



# Résolution des équations de Navier-Stokes par des schémas de projection Tchebychev

Olivier Botella

► **To cite this version:**

Olivier Botella. Résolution des équations de Navier-Stokes par des schémas de projection Tchebychev. RR-3018, INRIA. 1996. <inria-00073676>

**HAL Id: inria-00073676**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073676>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Résolution des équations de Navier-Stokes par des  
schémas de projection Tchebychev*

Olivier Botella

**N° 3018**

Octobre 1996

———— THÈME 4 ————



*R*apport  
de recherche





# Résolution des équations de Navier-Stokes par des schémas de projection Tchebychev

Olivier Botella

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 3018 — Octobre 1996 — 39 pages

**Résumé :** Des schémas de projection de type Chorin-Temam approximant les équations de Navier Stokes pour un fluide incompressible sont présentés. De manière à obtenir un champ de pression non pollué par des modes parasites, deux discrétisations spatiales de collocation Tchebychev à grille unique, où la pression est approximée par des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse, sont comparées. La résolution du problème de Navier-Stokes se réduit à la résolution successive d'équations de Helmholtz pour la vitesse et d'équations de type pseudo-Poisson, sans condition de Neumann, pour la pression. En utilisant des solutions exactes, on vérifie que la précision spatiale des schémas construits est de type spectral, et que la précision temporelle est d'ordre deux ou trois, pour la vitesse ainsi que la pression.

**Mots-clé :** Ecoulements Incompressibles, Equations de Navier Stokes, Equations de Darcy, Méthodes de Projection , Méthodes Spectrales.

*(Abstract: pto)*

# Solution of the Navier-Stokes equations using Chebyshev projection schemes

**Abstract:** Projection schemes approximating Navier-Stokes equations for incompressible flow are presented. In order to compute a pressure unpolluted by spurious modes, two unique grid Chebyshev collocation spatial discretizations, where the pressure is approximated with polynomials of degree two less than the velocity polynomials, are compared. The Navier Stokes problem is reduced to the successive solution of Helmholtz problems for the velocity and pseudo-Poisson problems, without Neumann boundary conditions, for the pressure. Using exact solutions, spectral spatial accuracy, and second or third-order in time accuracy, for both the velocity and the pressure, is checked.

**Key-words:** Incompressible Flow, Navier Stokes Equations, Darcy Equations, Projection Method, Spectral Methods.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Schémas de projection d'ordre élevé en temps</b>	<b>6</b>
2.1	Un premier schéma de projection : le schéma de Chorin - Temam . . . . .	6
2.2	Erreur de troncature pour un schéma de projection . . . . .	7
2.3	Construction de schémas du second ordre en temps . . . . .	9
2.4	Construction d'un schéma du troisième ordre en temps . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Discrétisation spatiale des équations</b>	<b>11</b>
3.1	Introduction à la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . . . . .	13
3.1.1	Expression de l'opérateur de dérivée première dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ . . . . .	13
3.1.2	Expression de l'opérateur de dérivée première dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ . . . . .	15
3.1.3	Discrétisation des opérateurs de dérivation bidimensionnels . . . . .	16
3.2	Résolution de l'étape de prédiction par méthode spectrale $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . . . . .	17
3.3	Résolution de l'étape de projection par méthode spectrale $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . . . . .	18
3.3.1	Formulation forte du problème de Darcy . . . . .	19
3.3.2	Formulation faible du problème de Darcy . . . . .	19
3.4	Expression matricielle de l'étape de projection . . . . .	22
3.5	Etude numérique des valeurs propres de $A_N^\alpha$ . . . . .	25
3.6	Essais numériques sur le problème de Darcy . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes</b>	<b>31</b>
4.1	Essais stationnaires . . . . .	31
4.2	Essais non stationnaires . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

# 1 Introduction

Considérons les équations de Navier-Stokes adimensionnées, régissant les écoulements incompressibles dans un domaine bidimensionnel  $\Omega$ , écrites en variables primitives. La principale difficulté de la résolution de ces équations est le traitement de la pression qui n'apparaît que par son gradient. Ce terme de pression intervient dans l'équation de quantité de mouvement comme un multiplicateur de Lagrange assurant que la vitesse vérifie la contrainte de continuité.

Considérons le problème discret obtenu par une discrétisation en temps semi-implicite de type différence finie, et dont la discrétisation en espace est obtenue en utilisant une méthode spectrale de collocation Tchebychev. A chaque niveau de temps, on obtient un problème de Stokes généralisé où les vitesses et la pression seront approximées par des polynômes de Tchebychev définis sur  $\Omega$ . Mais on ne peut choisir indépendamment les espaces polynômiaux de vitesse et la pression. En effet, approximer les vitesses et la pression par des polynômes de même degré entraîne que le système discret ( obtenu en appliquant l'équation de quantité de mouvement aux points de collocation intérieurs, et l'équation de continuité aux points de collocation intérieurs ainsi que sur ceux du bord) est singulier. La solution numérique de la pression est polluée par les éléments du noyau de la matrice du problème discret (qui est de dimension 8 en deux dimensions), appelés modes parasites de pression [19][5]. Bien qu'on obtienne une bonne approximation des vitesses aux points de collocation, on doit effectuer un filtrage de ces modes parasites de manière à obtenir une bonne pression discrète. Pour que le système discret soit bien posé les espaces de vitesse et de pression doivent vérifier une condition de compatibilité, appelée condition inf-sup [8][9], qui a été à l'origine formulée par Brezzi [7] pour les problèmes de point-selle. Une manière de résoudre cette difficulté est d'utiliser des grilles de collocation décalées [17],[23] pour la vitesse et la pression, de manière que les espaces polynômiaux de vitesse et de pression soient compatibles. Néanmoins la présence de grilles décalées alourdit la programmation et augmente les temps de calcul. Une autre méthode proposant des espaces polynômiaux compatibles est la méthode  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ , dont l'analyse numérique et la mise en œuvre ont été réalisées par Rønquist [22], Azaïez [1] et Maday *et al.* [18]. La condition inf-sup est vérifiée en prenant pour la pression des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse. L'avantage de cette méthode est de n'utiliser qu'une seule grille, la grille des points de Tchebychev-Gauss-Lobatto usuels .

On peut considérer différentes approches de l'inversion du problème discret. Une première approche revient à utiliser des méthodes couplées, comme les méthodes de matrice d'influence [16] et les méthodes basées sur l'algorithme d'Uzawa [21]. Néanmoins l'utilisation de matrice d'influence est trop coûteuse lors du passage en trois dimensions, et l'opérateur d'Uzawa du problème de Navier-Stokes, à cause de son mauvais conditionnement, nécessite souvent d'être inversé itérativement, avec une convergence modérée.

Une manière de contourner le couplage vitesse-pression des équations de Navier-Stokes consiste à utiliser des méthodes découplées, comme les méthodes de projection. Ces méthodes, introduites indépendamment par Chorin [10] et Temam [24], découplent les effets de

diffusion et d'incompressibilité en remplaçant la résolution des équations de Navier-Stokes par la résolution de deux problèmes successifs : La première étape revient à chercher une prédiction de la vitesse qui *a priori* ne vérifie pas la contrainte de continuité, puis, dans une deuxième étape, on corrige cette vitesse de manière à vérifier cette contrainte et à calculer le champ de pression associé. La première étape, l'étape de prédiction, revient à résoudre un problème de Helmholtz, tandis que la seconde, l'étape de projection, revient à résoudre un problème de Darcy (ou problème div-grad [2]). De même que pour le problème de Stokes, dans le cadre d'une discrétisation spectrale de type collocation Tchebychev, les espaces de vitesse et de pression discrets utilisés dans l'approximation du problème de Darcy doivent vérifier une condition de compatibilité de type inf-sup, sinon on observe le présence de modes parasites ( 4 en dimension deux) [2].

