les côtés frontaliers de  $\Omega$ , on a

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \gamma_1(v)|_{\Gamma_i} \in \mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$$

PROPOSITION 3 : L'application trace  $\gamma_0$  est définie de  $\mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega)$  dans  $\prod_{i=1}^N (\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i))$ , elle est linéaire, continue et surjective; de plus on a la formule de Green suivante:

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \forall \theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega) \\ \int_{\Omega} \theta \Delta v \, d\Omega - \langle \Delta \theta, v \rangle_{-1,1,\Omega} = \sum_{i=1}^N \langle \gamma_0 \theta, \gamma_1 v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_i} \end{aligned} \quad (6)$$

Pour ces résultats énoncés, on peut se référer à Bernardi-Girault-Maday [3] et à Girault-Giroire-Sequeira [8].

Enfin on considère les formes bilinéaires suivantes:

$$\forall \theta, \delta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega), \quad a(\theta, \delta) = \int_{\Omega} \theta \delta \, d\Omega,$$

$$\forall \theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega), \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad b(\theta, v) = \langle \Delta \theta, v \rangle_{-1,1,\Omega}.$$

On remarque que  $\forall \theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , on a  $b(\theta, v) = - \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla v \, d\Omega$ . Ces formes sont continues et il existe une constante  $\beta \geq 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \beta |v|_{1,\Omega} \leq \sup_{\theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega)} \frac{b(v, \theta)}{\|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega}},$$

$$\forall \theta \in V^0, \quad a(\theta, \theta) = \|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega}^2,$$

où

$$\begin{aligned} V^0 &= \left\{ \theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega); \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), b(\theta, v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \theta \in L^2(\Omega); \Delta \theta = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \right\} \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 : Soit  $f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\omega, \theta) + b(\theta, \psi) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega) \\ b(\omega, \eta) = \langle f, \eta \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \omega \in \mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega), \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$



admet une unique solution qui vérifie

$$\begin{cases} \psi \in H_0^2(\Omega), & \omega \in H^{-1}(\Delta; \Omega) \\ -\Delta\psi = \omega & \text{p.p. dans } \Omega \\ -\Delta\omega = f & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

## 2 Méthode d'éléments finis mixte

Soit  $\mathcal{T}_h$  une décomposition régulière de  $\bar{\Omega}$  en triangles  $K$ . On note, pour chaque triangle  $K$ ,  $h_K$  son diamètre et  $mesK$  son aire. A la décomposition  $\mathcal{T}_h$ , on associe l'ensemble  $C_h$  des cotés internes de  $\mathcal{T}_h$ . Pour chaque coté  $T$  de  $C_h$ , il existe 2 triangles  $K$  et  $K'$  de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $T = \partial K \cap \partial K'$ ; on note  $mesT$  la longueur du coté  $T$ . On pose  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$  et on suppose qu'il existe une constante  $C' > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que  $C'h_K^2 \leq mesK$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ .

On se donne  $k$  un entier tel que  $k \geq 1$ , et on considère les espaces

$$\begin{aligned} X_h &= \{\theta \in C^0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, \theta|_K \in \mathbb{P}_k(K)\} \\ X_h^0 &= X_h \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_k(K)$  est l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à  $k$ , définies dans  $\bar{K}$ . On a  $X_h \subset H^{-1}(\Delta; \Omega)$  et il existe une constante  $\beta > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que

$$\forall \eta_h \in X_h^0, \beta |\eta_h|_{1,\Omega} \leq \sup_{\theta_h \in X_h} \frac{b(\theta_h, \eta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}}$$

On définit les ensembles suivants de fonctions "harmoniques" discrètes:

$$\begin{aligned} V_h^0 &= \{\theta_h \in X_h; \forall \eta_h \in X_h^0, b(\theta_h, \eta_h) = 0\} \\ V_h^f &= \{\theta_h \in X_h; \forall \eta_h \in X_h^0, b(\theta_h, \eta_h) = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega}\} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \forall \theta_h \in V_h^0, \mathbf{a}(\theta_h, \theta_h) &= \|\theta_h\|_{0,\Omega}^2 \\ \forall \theta_h \in X_h, \|\Delta\theta_h\|_{-1,\Omega} &\leq |\theta_h|_{1,\Omega} \end{aligned} \tag{7}$$

Par ailleurs, on remarque que la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire  $\mathbf{a}$  dans  $V_h^0$  dépend de  $h$  pour la norme de  $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ . Enfin on considère l'espace

$$X = \left\{ \theta \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; \forall K \in \mathcal{T}_h, \theta|_K \in \mathbf{H}^2(K) \right\}$$

et on a les inclusions suivantes:

$$X_h \subset X \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ et } \mathbf{H}^2(\Omega) \subset X$$

Soit  $A_h$  une forme bilinéaire, symétrique définie dans  $X \times X$  telle que

$$A_h(\theta, \theta) \geq 0, \forall \theta \in X$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\theta, \delta) &= \mathbf{a}(\theta, \delta) + A_h(\theta, \delta), \quad \forall \theta, \delta \in X \\ |\theta|_h &= \sqrt{A_h(\theta, \theta)}, \quad \forall \theta \in X \\ \|\theta\|_h &= \sqrt{\mathbf{a}_h(\theta, \theta)}, \quad \forall \theta \in X \end{aligned}$$

et on suppose que

$$|\theta_h|_h \leq \|\Delta\theta_h\|_{-1,\Omega}, \quad \forall \theta_h \in X_h$$

On a alors les relations suivantes par Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\theta_h, \delta_h) &\leq \|\theta_h\|_h \|\delta_h\|_h, \quad \forall \theta_h, \delta_h \in X_h \\ A_h(\theta_h, \delta_h) &\leq |\theta_h|_h |\delta_h|_h, \quad \forall \theta_h, \delta_h \in X_h \\ \|\theta_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\theta_h\|_h \leq \|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}, \quad \forall \theta_h \in X_h \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{G}$  une forme bilinéaire définie sur  $X$ , alors

THÉORÈME 2 : *Le problème approché*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_h(\omega_h, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \psi_h) = \mathcal{G}(\theta_h), \quad \forall \theta_h \in X_h \\ \mathbf{b}(\omega_h, \eta_h) = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta_h \in X_h^0 \\ \omega_h \in X_h, \psi_h \in X_h^0 \end{array} \right.$$

*admet une unique solution.*

*Démonstration :* Ce problème discret est équivalent à un système linéaire d'ordre  $\dim X_h + \dim X_h^0$ , l'unicité de la solution étant évidente, on en conclut son existence.

On déduit de ce théorème que la variété  $V_h^f$  est non vide.

LEMME 1 : *Soit  $\delta_h \in X_h$  alors il existe  $\rho_h \in V_h^f$  telle que*

$$\beta \|\delta_h - \rho_h\|_h \leq \|f + \Delta\delta_h\|_{-1,\Omega}$$

*Démonstration :* Soit  $\delta_h \in X_h$  alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_h(\rho_h, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \Lambda_h) = \mathbf{a}_h(\delta_h, \theta_h) \quad , \forall \theta_h \in X_h \\ \mathbf{b}(\rho_h, \eta_h) = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega} \quad , \forall \eta_h \in X_h^0 \\ \rho_h \in X_h, \Lambda_h \in X_h^0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution d'après le théorème 2. On a  $\rho_h \in V_h^f$  et

$$\mathbf{a}_h(\delta_h - \rho_h, \theta_h) = \mathbf{b}(\theta_h, \Lambda_h) \quad , \forall \theta_h \in X_h$$

D'où

$$\begin{aligned} \beta |\Lambda_h|_{1,\Omega} &\leq \sup_{\theta_h \in X_h} \frac{\mathbf{b}(\Lambda_h, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} \leq \sup_{\theta_h \in X_h} \frac{\mathbf{a}_h(\delta_h - \rho_h, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} \\ &\leq \sup_{\theta_h \in X_h} \frac{\|\delta_h - \rho_h\|_h \|\theta_h\|_h}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} \leq \|\delta_h - \rho_h\|_h \quad . \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \|\delta_h - \rho_h\|_h^2 &= \mathbf{a}_h(\delta_h - \rho_h, \delta_h - \rho_h) \\ &= \mathbf{b}(\delta_h - \rho_h, \Lambda_h) \\ &= -\langle f + \Delta\delta_h, \Lambda_h \rangle_{-1,1,\Omega} \\ &\leq \|f + \Delta\delta_h\|_{-1,\Omega} |\Lambda_h|_{1,\Omega} \quad . \end{aligned}$$

d'où on déduit le résultat souhaité.

