



# Texel: triangulation de surfaces implicites. Partie I: aspects théoriques

Pascal Frey, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Pascal Frey, Houman Borouchaki. Texel: triangulation de surfaces implicites. Partie I: aspects théoriques. [Rapport de recherche] RR-3066, INRIA. 1996. inria-00073626

**HAL Id: inria-00073626**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073626>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Texel: triangulation de surfaces implicites.  
Partie I: aspects théoriques.***

Pascal J. FREY et Houman BOROUCAKI

**N° 3066**

13 décembre 1996

————— THÈME 4 —————



***Rapport  
de recherche***



# Texel: triangulation de surfaces implicites. Partie I: aspects théoriques.

Pascal J. FREY\* et Houman BOROUCIHI†

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3066 — 13 décembre 1996 — 30 pages

**Résumé :** Ce rapport présente une méthode de triangulation des surfaces et volumes implicites basée sur un partitionnement en tétraèdres. La méthode proposée est une généralisation des méthodes classiques d'extraction (adaptative) d'iso-surfaces de type *Marching-Cubes*. Les principaux concepts géométriques d'une modélisation basée sur des fonctions implicites sont présentés. Une méthodologie de maillage (de type éléments finis) des surfaces implicites est détaillée. On montre ensuite que le cas des grilles régulières utilisées pour l'extraction d'iso-surfaces peut alors être considéré comme un cas particulier de cette approche. Des exemples montrant l'efficacité de la méthode sont proposés dans la partie II de ce rapport.

**Mots-clé :** Triangulation, Surface implicite, Maillage, Texel

(Abstract: pto)

\* INRIA, E-mail :Pascal.Frey@inria.fr

† Université de Technologie de Troyes, E-mail :houman.borouchaki@univ-troyes.fr

# **Texel: triangulation of implicit surfaces.**

## **Part I: theoretical aspects.**

**Abstract:** This report presents an implicit surface triangulation method based on a tetrahedral partitioning. The proposed method can be seen as a generalization of the classical Marching Cubes-like algorithms used for (adaptive) iso-surface extraction. The main geometric concepts of a modelling environment based on implicit functions are introduced. A general meshing methodology (in the finite element context) is detailed. The iso-surface extraction based on regular grid can be seen as a particular case of this approach. Several application examples are proposed in this report, part II, in order to outline the efficiency of the proposed method.

**Key-words:** Triangulation, Implicit surface, Mesh, Texel

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Une géométrie constructive discrète</b>	<b>6</b>
2.1	Concepts et objets géométriques . . . . .	6
2.2	Opérations théoriques et relations . . . . .	7
2.3	Notion de classification. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Vers le maillage des surfaces implicites</b>	<b>10</b>
3.1	Quelques définitions . . . . .	11
3.2	Méthodologie de maillage . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Triangulation des surfaces implicites</b>	<b>14</b>
4.1	Position du problème . . . . .	14
4.2	Quelques remarques et principaux requis . . . . .	15
4.3	Méthode de triangulation . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Application au cas d'une grille régulière</b>	<b>23</b>
5.1	Partitionnement tétraédrique. . . . .	24
<b>6</b>	<b>Extensions</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>27</b>

# 1 Introduction

La représentation des surfaces peut être divisée en trois classes : explicite, implicite et paramétrique. Les surfaces paramétriques ont été traditionnellement préférées aux surfaces implicites en raison de la simplicité de calcul (relative) de certaines propriétés, telles que courbures et tangentes<sup>1</sup>. Les représentations paramétriques et implicites d'une surface se distinguent également par la concision de leur formulation mathématique [35]. Par exemple, la définition paramétrique d'une sphère de centre  $C(c_x, c_y, c_z)$  et de rayon  $r$ , est donnée par

$$(p_x, p_y, p_z) = (c_x + r \cos \theta \cos \phi, c_y + r \cos \theta \sin \phi, c_z + r \sin \theta), \quad (1)$$

où  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi[$ . La définition implicite est plus concise

$$(p_x - c_x)^2 + (p_y - c_y)^2 + (p_z - c_z)^2 - r^2 = 0. \quad (2)$$

Les surfaces et volumes implicites sont fréquemment utilisés pour la modélisation dans diverses applications scientifiques (par exemple, dans les systèmes de CAO) et résultent généralement d'opérations de type CSG<sup>2</sup>. Des géométries complexes peuvent ainsi être définies au moyen d'opérations élémentaires à partir de primitives simples. Le problème posé est alors de déduire une représentation du solide par son bord (sa frontière), ou encore d'obtenir une triangulation de la surface définissant la frontière.

Dans un autre contexte, l'avènement de systèmes d'imagerie tridimensionnelle performants et précis permet l'obtention de données volumétriques. Dans les applications biomédicales, les isosurfaces permettent l'extraction de certaines structures anatomiques ou tissus biologiques. Dans les simulations numériques, par exemple en mécanique des fluides, la dynamique des isosurfaces permet l'étude des champs scalaires (vitesse, pression, lignes de machs, ...) et améliore la compréhension des résultats numériques. Le problème de la triangulation d'une iso-surface peut alors être rapproché du problème plus général de la triangulation des surfaces implicites.

**Position du problème.** Une surface implicite réelle peut être formellement définie comme  $f(x, y, z) = 0$  où  $f$  est une fonction de  $x, y$  et  $z$ . La surface est définie comme l'ensemble des points  $P(x, y, z) \in R^3$  vérifiant cette équation. La surface est aussi connue comme l'ensemble des zéros de la fonction et peut être écrite comme  $Z(f)$ . Une iso-surface est un ensemble de points semblable pour lesquels  $f(x, y, z) = c$ , où  $c$  est une isovaleur de la surface.

La fonction  $f$  partitionne l'espace en deux sous-domaines, extérieur et intérieur. Elle peut être définie de manière procédurale à partir des valeurs (généralement obtenues de façon heuristique) données par un algorithme, ou elle peut être approchée par un ensemble de points.

L'intérêt pour la triangulation des surfaces implicites vient notamment de la modélisation par éléments finis à partir de données discrètes. La génération de maillages gouvernés et adaptés est un des problèmes délicats dans un processus de simulation numérique par des méthodes d'éléments finis.

*Ce rapport présente une méthode de triangulation de surfaces implicites à partir d'un recouvrement simplicial du domaine d'étude et son application au cas particulier d'une grille régulière (données discrètes). La méthodologie conduisant au maillage des surfaces implicites et le concept d'objet implicite sont également introduits.*

---

1. on lira avec attention les rapports INRIA RR-2928, RR-2944, RR-2954 sur le maillage des surfaces paramétriques.

2. *Constructive Solid Geometry*.

**Autres approches.** Contrairement à l'abondance de la littérature sur le maillage des surfaces paramétriques, il y a relativement peu de travaux dédiés au maillage des surfaces implicites. Les objets implicites, dont la frontière est une surface implicite, sont pourtant utilisés en modélisation géométrique [34, 35, 51], conception assistée par ordinateur, animation, traitement d'images 3D et synthèse d'images, entre autres.

Quelques algorithmes de triangulation de surfaces implicites ou d'isosurfaces ont toutefois été proposés. Ces *paveurs* construisent une approximation de la surface au moyen d'un recouvrement de l'espace en cellules polyédriques convexes [28]. L'intersection de la surface avec une cellule est éventuellement approchée par des triangles. Aucune information sur la topologie de l'objet n'est requise<sup>3</sup>.

Bloomenthal [2] a proposé un algorithme basé sur un partitionnement spatial adaptatif utilisant un arbre octal (*octree*). Lorensen et Cline [21] ont publié l'algorithme de *Marching Cubes* qui construit une représentation polygonale d'une surface de densité constante à partir de voxels (cellules hexaédriques). De nombreux travaux ont été ensuite menés pour garantir la validité topologique des triangulations obtenues par ces algorithmes (Matveyev [22], Wilhelms et Van Gelder [50], Stander et Hart [43], Frey et al. [11]). Des modèles de déformations et des cartes de déplacement (Sclaroff and Pentland [39]), ainsi que des fonctions polynomiales (Bajaj et al. [1]) ont également été proposés pour la triangulation des surfaces implicites.

**Plan du rapport.** Dans la section 2, le concept d'objet implicite et quelques opérations relatives à ces objets sont rappelés. La section 3 décrit une méthodologie de génération de maillages de surfaces implicites. Dans la section 4, la triangulation des surfaces implicites est détaillée dans un cadre général où un recouvrement simplicial du domaine d'étude (d'un objet implicite) est donné. Le cas particulier des grilles régulières fait l'objet de la section 5. Enfin, quelques extensions et conclusions sont proposées dans les sections 6 et 7.

---

3. La topologie d'une surface implicite fait référence au nombre de composantes connexes ainsi qu'au *genre* (nombre de trous) de chacune de ces composantes.



## 2 Une géométrie constructive discrète

Dans cette section nous allons donner un bref aperçu des concepts géométriques d'un environnement de modélisation basé sur les fonctions implicites. En principe, une surface implicite est l'ensemble des zéros d'une fonction qui peut être soit une fonction polynomiale, soit une fonction transcendentale, soit encore une fonction définie de manière procédurale ou encore une fonction quelconque. La seule contrainte sur cette fonction pour définir d'une manière satisfaisante les iso-surfaces est d'être *continue*.

Il y a différents moyens pour définir des volumes géométriques qui ont tous en commun de faire appel à une fonction  $f(x, y, z)$  à valeurs dans  $R$  (qu'elle s'appelle fonction intérieur/extérieur, de champ, implicite, potentiel, à seuil, ou encore champ scalaire, ...). Nous allons rappeler dans les paragraphes suivants le formalisme introduit par Pasko et al. [29] pour la modélisation géométrique utilisant la représentation par fonctions implicites.

### 2.1 Concepts et objets géométriques

Les concepts géométriques sont décrits au moyen d'un triplet  $(\mathcal{O}, \Phi, \mathcal{R})^4$  où  $\mathcal{O}$  est un ensemble d'objets géométriques,  $\Phi$  un ensemble d'opérations géométriques et  $\mathcal{R}$  un ensemble de relations sur l'ensemble des objets. Nous allons maintenant détailler les éléments constitutifs de ce triplet.