Une première approche de résolution du problème de Darcy revient à formuler une équation de Poisson avec une condition de Neumann pour la pression, où n'apparaissent pas de modes parasites. Cette condition aux limites est artificielle car la véritable pression physique ne la vérifie pas nécessairement [25],[26]. En conséquence cette formulation détruit la précision en temps de la pression (bien que l'approximation de la vitesse ne soit pas affectée), et affecte la stabilité de schémas d'ordre élevé [26],[20]. De plus la contrainte de continuité n'est satisfaite qu'aux points de collocation situés à l'intérieur du domaine et non aux points de collocation du bord, et la vitesse tangentielle ne satisfait plus aux conditions aux limites du problème de Navier-Stokes.

Dans ce travail nous comparons deux formulations différentes du problème de Darcy, utilisant toutes deux une méthode spectrale  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . Ces formulations diffèrent dans la discrétisation de la contrainte de continuité : dans la première formulation (appelée formulation faible), l'équation de divergence n'est satisfaite que "faiblement", tandis que la seconde (appelée formulation forte) impose la vérification de cette équation aux points de collocation intérieurs au domaine. La première formulation a été présentée par Azaïez *et al.* [3] pour l'approximation des équations résultant d'une discrétisation en temps explicite du problème de Navier-Stokes. Le système discret associé à la seconde formulation variationnelle est identique au système de collocation proposé par Heinrichs [13],[14] pour l'approximation des équations instationnaires de Stokes par une méthode de projection. Le système de Darcy discret associé à chacune de ces deux formulations est résolu en formant un opérateur d'Uzawa pour la pression, qui possède une unique valeur propre nulle (qui correspond au mode de pression constant, traduisant le fait que la pression est définie à une fonction du temps près). Ainsi il est vérifié que les formulations  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$  du problème de Darcy n'introduisent pas de modes parasites. L'utilisation d'une telle approche pour résoudre l'étape de projection nous permet de construire des schémas de projection en collocation Tchebychev tel que l'on a :

- une seule grille de collocation,
- pas de conditions aux limites sur la pression,
- pas de modes parasites (sauf le mode constant),



- des approximations sur la vitesse ainsi que sur la pression d'ordre élevé en temps .

En particulier on présente trois schémas de projection d'ordre élevé en temps (deux schémas d'ordre  $O(\Delta t^2)$  et un schéma d'ordre  $O(\Delta t^3)$ ), discrétisés soit par la formulation faible, soit par la formulation forte. Des essais numériques montrent que ces schémas sont stables numériquement pour chaque formulation, et que les erreurs sur la pression sont du même ordre que celles sur la vitesse.

## 2 Schémas de projection d'ordre élevé en temps

### 2.1 Un premier schéma de projection : le schéma de Chorin - Temam

Soient les équations de Navier-Stokes adimensionnées régissant les écoulements incompressibles, écrites en variables primitives :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega = ]-1, 1[^2, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega = ]-1, 1[^2, \quad (1b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1c)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \quad \text{à } t = 0, \quad \text{dans } \Omega = ]-1, 1[^2, \quad (1d)$$

où le vecteur vitesse  $\mathbf{v}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ , la pression  $p(x, y, t)$  et le terme source  $\mathbf{f}(x, y, t)$  sont définis dans  $\Omega \times ]0, T[$ . Le terme source  $\mathbf{f}$  est supposé de carré intégrable dans  $\Omega$ . L'inverse du nombre de Reynolds est noté  $\nu$ . La condition aux limites  $\mathbf{g}$ , définie sur  $\partial\Omega$ , doit vérifier la condition de débit :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0,$$

et la condition initiale  $\mathbf{v}_0$ , de carré intégrable dans  $\Omega$ , doit vérifier les conditions :

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

pour que la solution du problème (1) soit régulière.

Par une discrétisation en temps de type différence finie, la résolution des équations (1) à chaque cycle de temps peut être remplacée par la résolution de deux étapes successives :

- Une première étape de prédiction :

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n = \mathbf{f}^{n+1}, \quad (2a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (2b)$$

– Une seconde étape de projection :

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0, \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (3b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (3c)$$

où  $\Delta t$  représente le pas de temps, et l'indice  $n$  indique que les fonctions sont évaluées à l'instant  $t^n = n\Delta t$  pour  $n = 0, 1, \dots$

Ce schéma représente une variante semi-implicite du schéma original présenté par Chorin [10] et Temam [24]. Les équations (2) effectuent une prédiction de la vitesse, notée  $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$ . Cette quantité vérifie les conditions aux limites (1c) du problème de Navier-Stokes, mais pas la contrainte d'incompressibilité. Cette contrainte est réalisée lors de l'étape de projection (3) où  $\mathbf{v}^{n+1}$  représente le projeté de  $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$  sur l'espace des fonctions à divergence nulle. L'étape de prédiction constitue un problème de Helmholtz pour  $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$ , tandis que l'étape de projection constitue un problème de Darcy (ou problème div-grad, cf [2]) pour  $\mathbf{v}^{n+1}$  et  $p^{n+1}$ . Ce problème est résolu en découplant la vitesse et la pression par un algorithme de type Uzawa, de manière à obtenir un problème de type Poisson pour la pression. L'algorithme de projection comporte pour chaque niveau de temps la résolution de deux problèmes de Helmholtz et d'un problème de type Poisson scalaires, qui sont techniquement aisés à résoudre. Le schéma de projection implicite (2)-(3) est un schéma dont les estimations d'erreur pour la vitesse et la pression sont d'ordre  $O(\Delta t^{1/2})$  [12]. Une première amélioration de l'ordre en temps de ce schéma consiste à inclure le terme de pression  $\nabla p^n$  dans l'étape de prédiction. On obtient alors un schéma d'ordre  $O(\Delta t)$  pour la vitesse et d'ordre  $O(\Delta t^{1/2})$  pour la pression. D'une manière similaire, en effectuant dans l'étape de prédiction des extrapolations d'ordre élevé sur la pression et le terme non linéaire, on peut augmenter la précision en temps des schémas de projection, de manière à obtenir des schémas d'ordre deux, trois (ou plus) en temps.

## 2.2 Erreur de troncature pour un schéma de projection

Considérons le schéma de projection suivant, où n'est effectuée pour l'instant qu'une discrétisation en temps de type différence finie :

– Etape de prédiction :

$$\frac{a_1 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + b_1 \mathbf{v}^n + b_2 \mathbf{v}^{n-1} + b_3 \mathbf{v}^{n-2}}{\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla (c_1 p^n + c_2 p^{n-1}) + d_1 (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + d_2 (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} + d_3 (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-2} = \mathbf{f}^{n+1}, \quad (4a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (4b)$$

– Etape de projection :

$$\frac{a_1 \mathbf{v}^{n+1} - a_1 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla \left( p^{n+1} - c_1 p^n - c_2 p^{n-1} \right) = 0, \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (5b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (5c)$$

Les valeurs des réels  $a_1, b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3, c_1, c_2$  sont à définir au mieux, c'est-à-dire de manière que l'erreur de troncature globale du schéma soit de l'ordre en temps désiré.