LEMME 2 : Pour tout  $\rho_h \in V_h^f$  et  $\delta \in H^2(\Omega)$ , on a

$$\|\delta - \omega_h\|_h \leq \left\{ \|\omega - \delta\|_{0,\Omega} + |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} + \sup_{\theta_h \in V_h^0} \frac{|\mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h)|}{\|\theta_h\|_h} + 2\|\delta - \rho_h\|_h + \sup_{\theta_h \in V_h^0} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h} \right\}$$

*Démonstration :* Soit  $\rho_h \in V_h^f$  et  $\delta \in H^2(\Omega)$ , on pose  $\theta_h = \omega_h - \rho_h$ , alors  $\theta_h \in V_h^0$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_h(\delta, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \psi) = \mathbf{a}(\delta - \omega, \theta_h) + \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h) \\ \mathbf{a}_h(\omega_h, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \eta_h) = \mathcal{G}(\theta_h) \end{array} \right. \quad , \forall \eta_h \in X_h^0$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 \|\theta_h\|_h^2 &= \mathbf{a}_h(\omega_h - \rho_h, \theta_h) \\
 &= \mathbf{a}_h(\omega_h - \delta, \theta_h) + \mathbf{a}_h(\delta - \rho_h, \theta_h) \\
 &= \mathbf{a}(\omega - \delta, \theta_h) + \mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h) + \mathbf{a}_h(\delta - \rho_h, \theta_h)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\|\theta_h\|_h \leq \|\omega - \delta\|_{0,\Omega} + \frac{\mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h)}{\|\theta_h\|_h} + \|\delta - \rho_h\|_h + \sup_{\theta_h \in \mathbf{V}_h^0} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h}$$

et de plus on a

$$|\mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h)| \leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_k^2 |\theta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_k^2} |\psi - \eta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

LEMME 3 : Pour tout  $\delta \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ , on a

$$\beta |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \|\delta - \omega_h\|_h + \|\omega - \delta\|_{0,\Omega} + (1 + \beta) \inf_{\eta_h \in \mathbf{X}_h^0} |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} + \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h}$$

Démonstration : Soit  $\eta_h \in \mathbf{X}_h^0$ , on a pour tout  $\delta \in \mathbf{H}^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 \beta |\psi_h - \eta_h|_{1,\Omega} &\leq \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\mathbf{b}(\psi_h - \eta_h, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} \\
 &\leq \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\mathbf{b}(\psi_h - \psi, \theta_h) + \mathbf{b}(\psi - \eta_h, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} \\
 &\leq \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\mathbf{b}(\psi_h - \psi, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} + |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} \\
 &\leq \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\mathbf{a}_h(\delta - \omega_h, \theta_h) + \mathbf{a}(\omega - \delta, \theta_h) + \mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)}{\|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}} + |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} \\
 &\leq \|\delta - \omega_h\|_h + \|\omega - \delta\|_{0,\Omega} + \sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h} + |\psi - \eta_h|_{1,\Omega}
 \end{aligned}$$

**THÉORÈME 3 :** *Il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , ne dépendant que de  $\beta$ , telle que pour tout  $\delta \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , on a  $\forall \delta_h \in X_h, \forall \eta_h \in X_h^0$*

$$\|\delta - \omega_h\|_h + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \widehat{C} \left\{ \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} + |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} + \sup_{\theta_h \in V_h^0} \frac{|\mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h)|}{\|\theta_h\|_h} \right. \\ \left. + \|\delta - \delta_h\|_h + \|\Delta\delta - \Delta\delta_h\|_{-1,\Omega} + \sup_{\theta_h \in X_h} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - A_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h} \right\}$$

*Démonstration :* Cette estimation d'erreur se déduit des lemmes précédents.

## 2.1 Le cas classique

On définit

$$\begin{aligned} A_h(\theta, \delta) &= 0, \quad \forall \theta, \delta \in X \\ \mathcal{G}(\theta) &= 0, \quad \forall \theta \in X \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(\theta, \delta) &= \mathbf{a}(\theta, \delta), \quad \forall \theta, \delta \in X \\ |\theta|_h &= 0, \quad \forall \theta \in X \\ \|\theta\|_h &= \|\theta\|_{0,\Omega}, \quad \forall \theta \in X \end{aligned}$$

Par inégalité inverse classique, il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$|\theta_h|_{1,K} \leq \frac{\widehat{C}}{h_K} \|\theta_h\|_{0,K}, \quad \forall \theta_h \in V_h^0, \forall K \in \mathcal{T}_h$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall \theta_h \in V_h^0, \forall \eta_h \in M_h \\ |\mathbf{b}(\theta_h, \psi - \eta_h)| &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |\theta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K^2} |\psi - \eta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \widehat{C} \|\theta_h\|_{0,\Omega} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K^2} |\psi - \eta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**THÉORÈME 4 :** *Le problème approché*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}(\omega_h, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \psi_h) = 0, \quad \forall \theta_h \in X_h \\ \mathbf{b}(\omega_h, \eta_h) = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \eta_h \in X_h^0 \\ \omega_h \in X_h, \psi_h \in X_h^0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution et il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que pour tout  $\delta \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ , on a  $\forall \delta_h \in X_h, \forall \eta_h \in X_h^0$

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \widehat{C} \left\{ \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_k^2} |\psi - \eta_h|_{1,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\delta - \delta_h\|_{1,\Omega} \right\}$$

COROLLAIRE 1 : Si  $\omega \in \mathbf{H}^k(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$  alors

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \widehat{C} h^{k-1} \left\{ |\omega|_{k,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right\}$$

Cette estimation n'a d'intérêt que si  $k \geq 2$ . Si  $k = 1$  et  $\psi \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ , Schloz[13] montre que la méthode reste convergente. Mais dans le cas général où  $\omega$  ou  $\psi$  n'ont pas de régularité particulière, on ne peut rien conclure sur le comportement de la méthode lorsque  $h$  tend vers 0. Numériquement, dans ces cas, on remarque un comportement correct pour  $\psi$  mais mauvais pour  $\omega$ .

## 2.2 Le cas optimal

Pour tout  $K, K' \in \mathcal{T}_h$ , si  $T = \partial K \cap \partial K'$ , on note  $[\partial_n \theta] = \partial_n^K \theta^K + \partial_n^{K'} \theta^{K'}$  sur  $T$ ,  $\partial_n^K \theta^K$  étant la dérivée normale de  $\theta^K$  sur  $\partial K$

et pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , si  $T = \partial K \cap \Gamma$ , on pose  $[\partial_n \theta] = 0$  sur  $T$ .

