Comportement asymptotique du coefficient effectif pour un opérateur aléatoire aux différences

Andrey Piatnitski, Elisabeth Remy

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Comportement asymptotique du coefficient effectif pour un opérateur aléatoire aux différences

Andrey Piatnitski et Elisabeth Remy

N° 3061

Décembre 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Comportement asymptotique du coefficient effectif pour un opérateur aléatoire aux différences

Andrey Piatnitski* et Elisabeth Remy**

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SYSDYS

Rapport de recherche n° 3061 — Décembre 1996 — 30 pages

Résumé : Soit un milieu aléatoire discret de type échiquier à deux composants homogènes. Nous étudions la diffusion effective d'une marche aléatoire sur ce milieu lorsque la diffusion de l'un des deux composants tend vers zéro. Dans le cas où le choix du composant en chaque point de la grille se fait indépendamment des valeurs aux autres points et où les probabilités de transition vers les points voisins sont les moyennes harmoniques des diffusions correspondantes, nous montrons que le comportement asymptotique de la diffusion effective dépend de la probabilité de chacun des composants.

Mots-clé : Milieu aléatoire, homogénéisation, opérateur aux différences, percolation, marche aléatoire

(Abstract: pto)

Ce travail s'intègre en partie dans un contrat IFP/INRIA. Le séjour de M. Piatnitski a été financé par l'INRIA (UR de Sophia–Antipolis), le projet SYSDYS et la Direction Générale du Développement Economique de la Ville de Marseille.

* . Leninski prospect 53, Moscow 117924 Russia, andrey@sci.lpi.msk.su
**. INRIA/LATP, 39 rue Joliot–Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France, eremy@sophia.inria.fr

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : 04 93 65 77 77 – Télécopie : 04 93 65 77 65

Asymptotic behaviour of the effective coefficient for a random difference operator

Abstract: We study the effective diffusion for the random walk in two–components homogeneous discrete random media as the diffusion of one of the components goes to zero. Assuming that the components are chosen independently at each point of the grid and that the transition probabilities for the neighbor points of the grid are defined as the harmonic mean of the corresponding diffusions, we find the asymptotics of effective diffusion depending on the probability of each components.

Key-words: Random media, homogenization, difference operator, percolation, random walk

Table des matières

1 Introduction

La théorie de l'homogénéisation d'opérateurs différentiels a été développée dans divers travaux (entre autres Jikov et al [4], Papanicolaou [14], Bensoussan et al [2]). Cependant, peu d'études traitent de l'homogénéisation d'opérateurs aux différences ; on peut toutefois citer les travaux de Kozlov [8, 7], Krasniansky [9] ou Künnemann [11]. Ce point est pourtant crucial sur le plan algorithmique : les opérateurs aux différences apparaissent naturellement dans des approximations de type différences finies, mais également dans des techniques de type Monte Carlo utilisant des marches aléatoires. C'est cette dernière approche que nous adoptons ici.

Notre travail est, à l'origine, motivé par un problème d'ingénierie pétrolière de calcul de perméabilité effective d'un milieu aléatoire (voir Kerjean [5]). Des méthodes de marches aléatoires sur des grilles–blocs (modélisant le sous–sol en dimension 2 ou 3) ont été proposées par Mc Carthy [12, 13]. En effet, des statistiques asymptotiques sur ces marches conduisent alors à un estimateur de la perméabilité effective.

Se pose alors le problème du choix de la probabilité de transition en fonction des perméabilités locales associées à chacun des blocs (cette valeur de perméabilité étant elle–même la réalisation d'un champ de perméabilité aléatoire). Mc Carthy [12, 13] propose une moyenne harmonique des perméabilités locales. Il existe d'autres possibilités (voir Kruel–Romeu [10] ou Kerjean [5]).