Par définition, nous considérons des objets géométriques comme des sous-ensembles fermés d'un espace euclidien  $E^n$  de dimension  $n$  vérifiant

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (3)$$

où  $f$  est une fonction continue à valeurs dans  $R$  et définie sur  $E^n$ , appelée fonction de définition (*defining function*) [29]. L'équation (3) est la représentation *fonctionnelle* (*F-rep*) d'un objet géométrique. En dimensions trois, la frontière d'un tel objet est une surface implicite. Une classification des points de  $E^3$  associée à tout objet géométrique est définie telle que, si  $P = (x, y, z)$  est un point de  $E^3$ , alors<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} f(x, y, z) > 0 & \quad \text{si } P \text{ est intérieur à l'objet;} \\ f(x, y, z) = 0 & \quad \text{si } P \text{ appartient à la frontière;} \\ f(x, y, z) < 0 & \quad \text{si } P \text{ est extérieur à l'objet.} \end{aligned} \quad (4)$$

Les deux principaux types d'objets de l'ensemble  $\mathcal{O}$  sont les objets géométriques de base (ou *primitives*) et les objets complexes déduits à partir d'opérations élémentaires sur les primitives. Une primitive géométrique peut être décrite comme une instance spécifique d'une fonction choisie dans un ensemble fini de types possibles. Par exemple,

$$f(x, y, z) = r^2 - ((x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2) = 0$$

est la primitive correspondant à la représentation d'une sphère de centre  $C(c_x, c_y, c_z)$  et de rayon  $r$ .

4. Mathématiquement, ce triplet est un système algébrique.

5. cette définition est légèrement différente de la définition couramment utilisée en CAO.

## 2.2 Opérations théoriques et relations

Les seules opérations géométriques qui nous intéressent ici sont les opérations unaires et binaires. Le résultat d'une opération est un objet de l'ensemble  $\mathcal{O}$  qui garantit la propriété de fermeture de la représentation. Supposons qu'un objet  $O_1$  obéisse à la définition  $f_1(x, y, z) \geq 0$ . Pour des opérations unaires, un objet  $O_2$  est dit dérivé de  $O_1$  si  $O_2 = \Phi_i(O_1)$  est défini par  $f_2 = \Psi(f_1(x, y, z)) \geq 0$ , où  $\Psi$  est une fonction continue d'une seule variable à valeurs dans  $R$  et  $\Phi_i$  l'opération unaire. De manière analogue pour les opérations binaires, un objet  $O_3$  est dérivé de  $O_1$  et de  $O_2$  si  $O_3 = \Phi_i(O_1, O_2)$  est défini par  $f_3 = \Psi(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \geq 0$ , où  $\Psi$  est une fonction continue de deux variables à valeurs dans  $R$ . Parmi les fonctions unaires, on peut citer les transformations affines et les projections. Les opérations booléennes et le produit cartésien sont des exemples d'opérations binaires (cf. Pasko et al. [29]).

**Opérations booléennes.** Les définitions analytiques des opérations booléennes sur des objets décrits par des fonctions implicites ont été introduites et étudiées par Rvachev [36], pour résoudre des problèmes de physique mathématique dans des domaines de formes complexes. Il a proposé de remplacer les opérations ensemblistes sur des domaines définis par l'équation 3 en opérations sur les fonctions de définition. Une formulation possible de l'union (notée  $\cup$ ) et de l'intersection (notée  $\cap$ ) est la suivante

$$\begin{aligned} f_1 \cup f_2 &= \frac{1}{1 + \alpha} \left( f_1 + f_2 + \sqrt{(f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2)} \right) \\ f_1 \cap f_2 &= \frac{1}{1 + \alpha} \left( f_1 + f_2 - \sqrt{(f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les fonctions de définition des deux objets et  $\alpha = \alpha(f_1, f_2)$  est une fonction continue quelconque satisfaisant les propriétés suivantes

$$-1 < \alpha(f_1, f_2) \leq 1, \quad (6)$$

$$\alpha(f_1, f_2) = \alpha(f_2, f_1) = \alpha(-f_1, f_2) = \alpha(f_1, -f_2). \quad (7)$$

L'expression de la soustraction se déduit alors simplement par  $f_1 \setminus f_2 = f_1 \cap (-f_2)$ . Il faut noter qu'avec ces définitions, l'objet est fermé. Dans le cas où  $\alpha = 1$ , l'équation (5) devient

$$\begin{aligned} f_1 \cup f_2 &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 + f_2|) = \max(f_1, f_2) \\ f_1 \cap f_2 &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|) = \min(f_1, f_2), \end{aligned} \quad (8)$$

ce qui correspond aux expressions couramment utilisées (cf. Ricci [35]).

Les équations (5) présentent une discontinuité d'ordre  $C^1$  lorsque  $f_1 = f_2$ . C'est pourquoi lorsqu'une continuité  $C^m$  est désirée, la formulation suivante est privilégiée

$$\begin{aligned} f_1 \cup f_2 &= (f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2})(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{m}{2}} \\ f_1 \cap f_2 &= (f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2})(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{m}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Si la régularité de la fonction résultante est recherchée, Shapiro [40] propose une méthode particulière pour construire les fonctions de définition.

Ce type de fonctions peut être utilisé pour définir des primitives géométriques. Ainsi, un segment de droite dans  $E^1$  peut être défini par

$$\begin{aligned} O_1, O_2, O_3 &\subset E^1, \quad O_3 = O_1 \cap O_2 \\ f_1 = x_1 - a &\geq 0, \quad f_2 = b - x_1 \geq 0, \quad f_3 = f_1 \cap f_2 \end{aligned} \quad (10)$$

La surface résultant des opérations booléennes définies ci-dessus présente une discontinuité géométrique d'ordre 1 au niveau des intersections des surfaces opérandes. Par suite, pour obtenir une surface d'ordre  $G^1$ , nous rappelons la notion de raccordement de surfaces qui consiste à ajouter un terme correctif aux opérations booléennes.

**Raccordement de surfaces.** Une surface de raccord indique généralement soit une surface qui forme une transition continue et régulière entre différentes surfaces d'intersection non vide, soit une surface qui relie continûment plusieurs surfaces. Pasko et Savchenko [31] définissent cette transformation de la façon suivante

$$F(f_1, f_2) = \Phi_i(f_1, f_2) + d(f_1, f_2) \quad (11)$$

où  $\Phi_i$  est une opération booléenne et  $d$  une fonction de déplacement admettant un maximum absolu  $d(0, 0)$  et convergeant asymptotiquement vers un zéro. Une définition plus simple de  $d$  peut être utilisée si les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  vérifient un critère de distance

$$d(f_1, f_2) = \frac{a_0}{1 + \left(\frac{f_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{a_2}\right)^2}. \quad (12)$$

Nous donnons à présent quelques exemples de relations binaires.

**Inclusion.** Cette relation est définie comme  $O_1 \subset O_2$  et indique que l'objet  $O_1$  est inclus dans l'objet  $O_2$ . Si  $O_1$  est un point  $P$ , la relation peut être décrite par le prédicat suivant

$$S_2(P, \mathcal{O}_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_1(X) < 0 \text{ pour } P \notin \mathcal{O}_1 \\ 1 & \text{si } f_1(X) \geq 0 \text{ pour } P \subset \mathcal{O}_1. \end{cases} \quad (13)$$

**Appartenance.** Soit  $iO_1$  l'intérieur de  $O_1$  et  $bO_1$  sa frontière. La relation d'appartenance d'un point à un objet est décrite par le prédicat

$$S_3(P, \mathcal{O}_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_1(X) < 0 \text{ pour } P \notin \mathcal{O}_1 \\ 1 & \text{si } f_1(X) = 0 \text{ pour } P \in b\mathcal{O}_1 \\ 2 & \text{si } f_1(X) > 0 \text{ pour } P \in i\mathcal{O}_1. \end{cases} \quad (14)$$

**Offset.** Pour obtenir des versions dilatées ou contractées d'un objet, il est possible d'appliquer des opérations d'offset. Plusieurs types d'offsets ont été étudiés [29], parmi lesquels on peut citer

- l'offset à valeur constante,  $F = f(x, y, z) + C$ ,
- l'offset selon la direction normale,  $F = f(X + dN)$ ,  $d$  étant une distance et  $N$  le vecteur gradient de la fonction  $f$  au point  $X = (x, y, z)$ ,
- l'offset à rayon constant,  $F = \max(f(X'))$  où  $X'$  est le vecteur d'origine  $X = (x, y, z)$ , centre d'une sphère de rayon  $d$ , et d'extrémité appartenant à la surface de cette sphère.

## **2.3 Notion de classification.**

La relation d'appartenance d'un point à un objet peut également servir à classer les points de la surface. Une simple requête permet de savoir à quelle primitive un point appartient. Ce mécanisme très simple va être particulièrement utile pour l'optimisation des maillages.

Dans cette section, nous avons introduit les principaux concepts permettant la modélisation d'objets géométriques complexes. Ces objets étant définis au moyen des fonctions implicites, nous allons maintenant nous intéresser au problème de la triangulation des surfaces implicites, frontières de ces objets.

### 3 Vers le maillage des surfaces implicites

Ces dernières années, une attention particulière a été portée à la triangulation des surfaces implicites. Les techniques développées présentent beaucoup de similarités et quelques différences conceptuelles, ainsi que nous le verrons dans la section suivante. Obtenir une représentation polyédrique d'une surface implicite est un problème qui intéresse de nombreux domaines d'activité, à divers degrés. En effet, selon les applications visées, le processus de triangulation de la surface implicite doit être gouverné, de manière à tenir compte de requis spécifiques. Plus précisément, une triangulation obtenue dans le cadre d'une application de visualisation graphique (algorithme de *Marching-Cubes* [21], par exemple) n'est généralement pas adaptée aux problèmes de simulation numérique de phénomènes physiques ou biophysiques basés sur des équations aux dérivées partielles dont les solutions sont numériquement approchées par des méthodes d'éléments finis. Ce dernier cas est celui qui nous intéresse ici.