On considère les formes bilinéaires suivantes définies  $\forall \theta, \delta \in X$  par

$$\begin{aligned} A_h^1(\theta, \delta) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} m_e s_K \int_K \Delta \theta \Delta \delta \, dK \\ A_h^2(\theta, \delta) &= \sum_{T \in \mathcal{C}_h} m_e s_T \int_T [\partial_n \theta] [\partial_n \delta] \, dT \end{aligned}$$

et on pose

$$\begin{aligned} A_h(\theta, \delta) &= A_h^1(\theta, \delta) + A_h^2(\theta, \delta) \\ a_h(\theta, \delta) &= a(\theta, \delta) + A_h(\theta, \delta) \end{aligned}$$

Le terme  $A_h$  est un terme de régularisation. On verra plus loin (proposition 6 et 7) qu'il est uniformément équivalent à la norme naturelle du problème sur l'espace discret de travail et que son influence tend vers zéro au fur et à mesure qu'on se rapproche de la solution continue:

$$\begin{aligned} A_h(\omega_h, \psi - \psi_h) &\sim |\delta - \omega_h| + |\psi - \psi_h| \\ \delta &\longrightarrow \omega \end{aligned}$$

On remarque que  $\forall \theta \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ , on a  $[\partial_n \theta] = 0$  p.p. sur  $T$ ,  $\forall T \in C_h$  et que  $\forall \theta \in X$

$$|\theta|_h = \sqrt{A_h(\theta, \theta)} = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{mes}K \|\Delta \theta\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in C_h} \text{mes}T \|\partial_n \theta\|_{0,T}^2 \right\}^{1/2}.$$

On rappelle les inégalités inverses classiques: il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que pour tout triangle  $K$

$$\begin{aligned} \|\gamma_0^K v\|_{0,\partial K} &\leq \widehat{C} \left\{ h_K^{-1/2} \|v\|_{0,K} + h_K^{1/2} |v|_{1,K} \right\} \quad \forall v \in \mathbb{H}^1(K) \\ \|\gamma_1^K v\|_{0,\partial K} &\leq \widehat{C} \left\{ h_K^{-1/2} |v|_{1,K} + h_K^{1/2} |v|_{2,K} \right\} \quad \forall v \in \mathbb{H}^2(K) \end{aligned}$$

PROPOSITION 4 : Il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$  telle que  $\forall \theta \in X$ , on a

$$|\theta|_h \leq \widehat{C} \left\{ |\theta|_{1,\Omega}^2 + h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\theta|_{2,K}^2 \right\}^{1/2}$$

*Démonstration :* Soit  $\theta \in X$ , il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\begin{aligned} |\theta|_h^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{mes}K \|\Delta \theta\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in C_h} \text{mes}T \|\partial_n \theta\|_{0,T}^2 \\ &\leq \widehat{C} \left\{ h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\theta|_{2,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\partial_n \theta\|_{0,\partial K}^2 \right\} \\ &\leq \widehat{C} \left\{ |\theta|_{1,\Omega}^2 + h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\theta|_{2,K}^2 \right\} \end{aligned}$$

PROPOSITION 5 : Il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $h$  telle que pour tout  $\theta \in X$ ,  $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , on a

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \theta \, d\Omega \right| \leq \widehat{C} |\theta|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K^2} \|\theta\|_{0,K}^2 + |\theta|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Démonstration :* Soit  $\theta \in X$  et  $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  alors

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \theta \, d\Omega \right| &= \left| - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \Delta \theta \, dK + \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \int_T \phi [\partial_n \theta] \, dT \right| \\
 &\leq \widehat{C} |\theta|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\phi\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in \mathcal{C}_h} h_T^{-1} \|\phi\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \widehat{C} |\theta|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K^{-2} \|\phi\|_{0,K}^2 + h_K^{-1} \|\phi\|_{0,\partial K}^2 \right\} \right)^{1/2} \\
 &\leq \widehat{C} |\theta|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K^{-2} \|\phi\|_{0,K}^2 + |\phi|_{1,K}^2 \right\} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 6 : *Il existe une constante  $\widehat{C}_0 > 0$ , indépendante de  $h$  et de  $\Omega$ , telle que*

$$\forall \theta_h \in X_h, |\theta_h|_h \leq \widehat{C}_0 \|\Delta \theta_h\|_{-1,\Omega}$$

*Démonstration : Soit  $K$  un triangle, on note  $(T_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les côtés de  $K$  et  $(S_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les sommets de  $K$ . On définit les espaces*

$$\begin{aligned}
 E_K &= \mathbb{P}_{k-1}(T_1) \times \mathbb{P}_{k-1}(T_2) \times \mathbb{P}_{k-1}(T_3) && \text{si } k = 1 \\
 &= \mathbb{P}_{k-1}(T_1) \times \mathbb{P}_{k-1}(T_2) \times \mathbb{P}_{k-1}(T_3) \times \mathbb{P}_{k-2}(K) && \text{si } k \geq 2 \\
 F_K &= \{v \in \mathbb{P}_{k+1}(K); v(S_i) = 0, 1 \leq i \leq 3\}
 \end{aligned}$$

*On remarque que  $\dim F_K = \dim E_K = \frac{k(k+5)}{2}$ . On définit un opérateur  $\Pi_K$  de  $E_K$  dans  $F_K$  tel que si  $\xi \in E_K$  vérifie*

$$\begin{aligned}
 \xi &= (\mu_1, \mu_2, \mu_3) && \text{avec } \mu_i \in \mathbb{P}_{k-1}(T_i), 1 \leq i \leq 3 \quad \text{si } k = 1, \\
 \xi &= (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \zeta) && \text{avec } \mu_i \in \mathbb{P}_{k-1}(T_i), 1 \leq i \leq 3 \\
 &&& \text{et } \zeta \in \mathbb{P}_{k-2}(K) && \text{si } k \geq 2,
 \end{aligned}$$

*alors, en posant  $\phi = \Pi_K \xi$ , l'opérateur  $\Pi_K$  est caractérisé par*

$$\begin{aligned}
 \int_{T_i} \phi \bar{\mu} \, dT &= \int_{T_i} \mu_i \bar{\mu} \, dT, \quad \forall \bar{\mu} \in \mathbb{P}_{k-1}(T_i), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \text{si } k \geq 1, \\
 \int_K \phi \bar{\zeta} \, dK &= \int_K \zeta \bar{\zeta} \, dK, \quad \forall \bar{\zeta} \in \mathbb{P}_{k-2}(K), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad \text{si } k \geq 2.
 \end{aligned}$$



En utilisant les inégalités inverses classiques, on montre qu'il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , indépendante de  $K$  et de  $h$ , telle que

$$|\phi|_{1,K} \leq \widehat{C} \left( \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{h_{T_i}} \|\mu_i\|_{0,T_i}^2 + \frac{1}{h_K^2} \|\zeta\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$$

Soit  $\theta_h \in X_h$ , on définit  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\Phi_K(\theta_h)$  par

$$\begin{aligned} \phi_K(\theta_h) &= \Pi_K \left( (\text{mes} T_i [\partial_n \theta_h]_{T_i})_{i=1,3} \right) & \text{si } k = 1, \\ &= \Pi_K \left( (\text{mes} T_i [\partial_n \theta_h]_{T_i})_{i=1,3}, -\text{mes} K \Delta \theta_h|_K \right) & \text{si } k \geq 2. \end{aligned}$$