L'équation (5a) s'écrit encore :

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1} + \frac{\Delta t}{a_1} \nabla \left( p^{n+1} - c_1 p^n - c_2 p^{n-1} \right); \quad (6)$$

et, en portant (6) dans (4a), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 \mathbf{v}^{n+1} + b_1 \mathbf{v}^n + b_2 \mathbf{v}^{n-1} + b_3 \mathbf{v}^{n-2}}{\Delta t} - \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} \\ & + d_1 (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + d_2 (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} + d_3 (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-2} \\ & - \nu \frac{\Delta t}{a_1} \nabla^2 \nabla \left( p^{n+1} - c_1 p^n - c_2 p^{n-1} \right) = \mathbf{f}^{n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

En effectuant un développement de Taylor des différentes variables autour du temps  $(n+1)\Delta t$ , on obtient l'erreur de troncature locale associée à l'équation (7) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{a_1 + b_1 + b_2 + b_3}{\Delta t} \mathbf{v}^{n+1} \\ &- (b_1 + 2b_2 + 3b_3) \frac{\partial \mathbf{v}^{n+1}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} + (d_1 + d_2 + d_3) (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1} \\ &+ \Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{b_1 + 4b_2 + 9b_3}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^{n+1}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1} - (d_1 + 2d_2 + 3d_3) (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{a_1} (1 - c_1 - c_2) \nabla^2 \nabla p^{n+1} \right] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ -\frac{b_1 + 8b_2 + 27b_3}{3} \frac{\partial \mathbf{v}^{n+1}}{\partial t} + (d_1 + 4d_2 + 9d_3) (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\nu}{a_1} (c_1 + 2c_2) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \nabla p^{n+1} \right] \\ &+ O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (8)$$

L'équation (8) fournit un jeu de conditions nécessaires pour que le schéma de projection (4)-(5) soit précis à l'ordre 1 en temps :

$$a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = 0, \quad (9a)$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = -1, \quad (9b)$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = 1. \quad (9c)$$

Les conditions nécessaires pour que le schéma (4)-(5) soit précis à l'ordre 2 en temps sont formées par les équations (9) ainsi que par les équations :

$$b_1 + 4b_2 + 9b_3 = 0, \quad (10a)$$

$$d_1 - 2d_2 + 3d_3 = 0, \quad (10b)$$

$$1 - c_1 - c_2 = 0. \quad (10c)$$

Les conditions nécessaires pour que le schéma (4)-(5) soit précis à l'ordre 3 en temps sont formées par les équations (9),(10) ainsi que par les équations :

$$b_1 + 8b_2 + 27b_3 = 0, \quad (11a)$$

$$d_1 + 4d_2 + 9d_3 = 0, \quad (11b)$$

$$c_1 + 2c_2 = 0. \quad (11c)$$

De plus, établissons l'erreur de troncature sur les conditions aux limites. En projetant l'eq. (6) sur le bord et en tenant compte de (4b), les conditions aux limites sur la vitesse tangentielle sont :

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{\Delta t}{a_1} (1 - c_1 - c_2) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \frac{\Delta t^2}{a_1} (c_1 + 2c_2) \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial t} + O(\Delta t^3), \quad (12)$$

les conditions aux limites sur la vitesse normale étant données par (4b). On notera que (12) ne fournit pas de conditions supplémentaires pour la précision du schéma (4)-(5).

### 2.3 Construction de schémas du second ordre en temps

En utilisant les conditions (9)-(11) du paragraphe précédent, construisons un schéma d'ordre deux, à 3 niveaux de temps: les équations (9),(10) ainsi que  $b_3 = 0$  et  $d_3 = 0$  déterminent les valeurs uniques :

$$a_1 = 3/2, \quad b_1 = -2, \quad b_2 = 1/2, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = -1.$$

Ne disposant que de l'équation (10c) pour déterminer  $c_1$  et  $c_2$ , leur valeur n'est pas unique. Nous avons considéré en particulier les deux schémas d'ordre 2 suivants :

Le premier est un schéma d'ordre deux de type Adams/Bashforth Euler retardé du second ordre *AB/ER2*, dans lequel est effectuée une extrapolation d'ordre un de la pression ( $c_1 = 1$  et  $c_2 = 0$ ) lors de l'étape de prédiction :

– Etape de prédiction :

$$\frac{3\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla p^n + 2(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} = \mathbf{f}^{n+1}, \quad (13a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\Omega}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (13b)$$

– Etape de projection :

$$\frac{3}{2} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0, \quad (14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (14b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (14c)$$

Le second est une variante du schéma (13)-(14), dans lequel est effectuée une extrapolation d'ordre deux du terme de pression ( $c_1 = 2$  et  $c_2 = -1$ ) dans l'étape de prédiction.

– Etape de prédiction :

$$\begin{aligned} \frac{3\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla (2p^n - p^{n-1}) \\ + 2(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} = \mathbf{f}^{n+1}, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (15b)$$

– Etape de projection :

$$\frac{3}{2} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla (p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) = 0, \quad (16a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (16b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (16c)$$

Pour commencer l'intégration en temps ( $n = 0$ ), nous posons  $\mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}^0$ , et le champ  $p^0$  est soit égal à 0, soit pris comme une pression compatible avec  $\mathbf{v}^0$  (cf. [15]). De plus pour le schéma (15)-(16), nous prenons  $p^{-1}$  égal à  $p^0$ . Pour les deux schémas ci-dessus cela revient à calculer  $(\mathbf{v}^1, p^1)$  et  $(\mathbf{v}^2, p^2)$  avec un schéma du premier ordre.

Les essais numériques du paragraphe 4 montrent que les deux schémas du type *AB/ER2* ci-dessus sont du second ordre en temps pour la vitesse ainsi que pour la pression.

## 2.4 Construction d'un schéma du troisième ordre en temps

Construisons un schéma d'ordre 3, à 4 niveaux de temps. Les équations (9)-(11) déterminent les uniques valeurs :

$$a_1 = 11/6, \quad b_1 = -3, \quad b_2 = 3/2, \quad b_3 = -1/3, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = -3, \quad d_3 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -1.$$

Ce schéma est un schéma *AB/ER3*, dans lequel est considérée une extrapolation d'ordre 2 en temps de la pression et une extrapolation d'ordre 3 en temps du terme non linéaire .

– Etape de prédiction :

$$\frac{11\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - 18\mathbf{v}^n + 9\mathbf{v}^{n-1} - 2\mathbf{v}^{n-2}}{6\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla(2p^n - p^{n-1}) + 3(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - 3(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} + (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-2} = \mathbf{f}^{n+1}, \quad (17a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\Omega}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (17b)$$

– Etape de projection :

$$\frac{11}{6} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla(p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}) = 0, \quad (18a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (18b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (18c)$$

Pour commencer l'intégration en temps ( $n = 0$ ), nous posons  $\mathbf{v}^{-2} = \mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}^0$  et  $p^{-1} = p^0$ , où  $p^0$  est soit égal à 0, soit un champs de pression compatible avec  $\mathbf{v}^0$  (cf. [15]). Cela revient à calculer  $(\mathbf{v}^1, p^1)$  et  $(\mathbf{v}^2, p^2)$  avec un schéma du premier ordre. Les essais numériques du paragraphe 4 montrent que le schéma du type *AB/ER3* ci-dessus est du troisième ordre en temps pour la vitesse ainsi que pour la pression.

### 3 Discrétisation spatiale des équations

Afin de discrétiser les étapes de projection et de prédiction, nous allons utiliser une méthode spectrale Tchebychev  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . Elle a été introduite et mise en œuvre par Rønquist [22], Azaïez [1] et Maday *et al.* [18] pour approximer le problème de Stokes. En approximant la pression par des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse, la condition inf-sup du problème de Stokes est réalisée [18], on n'observe donc pas de modes parasites de pression. L'approximation  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$  que nous allons utiliser discrétise les équations sur une seule grille, la grille des points de Tchebychev-Gauss-Lobatto usuels  $\bar{\Omega}_c$  telle que

$$\bar{\Omega}_c = \{ (x_i, y_j) / i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M \} \text{ où } x_i \text{ et } y_j \text{ sont définis par :}$$

$$x_i = \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right) \quad , \quad \text{pour } i = 0, \dots, N,$$

$$y_j = \cos\left(j \frac{\pi}{M}\right) \quad , \quad \text{pour } j = 0, \dots, M.$$

De plus nous notons par  $\Gamma_c$  l'ensemble des points de collocation appartenant au bord, et  $\Omega_c$  l'ensemble des points de collocation intérieurs au domaine  $\Omega$ .

L'étape de prédiction, qui se décompose en deux problèmes de Helmholtz scalaires pour chaque composante de la vitesse, se ramène à utiliser une méthode de collocation-Tchebychev classique.