Avant d'utiliser ce type d'algorithmes pour une application le plus souvent complexe (en ingénierie pétrolière, le champ de perméabilité est supposé stationnaire ergodique avec corrélation spatiale, éventuellement log–normal), il est important de les étudier et de les valider sur des champs simples. Dans ce cadre, on va pouvoir établir des propriétés fines du coefficient effectif du milieu. Les méthodes d'approximation par marches aléatoires pourront être validées si elles permettent de rendre compte de ces propriétés.

Ces techniques font donc apparaître des opérateurs aléatoires aux différences avec coefficients à variations rapides. Il est important de pouvoir spécifier de quel type d'opérateurs différentiels ceux–ci vont être l'approximation. En d'autres termes, quel phénomène physique va être décrit par ces opérateurs aux différences ? Ces derniers ne sont pas l'approximation, au sens classique, d'opérateurs différentiels à coefficients mesurables. En effet, les variations des coefficients des opérateurs aux différences ne permettent pas, à la limite, d'obtenir un coefficient mesurable.

Dans la présente étude, on s'intéresse au problème suivant : considérons un champ aléatoire – on ne parlera plus de perméabilité – ayant une structure de type échiquier. À chaque case est attribuée indépendamment des autres cases une valeur, soit $\delta > 0$ (une petite valeur) , soit 1, avec probabilités respectives p et $1-p$. Nous discrétisons ce domaine en mettant un point de la grille dans chaque bloc ; de cette façon, nous prenons une maille de grille de l'ordre de l'échelle des hétérogénéités. En effet, comme l'ont souligné Avellaneda et al [1] dans le cadre d'approximations par différences finies, afin de rendre au mieux compte de l'information fournie par la structure du milieu, il nous faut prendre une maille de grille au moins du même ordre, sinon plus petite, que la taille caractéristique de l'hétérogénéité.

Puis nous prenons comme probabilité de transition entre deux cases voisines la moyenne harmonique des valeurs des cases. L'opérateur limite va alors être une matrice scalaire car la distribution du milieu est isotrope. Nous exprimons alors le comportement asymptotique, lorsque δ tend vers 0, du coefficient effectif en fonction de la probabilité p. On peut noter que le modèle de l'échiquier a déjà été étudié dans le cas continu (par exemple dans Jikov et al [4]).

2 Préliminaires

Nous travaillons sur une structure régulière de type échiquier. Supposons, pour faciliter les notations, que les coins des carrés formant cet échiquier coïncident avec les points de $\mathbb{Z}^2$. On notera :

$$Q \triangleq [0,1]^2 \ , \quad Q_n \triangleq [0,\, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 \ , \quad Q_\varepsilon \triangleq \varepsilon\, \mathbb{Z}^2 \cap Q \ .$$

Nous adoptons les définitions des espaces $L^2(Q_\varepsilon)$, $W^{-1,2}(Q_\varepsilon)$ et $W_0^{1,2}(Q_\varepsilon)$ qui sont rappelées en Annexe A.1.

Définition 2.1 $\{p(x, y, \omega) ; x, y \in \mathbb{Z}^2\}$ *est appelée une famille de* probabilités de transition *sur la grille* $\mathbb{Z}^2$ *si :*

$$\forall x,\, y \in \mathbb{Z}^2, \qquad p(x, y, \omega) \geq 0 \quad \textit{et} \sum_{y' \in \mathbb{Z}^2} p(x, y', \omega) = 1.$$

Cette famille est dite statistiquement homogène *si : quels que soient les points* $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$*, l'ensemble*

$$\{p(x_1 + z,\, y_1 + z,\, \omega), \ldots, p(x_k + z,\, y_k + z,\, \omega)\}$$

ne dépend pas de $z \in \mathbb{Z}^2$*.*

Définition 2.2 $\{T_x;\ x \in \mathbb{Z}^2\}$ *est appelé* système dynamique qui préserve la mesure μ *si :*

- (i) $T_x : \Omega \to \Omega$ *est* $\mathcal{F}$*–mesurable* $\forall x \in \mathbb{Z}^2$,
- (ii) μ *est préservée par* T_x ,
- (iii) $T_0 = \mathrm{I}$, $T_x \circ T_y = T_{x+y}$.