On considère enfin la fonction  $\Phi$  définie de  $X_h$  dans  $X \cap H_0^1(\Omega)$  par  $\Phi(\theta_h)|_K = \Phi_K(\theta_h)$ . On a immédiatement que

$$\begin{aligned} |\Phi(\theta_h)|_{1,\Omega} &\leq \widehat{C} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{1}{h_{T_i}} \|\text{mes} T_i [\partial_n \theta_h]\|_{0,T_i}^2 + \frac{1}{h_K^2} \|\text{mes} K \Delta \theta_h\|_{0,K}^2 \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \widehat{C}_0 |\theta_h|_h \end{aligned}$$

où  $\widehat{C}_0$  est une constante indépendante de  $h$ . On a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \Phi(\theta_h) \nabla \theta_h \, d\Omega &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Phi(\theta_h) \Delta \theta_h \, dK + \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \int_T \Phi(\theta_h) [\partial_n \theta_h] \, dT \\ &= |\theta_h|_h^2 \end{aligned}$$

d'où

$$|\theta_h|_h^2 = \int_{\Omega} \nabla \Phi(\theta_h) \nabla \theta_h \, d\Omega = - \langle \Delta \theta_h, \Phi(\theta_h) \rangle_{-1,1,\Omega} \leq \|\Delta \theta_h\|_{-1,\Omega} |\Phi(\theta_h)|_{1,\Omega}$$

On en déduit que  $|\theta_h|_h \leq \widehat{C}_0 \|\Delta \theta_h\|_{-1,\Omega}$

PROPOSITION 7 : Il existe une constante  $\widehat{C}_1 > 0$ , indépendante de  $h$  et de  $\Omega$  telle que

$$\forall \theta \in X, \text{ si } \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \eta_h \, d\Omega = 0 \, \forall \eta_h \in X_h^0, \text{ alors } \|\Delta \theta\|_{-1,\Omega} \leq \widehat{C}_1 |\theta|_h$$

Démonstration : Soit  $\theta \in X$  tel que  $\int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \eta_h \, d\Omega = 0 \, \forall \eta_h \in X_h^0$  et  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \Delta \theta, \phi \rangle_{-1,1,\Omega} &= - \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \phi \, d\Omega, & \forall \eta_h \in X_h^0 \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla (\phi - \eta_h) \, d\Omega = 0, & \forall \eta_h \in X_h^0 \\ &\leq \widehat{C} |\theta|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K^2} |\phi - \eta_h|_{0,K}^2 + |\phi - \eta_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & \forall \eta_h \in X_h^0 \\ &\leq \widehat{C} |\theta|_h |\phi|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité recherchée. La dernière inégalité s'obtient en prenant pour  $\eta_h$  une projection de type "opérateur de Clément"; en effet, en posant

$$\mathcal{I} = \inf_{\eta_h \in X_h^0} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_k^2} |\phi - \eta_h|_{0,K}^2 + |\phi - \eta_h|_{1,K}^2 \right)$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\leq \widehat{C} \inf_{\substack{\eta_h \in X_h^0 \\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{h_k^2} |\phi - \varphi|_{0,K}^2 + |\phi - \varphi|_{1,K}^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{h_k^2} |\varphi - \eta_h|_{0,K}^2 + |\varphi - \eta_h|_{1,K}^2 \right) \right\} \\ &\leq \widehat{C} \inf_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{h_k^2} |\phi - \varphi|_{0,K}^2 + |\phi - \varphi|_{1,K}^2 \right) + |\varphi|_{1,\Omega} \right\} \\ &= \widehat{C} |\phi|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

On déduit de cette proposition le corollaire suivant:

**COROLLAIRE 2 :** *Il existe une constante  $\alpha > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que*

$$\forall \theta_h \in V_h^0, \alpha \|\theta_h\|_{-1,\Delta,\Omega}^2 \leq \mathbf{a}_h(\theta_h, \theta_h)$$

On remarque aussi que

$$\sigma_h = 1 + \sup_{\tau_h \in V_h^0} \frac{\|\Delta \tau_h\|_{-1,\Omega}}{\|\tau_h\|_h} \leq \widehat{C}_1$$

On considère  $g \in L^2(\Omega)$  tel que

$$g = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in H^{-1}(\Omega) \text{ et } f \notin L^2(\Omega) \\ f & \text{si } f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

et on définit

$$\mathcal{G}(\theta) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{mes}K \int_K g \Delta \theta \, dK, \quad \forall \theta \in X \tag{8}$$

**THÉORÈME 5 :** *Le problème approché*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{a}_h(\omega_h, \theta_h) + \mathbf{b}(\theta_h, \psi_h) = \mathcal{G}(\theta_h) & , \forall \theta_h \in X_h \\ \mathbf{b}(\omega_h, \eta_h) = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega} & , \forall \eta_h \in X_h^0 \\ \omega_h \in X_h, \psi_h \in X_h^0 & \end{array} \right.$$

admet une unique solution et il existe une constante  $\widehat{C} > 0$ , ne dépendant que de  $\beta$ , telle que  $\forall \delta \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\forall \delta_h \in \mathbf{X}_h$  et  $\forall \eta_h \in \mathbf{X}_h^0$ , on a

$$E_h(\delta) \leq \widehat{C} \left\{ \|\omega - \delta\|_{-1, \Delta, \Omega} + |\psi - \eta_h|_{1, \Omega} + h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\delta - \delta_h|_{2, K}^2 \right)^{1/2} + \|\delta - \delta_h\|_{1, \Omega} + h \|g + \Delta \delta\|_{0, \Omega} \right\}$$

où

$$E_h(\delta) = \|\omega - \omega_h\|_{-1, \Delta, \Omega} + \|\delta - \omega_h\|_h + |\psi - \psi_h|_{1, \Omega}.$$

*Démonstration :* on a

$$\sup_{\theta_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|\mathcal{G}(\theta_h) - \mathbf{A}_h(\delta, \theta_h)|}{\|\theta_h\|_h} \leq h \|g + \Delta \delta\|_{0, \Omega}$$

En utilisant l'estimation du Théorème 3, on obtient

$$\|\delta - \omega_h\|_h + |\psi - \psi_h|_{1, \Omega} \leq \widehat{C} \left\{ \|\omega - \delta\|_{-1, \Delta, \Omega} + |\psi - \eta_h|_{1, \Omega} + \|\delta - \delta_h\|_h + \|\delta - \delta_h\|_{1, \Omega} + h \|g + \Delta \delta\|_{0, \Omega} \right\}$$

mais

$$E_h(\delta) \leq \|\omega - \delta\|_{0, \Omega} + \|\Delta \omega - \Delta \omega_h\|_{-1, \Omega} + \|\delta - \omega_h\|_h + |\psi - \psi_h|_{1, \Omega}$$

On considère  $\rho(\omega) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta \rho(\omega) = \Delta \omega$  alors  $\forall \phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $\forall \eta_h \in \mathbf{X}_h^0$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \Delta \omega - \Delta \omega_h, \phi \rangle_{-1, \Omega} &= - \int_{\Omega} \nabla(\rho(\omega) - \omega_h) \nabla \phi \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \nabla(\rho(\omega) - \omega_h) \nabla(\phi - \eta_h) \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \nabla(\rho(\omega) - \delta) \nabla(\phi - \eta_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(\delta - \omega_h) \nabla(\phi - \eta_h) \, d\Omega \end{aligned}$$

d'où d'après la proposition 5, on a

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta \omega - \Delta \omega_h, \phi \rangle_{-1, \Omega} \right| &\leq \left| \langle \Delta \omega - \Delta \delta, \phi - \eta_h \rangle_{-1, \Omega} \right| \\ &\quad + \widehat{C} \|\delta - \omega_h\|_h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_k^2} |\phi - \eta_h|_{0, K}^2 + |\phi - \eta_h|_{1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\|\Delta\omega - \Delta\omega_h\|_{-1,\Omega} \leq \widehat{C} \left( \|\Delta\omega - \Delta\delta\|_{-1,\Omega} + |\delta - \omega_h|_h \right)$$

On en conclut que

$$E_h(\delta) \leq \widehat{C} \left( \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} + \|\delta - \omega_h\|_h + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \right)$$

et on obtient ainsi l'estimation d'erreur désirée.