L'étape de projection (5) s'écrit :

$$\sigma \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \tilde{\mathbf{f}}^{n+1}, \quad (19a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (19b)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \quad (19c)$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{a_1}{\Delta t}, \\ \tilde{\mathbf{f}}^{n+1} &= \sigma \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla (c_1 p^n + c_2 p^{n-1}). \end{aligned}$$

L'étape (19) correspond à un problème de Darcy [2] qui est, de même que le problème de Stokes, de type point-selle. Les espaces discrets de vitesse et de pression doivent vérifier une condition de compatibilité inf-sup afin de ne pas introduire de modes parasites de pression. Une manière de résoudre (19) sans observer de modes parasites est de former un problème de Poisson (continu) pour la pression : en prenant la divergence de (19a) et en la combinant avec (19b) on obtient l'équation :

$$\nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{n+1}, \quad (20)$$

à laquelle on associe généralement une condition de Neumann sur la pression en projetant (19a) au bord :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{f}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \sigma \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (21)$$

Mais cette formulation introduit de façon forte une condition de Neumann qui n'est pas physique [25],[26]. Par exemple, la condition de Neumann satisfaite par la pression pour le schéma du type (2)-(3) :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial p^n}{\partial \mathbf{n}} = \dots = \frac{\partial p^0}{\partial \mathbf{n}},$$

n'est pas nécessairement satisfaite par la véritable pression. La présence de la condition de Neumann (21) détruit en partie la précision de l'approximation de la pression, bien que l'approximation de la vitesse ne semble pas affectée [12],[20]. De plus  $\mathbf{v}^{n+1}$  ne satisfait plus entièrement aux conditions au bord du problème de Navier-Stokes (1), puisque la condition (19c) ne fixe que la composante tangentielle de la vitesse.

Du point de vue discret le problème de Neumann (20)-(21) est équivalent à une approximation  $\mathcal{I}P_N - \mathcal{I}P_N$  (la vitesse et la pression sont représentées par des polynômes de même degré) du problème de Darcy (19) où les équations de conservation de quantité de mouvement (19a) sont écrites sur  $\overline{\Omega}_c$ , l'équation de divergence (19b) sur  $\Omega_c$ , et la condition aux limites (19c) sur  $\Gamma_c$ . L'imposition des équations (19a) et (19c) aux points de collocation du bord entraîne la présence de la condition de Neumann (21) sur la pression dans le système discret. Il est à noter que la vitesse tangentielle est donnée par l'équation (19a) écrite sur le bord, et que la divergence n'est satisfaite qu'aux points de collocation  $\Omega_c$ , et non à un point

quelconque du domaine ou sur le bord. Une autre manière de résoudre le problème (19) sans imposer la condition de Neumann (21) est d'utiliser la formulation variationnelle  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_N$  présentée dans [2]. Le système de collocation obtenu est composé de l'équation de divergence (19b) écrite sur  $\overline{\Omega}_c$  (*i.e.* la divergence est nulle partout), de l'équation (19a) écrite sur  $\Omega_c$ , de la condition aux limites (19c) sur  $\Gamma_c$ . Pour clore le système la composante tangentielle de (19a) est écrite sur  $\Gamma_c$ . Par conséquent la vitesse tangentielle est une inconnue du problème, et on note la présence de quatre modes parasites de pression [2].

Afin d'éviter la présence de modes parasites, ainsi que la condition de Neumann(21) nous allons présenter et comparer deux formulations, l'une forte, l'autre faible du problème de Darcy utilisant l'approximation  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . On vérifiera numériquement que dans les deux cas les systèmes discrets correspondants ne possèdent pas de modes parasites (à part le mode constant) : on en conclut que la condition inf-sup du problème de Darcy est vérifiée.

### 3.1 Introduction à la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$

Pour des raisons de simplicité, considérons le domaine unidimensionnel  $\Lambda = ]-1, 1[$ . La méthode  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$  consiste à approximer la vitesse  $u$  par un polynôme appartenant à  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $N$  sur  $\Lambda$ , et la pression  $p$  par des polynômes appartenant à  $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $N-2$  sur  $\Lambda$ . Soit la grille de collocation  $\Lambda_c$  formée par les  $N+1$  points de Tchebychev-Gauss-Lobatto

$$x_i = \cos\left(i\frac{\pi}{N}\right) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N.$$

Dans la méthode de collocation à grille unique que nous allons utiliser ici, n'interviennent que la valeur des vitesses aux  $N+1$  points de collocation et la valeur de la pression aux  $N-1$  points de collocation intérieurs au domaine. Bien qu'une seule grille soit utilisée, les vitesses et la pression ne sont pas des éléments du même espace, leurs opérateurs de dérivation seront donc différents. En utilisant une base d'interpolant de Lagrange, nous allons établir l'expression de l'opérateur de dérivation première dans  $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$  [3] à partir de l'opérateur de dérivation classique en collocation Tchebychev [11].

#### 3.1.1 Expression de l'opérateur de dérivée première dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$

Munissons l'espace vectoriel  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ , de dimension  $N+1$ , de la base  $\{h_i; i = 0, \dots, N\}$ , où  $h_i$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $N$  caractéristique du point de collocation  $x_i$  :

$$\forall j = 0, 1, \dots, N \quad h_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Ce polynôme s'écrit

$$\forall i = 0, 1, \dots, N \quad h_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(-1)^{i+1}(1-x^2)T'_N(x)}{\bar{c}_i N^2(x-x_i)}, \quad (22)$$



avec

$$\bar{c}_i = \begin{cases} 1/2 & i = 0, N \\ 1 & i = 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (23)$$

et  $T'_N$  désigne la dérivée du polynôme de Tchebychev de degré  $N$ . Un élément  $u$  de  $\mathbb{P}_N(\Lambda)$  s'écrit

$$u(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) h_j(x),$$

et admet pour dérivée première le polynôme :

$$u'(x) = \sum_{j=0}^N u(x_j) h'_j(x),$$

dont la valeur à un point de collocation  $x_i \in \Lambda_c$  est :

$$u'(x_i) = \sum_{j=0}^N u(x_j) h'_j(x_i). \quad (24)$$

On retrouve l'expression des coefficients  $D_{ij}^N = h'_j(x_i)$  de la matrice de dérivation usuelle. L'équation (24) s'écrit encore :

$$u'(x_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^N u(x_j). \quad (25)$$

L'expression des coefficients  $D_{ij}^N$  (cf. par exemple [11]) est donnée par :

$$D_{ij}^N = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j} \frac{(-1)^{i+j}}{\sin \frac{\pi(i+j)}{2N} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N}} & i \neq j \\ -\frac{\cos \frac{\pi j}{N}}{2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}} & 1 \leq i = j \leq N-1 \\ \frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = 0 \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = N, \end{cases} \quad (26)$$

où l'on a utilisé les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} x_i - x_j &= -2 \sin \frac{\pi(i+j)}{2N} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N}, \\ 1 - x_i^2 &= -\sin^2 \frac{\pi i}{N}. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Expression de l'opérateur de dérivée première dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$

Munissons l'espace vectoriel  $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ , de dimension  $N-1$ , de la base  $\{\tilde{h}_i; i = 1, \dots, N-1\}$ , où  $\tilde{h}_i$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange, de degré  $N-2$ , caractéristique du point de collocation interne au domaine  $x_i$ :

$$\forall j = 1, \dots, N-1 \quad \tilde{h}_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Ce polynôme a pour expression :

$$\forall i = 1, \dots, N-1 \quad \tilde{h}_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{1 - x_i^2}{1 - x^2} h_i(x). \quad (27)$$

Un élément  $p$  de  $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$  s'écrit :