**Position du problème.** De nombreux domaines du calcul scientifique font appel à des triangulations ou des maillages comme supports de calculs. Comme nous l'avons dit, les algorithmes de triangulation, sous une forme adaptée, jouent un rôle prépondérant dans l'élaboration des algorithmes de génération de maillages. Ces derniers sont à la base de la simulation numérique par la méthode des éléments finis d'un problème modélisé en termes d'équations aux dérivées partielles. Les valeurs approchées du champ des solutions sont calculées aux noeuds du domaine d'étude. Le champ des solutions peut être déduit formellement en tout point du domaine, au moyen d'une interpolation. Dans ce contexte, la qualité et la validité du champ de solutions calculées sont liées aux propriétés du maillage support (servant à l'interpolation).

L'adaptation des maillages aux propriétés physiques des problèmes est une technique permettant d'automatiser le processus de calcul [14]. Elle recouvre plusieurs aspects, en général liés à une estimation *a posteriori*, et suppose un procédé itératif. Nous ne traitons pas le problème général de l'adaptation des maillages, mais plutôt le problème d'approcher la surface le plus fidèlement possible par une surface plane par morceaux, possédant de plus une régularité suffisante entre chaque morceau. En particulier, on souhaite contrôler l'écart entre les polygones (triangles) et la surface implicite. Les méthodes proposées pour trianguler des surfaces implicites ne permettent généralement pas de contrôler cet écart, et peu de travaux ont été menés pour pallier ce handicap.

*Nous allons introduire une méthodologie pour le maillage (en termes d'éléments finis) de surfaces implicites, qui consiste à*

- *générer une triangulation initiale de la surface,*
- *améliorer la qualité de l'approximation géométrique de la surface et*
- *construire un maillage de la surface à partir de cette triangulation, en s'appuyant sur des techniques d'optimisation et de remaillage gouverné qui utilisent les propriétés intrinsèques de la surface considérée.*

Auparavant, nous allons rappeler quelques définitions générales sur les triangulations et maillages.

### 3.1 Quelques définitions

Une triangulation simpliciale d'un domaine  $\Omega$  est par définition un ensemble  $\mathcal{T}$  de simplexes recouvrant  $\Omega$ . Les éléments  $K$  de  $\mathcal{T}$  doivent satisfaire des propriétés de conformité géométrique et topologique (Fig. 1). En particulier, une triangulation *géométrique* de surface doit vérifier des conditions supplémentaires de métrique [14].

Une triangulation  $\mathcal{T}$  est un ensemble d'entités décrivant un graphe, appelé graphe *d'adjacence*, dont les nœuds sont les triangles et les arêtes représentent les relations de voisinage des paires de triangles adjacents. Tout triangle  $K$  de  $\mathcal{T}$  est défini par la liste orientée  $K = (P_1, P_2, P_3)$  de ses sommets  $P_i$  dans le sens *direct*.

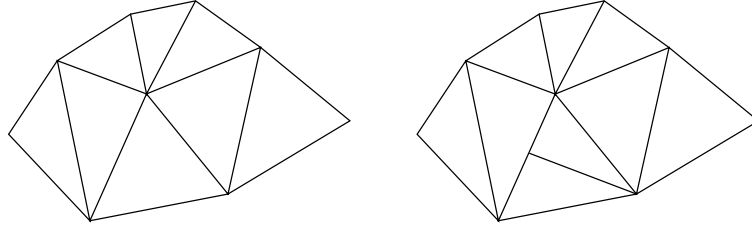


FIG. 1 - *Triangulations conforme et non-conforme.*

Les relations d'Euler lient le nombre de  $k$ -faces ( $k = 0, 1, 2$ ) d'une triangulation d'une surface implicite en dimension trois

$$ns - na + nf = 2 - 2g, \quad (15)$$

où  $ns, na$  et  $nf$  désignent respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de la frontière et  $g$  le genre de la surface.

L'analyse des propriétés géométriques d'une triangulation donnée peut fournir des informations intéressantes sur la qualité de l'approximation polyédrique (par exemple en indiquant les zones où la densité des éléments n'est pas justifiée au regard de la courbure de la surface) et de décider si la triangulation est de nature géométrique. Il est nécessaire pour cela de disposer de critères géométriques d'évaluation [12].

Une triangulation *équilatérale* (dont tous les éléments sont presque équilatéraux) est appelée **maillage**. Pour générer un maillage géométrique de la surface (approchant la surface au second ordre), il suffit de contrôler localement la taille des éléments au voisinage de chaque sommet. Les arêtes du maillage sont examinées pour déterminer si elles ont une *longueur idéale* par rapport aux tailles souhaitées aux extrémités. La longueur normalisée d'une arête  $PQ$  est idéale par rapport à  $h(t)$  (fonction monotone continue qui donne la variation de tailles sur l'arête  $PQ$ ) si et seulement si

$$d(PQ) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt}. \quad (16)$$

Un maillage dont toutes les arêtes ont une longueur normalisée unité est appelé *maillage unité*. Ainsi, un maillage géométrique est un maillage unité par rapport à la carte des tailles de rayons de courbure minimaux [12].

Dans le type d'application envisagé, l'objectif est d'obtenir des maillages unités. A l'heure actuelle, aucune méthode de triangulation de surface implicite dont nous avons connaissance ne peut directement satisfaire ce requis. La triangulation des surfaces implicites ne peut donc être

envisagée que comme l'étape initiale dans un processus global de maillage. Une méthodologie doit être proposée pour obtenir un maillage satisfaisant à partir d'une triangulation donnée.

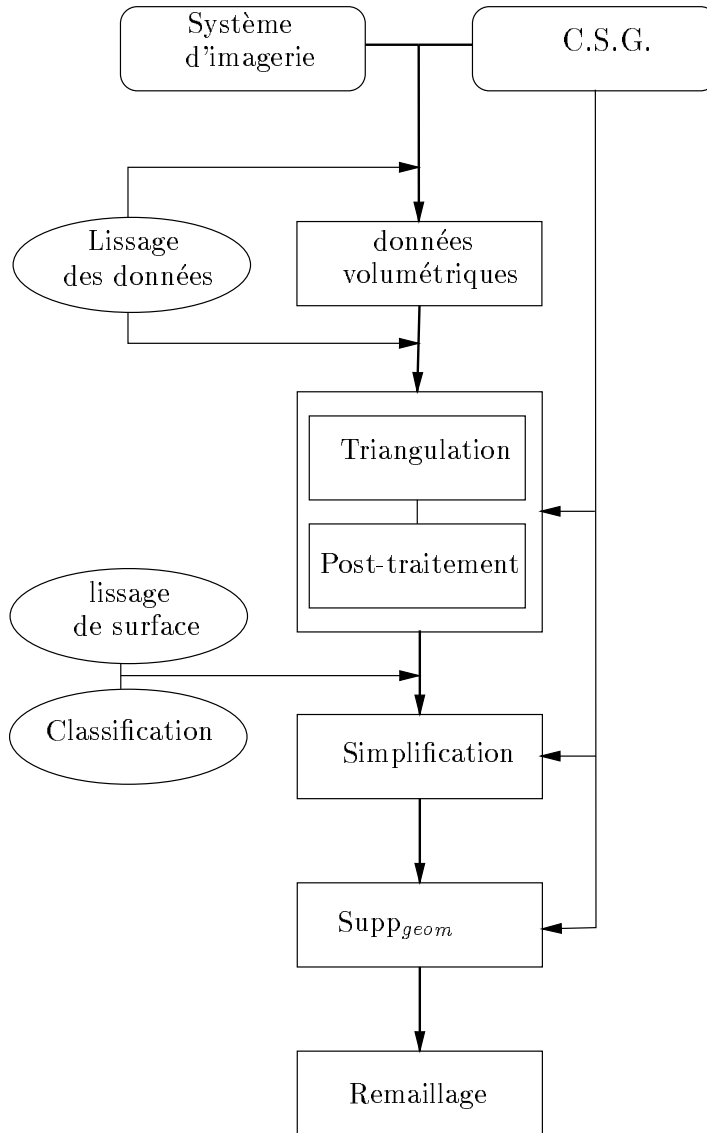
### 3.2 Méthodologie de maillage

De la discussion précédente, apparaît clairement la nécessité de *retravailler* (modifier) les triangulations de surface générées, pour les transformer en maillages unités. La séquence des opérations nécessaires obéit à un ordre précis.

Généralement, les méthodes de triangulation de surfaces construisent une approximation polyédrique de ces surfaces à partir d'un recouvrement de l'espace en cellules polyédriques convexes. La régularité du partitionnement est adaptée à la plupart des techniques d'acquisition de données volumétriques. En revanche, dans le cas de cellules hexaédriques elles peuvent conduire à des ambiguïtés topologiques et des surfaces non fermées. Certains algorithmes supposent en outre que les valeurs de la fonction aux sommets d'une cellule ne présentent pas de discontinuités importantes (la surface à approcher est assez *lisse*). Cette hypothèse de régularité n'est généralement pas vérifiée. Un lissage des données peut être nécessaire pour se ramener à l'hypothèse, ou des fonctions de filtrage peuvent être utilisées à partir de la représentation polyédrique de la surface [44, 45]. Nous avons par ailleurs (cf. section 2) illustré la notion de classification des entités de la triangulation.

Le principal défaut des méthodes de triangulation est de conduire à un nombre important de triangles. En d'autres termes, la qualité de l'approximation géométrique est souvent liée à la taille des cellules du recouvrement. Par ailleurs, des algorithmes de lissage permettent d'améliorer la qualité de cette approximation. Des algorithmes de simplification (ou décimation) ont alors pour objectif de diminuer, de manière significative, le nombre de triangles, en préservant (dans une certaine mesure) la qualité de l'approximation géométrique. Les triangulations résultantes pourront servir de supports (modèles) géométriques à la surface. La génération du maillage de la surface est une phase d'optimisation (qui peut être adaptée au problème traité) d'une triangulation géométrique quelconque du support. La méthodologie introduite peut être schématiquement résumée figure 2.

Comme il apparaît clairement sur ce schéma, la triangulation joue un rôle prépondérant dans ce processus. L'objectif de ce rapport est de décrire et analyser un algorithme de triangulation de surfaces implicites robuste et à regarder le cas particulier d'une grille régulière, qui vont faire l'objet des sections suivantes.