On déduit de ce Théorème les corollaires suivants:

**COROLLAIRE 3 :**  $\forall f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\forall k \geq 1$ , on a pour tout  $\delta \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$ ,

$$E_h(\delta) \leq \left\{ h^k |\delta|_{k+1,\Omega} + h \left( |\psi|_{2,\Omega} + \|g + \Delta\delta\|_{0,\Omega} \right) + \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} \right\}$$

**COROLLAIRE 4 :**  $\forall f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\forall k \geq 1$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \|\Delta\omega - \Delta\omega_h\|_{-1,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \right) = 0$$

*Démonstration :*  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  étant dense dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Delta; \Omega)$  et en se servant de la définition de  $E_h(\delta)$ , on a  $\forall \delta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  :

$$\begin{aligned} \|\omega - \omega_h\|_{-1,\Delta,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} &\leq E_h(\delta) \\ &\leq \widehat{C} \left\{ h^k |\delta|_{k+1,\Omega} + h \left( |\psi|_{2,\Omega} + \|g + \Delta\delta\|_{0,\Omega} \right) + \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \|\omega - \omega_h\|_{-1,\Delta,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \right) = \widehat{C} \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega}$$

mais on a

$$\inf_{\delta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})} \left( \|\omega - \delta\|_{-1,\Delta,\Omega} \right) = 0$$

d'où le résultat désiré.

**COROLLAIRE 5 :** Si  $\omega \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$ , alors

$$\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \|\Delta\omega - \Delta\omega_h\|_{-1,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \widehat{C} h^k \left( |\omega|_{k+1,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right)$$

COROLLAIRE 6 : Si  $\omega \in \mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{H}^{k+1}(\Omega)$ , alors

$$\begin{aligned} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f + \Delta\omega_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} &\leq \widehat{C} h^{k-1} \left( |\omega|_{k+1,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right) \\ \left( \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \|[\partial_n \omega_h]\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} &\leq \widehat{C} h^{k-\frac{1}{2}} \left( |\omega|_{k+1,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right) \\ \left( \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \|[\partial_n \omega_h]\|_{\infty,T}^2 \right)^{1/2} &\leq \widehat{C} h^{k-1} \left( |\omega|_{k+1,\Omega} + |\psi|_{k+1,\Omega} \right) \end{aligned}$$

### 3 Résultats Numériques

Dans le cadre de ce travail, on se propose de valider numériquement cette nouvelle approche sur des cas bidimensionnels. Les essais numériques ont été effectués avec l'élément fini  $\mathbb{P}_1$  sur les deux méthodes classique et optimale. Dans le cas de solutions analytiques sur des problèmes réguliers, le comportement en  $\psi$  a été semblable mais en ce qui concerne  $\omega$ , on constate une nette amélioration des résultats pour la nouvelle approche, et en particulier un effet régularisant.

Le cas physique testé est celui de la marche avec des conditions aux limites de Poiseuille. Globalement et avant d'analyser les résultats numériques, on constate pour  $\omega$  le net avantage de la nouvelle approche par rapport à la méthode classique notamment au voisinage du bord, ceci est illustré par les isovaleurs de  $\omega$  sur la figure 1 (méthode classique) comparés à ceux des figures 2 et 3 (méthode optimale). Les figures 4 (méthode classique), 5 et 7 (méthode optimale) apportent, à travers les isovaleurs de  $\psi$  dans la zone de circulation près du bord, une explication directe à l'efficacité observée pour  $\omega$ .

On rappelle brièvement le cadre de discrétisation utilisant l'élément fini  $\mathbb{P}_1$  pour les essais numériques; on considère les espaces discrets suivants:

$$\mathbf{X}_h = \{ \theta_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, \theta_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \} ,$$

$$\mathbf{M}_h = \mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) ,$$

où  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation régulière de  $\overline{\Omega}$ . A la décomposition  $\mathcal{T}_h$ , on associe l'ensemble  $\mathcal{C}_h$  des cotés internes de  $\mathcal{T}_h$ . Pour chaque côté  $T$  de  $\mathcal{C}_h$ , il existe 2 triangles  $K$  et  $K'$  de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $T = \partial K \cap \partial K'$ ; on note  $h_T = \text{mes}T$  la longueur du côté  $T$ ; on note  $[\partial_n \theta] = \partial_n^K \theta^K + \partial_n^{K'} \theta^{K'}$  sur  $\mathbb{T}$ ,  $\partial_n^K \theta^K$  étant la dérivée normale de  $\theta^K$  sur  $\partial K$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , si  $T = \partial K \cap \Gamma$ , on pose  $[\partial_n \theta] = 0$  sur  $T$ .

On considère le problème continue suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi \in H_0^2(\Omega), \omega \in H^{-1}(\Delta; \Omega) & \\ -\Delta \psi = \omega & \text{p.p. dans } \Omega, \\ -\Delta \omega = f & \text{dans } H^{-1}(\Omega), \\ \gamma_0 \psi = \psi^0 & \text{p.p. sur } \Gamma, \\ \gamma_1 \psi = g & \text{p.p. sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On associe à ce problème la formulation variationnelle approchée suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} \omega_h \theta_h \, d\Omega + \beta \sum_{T \in \mathcal{C}_h} h_T \int_T [\partial_n \omega_h] [\partial_n \theta_h] \, dT - \int_{\Omega_h} \nabla \psi_h \nabla \theta_h \, d\Omega = \int_{\Gamma} g \theta_h \, d\Gamma, \forall \theta_h \in X_h \\ \int_{\Omega_h} \nabla \omega_h \nabla \eta_h \, d\Omega = \langle f, \eta_h \rangle_{-1,1,\Omega}, \forall \eta_h \in M_h \\ \psi_h - \psi^0 \in M_h, \omega_h \in X_h \end{array} \right.$$

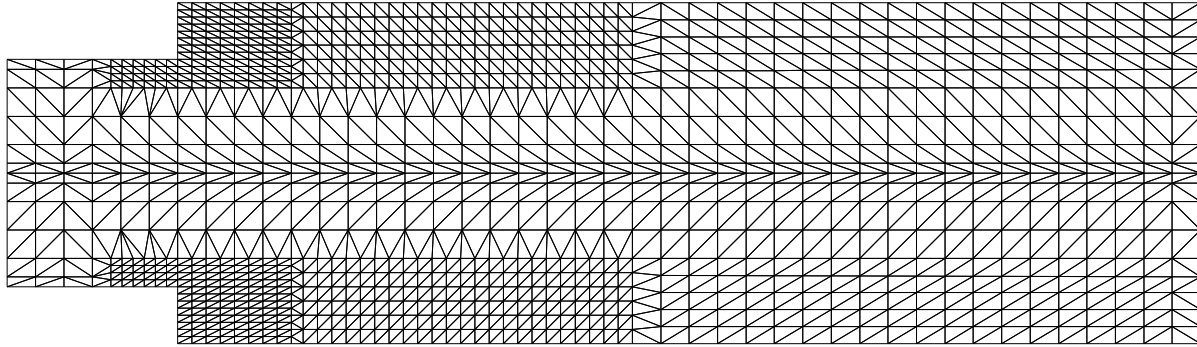
où  $\beta \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $\beta = 0$ , on retrouve la méthode classique et pour  $\beta > 0$  indépendant de  $h$ , la méthode optimale proposée.