Le système dynamique $\{T_x;\ x \in \mathbb{Z}^2\}$ *est dit* ergodique *lorsque pour tout* $f \in L^\alpha(\Omega)$*,* $\alpha \geq 1$*,*

$$f(T_x \omega) = f(\omega) \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2 \Longrightarrow f \equiv \textit{constante} \quad \forall w\; \mu\textit{–p.s.}$$

Soit l'espace canonique : $\Omega = \{\omega \ : \ \mathbb{Z}^2 \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{Z}^2}\}$. On le munit de la tribu cylindrique $\mathcal{F}$.

On définit l'opérateur de translation T_x :

$$T_x : \begin{array}{ll} \Omega & \longrightarrow \Omega \\ \omega(\cdot) & \longrightarrow \omega(\cdot + x) \end{array}$$

T_x est un système dynamique, que l'on suppose ergodique. On se donne une famille de variables aléatoires $\{p_z(\omega),\, z \in \mathbb{Z}^2\}$ telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, elles vérifient :

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} p_z(\omega) = 1 \ , \quad p_z(\omega) \geq 0 \ ,$$

et qui sont définies par : $p_z(T_x\,\omega) \stackrel{\triangle}{=} \omega_z(x),\ x \in \mathbb{Z}^2$, où $\omega_z(x)$ est la projection sur la z–ième coordonnée de $\omega(x)$.

On définit enfin une mesure μ sur l'espace Ω telle que

– le système dynamique T_x préserve μ ,

– μ ne charge que l'ensemble $\{\omega \in \Omega\ :\ \sum_{z\in\mathbb{Z}^2} p_z(\omega) = 1,\ \text{et}\ p_z(\omega) \geq 0\}$,

– le champ aléatoire $\{p_z(\omega),\ z \in \mathbb{Z}^2\}$ soit statistiquement homogène.

$p_z(\omega)$ joue le rôle de la probabilité de transition de l'origine au point z, et la probabilité de transition d'un point x au point $x+z$ est :

$$p(x, x+z) \stackrel{\triangle}{=} p_z(T_x\,\omega)$$

(on ne notera plus la dépendance en ω). ω représente l'état de l'environnement.

On s'intéresse plus précisément au cas particulier suivant : à chaque point de la grille est attribué indépendamment un coefficient κ qui ne peut prendre que deux valeurs :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2\ , \quad \kappa(x) \stackrel{\triangle}{=} \begin{cases} \delta & \text{avec probabilité} \quad p\ , \\ 1 & \text{avec probabilité} \quad 1-p\ . \end{cases}$$

Nous réalisons une marche aléatoire sur la grille. On ne va pouvoir se déplacer que vers un nombre fini de points : $\Lambda = \{z\ :\ p_z(0) > 0\}$, l'ensemble des déplacements possibles, est l'ensemble fini suivant :

$$\Lambda \stackrel{\triangle}{=} \{(0,0),\ \pm e_1,\ \pm e_2\}, \qquad \text{avec} \quad e_1 \stackrel{\triangle}{=} (1,0), \quad e_2 \stackrel{\triangle}{=} (0,1)\ ,$$

c'est–à–dire que les sauts ne sont possibles que vers les quatre plus proches voisins. Les probabilités de transition

$$p_z(x) \stackrel{\triangle}{=} p(x,\ x+z)\ , \quad x, z \in \mathbb{Z}^2$$

sont les moyennes harmoniques des valeurs des deux sites (voir McCarthy [13]), i.e. :

$$\begin{aligned} p_z(x) &\stackrel{\triangle}{=} 0 & &\text{si } z \notin \Lambda\ , \\ p_z(x) &\stackrel{\triangle}{=} \frac{\kappa(x)\,\kappa(x+z)}{2(\kappa(x)+\kappa(x+z))} & &\text{si } z \in \{\pm e_1, \pm e_2\}\ , \\ p_z(x) &\stackrel{\triangle}{=} 1 - \sum_{z\in\{\pm e_1,\pm e_2\}} p_z(x) & &\text{si } z = (0,0)\ . \end{aligned}$$