FIG. 2 - *Méthodologie de maillage de surfaces implicites.*



## 4 Triangulation des surfaces implicites

Nous avons introduit dans la section précédente une méthodologie de maillage des surfaces implicites qui nécessite en premier lieu une triangulation approchant la surface le plus fidèlement possible. Si cette condition n'est pas satisfaite, les opérations ultérieures de simplification de maillage et de remaillage risquent de perdre toute utilité. Dans cette section, nous proposons un schéma de triangulation des surfaces implicites qui utilise un recouvrement simplicial du domaine d'étude (*i.e.* de la boîte englobant la surface implicite).

### 4.1 Position du problème

L'objectif visé est d'obtenir une représentation polyédrique (triangulation) d'une surface implicite donnée. L'intérêt de la construction de cette triangulation a été clairement montré dans la section précédente. Par ailleurs, comme de nombreux systèmes de visualisation reposent sur des polygones, généralement plus rapides à manipuler que d'autres primitives, cette triangulation peut servir à visualiser l'objet qu'elle représente.

Dans le cadre qui nous intéresse ici, c'est-à-dire la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la triangulation est constituée uniquement de triangles. Celle-ci doit être conçue comme une *boîte noire* qui masque les complexités topologique et géométrique de la surface implicite. Bloomenthal [3] précise que la procédure de triangulation se compose généralement de deux étapes

1. le partitionnement spatial du domaine en *cellules* (motifs polyédriques simples),
2. l'analyse et le traitement de ces cellules conduisant à la triangulation.

La première étape conduit à un recouvrement conforme (pavage) du domaine d'étude à base de polyèdres convexes (tétraèdres et hexaèdres, essentiellement) qui englobe la surface implicite. Le cube est une cellule couramment utilisée car il s'agit d'un polyèdre régulier qui pave l'espace [8]. La fonction implicite est évaluée aux sommets de ce recouvrement. La surface implicite est supposée intersecter toute arête du recouvrement connectant des sommets de signes opposés. Dans chaque polyèdre les points d'intersection sont alors reliés pour former un ou plusieurs triangles, dont la réunion conduit à la triangulation cherchée.

**Quelques approches.** De nombreuses méthodes ont été proposées pour extraire une représentation polyédrique à partir d'une surface implicite. Une évaluation de ces méthodes en fonction de leur complexité algorithmique, du nombre de triangles produits et de leur degré de consistance et d'exactitude a été proposée par Ning et Bloomenthal [28]. Les techniques introduites par Wyvill et al. [51] et Lorensen et Cline [21] impliquent la création d'un réseau cubique et conduisent à une approximation de la surface basée sur une interpolation linéaire<sup>6</sup>. Bloomenthal [2] a étendu cette méthode dans le cas d'une subdivision adaptative du domaine (basée sur un arbre octal). Frey et al. [11] ont introduit un algorithme de triangulation qui produit une surface fermée et consistante. La validité topologique de la triangulation a fait l'objet d'études (cf. Matveyev [22], Wilhelms et Van Gelder [50], Stander et Hart [43]). Des modèles de déformations et des cartes de déplacements (Sclaroff and Pentland [39]), ainsi que des fonctions polynomiales (Bajaj et al. [1]) ont également été utilisés pour la triangulation des surfaces implicites. Toutefois, ces algorithmes supposent que la surface est assez régulière car

---

6. et non pas à une approximation linéaire de la surface !

ils reposent sur le fait que le partitionnement peut être rendu suffisamment fin pour résoudre les ambiguïtés liées aux intersections de la surface avec les cellules.

Une approche différente du partitionnement spatial consiste à traquer la surface par propagation (*surface tracking*). Une cellule initiale intersectant la surface est trouvée et de nouvelles cellules s'ajoutent à partir des arêtes des cellules existantes intersectées par la surface. Cette méthode nécessite de déterminer une cellule de départ pour chaque objet implicite du modèle (chaque composante connexe). La localisation d'une telle cellule pouvant s'avérer coûteuse.

Toutes les applications ne peuvent pas être formulées en termes de partitionnement hexaédrique. Par exemple, les surfaces algébriques par morceaux sont généralement définies à partir d'un partitionnement tétraédrique. C'est pourquoi Payne et Toga [32] ou Guézic et Hummel [16] subdivisent chaque cellule hexaédrique en tétraèdres. Petersen et al. [33] ont décrit un algorithme adaptatif de triangulation pour trouver le contour des interpolants de trois variables réelles à partir des valeurs et des dérivées de la fonction en un ensemble de points quelconques. Leur méthode construit une triangulation de Delaunay de cet ensemble de points, basée sur l'algorithme de Bowyer [5]. Hall et Warren [17] ont une démarche analogue, à la différence qu'ils s'appuient sur une décomposition récursive de l'espace en tétraèdres<sup>7</sup>.

## 4.2 Quelques remarques et principaux requis

Avant de donner une liste des principaux requis d'une méthode de triangulation, nous allons analyser les principaux problèmes relatifs à une décomposition en cellules hexaédriques.

**Problèmes liés à une décomposition en hexaèdres.** Les algorithmes de triangulation basés sur une décomposition en cellules hexaédriques (par exemple le *Marching-Cubes* [21]), utilisent généralement des motifs faisant intervenir des polygones de degré 3 (triangles) à 6 (hexagones) (Fig. 3). La triangulation de ces polygones est une opération délicate car elle est de nature combinatoire (pour trouver toutes les topologies possibles) et de nature géométrique (pour vérifier la qualité de l'approximation de surface).

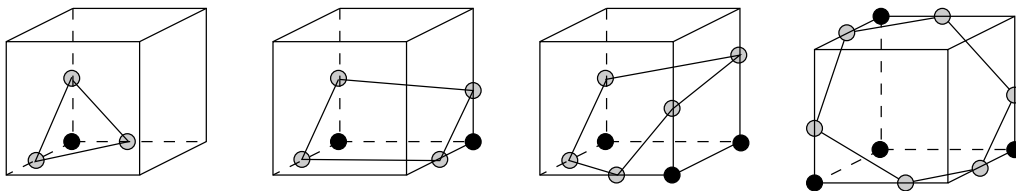


FIG. 3 - Quelques polygones créés par l'algorithme de *Marching-Cubes*

La triangulation d'un polygone de degré supérieur à trois conduit naturellement à examiner tous les remaillages possibles d'un tel polygone. Le nombre de Catalan d'ordre  $n$

$$Cat(n) = \frac{(2n - 2)!}{n!(n - 1)!} \quad (17)$$

donne le nombre maximal de triangulations *topologiquement* possibles  $N_n$  d'un polygone fermé à  $n$  sommets. En effet,

$$N_n = Cat(n - 1). \quad (18)$$

7. Dans la partie III de cette série de rapports, nous montrerons qu'à partir d'une triangulation de Delaunay adaptée à la surface, il est possible d'obtenir une triangulation optimale de la surface implicite.

Le tableau 1 montre le nombre de triangulations possibles,  $N_n$ , en fonction de  $n$ , ainsi que le nombre de triangles distincts de chaque triangulation,  $T_n$ . On voit donc que la retriangulation d'un hexagone nécessite théoriquement l'analyse de 14 triangulations. Il a été suggéré d'ajouter le barycentre des polygones comptant plus de cinq côtés pour éviter la création d'arêtes invalides [28]. Toutefois, ce point supplémentaire n'appartient pas à la surface implicite, dans la plupart des cas.

$n$	3	4	5	6	7
$N_n$	1	2	5	14	42
$T_n$	1	4	10	20	35

TAB. 1 - Nombre de triangulations topologiquement possibles.

En plus de ces problèmes de nature géométrique, s'ajoutent des ambiguïtés de nature topologique. Par définition, il y a ambiguïté topologique lorsqu'une cellule du partitionnement contient une face ambiguë, dans laquelle les sommets de signes contraires sont diagonalement opposés deux à deux (Fig. 4). Pour connecter les points, Wywill et al [51] ont suggéré d'utiliser la valeur de la fonction au centre de la face. Cette solution ne conduit pas toujours à un résultat correct [22]. Nielson et Hamann [27] ont proposé d'utiliser une représentation bilinéaire de la fonction, la courbe décrivant l'intersection de l'iso-surface avec l'arête étant alors une courbe hyperbolique. En définissant la valeur de la fonction aux points d'intersection des asymptotes de l'hyperbole, il est possible de prédire la connection exacte. Ces approches n'ont guère d'intérêt pratique dans le cas de données discrètes (où les valeurs de la fonction ne sont connues qu'aux sommets des cellules). C'est pourquoi comme on le verra, nous privilégions un partitionnement par tétraèdres du domaine d'étude qui conduit à une triangulation en triangles et quadrangles de la surface.

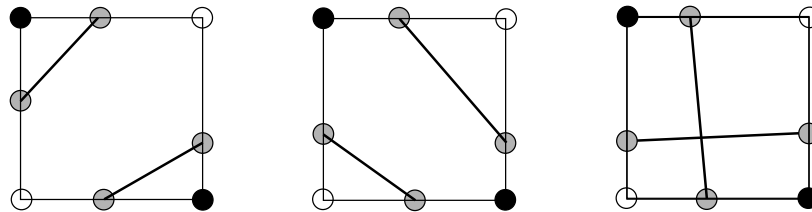


FIG. 4 - Ambiguïtés topologiques du Marching-Cubes.

**Principaux requis.** Les requis minimaux d'une méthode de triangulation de surfaces implicites concernent essentiellement la consistance topologique, l'efficacité (en termes de vitesse) et la connectivité liée aux sommets de la triangulation. À ces requis peuvent s'ajouter des contraintes de complexité minimale de l'algorithme, de nombre de d'éléments générés et de degré d'ambiguïté. Plus généralement, les points suivants doivent être respectés

- le traitement de la surface est local (au niveau d'une cellule) et indépendant d'une cellule à une autre,
- les ambiguïtés topologiques sont résolues implicitement et non explicitement (comme dans les algorithmes de type *Marching-Cubes*),

- l’approximation de la surface est contrôlée sur les arêtes de la cellule et au niveau du polygone d’approximation,
- toutes les informations discrètes (aux sommets des cellules) sont utilisées et finalement
- la méthode doit s’adapter au type de données, en particulier doit localiser les zéros de la fonction sur les arêtes des cellules (*root finding*).

Nous allons maintenant proposer une méthode de triangulation qui respecte tous ces requis et qui est basée sur un partitionnement en tétraèdres du domaine d’étude.