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N-1} p(x_j) \tilde{h}_j(x),$$

et l'expression de sa dérivée première aux points de collocation internes  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  est :

$$p'(x_i) = \sum_{j=1}^{N-1} p(x_j) \tilde{h}'_j(x_i). \quad (28)$$

En dérivant (27), on obtient la relation :

$$\tilde{h}'_j(x_i) = \frac{1 - x_j^2}{1 - x_i^2} h'_j(x_i) + \frac{2x_i}{1 - x_i^2} \delta_{ij} \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Posons

$$\widetilde{D}_{ij}^N = \tilde{h}'_j(x_i),$$

où  $\widetilde{D}_{ij}^N$  désigne un coefficient de la matrice de dérivation, de taille  $(N-1) \times (N-1)$ , dans  $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ . L'équation (28) s'écrit :

$$p'(x_i) = \sum_{j=1}^{N-1} \widetilde{D}_{ij}^N p(x_j), \quad (29)$$

et grâce à (26), l'expression des coefficients  $\widetilde{D}_{ij}^N$  est donnée par :

$$\widetilde{D}_{ij}^N = \begin{cases} -\frac{1 \sin^2 \frac{\pi j}{N}}{2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}} \frac{(-1)^{i+j}}{\sin \frac{\pi(i+j)}{2N} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N}} & i \neq j \\ \frac{3 \cos \frac{\pi i}{N}}{2 \sin^2 \frac{\pi i}{N}} & 1 \leq i = j \leq N-1. \end{cases} \quad (30)$$

### 3.1.3 Discrétisation des opérateurs de dérivation bidimensionnels

En utilisant l'expression des opérateurs discrets de dérivation dans  $\Lambda = ]-1, 1[$ , nous pouvons définir les opérateurs de dérivation dans le domaine cartésien bidimensionnel  $\Omega = ]-1, 1[^2$ . Notons

$$\mathcal{P}_{N,M}(\Omega) = \mathcal{P}_N(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_M(\Lambda),$$

l'ensemble des polynômes de degré  $N$  suivant la variable  $x$  et de degré  $M$  suivant la variable  $y$ , définis sur  $\Omega$ , et

$$\mathcal{P}_{N-2,M-2}(\Omega) = \mathcal{P}_{N-2}(\Lambda) \otimes \mathcal{P}_{M-2}(\Lambda),$$

l'ensemble des polynômes de degré  $N - 2$  suivant la variable  $x$  et de degré  $M - 2$  suivant la variable  $y$ , définis sur  $\Omega$ .

Par abus de notation, nous dénotons  $u_N$  dans la suite de ce mémoire comme un élément de  $\mathcal{P}_{N,M}(\Omega)$ . La relation (25) permet d'établir l'expression des dérivées premières de  $u_N$  au point  $(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}_c$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, y_j) &= \sum_{k=0}^N D_{ik}^N u_N(x_k, y_j), \\ \frac{\partial u_N}{\partial y}(x_i, y_j) &= \sum_{l=0}^M D_{jl}^M u_N(x_i, y_l), \end{aligned}$$

et au même point, les dérivées secondes de  $u_N$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \sum_{k=0}^N D_{ik}^{N,2} u_N(x_k, y_j), \\ \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \sum_{l=0}^M D_{jl}^{M,2} u_N(x_i, y_l), \end{aligned}$$

où les coefficients de dérivation seconde s'écrivent, pour  $P \in \{N, M\}$  :

$$D_{ij}^{P,2} = \sum_{k=0}^P D_{ik}^P D_{kj}^P \quad i, j = 0, \dots, P.$$

Par abus de notation, on désigne par  $p_N$  un élément de  $\mathcal{P}_{N-2,M-2}(\Omega)$ . La relation (29) permet d'établir l'expression des dérivées premières de  $p_N$  au point  $(x_i, y_j) \in \Omega_c$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_N}{\partial x}(x_i, y_j) &= \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{D}_{ik}^N p_N(x_k, y_j), \\ \frac{\partial p_N}{\partial y}(x_i, y_j) &= \sum_{l=1}^{M-1} \widetilde{D}_{jl}^M p_N(x_i, y_l). \end{aligned}$$

### 3.2 Résolution de l'étape de prédiction par méthode spectrale $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$

L'étape de prédiction (4) s'écrit :

$$\sigma \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \hat{\mathbf{f}}^{n+1}, \quad (31a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\Omega}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1}, \quad (31b)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{a_1}{\Delta t}, \\ \hat{\mathbf{f}}^{n+1} &= \mathbf{f}^{n+1} - \nabla \left( c_1 p^n + c_2 p^{n-1} \right) - \frac{b_1}{\Delta t} \mathbf{v}^n - \frac{b_2}{\Delta t} \mathbf{v}^{n-1} - \frac{b_3}{\Delta t} \mathbf{v}^{n-2} \\ &\quad - d_1 (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - d_2 (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-1} - d_3 (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n-2}. \end{aligned}$$

Enlevons les indices temporels  $n + 1$  et posons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x, y) &= (\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y)), \\ \hat{\mathbf{f}}(x, y) &= (\hat{f}_x(x, y), \hat{f}_y(x, y)), \\ \mathbf{g}(x, y) &= (g_x(x, y), g_y(x, y)). \end{aligned}$$

On décompose l'étape de prédiction (31) en deux problèmes de Helmholtz, avec conditions aux limites de Dirichlet, pour chaque composante scalaire de la vitesse prédite :

$$\sigma \tilde{u} - \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) = \hat{f}_x, \quad (32a)$$

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega} = g_x, \quad (32b)$$

et

$$\sigma \tilde{v} - \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) = \hat{f}_y, \quad (33a)$$

$$\tilde{v}|_{\partial\Omega} = g_y. \quad (33b)$$

Introduisons les espaces polynômiaux d'approximation de la vitesse :

$$\begin{aligned} X_{N,M}(\Omega) &= \{u \in \mathbb{P}_{N,M}(\Omega) / \forall (x_c, y_c) \in \Gamma_c, u(x_c, y_c) = g_x(x_c, y_c)\}, \\ Y_{N,M}(\Omega) &= \{v \in \mathbb{P}_{N,M}(\Omega) / \forall (x_c, y_c) \in \Gamma_c, v(x_c, y_c) = g_y(x_c, y_c)\}; \end{aligned}$$

l'approximation de collocation-Tchebychev [11] du problème de Helmholtz (32) s'écrit :

Trouver  $\tilde{u}_N$  tel que, pour  $i = 1, \dots, N - 1$ , pour  $j = 1, \dots, M - 1$  :

$$\sigma \tilde{u}_N(x_i, y_j) - \nu \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_N}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_N}{\partial y^2}(x_i, y_j) \right) = \hat{f}_x(x_i, y_j).$$

Après discrétisation spectrale des opérateurs, l'approximation de collocation Tchebychev est équivalente au système linéaire, pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $1 \leq j \leq M - 1$  :

$$\begin{aligned} \sigma \tilde{u}_N(x_i, y_j) &= \nu \left( \sum_{k=1}^{N-1} D_{ik}^{N,2} \tilde{u}_N(x_k, y_j) + \sum_{l=1}^{M-1} D_{jl}^{M,2} \tilde{u}_N(x_i, y_l) \right) \\ &= \hat{f}_x(x_i, y_j) + \nu \left( D_{i0}^{N,2} \tilde{u}_N(x_0, y_j) + D_{iN}^{N,2} \tilde{u}_N(x_N, y_j) \right. \\ &\quad \left. + D_{j0}^{M,2} \tilde{u}_N(x_i, y_0) + D_{jM}^{M,2} \tilde{u}_N(x_i, y_M) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Il est à noter que ce système de collocation peut s'obtenir à partir d'une formulation variationnelle du problème de Helmholtz (32), utilisant le produit scalaire de Tchebychev-Gauss-Lobatto [4]. Le système linéaire (34) étant inversible, on le résout par une méthode de diagonalisation [11]. Le problème (33) se résout d'une manière identique.