On remarque que les probabilités de transition sont symétriques :

$$p(x,\, x+z) = p(x+z,\, x).$$

On définit, pour $x,\, z \in \varepsilon\, \mathbb{Z}^2$: $p_z^\varepsilon(x) \stackrel{\triangle}{=} p_{\varepsilon^{-1} z}(\varepsilon^{-1}\, x)$.

Considérons le problème aux différences suivant:

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{z \in \varepsilon\, \Lambda} p_z^\varepsilon(x)\, u^\varepsilon(x+z) + \varepsilon^2\, f(x) \;, \qquad \forall x \in \overset{\circ}{Q}_\varepsilon \;,$$

$$u^\varepsilon(x) = 0 \;, \qquad \forall x \in \partial Q_\varepsilon$$

où f est une fonction arbitraire de $L^2(Q_\varepsilon)$. Cette forme n'étant pas très pratique, nous allons chercher à la mettre sous la forme divergence. Adoptons la notation suivante : pour toute fonction v définie sur la grille Q_ε, pour $x, z \in Q_\varepsilon$,

$$\partial_z v(x) = \frac{1}{\varepsilon}(v(x+z) - v(x)) \;.$$

En utilisant les propriétés de symétrie des probabilités de transition, et le fait que $\sum_{z \in \varepsilon\, \Lambda} p_z^\varepsilon(x) = 1$, on obtient A_ε^δ (l'opérateur à l'échelle ε) :

$$A_\varepsilon^\delta\, v(x) = \sum_{z \in \varepsilon\, \Lambda} \partial_{-z} v(x) p_z^\varepsilon(x)\, \partial_z v(x) \;, \qquad \forall x \in Q_\varepsilon \;.$$

Si on pose : $a_{zz'}^{\varepsilon,\delta}(x) \stackrel{\triangle}{=} p_z^\varepsilon(x)\, \delta_{zz'}$, δ étant le symbole de Kronecker, on a alors :

$$A_\varepsilon^\delta\, v(x) = \sum_{z,z' \in \varepsilon\, \Lambda} \partial_{-z'} v(x)\, a_{zz'}^{\varepsilon,\delta}(x)\, \partial_z v(x) \;.$$

On note A^δ l'opérateur homogénéisé :

$$A^\delta \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{div}\,(\mathcal{A}^\delta\, \nabla\,) \;.$$

Définition 2.3 *On définit le* flux *dans* $L^2(Q_\varepsilon)$ *de la façon suivante :*

$$p^\varepsilon(x) \stackrel{\triangle}{=} \begin{pmatrix} \sum_{z,z'} (z,\, e_1)\, a_{zz'}^{\varepsilon,\delta}\, \partial_{z'} u^\varepsilon \\ \sum_{z,z'} (z,\, e_2)\, a_{zz'}^{\varepsilon,\delta}\, \partial_{z'} u^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^\varepsilon(x) \\ p_2^\varepsilon(x) \end{pmatrix} \;.$$

Définition 2.4 (G–convergence) *Soit une famille de problèmes de Dirichlet :*

$$A^\varepsilon\, u^\varepsilon = f^\varepsilon \ , \qquad u^\varepsilon \in W_0^{1,2}(Q_\varepsilon), \quad f^\varepsilon \in W^{-1,2}(Q_\varepsilon) \ .$$