### 4.3 Méthode de triangulation

Les paragraphes précédents ont eu pour objectif d’éclairer le lecteur sur la supériorité potentielle d’un partitionnement à base de tétraèdres par rapport à un partitionnement en cellules hexaédriques. Un tel recouvrement simplicial conduit à une triangulation ne fait intervenir que des triangles et des quadrangles (voir ci-dessous). En outre, il ne comporte aucune ambiguïté topologique, contrairement au cas hexaédrique<sup>8</sup>.

Rappelons que la triangulation est composée de deux étapes, le partitionnement spatial du domaine en cellules et le traitement des cellules intersectées par la surface implicite.

Supposons donné un recouvrement simplicial du domaine d’étude<sup>9</sup>. Le problème posé est alors de déduire une triangulation de la surface implicite contenue dans ce domaine. Cette étape repose sur la détermination algorithmique des racines de la fonction le long des arêtes des tétraèdres. Les sommets ainsi obtenus sont ensuite connectés après analyse des tétraèdres, pour donner la triangulation recherchée.

**Recherche des racines.** Les fonctions implicites autorisent un calcul exact des sommets appartenant à la surface, contrairement au cas des données discrètes pour lequel l’approximation linéaire est couramment utilisée. Une procédure dichotomique est utilisée pour localiser ces sommets. Etant donnés deux points situés de part et d’autre de la surface implicite (donc de signes opposés selon les conventions), la méthode consiste à subdiviser récursivement le segment droit connectant les valeurs de la fonction de signes opposés. La procédure récursive converge rapidement vers un point de la surface. La convergence peut être établie dès que la longueur du segment devient plus petite qu’un seuil fixé (correspondant généralement au pouvoir de séparation de la méthode). Bloomenthal [3] suggère en outre de stopper la récursivité après 10 itérations, estimant le résultat suffisamment précis<sup>10</sup>.

Sur le plan pratique, le nombre d’évaluations de la fonction est minimisé et la position d’un sommet sur la surface n’est calculée qu’une seule fois, en utilisant une technique de hachage similaire à celle utilisée par Wyvill et al. [51]. De plus, l’algorithme que nous proposons a été étendu pour converger vers le point de la surface, y compris dans le cas particulier où la fonction s’annule sur tout un segment de l’arête (Fig. 5). Dans cet exemple, la fonction est nulle sur le segment  $[PQ]$ , et l’algorithme retourne le zéro *affiné* (extrémal) correspondant au point  $P$ . Cet algorithme peut s’écrire formellement de la façon suivante

---

8. Le meilleur recouvrement simplicial correspond probablement à une triangulation de Delaunay.

9. voir la section 5 du présent rapport ou le rapport III de cette série sur la construction d’un tel recouvrement.

10. la longueur de l’intervalle étant environ mille fois ( $2^{-10}$  plus petite que celle du segment initial.

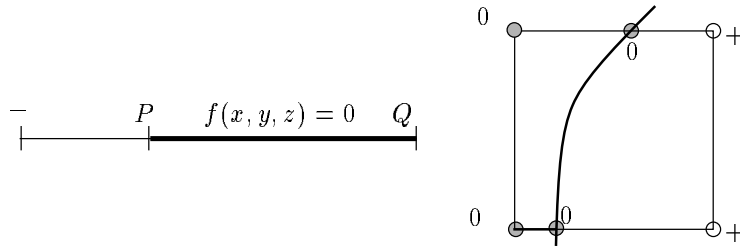


FIG. 5 - Recherche du zéro extrémal sur un segment.

```

initialisations:  $t_P = 0; t_Q = 1;$ 
proc dicho( $P, Q, v_P, v_Q, t_P, t_Q$ )
input  $P, Q$  extrémités de l'intervalle
       $v_P, v_Q$  valeurs de la fonction en  $P$  et  $Q$ 
       $t_P, t_Q$  bornes de l'intervalle  $\in [0, 1]$ 
begin
if  $|t_P - t_Q| < \varepsilon$  then
   $t = t_P; v = v_P;$ 
else
   $x_M = (x + x_p)/2; y_M = (y + y_p)/2; z_M = (z + z_p)/2;$ 
   $t_M = (t_P + t_Q)/2;$ 
   $v_M = \text{getVal}(M);$  /* retourne la valeur de la fonction en  $M$  */
  if  $((v \geq 0 \text{ and } v_M < 0) \text{ or } (v < 0 \text{ and } v_M \geq 0))$  then
    dicho( $P, M, v_P, v_M, t_P, t_M$ );
  else
    dicho( $M, Q, v_M, v_Q, t_M, t_Q$ );
  end if;
end if;
end.

```

ALGO. 1 - Recherche dichotomique des racines

Cet algorithme repose toutefois sur l'hypothèse qu'une et une seule intersection existe le long d'un segment reliant deux sommets de signes opposés et qu'aucune intersection n'existe dans le cas de sommets de mêmes signes. Le cas particulier d'une surface ayant de multiple zéros le long du segment ne sera donc pas traité, de même que celui d'une fonction produisant un contour fermé à l'intérieur d'une face d'un tétraèdre (Fig. 6).

**Analyse des tétraèdres.** Cette phase d'analyse conduit à l'approximation au moyen de triangles de la partie de la surface contenue dans un tétraèdre. Cette approximation procède en trois étapes. La première correspond au calcul des points d'intersection de la surface avec le tétraèdre, au moyen de la procédure de recherche dichotomique des racines. La seconde étape consiste à connecter ces points par des segments dans le plan des faces; ces segments matérialisent l'approximation de l'intersection de la surface avec les faces du tétraèdre. La troisième étape représente la connection de ces segments pour former des triangles, qui correspondent à l'approximation de la surface dans ce tétraèdre.

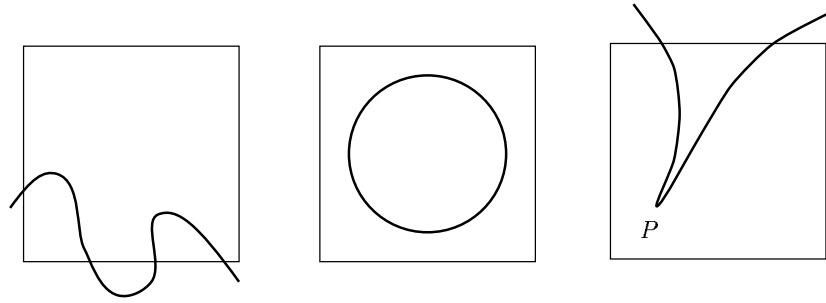


FIG. 6 - Cas d'intersection non traités.

Dans un tétraèdre, les sommets de signes positifs peuvent être séparés des sommets de signes négatifs simplement par un plan. Il en résulte donc  $2^4 = 16$  cas d'intersection possibles de la surface avec le tétraèdre. Les deux seuls polygones résultant de l'intersection sont les triangles et les quadrangles (Fig. 7). En outre, un certain nombre de cas dégénérés peuvent se présenter. Ils correspondent aux configurations pour lesquelles au moins un sommet du simplexe est nul et conduisent à la création de triangles plats (réduits à un arête) ou nuls (réduits à un sommet). Pour s'affranchir de ce problème, nous avons envisagé une solution dite d'*expansion* locale de la surface implicite, en utilisant la notion de pouvoir de séparation.

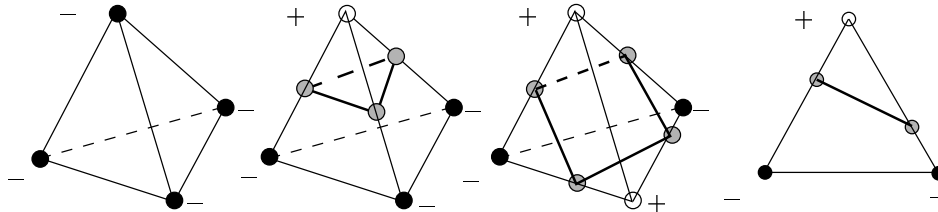


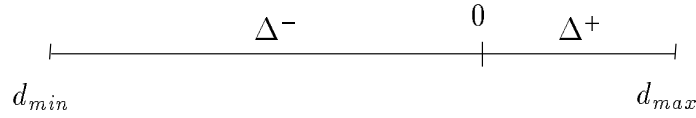
FIG. 7 - Polygonisation du tétraèdre (d'après Bloomenthal [3]).

**Pouvoir de séparation.** En remplaçant les sommets de valeur nulle par des sommets de valeur  $\varepsilon \approx 0$ , le problème de dégénérescence est évité. Cette méthode revient à expandre (ou contracter) localement la surface d'un coefficient  $\varepsilon$ . Pour être efficace, un tel procédé doit tenir compte du pouvoir de séparation de la méthode. Plus précisément,  $\varepsilon$  est choisi de la manière suivante

$$\varepsilon = \min(\tau, \min(\Delta^-, \Delta^+) \tau) \quad (19)$$

où  $\tau$  est un seuil fixé (en pratique,  $\tau = 10^{-6}$ ),  $\Delta^-$  et  $\Delta^+$  représentent les amplitudes maximales de variations des valeurs de la fonction dans les intervalles  $[-\infty, 0[$  et  $[0, \infty[$ , respectivement (Fig. 8). En conséquence, toute valeur  $x$  telle que  $|x| < \varepsilon$  est remplacée par  $\text{sgn}(x) \times \varepsilon$ .