Différents tests de convergence de maillages ou d'études de comportement en  $\beta$  ont montré, pour des cas de solutions analytiques connues sur des ouverts réguliers (carrés), d'une part un bon comportement de  $\psi_h$  et un mauvais comportement de  $\omega_h$  pour  $\beta = 0$  et d'autre part que  $\omega_h$  s'améliore nettement pour  $\beta$  plus élevé mais avec une diminution qualitative pour  $\psi_h$ . Pour  $\beta$  très grand, on obtient un nivellement de comportement en  $\omega_h$  et des résultats irréalistes en  $\psi_h$ . Le paramètre  $\beta$  optimal s'est situé dans la fourchette  $]0, 1]$ . Dans ce cas, le résultat en  $\omega_h$  est nettement amélioré alors que celui en  $\psi_h$  est moins bon que les résultats obtenus pour  $\beta = 0$ . Pour pallier à cet inconvénient, on résoud le problème auxiliaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} \nabla \psi_h^c \nabla \eta_h \, d\Omega = \int_{\Omega_h} \omega_h \eta_h \, d\Omega, \forall \eta_h \in M_h, \\ \psi_h^c - \psi^0 \in M_h. \end{array} \right.$$

Pour  $\beta = 0$ , on a  $\psi_h^c = \psi_h$  mais pour  $\beta > 0$ ,  $\psi_h^c$  représente la fonction courant approchée corrigée. Les résultats sur  $\psi_h^c$  sont bons et on obtient avec le couple  $(\omega_h, \psi_h^c)$  une bonne approximation de  $(\omega, \psi)$  pour  $\beta \in ]0, 1]$ .

Pour illustrer ces résultats, on présente le cas test de l'écoulement incompressible dans un canal symétrique avec une marche et des conditions aux limites de type Poiseuille. Ce canal présente 2 sommets d'angles  $\frac{3}{2}\pi$  qui développent des singularités dans la solution. Le maillage proposé (Figure 0) présente un raffinement


 FIG. 0. *Triangulation non structurée du domaine.*

au voisinage de ces 2 sommets. Ce maillage se caractérise par 2218 triangles et 1195 sommets d'où 1195 degrés de liberté pour  $\omega_h$  et 1025 degrés de liberté pour  $\psi_h$ .

Sur les figures 1, 2 et 3 sont présentées les lignes d'isovaleurs de  $\omega_h$  pour  $\beta = 0, 0.5$  et 1 respectivement. On voit sur la figure 1, le comportement singulier de  $\omega_h$  au voisinage de la frontière et particulièrement des 2 sommets d'angles  $\frac{3}{2}\pi$ . L'amélioration des résultats est nette pour  $\beta = 0.5$  et 1.

La figure 4 donne les courbes d'isovaleurs de  $\psi_h$  pour  $\beta = 0$  alors que les figures 5 et 6 celles de  $\psi_h$  et  $\psi_h^c$  pour  $\beta = 0.5$ .

Sur les figures 7 et 8 on présente les courbes d'isovaleurs de  $\psi_h$  et  $\psi_h^c$  pour  $\beta = 1$ .

On note, pour les résultats de  $\psi_h$  avec  $\beta \neq 0$ , une apparition de zones de recirculation; ces zones disparaissent pour  $\psi_h^c$ .

Ainsi, les résultats numériques obtenus corroborent les estimations d'erreur a priori pour  $\omega_h$ . Par contre, la solution  $\psi_h^c$  semble plus proche de la solution exacte que  $\psi_h$ . D'un point de vue théorique, on vérifie immédiatement que:

$$|\psi - \psi_h^c|_{1,\Omega} \leq \widehat{C} h^k \left( |\omega - \omega_h|_{0,\Omega} + |\psi|_{2,\Omega} \right)$$

où  $\widehat{C}$  est indépendante de  $h$ . On en déduit avec le corollaire 5 que  $\psi_h$  et  $\psi_h^c$  ont le même comportement théorique en estimation d'erreur a priori.

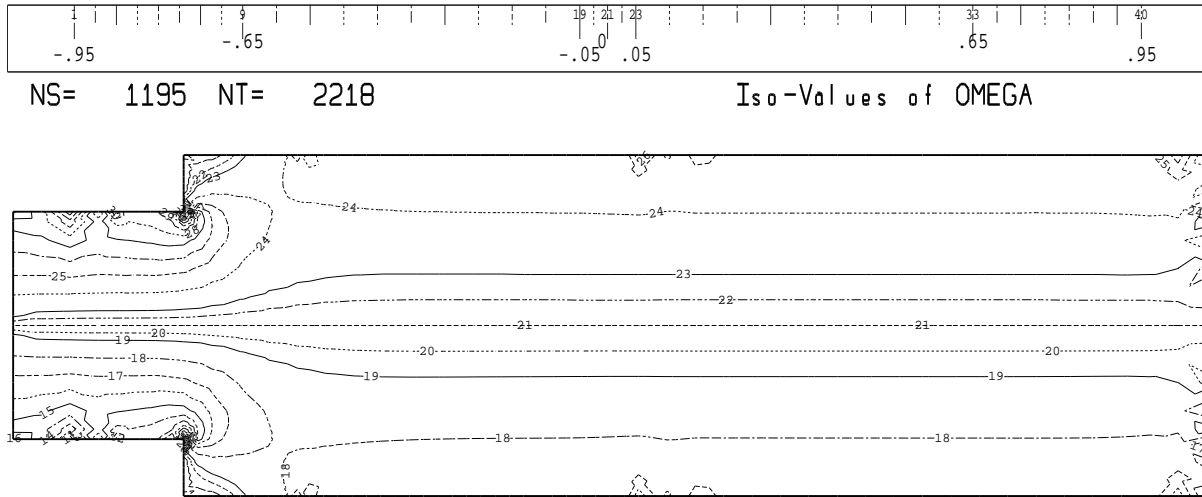


FIG. 1. Isovaleurs de  $\omega$  avec l'élément classique  $\mathbb{P}^1$ .

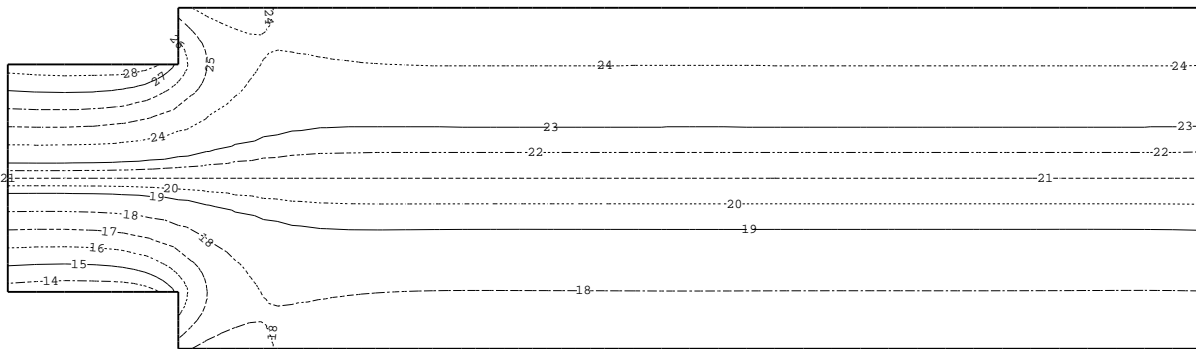


FIG. 2 Isovaleurs de  $\omega$  avec l'élément optimal  $\mathbb{P}^1$  et un coefficient 0.5 pour  $A_h$ .