### 3.3 Résolution de l'étape de projection par méthode spectrale $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$

Après avoir enlevé les indices temporels  $n + 1$  et posé :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= (u(x, y), v(x, y)), \\ \tilde{\mathbf{f}}(x, y) &= (\tilde{f}_x(x, y), \tilde{f}_y(x, y)), \\ \mathbf{g}(x, y) &= (g_x(x, y), g_y(x, y)), \end{aligned}$$

le problème de Darcy (19) s'écrit sous forme scalaire :

$$\sigma u + \frac{\partial p}{\partial x} = \tilde{f}_x, \quad (35a)$$

$$\sigma v + \frac{\partial p}{\partial y} = \tilde{f}_y, \quad (35b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (35c)$$

On munit ce système de conditions aux limites portant sur la vitesse normale à la paroi :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}. \quad (36)$$

Afin de discrétiser les équations (35), nous proposons deux approximations spectrales de type Tchebychev différentes. Ces deux formulations utilisent l'approximation discrète  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . Puisque la pression ne possède que  $(N - 1) \times (M - 1)$  degrés de liberté, la contrainte de continuité (35c) ne peut être satisfaite sur les  $(N + 1) \times (M + 1)$  points du maillage où la vitesse est définie. La première formulation, proposée par Heinrichs [13],[14], est une approximation de collocation du problème (35) où la contrainte de continuité (35c) est satisfaite de façon

forte aux  $(N - 1) \times (M - 1)$  points de collocation intérieurs. La seconde approximation est une formulation faible, proposée par Azaïez *et al.* [3], qui correspond à une projection Hilbertienne de la vitesse prédite  $\tilde{v}$  sur l'espace des vitesses à divergence nulle, et qui revient à satisfaire l'équation (35c) en un sens affaibli sur chacun des  $(N + 1) \times (M + 1)$  points du maillage.

### 3.3.1 Formulation forte du problème de Darcy

L'approximation de collocation du problème de Darcy utilisant la méthode  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ , revient à écrire le système (35) aux points de collocation internes  $\Omega_c$  [14] :

Pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ ,

$$\sigma u_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(x_i, y_j) = \tilde{f}_x(x_i, y_j), \quad (37a)$$

$$\sigma v_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(x_i, y_j) = \tilde{f}_y(x_i, y_j), \quad (37b)$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, y_j) = 0, \quad (37c)$$

auquel on ajoute les conditions aux limites :

pour  $j = 1, \dots, M - 1$ ,

$$u_N(x_0, y_j) = g_x(x_0, y_j) \quad , \quad u_N(x_N, y_j) = g_x(x_N, y_j),$$

et pour  $i = 1, \dots, N - 1$ ,

$$v_N(x_i, y_0) = g_y(x_i, y_0) \quad , \quad v_N(x_i, y_N) = g_y(x_i, y_N).$$

### 3.3.2 Formulation faible du problème de Darcy

Considérons la forme bilinéaire sur les fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$  définie par :

$$(u, v)_N = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u(x_i, y_j) v(x_i, y_j) \omega_i \sigma_j, \quad (38)$$

qui est un produit scalaire sur l'espace  $\mathbb{P}_{N,M}(\Omega)$ . Les poids de Tchebychev-Gauss-Lobatto sont donnés par [9] :

$$\omega_i = \frac{\pi}{N} \bar{c}_i, \quad \sigma_j = \frac{\pi}{M} \bar{c}_j.$$

On définit, pour  $i = 0, \dots, N$  et  $j = 0, \dots, M$

- le polynôme de Lagrange  $h_i \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$  associé au point de collocation  $x_i$ , défini par (22),

- le polynôme de Lagrange  $l_j \in \mathbb{P}_M(\Lambda)$  associé au point de collocation  $y_j$ , défini par (22).

On définit, pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$

- le polynôme de Lagrange  $\tilde{h}_i \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$  associé au point de collocation intérieur  $x_i$ , défini par (27),
- le polynôme de Lagrange  $\tilde{l}_j \in \mathbb{P}_{M-2}(\Lambda)$  associé au point de collocation intérieur  $y_j$ , défini par (27).

On introduit aussi l'espace polynômial d'approximation de la vitesse :

$$X_{N,M}^0(\Omega) = \left\{ v \in \mathbb{P}_{N,M}(\Omega) / v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

et l'approximation polynômiale de la pression sera cherchée dans l'espace  $\mathbb{P}_{N-2,M-2}(\Omega)$ .

La formulation faible du problème de Darcy (35) est :

Trouver  $(u_N, v_N) \in (X_{N,M}^0(\Omega))^2$  et  $p_N \in \mathbb{P}_{N-2,M-2}(\Omega)$  tel que :

$$\forall w_N \in X_{N,M}^0(\Omega), \quad \sigma(u_N, w_N)_N + \left( \frac{\partial p_N}{\partial x}, w_N \right)_N = (\tilde{f}_x, w_N)_N, \quad (39a)$$

$$\forall w_N \in X_{N,M}^0(\Omega), \quad \sigma(v_N, w_N)_N + \left( \frac{\partial p_N}{\partial y}, w_N \right)_N = (\tilde{f}_y, w_N)_N, \quad (39b)$$

$$\forall q_N \in \mathbb{P}_{N-2,M-2}(\Omega), \quad \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}, q_N \right)_N + \left( \frac{\partial v_N}{\partial y}, q_N \right)_N = 0. \quad (39c)$$

Construisons le système discret correspondant aux équations (39a) et (39b) en choisissant la suite de fonctions test (qui forment une base de  $X_{N,M}^0(\Omega)$ )  $w_N = h_i l_j$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ , on obtient :

$$\sigma u_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(x_i, y_j) = \tilde{f}_x(x_i, y_j), \quad (40)$$

$$\sigma v_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(x_i, y_j) = \tilde{f}_y(x_i, y_j). \quad (41)$$

Pour l'équation (39c), on choisit la suite de fonctions test  $q_N = \tilde{h}_i \tilde{l}_j$ , pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ , on obtient :

$$b_1 + b_2 = 0, \quad (42)$$

$$\text{où } b_1 = \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}, \tilde{h}_i \tilde{l}_j \right)_N \text{ et } b_2 = \left( \frac{\partial v_N}{\partial y}, \tilde{h}_i \tilde{l}_j \right)_N.$$

En développant ces formes bilinéaires on obtient :

$$b_1 = \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, y_j) \omega_i \sigma_j$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, +1)\tilde{l}_j(+1)\omega_i\sigma_0 + \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, -1)\tilde{l}_j(-1)\omega_i\sigma_M \\
 & + \frac{\partial u_N}{\partial x}(+1, y_j)\tilde{h}_i(+1)\omega_0\sigma_j + \frac{\partial u_N}{\partial x}(-1, y_j)\tilde{h}_i(-1)\omega_N\sigma_j \\
 & + 2\frac{\partial u_N}{\partial x}(+1, +1)\tilde{h}_i(+1)\tilde{l}_j(+1)\omega_0\sigma_0 + 2\frac{\partial u_N}{\partial x}(+1, -1)\tilde{h}_i(+1)\tilde{l}_j(-1)\omega_0\sigma_M \\
 & + 2\frac{\partial u_N}{\partial x}(-1, +1)\tilde{h}_i(-1)\tilde{l}_j(+1)\omega_N\sigma_0 + 2\frac{\partial u_N}{\partial x}(-1, -1)\tilde{h}_i(-1)\tilde{l}_j(-1)\omega_N\sigma_M, \\
 \\
 b_2 & = \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, y_j)\omega_i\sigma_j \\
 & + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, +1)\tilde{l}_j(+1)\omega_i\sigma_0 + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, -1)\tilde{l}_j(-1)\omega_i\sigma_M \\
 & + \frac{\partial v_N}{\partial y}(+1, y_j)\tilde{h}_i(+1)\omega_0\sigma_j + \frac{\partial v_N}{\partial y}(-1, y_j)\tilde{h}_i(-1)\omega_N\sigma_j \\
 & + 2\frac{\partial v_N}{\partial y}(+1, +1)\tilde{h}_i(+1)\tilde{l}_j(+1)\omega_0\sigma_0 + 2\frac{\partial v_N}{\partial y}(+1, -1)\tilde{h}_i(+1)\tilde{l}_j(-1)\omega_0\sigma_M \\
 & + 2\frac{\partial v_N}{\partial y}(-1, +1)\tilde{h}_i(-1)\tilde{l}_j(+1)\omega_N\sigma_0 + 2\frac{\partial v_N}{\partial y}(-1, -1)\tilde{h}_i(-1)\tilde{l}_j(-1)\omega_N\sigma_M.
 \end{aligned}$$

Pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ , grâce aux relations :

$$\frac{\omega_0}{\omega_i} = \frac{\omega_N}{\omega_i} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j} = \frac{\sigma_M}{\sigma_j} = \frac{1}{2},$$

et au fait que la divergence de la vitesse aux coins s'annule pour des conditions aux limites régulières, on écrit l'équation (42) sous la forme :

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, y_j) - d_{ij} = 0, \tag{43}$$

où :

$$\begin{aligned}
 d_{ij} & = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, +1) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, +1) \right) \tilde{l}_j(+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, -1) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, -1) \right) \tilde{l}_j(-1) \\
 & \quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}(+1, y_j) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(+1, y_j) \right) \tilde{h}_i(+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_N}{\partial x}(-1, y_j) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(-1, y_j) \right) \tilde{h}_i(-1).
 \end{aligned}$$

On a besoin de connaître les valeurs des polynômes  $\tilde{h}_i$  et  $\tilde{l}_j$  aux points du bord  $\pm 1$ . En utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev, on obtient, pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_i(+1) & = (-1)^{i+1}(1 + x_i), \\
 \tilde{h}_i(-1) & = (-1)^{N+i+1}(1 - x_i),
 \end{aligned}$$



les expressions de  $\tilde{l}_j(\pm 1)$ , pour  $j = 1, \dots, M$ , étant analogues.

Le système discret correspondant à cette formulation du problème de Darcy avec condition de Dirichlet homogène est formé par les équations (40),(41),(43). On montrerait de même que pour les conditions de Dirichlet non homogènes (36), en cherchant le couple  $(u_N, v_N)$  dans  $X_{N,M}(\Omega) \times Y_{N,M}(\Omega)$  et  $p_N$  dans  $\mathcal{P}_{N-2,M-2}(\Omega)$ , le système discret correspondant serait composé des mêmes équations.

Comme pour la formulation forte, la discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement (40),(41) est de type collocation. Mais à la différence de la formulation forte, l'équation de continuité discrétisée (43) n'est plus une équation de collocation. L'équation (43) s'écrit comme une combinaison linéaire de la divergence de la vitesse écrite au point de collocation intérieur  $(x_i, y_j)$  et de la divergence aux quatre points du bord :

$$(+1, y_j), (-1, y_j), (x_i, +1), (x_i, -1).$$

Par conséquent la divergence ne sera pas nulle aux points de collocation intérieurs, la contrainte de continuité ne sera satisfaite que "faiblement". Cette formulation sera nommée formulation faible.

### 3.4 Expression matricielle de l'étape de projection

Considérons le système linéaire, pour  $\alpha = 0, 1$  :

Pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ ,

$$\sigma u_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(x_i, y_j) = \tilde{f}_x(x_i, y_j), \quad (44a)$$

$$\sigma v_N(x_i, y_j) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(x_i, y_j) = \tilde{f}_y(x_i, y_j), \quad (44b)$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x_i, y_j) - \alpha d_{ij} = 0. \quad (44c)$$

Quand  $\alpha = 0$ , le système (44) est identique au système (37), formulation forte du problème de Darcy, et quand  $\alpha = 1$ , le système (44) correspond à la formulation faible du problème de Darcy, qui est composé des équations (40),(41),(43). En utilisant la discrétisation de type spectral des opérateurs de dérivation exprimée dans le paragraphe 3.1.3, nous pouvons définir les opérateurs de divergence suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij}^{N,\alpha} &= D_{ij}^N + \frac{\alpha}{2} D_{0j}^N \tilde{h}_i(+1) + \frac{\alpha}{2} D_{Nj}^N \tilde{h}_i(-1), \\ \mathcal{D}_{ij}^{M,\alpha} &= D_{ij}^M + \frac{\alpha}{2} D_{0j}^M \tilde{l}_i(+1) + \frac{\alpha}{2} D_{Mj}^M \tilde{l}_i(-1). \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites du problème, le système (44) devient pour  $\alpha = 0, 1$  :

Pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $j = 1, \dots, M - 1$ ,

$$\sigma u_N(x_i, y_j) + \sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{D}_{ik}^N p_N(x_k, y_j) = \widetilde{f}_x(x_i, y_j), \quad (45a)$$

$$\sigma v_N(x_i, y_j) + \sum_{l=1}^{M-1} \widetilde{D}_{jl}^M p_N(x_i, y_l) = \widetilde{f}_y(x_i, y_j), \quad (45b)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{D}_{ik}^{N,\alpha} u_N(x_k, y_j) + \sum_{l=1}^{M-1} \mathcal{D}_{jl}^{M,\alpha} v_N(x_i, y_l) = S_{ij}^\alpha, \quad (45c)$$

où :

$$\begin{aligned} S_{ij}^\alpha &= -\frac{\alpha}{2} \left[ \sum_{k=0}^N D_{ik}^N u_N(x_k, +1) \widetilde{l}_j(+1) + \sum_{k=0}^N D_{ik}^N u_N(x_k, -1) \widetilde{l}_j(-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^M D_{jl}^M v_N(+1, y_l) \widetilde{h}_i(+1) + \sum_{l=0}^M D_{jl}^M v_N(-1, y_l) \widetilde{h}_i(-1) \right] \\ &\quad - \mathcal{D}_{i0}^{N,\alpha} u_N(+1, y_j) - \mathcal{D}_{iN}^{N,\alpha} u_N(-1, y_j) - \mathcal{D}_{j0}^{M,\alpha} v_N(x_i, +1) - \mathcal{D}_{jM}^{M,\alpha} v_N(x_i, -1). \end{aligned}$$

Le terme source  $S^0$ , en accord avec la théorie mathématique des équations de Darcy [2], est composé uniquement des vitesses normales à la paroi. Par contre, le terme  $S^1$  contient les composantes normales et tangentielles à la paroi, la présence de ces dernières n'étant pas requises par la théorie mathématique des équations de Darcy.

Les inconnues du système (45) sont les valeurs de la pression et des deux composantes de la vitesse aux points de collocation intérieurs, les valeurs au bord de la vitesse étant fixées par les conditions de Dirichlet. Pour connaître la valeur de la pression à un point  $(x_b, y_b)$  du bord, connaissant sa valeur aux points de collocation intérieurs, on peut calculer le polynôme de pression :

$$p_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} p_N(x_i, y_j) \widetilde{h}_i(x) \widetilde{l}_j(y),$$

au point  $(x_b, y_b)$ .