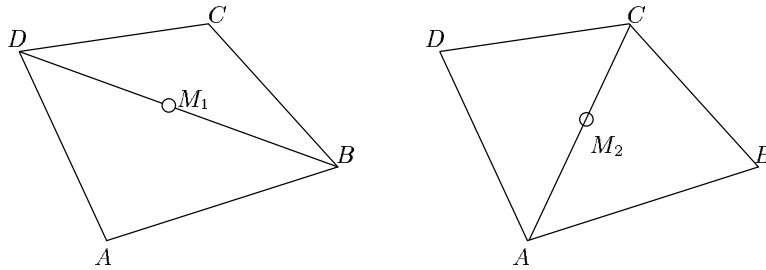
**Conversion des quadrangles.** L'examen des valeurs aux sommets des tétraèdres intersectés par la surface implicite conduit à des polygones de degré trois ou quatre uniquement. L'objectif de la méthode étant de produire une triangulation de la surface implicite, les quadrangles doivent être subdivisés en triangles. Dans le cas général, les quatre sommets d'un quadrangle sont non-coplanaires, ce qui signifie que les deux triangulations possibles de ce quadrangle ne

FIG. 8 - *Pouvoir de séparation.*

sont pas géométriquement équivalentes. Pour déterminer la triangulation à retenir, on peut faire appel à la notion de classification topologique introduite en section 2. Plus précisément, il faut tenir compte des variations de la fonction pour éviter de sélectionner une arête qui intersecte une arête vive du modèle (*ridge*). Une alternative consiste à utiliser le résultat du calcul suivant, notamment dans le cas de données discrètes (pour lesquelles les variations de la fonction ne sont pas connues en dehors des sommets des tétraèdres). Les volumes  $v_i$  des quatre tétraèdres *virtuels* s'appuyant sur les sommets du quadrangle et les milieux  $M_j$  des diagonales sont calculés, respectivement  $v_{1j} = \text{vol}(AM_jCD)$ ,  $v_{2j} = \text{vol}(M_jBCD)$ ,  $v_{3j} = \text{vol}(ABCM_j)$  et  $v_{4j} = \text{vol}(ABM_jD)$ . Soient  $f_i$  les valeurs de la fonction aux sommets, on calcule les quantités  $q_j$  suivantes

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^4 f_i v_{ij}}{\sum_{i=1}^4 f_i}, \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

Si  $q_1 < q_2$ , on retient les triangles  $ABC$  et  $ACD$ , sinon les triangles  $BCD$  et  $ABD$  (Fig. 9).

FIG. 9 - *Décomposition d'un quadrangle en deux triangles.*

**Orientation des triangles.** Un autre intérêt du partitionnement tétraédrique est qu'il permet d'orienter les polygones générés. Un triangle (resp. quadrangle) est défini par la liste orientée de ses sommets,  $P_i$ , donnée dans le sens direct  $K = (P_1, P_2, P_3)$  (resp.  $K = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ). Cette convention permet de donner une orientation au polygone. Nous avons choisi d'orienter les triangles de telle manière que le vecteur normal discret (obtenu par le produit vectoriel  $\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ ) soit orienté vers l'extérieur de l'objet (Fig. 10). Pour cela, on peut utiliser le produit scalaire  $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_1Q_i} \rangle$  où  $Q_i$  désigne un sommet de signe positif. L'orientation des triangles est correcte si ce produit scalaire est positif. Une approche similaire [9] consiste à réordonner les sommets du tétraèdre (de valeurs  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) de telle sorte que les sommets de signe négatif précèdent les sommets de signe positif. Si le déterminant  $\det(\beta - \alpha, \gamma - \beta, \delta - \gamma)$  est négatif, l'ordre des sommets du triangle est correct.

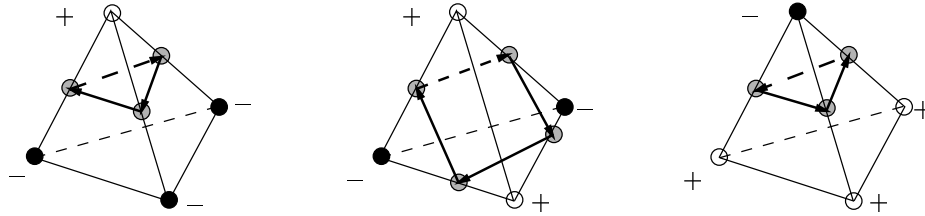


FIG. 10 - Orientation des polygones.

**Extension à la triangulation volumique.** Une extension intéressante de cette approche est qu'elle permet d'obtenir une triangulation volumique (en tétraèdres) du domaine d'étude. Pour cela, il suffit de retriangler indépendamment la partie interne au domaine de chaque tétraèdre intersecté par la surface implicite; cette intersection étant soit un triangle soit un quadrangle.

La figure 11 illustre les trois cas d'intersection possibles et leurs triangulations respectives.

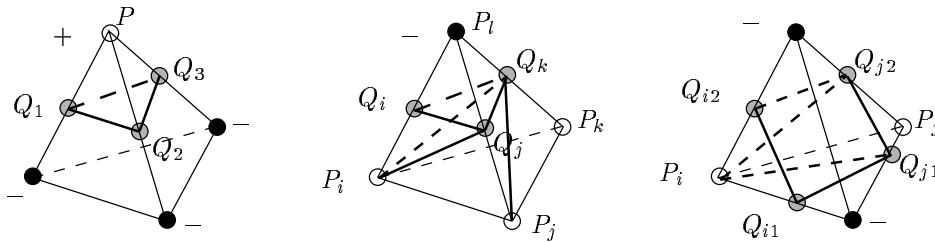


FIG. 11 - Triangulation volumique.

La première configuration correspond au cas où un seul sommet du tétraèdre est intérieur à l'objet implicite. Dans ce cas, si  $P$  représente ce sommet et  $Q_1, Q_2, Q_3$  les trois points d'intersection, alors on forme le tétraèdre  $Q_1Q_2Q_3P$ .

La seconde configuration correspond au cas où trois sommets désignés respectivement par  $P_i, P_j, P_k$ , dans l'ordre lexicographique, sont intérieurs à l'objet. Si  $Q_i, Q_j, Q_k$  désignent les points d'intersection sur les arêtes  $P_iP_l, P_jP_l$  et  $P_kP_l$ , où  $P_l$  désigne le sommet externe, alors le problème revient à trianguler d'abord la surface du prisme  $P_iP_jP_kQ_iQ_jQ_k$  puis l'intérieur de ce prisme. La triangulation de chaque face quadrangulaire du prisme doit être unique pour assurer la conformité de la triangulation résultante. Pour cela, on utilise l'ordre lexicographique des points  $P_i, P_j, P_k$  pour imposer la diagonale de la face quadrangulaire issue du plus petit sommet (pour la relation d'ordre imposée). Ainsi, par exemple pour la face  $P_iP_jQ_jQ_i$  du prisme, l'arête  $P_iQ_j$  est formée. La surface du prisme ainsi triangulée permet toujours la triangulation volumique de ce prisme. En effet, il suffit de remarquer que la configuration impossible (correspondant au polyèdre de Schönhardt [38]) contredit la relation d'ordre. Enfin, les tétraèdres  $Q_iQ_jQ_kP_i, P_jQ_jQ_kP_i$  et  $P_jQ_jQ_kP_k$  sont formés.

La dernière configuration correspond au cas où les deux sommets  $P_i, P_j$  donnés dans l'ordre lexicographique sont internes au domaine. Désignons par  $Q_{i1}, Q_{i2}$  les points d'intersection sur les arêtes du tétraèdre issues de  $P_i$ , et par  $Q_{j1}, Q_{j2}$  les points d'intersection sur les arêtes issues de  $P_j$ . Comme précédemment, le problème revient à trianguler la surface et le volume du prisme  $P_iQ_{i1}Q_{i2}P_jQ_{j1}Q_{j2}$ . Les deux faces quadrangulaires du prisme contenant les sommets  $P_i, P_j$  sont



triangulées de manière similaire, en introduisant les diagonales issues de  $P_i$ . La triangulation volumique dépend de la diagonale choisie pour la triangulation de la face  $Q_{i1}Q_{j1}Q_{j2}Q_{i2}$ .

L'extension proposée peut être implémentée de manière triviale et la triangulation résultante est obtenue au prix d'un surcoût très faible par rapport au coût de la triangulation de surface.

Nous allons à présent analyser le cas d'une fonction implicite dont les valeurs sont connues aux noeuds d'une grille régulière. Cet exemple est un cas particulier de partitionnement hexaédrique dont on va montrer qu'il peut se rattacher au cas général énoncé dans cette section.

## 5 Application au cas d'une grille régulière

Nous considérons à présent le cas particulier d'une grille régulière. Dans cette section, nous allons décrire un algorithme, appelé *Texel Algorithm*<sup>11</sup>, qui donne une technique simple et efficace de représentation d'un solide par son bord à partir de données volumétriques définies sur une grille entière. La représentation sera composée de faces triangulaires planes uniquement, décrivant une surface fermée. L'algorithme utilise une décomposition en tétraèdres de l'espace des voxels pour se ramener au cas général analysé dans la section précédente.

**Position du problème.** Le partitionnement spatial à base d'hexaèdres est très répandu dans la pratique. En effet, outre l'utilisation de la théorie des fonctions implicites pour définir des objets géométriques dans le domaine de la CAO, l'extraction et la triangulation d'une iso-surface est une technique souvent utilisée pour l'analyse de données volumétriques. Parmi les domaines concernés, on peut citer l'imagerie médicale ou les simulations numériques en mécanique des fluides.

L'objectif des algorithmes de triangulation de surfaces implicites ou d'isosurfaces est de déterminer les intersections de la surface avec les arêtes de la cellule est de former des triangles à partir de ces points. Le comportement de la fonction peut être connu précisément en tout point de l'espace ou doit être approché par un interpolant, dans le cas des données discrètes.

Dans la suite, les voxels sont considérés comme les cellules d'un réseau cubique entier et les valeurs de la fonction implicite considérée sont connues en chacun de ces noeuds. Sans revenir sur les algorithmes de type *Marching-Cubes* utilisant un recouvrement à base de cellules cubiques, un certain nombre d'approches utilisent une décomposition des voxels en tétraèdres.

**Approches similaires.** L'approche proposée étend les algorithmes proposés par Doi and Koide [9] qui utilisent une décomposition du voxel en cinq tétraèdres, des cycles orientés pour représenter les triangles de la surface et un calcul de déterminant pour déterminer l'orientation de ces cycles. Guézic et Hummel [16] ont introduit une table d'identification (*lookup table*) pour trouver l'orientation des cycles et une structure de données plus compacte. La même décomposition a été proposée par Payne et Toga [32], dans le cadre de la visualisation de structures cérébrales. En outre, Monga et al. [23] ont montré qu'il est possible de déterminer les courbures de la surface à partir de la différentiation discrète des valeurs aux sommets des voxels. De manière analogue, Thirion et Gourdon [47] "traquent" les lignes caractéristiques des iso-surfaces.