On dit que : $A^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{G} A$ *si pour toute suite* $f^\varepsilon \in W^{-1,2}(Q_\varepsilon)$ *telle que* $f^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$ *dans* $W^{-1,2}(Q)$*, on a :*

$$\begin{array}{l} u^\varepsilon \longrightarrow u^0 \quad \textit{faiblement dans } W_0^{1,2}(Q) \ , \\ p^\varepsilon \longrightarrow p^0 = \mathcal{A}\,\nabla u^0 \quad \textit{faiblement dans } L^2(Q) \end{array}$$

où u^0 *est solution du problème de Dirichlet :*

$$A\, u^0 = f, \qquad u^0 \in W_0^{1,2}(Q) \ ,$$

et $A = \mathrm{div}\ (\mathcal{A}\,\nabla)$.

Considérons la famille de problèmes de Dirichlet suivante :

$$A_\varepsilon^\delta\, u^\varepsilon = f_\varepsilon \ , \qquad u^\varepsilon \in W_0^{1,2}(Q_\varepsilon)$$

où f_ε est la restriction de f sur Q_ε (voir Annexe A.3).

Proposition 2.5 (Kozlov [8], §2) *On a G–convergence :*

$$A_\varepsilon^\delta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{G} A^\delta.$$

Nous savons de plus que : $\mathcal{A}^\delta = a^\delta(p)\, I$ (I est la matrice identité) car la distribution du milieu est isotrope et la matrice limite est constante.

Remarque 2.6 u^ε est définie sur Q_ε et u^0 sur Q. Pour que la convergence de u^ε vers u^0 ait un sens, il faut étendre u^ε comme indiqué dans l'Annexe A.2.

Dans le cas d'un milieu continu, certains résultats concernant le comportement du coefficient homogénéisé en fonction de la probabilité p sont connus (voir Jikov et al [4]). Nous allons nous inspirer des preuves de ces résultats et les adapter pour trouver des résultats en milieu discret.

Le premier paragraphe est consacré à vérifier que l'on a, pour les opérateurs satisfaisant les propriétés de la Proposition 2.5, la convergence des énergies pour des problèmes variationnels avec conditions de Dirichlet non homogènes aux bords. Ce résultat nous permettra ensuite de trouver le comportement du coefficient effectif $a^\delta(p)$ en fonction de p en utilisant la méthode de "percolation des canaux".

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 2.7 *Soit p_0 est la probabilité critique à partir de laquelle on a un amas infini de δ (*cf. §4*). Le coefficient effectif $a^\delta(p)$ vérifie :*

- $0 < c_1(p) \le a^\delta(p) \le 1 \quad$ *si* $\quad 0 \le p < p_0$,
- $\delta \le a^\delta(p) \le c_2(p)\,\delta$, $\quad c_2(p) > 0 \quad$ *si* $\quad p_0 < p \le 1$,

i.e. il est uniformément positif lorsque $0 \le p < p_0$ et se comporte comme δ lorsque $p_0 < p \le 1$.

Le comportement asymptotique de la constante $c(p)$ près de la valeur critique p_0 est intéressant à connaître et peut être précisé par le résultat suivant :

Théorème 2.8 *Il existe c_1, c_2, α_1, α_2 des constantes strictement positives telles que :*

– *si* $p < p_0$,

$$c_1\,(p_0 - p)^{\alpha_1} \le a^\delta(p) \ ,$$

– *si* $p > p_0$,

$$a^\delta(p) \le \frac{c_2}{|p - p_0|^{\alpha_2}}\,\delta \ .$$

La Figure 1 illustre ce résultat.

Il y a plusieurs possibilités pour les probabilités de transition : ici nous travaillons avec la moyenne harmonique, mais on pourrait faire de même en prenant les moyennes arithmétiques, géométriques ou autres (voir Kruel–Romeu [10] où se trouvent les résultats de nombreux calculs numériques). Les problèmes sont à considérer de la même façon et se réduisent en fait à des problèmes de percolation.