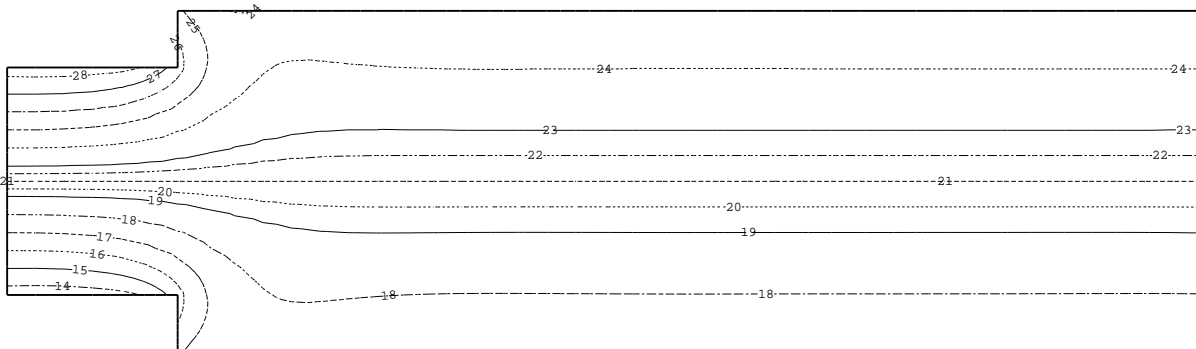


FIG. 3 Isovaleurs de  $\omega$  avec l'élément optimal  $\mathbb{P}^1$  et un coefficient 1 pour  $A_h$ .



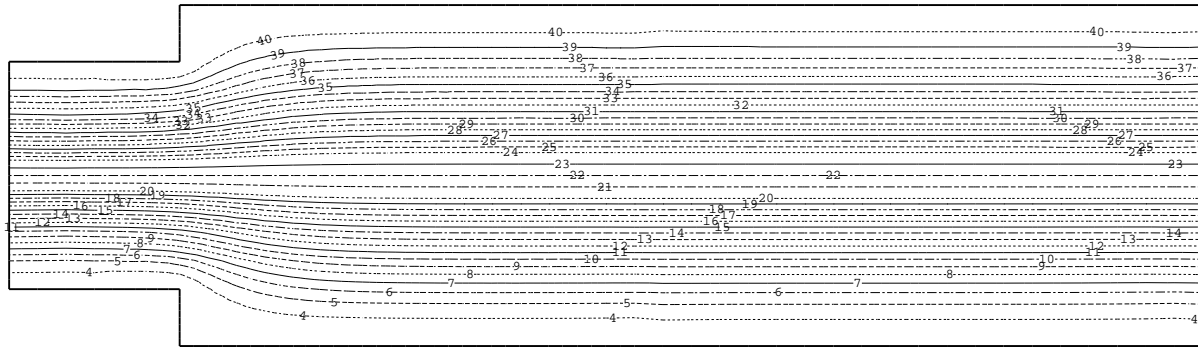
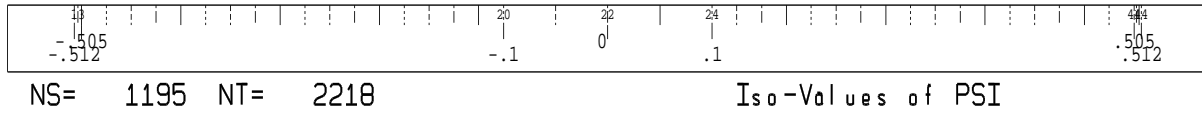


FIG. 4. Isovaleurs de  $\psi$  avec l'élément classique  $\mathbb{P}^1$ .

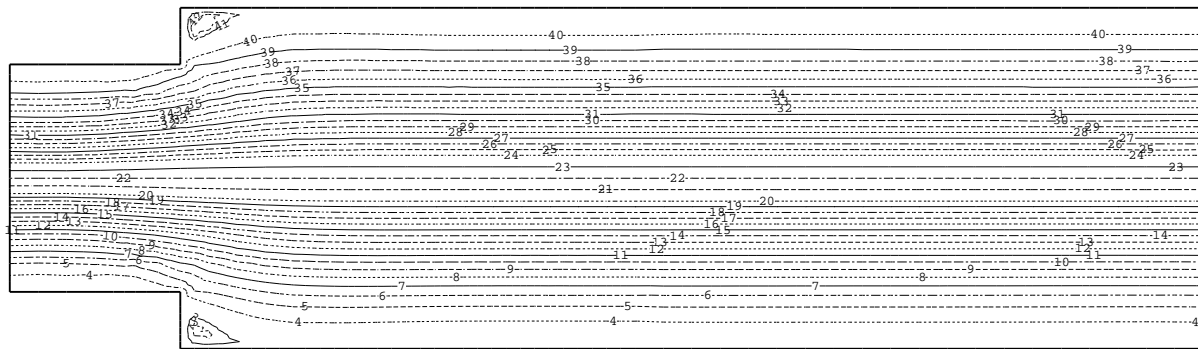


FIG. 5 Isovaleurs de  $\psi$  avec l'élément optimal  $\mathbb{P}^1$  et un coefficient 0.5 pour  $A_h$ .

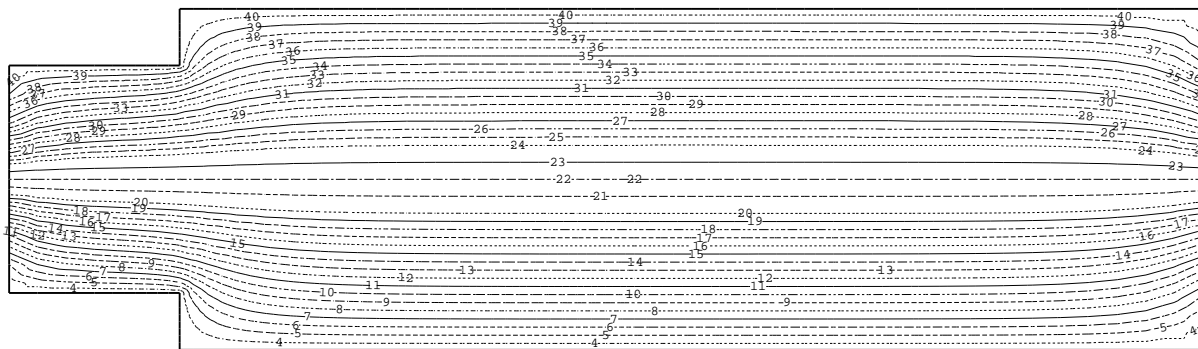


FIG. 6 Isovaleurs de  $\psi$  corrigé avec l'élément optimal  $\mathbb{P}^1$  et un coefficient 0.5 pour  $A_h$ .