Un avantage évident du partitionnement en tétraèdres est qu'il élimine toute ambiguïté relative à la triangulation d'une cellule. Hall et Warren [17] ont utilisé cette technique pour l'approximation de surfaces implicites. S'il paraît acquis que ce recouvrement offre plus de flexibilité dans le contexte qui nous intéresse, la nature de la décomposition joue un rôle important dans le processus de triangulation. Tous les auteurs cités ont privilégié un partitionnement du voxel en cinq (ou six) tétraèdres, avec pour objectif de minimiser le nombre de tétraèdres du recouvrement. En revanche, deux problèmes sont intrinsèquement liés au découpage choisi.

**Effets liés à la décomposition.** Nous allons discuter les effets liés à la décomposition dans le cas d'un partitionnement d'un voxel en cinq ou six tétraèdres. Pour un voxel donné, essentiellement deux décompositions en cinq tétraèdres sont possibles, l'une étant la symétrique

---

11. **Texel**: contraction de *Tetrahedral Cell*.

de l'autre par rapport à l'un des plans des faces du voxel. Pour être consistant entre deux voxels adjacents par une face (i.e. de telle sorte que les décompositions de deux voxels adjacents soient conformes), il faut alterner ces deux décompositions de voxel en voxel. Cette contrainte impose de mettre au point un codage spécifique (par exemple binaire) pour identifier la décomposition d'un voxel parmi les deux possibles. Il est possible de s'affranchir de ce premier handicap en utilisant une décomposition en six tétraèdres. Dans ce cas, les motifs ne sont plus alternés, mais les faces opposées d'un voxel doivent avoir la même diagonale pour garantir la conformité du recouvrement (Fig. 12).

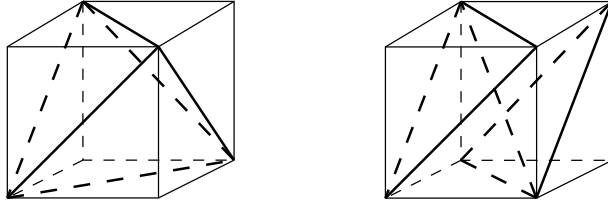


FIG. 12 - *Décomposition en cinq ou six tétraèdres.*

Un effet plus pervers de ce type de décomposition est qu'il conduit à des triangulations non uniques. En d'autres termes, l'intersection de la surface implicite avec un voxel ne conduira pas à la même triangulation selon la diagonale privilégiée par la décomposition (Fig. 13). Ce dernier point est d'autant plus gênant que la décomposition est arbitraire et ne repose sur aucun critère faisant intervenir les valeurs de la fonction aux sommets du voxel par exemple.

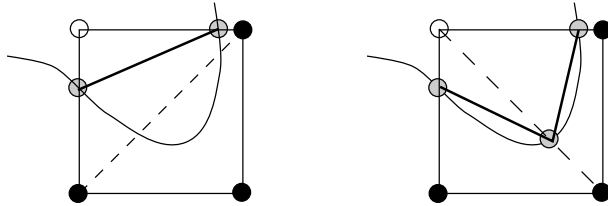


FIG. 13 - *Résultat dépendant de la triangulation.*

Une méthode plus robuste consiste à considérer une décomposition du voxel en douze tétraèdres, ce qui fait intervenir une information supplémentaire sur la valeur de la fonction au centre du voxel.

## 5.1 Partitionnement tétraédrique.

Nous considérons un partitionnement tétraédrique du voxel en douze tétraèdres (Fig. 14). Ce découpage fait intervenir un point supplémentaire, le centre du voxel. La valeur au point central peut être

- calculée par le biais de la fonction implicite,
- interpolée à partir des valeurs aux sommets du voxel (voir ci-dessous).

On voit immédiatement apparaître un avantage de cette technique. Le choix de la diagonale d'une face de voxel peut être choisie de manière à privilégier la direction offrant la meilleure

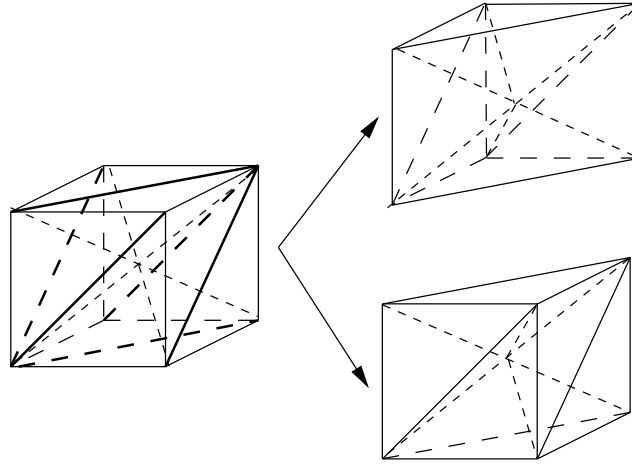


FIG. 14 - Décomposition d'un hexaèdre en 12 tétraèdres.

information. Ainsi, dans l'exemple de la figure 13, on privilégie la solution de droite qui fait apparaître une racine supplémentaire et conduit de fait à une meilleure approximation du comportement de la surface implicite sur la face du voxel. D'une manière générale, toute diagonale reliant des sommets de signes opposés sera choisie de préférence à une diagonale joignant des sommets de mêmes signes.

L'algorithme proposé repose donc sur une décomposition unique et sans ambiguïté des voxels. On considère donc le recouvrement simplicial du domaine d'étude résultant de cette décomposition. L'étape de triangulation repose (cf. section 4.2) sur la détermination algorithmique des racines de la fonction le long des arêtes des simplexes. Cette phase de traitement fait généralement appel à la technique de recherche des racines détaillée précédemment. Dans le cas de données volumétriques, cette technique doit être remplacée par une interpolation.

**Cas particulier des données volumétriques.** On considère ici le cas particulier où la fonction implicite n'est connue que de manière discrète (ou tabulée). La recherche dichotomique des racines doit être remplacée par une interpolation linéaire des valeurs aux extrémités de l'arête considérée. De manière analogue, la valeur au point central peut être interpolée à partir des deux sommets opposés de la diagonale résultant de la décomposition en tétraèdres.

Une alternative existe toutefois à ce schéma classique. Il est possible de considérer une décomposition s'appuyant sur une grille entière ne prenant en compte qu'un point sur deux. De cette façon, la valeur au centre est une donnée du problème et ne fait pas appel à l'interpolation linéaire. En revanche, il devient possible d'utiliser une interpolation quadratique pour trouver la racine le long d'une arête. En effet, toute arête comporte trois valeurs, outre les valeurs aux extrémités, la valeur au centre de l'arête est également une donnée du problème (Fig. 15). Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les valeurs en trois points de l'arête, le calcul de la racine est donnée par la formule

$$(2\alpha - 4\beta + 2\gamma)t^2 + (-3\alpha + 4\beta - \gamma)t + \alpha = 0 \quad (21)$$

où  $t$  varie linéairement entre 0 et 1, le long de l'arête. Comme  $\alpha\gamma < 0$ , la fonction admet une racine dans  $[0, 1]$ .

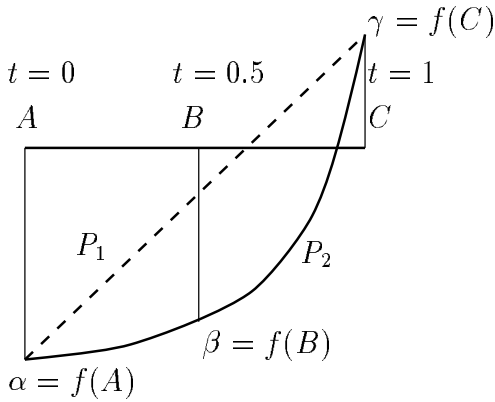


FIG. 15 - *Interpolation quadratique.*

La recherche des racines étant maintenant réglée, la seconde étape de la triangulation concerne l'analyse des tétraèdres et la génération des triangles. Identique au cas général, elle ne sera pas détaillée ici (cf. section 4.2).

**Remarques.** La surface implicite peut être représentée par un arbre octal. Ce partitionnement hiérarchique de l'espace est obtenu par subdivision récursive de cubes, à partir d'un cube englobant la surface [2, 11]. Un inconvénient de cette approche est que de petits détails peuvent être ignorés par une cellule de taille trop importante, ce qui provoque la terminaison de la procédure de subdivision. En outre, si la taille de l'objet implicite n'est pas correctement estimée, cet objet peut être tronqué.

Une approche différente consiste à *traquer* la surface par propagation (*tracked partitioning*). Cette technique requiert de connaître une cellule de départ pour chaque composante connexe de la surface. Le graphe d'adjacence utilisé par ce procédé n'est pas compatible avec une subdivision adaptative, à la différence d'un arbre octal.

Dans les méthodes par propagation, le nombre d'évaluations des valeurs de la fonction est en  $O(n^2)$ , où  $n$  est une mesure de la taille de l'objet (avec  $n^2$ , la surface de cet objet). Les méthodes qui utilisent une recherche exhaustive (par exemple le *Marching-Cubes*) sont en  $O(n^3)$ .

La méthode proposée est simple et robuste et conduit à une triangulation conforme de la surface implicite considérée.

## 6 Extensions

Les triangulations de surfaces obtenues au moyen de la méthode proposée peuvent être optimisées. Cette optimisation peut se concevoir essentiellement de deux façons, soit comme une amélioration de la géométrie, soit en utilisant une approche basée sur une triangulation de Delaunay adaptative (voir la partie III).

Dans le premier cas, les algorithmes d'optimisation sont basés sur quelques outils de base, parmi lesquels on distingue les opérateurs topologiques, qui affectent les connexions, des opérateurs géométriques qui modifient la position des sommets. Il est intéressant de remarquer que ces opérateurs sont locaux. L'opérateur topologique utilisé est le retournement d'arête (*edge swapping*). Cet opérateur agit sur deux triangles adjacents par une arête. Une arête de la triangulation est retournée si les deux triangles issus de cette opération correspondent à une meilleure approximation de la géométrie. Le bougé de points peut également être utilisé pour optimiser localement l'approximation géométrique de la boule d'un point [44, 45]. Le lecteur pourra juger des effets de ces opérateurs dans la partie II de cette série de rapports sur la triangulation des surfaces implicites.

Les triangulations obtenues conduisent généralement à un grand nombre de triangles. Il est donc nécessaire de simplifier (*i.e.* de réduire) ce nombre, tout en préservant la qualité de l'approximation géométrique. C'est l'objet des méthodes de décimation [15, 42, 48, 49]. Les triangulations résultantes peuvent alors servir de support géométrique à la surface (cf. méthodologie du maillage des surfaces implicites, section 3).

## 7 Conclusions

Dans ce rapport nous avons introduit une méthode de triangulation de surfaces implicites basée sur un partitionnement tétraédrique du domaine d'étude. La méthode proposée est une généralisation des méthodes classiques d'extraction (adaptative) d'iso-surfaces. Les concepts géométriques d'une modélisation basée sur les fonctions implicites a été introduite. En outre, une méthodologie de maillage (de type éléments finis) des surfaces implicites a été exposée en détail. Le cas des grilles régulières utilisées pour l'extraction d'iso-surfaces a été considéré comme un cas particulier de cette approche. Des exemples de triangulations de surfaces implicites sont présentés dans la partie II de ce rapport, pour illustrer les performances et capacités de la méthode proposée.

Une suite naturelle à ce travail consiste à considérer une technique adaptative de partitionnement du domaine d'étude en tétraèdres, en utilisant le critère de Delaunay.

## Références

- [1] C. BAJAJ, I. IHM AND J. WARREN, Higher-order interpolation and least-squares approximation using implicit algebraic surfaces, *ACM Trans. Graph.*, vol 12, pp. 327–347, 1993.
- [2] J. BLOOMENTHAL, Polygonization of implicit surfaces, *CAGD*, vol 5, pp. 341–355, 1988.
- [3] J. BLOOMENTHAL, Skeleton design of natural forms, PhD thesis, University of Calgary, AB, USA, 1995.
- [4] H. BOROUCAKI, Triangulation sous contraintes en dimension quelconque, Rapport de Recherche INRIA, RR-2373, 1994.
- [5] A. BOWYER, Computing Dirichlet tessellations, *Comput. J.*, pp 162–169, 1991.
- [6] B.K. CHOI, H.Y. SHIN AND J.W. LEE, Triangulation of scattered data in 3D space, *CAD*, vol 20, no 5, pp. 239–248, 1988.
- [7] P. CIGNONI, C. MONTANI, E. PUPPO AND R. SCOPIGNO, Optimal isosurface extraction from irregular volume data, *IEEE/ACM Symp. on Volume Visualization*, San Francisco, CA, oct. 28–29, 1996.
- [8] H.S.M. COXETER, Regular polytopes, MacMillan, New York, 1963.
- [9] A. DOI AND A. KOIDE, An efficient method of triangulating equi-valued surfaces by using tetrahedral cells, *IEICE Trans.*, vol E74, no 1, pp. 214–224, 1991.
- [10] M.J. DÜRST, Letters: additional reference to “Marching Cubes”, *ACM Comp. Graphics*, vol 22, no 4, pp. 72–73, 1988.
- [11] P.J. FREY, B. SARTER AND M. GAUTHERIE, Fully automatic mesh generation for 3D domains based upon voxel sets, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 37, pp. 2735–2753, 1994.
- [12] P.J. FREY ET H. BOROUCAKI, Critères géométriques pour l’évaluation des triangulations de surfaces, Rapport de Recherche INRIA, RR-2951, 1996.
- [13] P.L. GEORGE, Automatic mesh generation. Application to Finite Element Methods, Wiley, 1991.
- [14] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis, à paraître.
- [15] A. GUÉZIEC, Surface simplification inside a tolerance volume, IBM Research Report, RC-20440, 1996.
- [16] A. GUÉZIEC AND R. HUMMEL, Exploiting triangulated surface extraction using tetrahedral decomposition, *IEEE Trans. on Visualization and Comput. Graphics*, vol 1., no 4, pp. 328–342, 1995.
- [17] M. HALL AND J. WARREN, Adaptive polygonization of implicitly defined surfaces, *IEEE Computer Graphics & Applications*, pp. 33–42, nov. 1990.
- [18] C.M. HOFFMANN, Implicit curves and surfaces in CAGD, *IEEE Comp. Graphics Appl.*, vol 13, pp. 79–88, 1993.
- [19] H. HOPPE, Surface reconstruction from unorganized points, Phd thesis, Univ. of Washington, 1994.

- [20] Y. LIVNAT, H.W. SHEN AND C.R. JOHNSON, A near isosurface extraction algorithm using the span space, *IEEE Trans. on Vis. and Comp. Graph.*, vol 2, no 1, pp. 73–84, 1996.
- [21] W.E. LORENSEN AND H.E. CLINE, Marching cubes: a high-resolution 3D surface construction algorithm, *Siggraph'87 Conf. Proc., Comp. Graphics*, vol 21, no 4, pp. 163–169, 1987.
- [22] S.V. MATVEYEV, Approximation of isosurface in the Marching Cube: ambiguity problem, *Visualization'94, Conf. Proc., IEEE Computer Society Press*, pp. 288–292, 1994.
- [23] O. MONGA, S. BENAYOUN AND O. FAUGERAS, Using third order derivative to extract ridge lines in 3D images, *Proc. Conf. Vision and Pattern recognition*, Urbana-Champaign, Ill, june 1992.
- [24] C. MONTANI, R. SCATENI AND R. SCOPIGNO, A modified look-up table for implicit disambiguation of Marching Cubes, *The Visual Computer*, vol 10, 1994.
- [25] C. MONTANI, R. SCATENI AND R. SCOPIGNO, Discretized Marching Cubes, *IEEE*, 1994.
- [26] H. MULLER AND M. STARK, Adaptive generation of surfaces in volume data, *The Visual Computer*, vol 9, no 4, pp. 182–199, 1993.
- [27] G.M. NIELSON AND B. HAMANN, The asymptotic decider: resolving the ambiguity in Marching Cubes, *Visualization'91, Conf. Proc., IEEE Computer Society Press*, pp. 83–90, 1991.
- [28] P. NING AND J. BLOOMENTHAL, An evaluation of implicit surface tilers, *IEEE Computer Graphics & Applications*, vol 13, no 6, pp. 33–41, 1993.
- [29] A. PASKO, V. ADZHIEV, A. SOURIN AND V. SAVCHENKO, Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications, *The Visual Computer*, vol 11, pp. 429–446, 1995.
- [30] A.A. PASKO, V. SAVCHENKO, V.D. ADZHIEV AND A.I. SOURIN, Multidimensional geometric modeling and visualization based on the function representation of objects, Technical report, University of Aizu, Dept of Comp. Soft., TR-93-1-008, 1993.
- [31] A.A. PASKO AND V. SAVCHENKO, Blending operations for functionally based constructive geometry. Set theoretic solid modeling: techniques and applications, *CSG'94 Conf. Proc., Information Geometers*, Winchester, IK, pp. 151–161, 1994.
- [32] B. PAYNE AND A. TOGA, Surface mapping brain function on 3d models, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 1990.
- [33] C.S. PETERSEN, B.R. PIPER AND A.J. WORSEY, Adaptive contouring of a trivariate interpolant, in *Geometric Modeling: algorithms and new trends*, vol 2, no 1, pp. 53–59, 1985.
- [34] A.A.G. REQUICHA, Representations for rigid solids: theory, methods and systems, *Comput. Surveys*, vol 12, pp. 437–464, 1980.
- [35] A. RICCI, A constructive geometry for computer graphics, *The Computer Journal*, vol 16, pp. 157–160, 1972.
- [36] V.L. RVACHEV, On the analytical description of some geometric objects, Report of the Ukrainian Academy of Sciences, vol 153, pp. 765–767, 1963.
- [37] M.F.W. SCHMIDT, Cutting cubes - visualizing implicit surfaces by adaptive polygonization, *The Visual Computer*, vol 10, pp. 101–115, 1993.



- [38] E. SCHÖNHARDT, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder, *Mathematisch Annalen*, vol 98, pp. 309–312, 1928.
- [39] S. SCLAROFF AND A. PENTLAND, Generalized implicit functions for computer graphics, *Comput. Graph.*, vol 25, pp. 247–250, 1991.
- [40] V. SHAPIRO, Real functions for representation of rigid solids, *Comput. Aided Geom. Design*, vol 11, pp. 153–175, 1994.
- [41] M.S. SHEPHARD AND M.K. GEORGES, Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol 32, pp. 709–749, 1991.
- [42] W.J. SCHROEDER, J.A. ZARGE AND W. LORENSEN, Decimation of triangle mesh, *ACM Comput. Graphics*, vol 26, no 2, pp. 65–70, 1992.
- [43] B.T. STANDER AND J.C. HART, Guaranteeing the topology of an implicit surface polygonization, to appear in Siggraph'96 Conf. Proc., *Comput. Graphics*, 1996.
- [44] G. TAUBIN, Curve and surface smoothing without shrinkage, Proc. 5th Int. Conf. on Comp. Vision, pp 852–857, 1995.
- [45] G. TAUBIN, T. ZHANG AND G. GOLUB, Optimal surface smoothing as filter design, IBM Research Report, RC-20404(#90237), 1996.
- [46] J.P. THIRION, The marching lines algorithm: new results and proofs, Rapport de Recherche INRIA, RR-1881, 1993.
- [47] J.P. THIRION AND A. GOURDON, Computing the differential characteristics of isodensity surfaces, *CVGIP*, pp. 190–202, 1995.
- [48] G. TURK, Re-tiling polygonal surfaces, *Comput. Graphics*, vol 26, no 2, pp. 55–64, 1992.
- [49] A. VAN GELDER AND J. WILHELMS, Octrees for faster isosurface generation, *Transactions on Graphics*, vol 11, no 3, pp. 201–227, 1992.
- [50] J. WILHELMS AND A. VAN GELDER, Topological considerations in isosurface generation, *Comput. Graphics*, vol 24, no 5, pp. 79–86, 1990.
- [51] G. WYVILL, C. MCPHEETERS AND B. WYVILL, Data structure for soft objects, *The Visual Computer*, vol 2, pp. 227–234, 1986.
- [52] R. YAGEL, D. COHEN AND A. KAUFMAN, Normal estimation in 3D discrete space, *The Visual Computer*, vol 8, pp. 278–291, 1992.



---

Unit e de recherche INRIA Lorraine, Technop le de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399