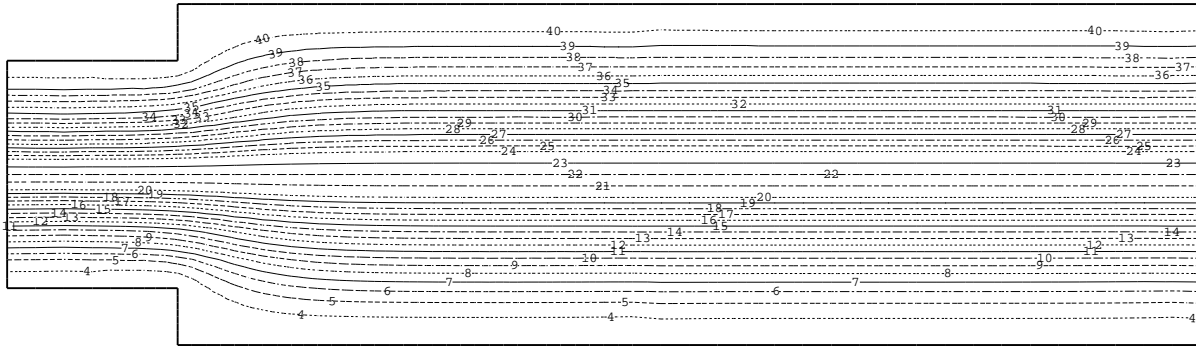
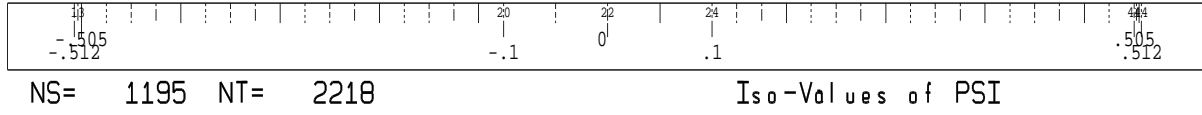


FIG. 4. Isovaleurs de  $\psi$  avec l'élément classique  $IP^1$ .

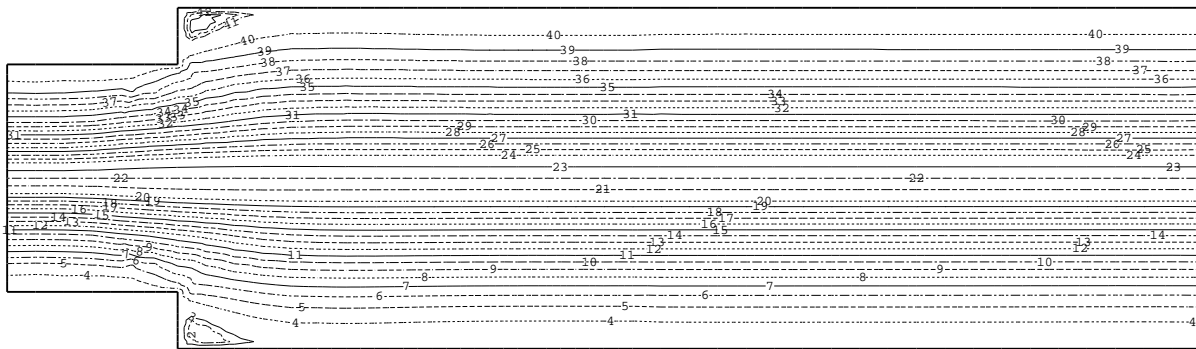


FIG. 7 Isovaleurs de  $\psi$  avec l'élément optimal  $IP^1$  et un coefficient 1 pour  $A_h$ .

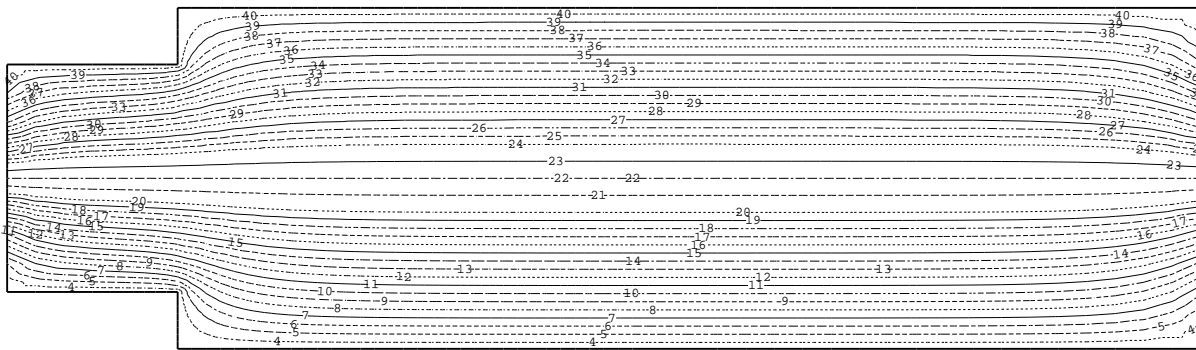


FIG. 8 Isovaleurs de  $\psi$  corrigé avec l'élément optimal  $IP^1$  et un coefficient 1 pour  $A_h$ .

## 4 Conclusion

Cette nouvelle approche de résolution en  $(\psi, \omega)$  du problème du bilaplacien permet une nette amélioration qualitative des résultats. Cette approche n'est pas du type moindres carrés mais se situerait plutôt comme une pénalisation avec pour paramètre de pénalisation  $\beta$ . Mais il ne s'agit pas d'une méthode de pénalisation au sens classique du terme car l'expression que l'on rajoute n'est pas vérifiée a priori par la solution  $\omega$ . En effet, imposer que  $\omega \in H^{-1}(\Delta; \Omega)$  entraîne que, formellement,  $\omega$  soit "continu" sur les interfaces de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Ceci est pris en compte car  $\omega_h \in C^0(\bar{\omega})$ . Mais il n'est pas nécessaire que  $[\partial_n \omega]$  soit continu sur ces interfaces; pourtant c'est ce terme qui rend la forme  $a_h$  uniformément coercive sur  $V_h^0$  (noyau discret de  $b$ ) permettant le comportement optimal pour les estimations d'erreur a priori.

Les extensions de ce travail sont multiples: équations de Navier-Stokes bidimensionnels, calcul de coefficient de propagation de fissures en élasticité linéaire, calcul de plaques en théorie de Kirchoff-Love. L'adaptation du principe de cette méthode à la dimension 3 ne pose pas de difficultés conceptuelles mais dépend fortement de l'approche variationnelle arrêtée en  $(\psi, \omega)$ .

## 5 Références Bibliographiques

- [1] Amara M., *Une méthode optimale de classe  $C^0$  d'approximation du bilaplacien*; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 319, pp.1327-1330, Série I, Paris 1994.
- [2] Amara M., Chatti A., El Dabaghi F., *An optimal  $C^0$  finite element for plane crack problem*; Rapport de Recherche INRIA, à paraître 1997.
- [3] Bernardi C., Girault V., Maday Y., *Mixed spectral element approximation of the Navier Stokes equations in the stream function and vorticity formulation*; IMA Journal of Numerical Analysis, 12, pp.565-608, 1992.
- [4] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and hybrid finite element method*; Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer Verlag New York, 1991.
- [5] Brezzi F., Fortin M., Marini L.D., *Mixed finite element methods with continuous stresses*; Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 3, No 2, pp.275-287, 1993.
- [6] Ciarlet P.G., Glowinski R., *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*; Springer Verlag Berlin, 1984.
- [7] Ciarlet P.G., Raviart P.A., *A mixed method for the biharmonic problem*; Mathematical aspect of finite elements in partial differential equations, Carl de Boor Ed, Academic Press, New York, pp.125-145, 1974.
- [8] Girault V., Giroire J., Sequeira A., *A stream function-vorticity variational formulation for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces*; Math. Meth. in the Applied Sciences, 15 5, pp.345-363, 1992.

- [9] Girault V., Raviart P.A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*; Springer Verlag Berlin, 1986.
- [10] Glowinski R., Pironneau O., *Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem*; SIAM Review, 17, pp.167-212, 1979.
- [11] Nitsche J., *Über ein variationsprinzip zur lösung von Dirichlet-problem bei verwendung von Teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind*; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36:9-15, 1970/1971.
- [12] Ruas V., *On formulations of vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications*; ZAMM Z.angew Math. Mech., 74, 1, pp.43-55, 1994.
- [13] Scholz R., *A mixed method for fourth order problem using finite elements*; RAIRO, Analyse Numérique, 12, pp.85-90, 1978, France.