Afin d'écrire le système (45) sous forme matricielle, notons  $U$  la matrice de dimension  $(N - 1) \times (M - 1)$  contenant les valeurs de la première composante de la vitesse aux points de collocation internes :

$$U = [ u_N(x_i, y_j) ]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1},$$

la matrice  $V$  de dimension  $(N - 1) \times (M - 1)$  contient les valeurs de la seconde composante de la vitesse aux points de collocation internes :

$$V = [ v_N(x_i, y_j) ]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1},$$

La matrice  $P$  de dimension  $(N - 1) \times (M - 1)$  contient les valeurs de la pression aux points de collocation internes :

$$P = [ p_N(x_i, y_j) ]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1},$$

la matrice  $F^x$  de dimension  $(N-1) \times (M-1)$  contient les valeurs de la première composante du terme source aux points de collocation internes :

$$F^x = \left[ \tilde{f}^x(x_i, y_j) \right]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1} ,$$

la matrice  $F^y$  de dimension  $(N-1) \times (M-1)$  contient les valeurs de la seconde composante du terme source aux points de collocation internes :

$$F^y = \left[ \tilde{f}^y(x_i, y_j) \right]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1} .$$

Soit  $\mathcal{D}^{N,\alpha}$  la matrice de divergence de dimension  $(N-1) \times (N-1)$  :

$$\mathcal{D}^{N,\alpha} = \left[ \mathcal{D}_{ij}^{N,\alpha} \right]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq N-1} ,$$

soit  $\mathcal{D}^{M,\alpha}$  la matrice de divergence de dimension  $(M-1) \times (M-1)$  :

$$\mathcal{D}^{M,\alpha} = \left[ \mathcal{D}_{ij}^{M,\alpha} \right]_{1 \leq i \leq M-1; 1 \leq j \leq M-1} ,$$

soit  $\widetilde{D}^N$  la matrice de dérivation pour la pression de dimension  $(N-1) \times (N-1)$  :

$$\widetilde{D}^N = \left[ \widetilde{D}_{i,j}^N \right]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq N-1} ,$$

soit  $\widetilde{D}^M$  la matrice de dérivation pour la pression de dimension  $(M-1) \times (M-1)$  :

$$\widetilde{D}^M = \left[ \widetilde{D}_{i,j}^M \right]_{1 \leq i \leq M-1; 1 \leq j \leq M-1} ,$$

et nous notons  $\widetilde{S}^\alpha = \left[ \widetilde{S}_{i,j}^\alpha \right]_{1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1}$  la matrice de dimension  $(N-1) \times (M-1)$  telle que :

$$\widetilde{S}_{i,j}^\alpha = \widetilde{d}_{ij}^\alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1; 1 \leq j \leq M-1.$$

Le système discret (45) s'écrit sous forme matricielle :

$$\sigma U + \widetilde{D}^N P = F^x, \quad (46a)$$

$$\sigma V + P {}^t\widetilde{D}^M = F^y, \quad (46b)$$

$$\mathcal{D}^{N,\alpha} U + V {}^t\mathcal{D}^{M,\alpha} = \widetilde{S}^\alpha. \quad (46c)$$

Résolvons ce système par un découplage de la vitesse et la pression de type Uzawa : de (46a) on tire

$$U = \frac{1}{\sigma} (F^x - \widetilde{D}^N P), \quad (47)$$

et de (46b) on tire

$$V = \frac{1}{\sigma} (F^y - P {}^t\widetilde{D}^M), \quad (48)$$

et en portant les équations (47) et (48) dans (46c), on obtient une équation de type Poisson pour la pression :

$$\left(\mathcal{D}^{N,\alpha}\widetilde{\mathcal{D}}^N\right) P + P {}^t\left(\mathcal{D}^{M,\alpha}\widetilde{\mathcal{D}}^M\right) = G^\alpha, \quad (49)$$

où :

$$G^\alpha = \mathcal{D}^{N,\alpha}F^x + F^y {}^t\mathcal{D}^{M,\alpha} - \sigma \widetilde{S}^\alpha.$$

Notons

$$A_N^\alpha = \mathcal{D}^{N,\alpha}\widetilde{\mathcal{D}}^N,$$

l'opérateur unidimensionnel d'Uzawa pour la pression. Pour  $\alpha = 0, 1$   $A_N^\alpha$  est un opérateur différentiel du second ordre, qui diffère des opérateurs de pression usuels de type Laplace munis de conditions de Neumann. L'opérateur  $A_N^\alpha$  est formé du produit d'un opérateur de dérivation dans  $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$ , avec un opérateur de dérivation première dans  $\mathbb{P}_N(\Omega)$  muni de conditions de Dirichlet. L'opérateur  $A_N^0$  a été étudié mathématiquement et numériquement dans [14], tandis que l'opérateur  $A_N^1$  a été présenté dans [3] dans le cadre d'un schéma explicite approximant les équations de Navier-Stokes.

Une fois que la pression est calculée, les équations (47) et (48) donnent la valeur de la vitesse aux points de collocation intérieurs. Dans le cas de la formulation faible, ainsi que la formulation forte, les vitesses au bord sont données par les véritables conditions aux limites des équations de Navier-Stokes (1d), bien que dans le cas de la formulation forte, seule les conditions aux limites portant sur la vitesse normale interviennent dans la résolution du problème de Darcy. Néanmoins, les vitesses tangentielles au bord sont requises pour l'intégration en temps du problème de Navier-Stokes, plus précisément pour le calcul de la vitesse prédite, ainsi que pour évaluer les termes non-linéaires.

### 3.5 Etude numérique des valeurs propres de $A_N^\alpha$

Pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ , effectuons une étude numérique de la structure spectrale de l'opérateur  $A_N^\alpha$  en calculant, grâce à la bibliothèque NAG, ses valeurs propres pour différentes valeurs de  $N$ . On remarque que ces valeurs propres sont réelles, distinctes, négatives sauf une et une seule qui est nulle, correspondant au mode de pression constant. Heinrichs a démontré dans [14] que les valeurs propres de  $A_N^0$  vérifiaient ces mêmes propriétés. Cela confirme qu'il n'est pas nécessaire d'associer à cet opérateur une condition de Neumann sur la pression. Notons  $\lambda_{max}^\alpha$  et  $\lambda_{min}^\alpha$  respectivement la plus grande valeur propre et la plus petite valeur propre non nulle (en valeur absolue) de  $A_N^\alpha$ , calculées numériquement. La quantité  $\lambda_0^\alpha$  désigne la valeur propre numérique de  $A_N^\alpha$  approchant la valeur propre zéro. Pour différentes valeurs de  $N$ , les valeurs de  $\lambda_{max}^\alpha$ ,  $\lambda_{min}^\alpha$  et  $\lambda_0^\alpha$  sont reportées dans les tableaux 1 et 2, respectivement pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ . Dans le cas  $\alpha = 0$ , on constate que  $\lambda_{min}^0$  tend vers la valeur  $\pi^2/4$ , et

$$\lambda_{max}^0 \approx 4.7 \cdot 10^{-2} N^4,$$

lorsque  $N$  augmente. Pour  $\alpha = 1$ , on constate que  $\lambda_{min}^1$  tends vers la valeur  $\pi^2/4$ , et que contrairement au cas  $\alpha = 0$ ,

$$\lambda_{max}^1 \approx 4.5 \cdot 10^{-2} N^5,$$

lorsque  $N$  augmente. L'opérateur  $A_N^1$  est moins bien conditionné que  $A_N^0$ , entraînant une plus grande imprécision dans la recherche numérique des valeurs propres et vecteurs propres de  $A_N^1$  que pour celle de  $A_N^0$ , lorsque  $N$  augmente. On s'attend à ce que les résultats numériques dans le cadre de la formulation faible du problème de Darcy soient moins précis que pour une formulation forte, pour de grandes valeurs de  $N$ .

N	$\lambda_{min}^0$	$\lambda_{max}^0$	$\lambda_{max}^0/N^4$	$ \lambda_o^0 $
4	2.0	$1.20 \cdot 10^1$	$4.69 \cdot 10^{-2}$	$4.82 \cdot 10^{-16}$
8	2.47	$2.02 \cdot 10^2$	$4.92 \cdot 10^{-2}$	$6.21 \cdot 10^{-15}$
16	2.47	$3.14 \cdot 10^3$	$4.79 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-13}$
32	2.47	$4.98 \cdot 10^4$	$4.75 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-13}$
64	2.47	$7.96 \cdot 10^5$	$4.74 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-11}$
128	2.47	$1.27 \cdot 10^7$	$4.74 \cdot 10^{-2}$	$7.42 \cdot 10^{-11}$
256	2.47	$2.03 \cdot 10^8$	$4.74 \cdot 10^{-2}$	$8.95 \cdot 10^{-10}$

TAB. 1 – Valeurs propres de l'opérateur  $A_N^0$  calculées numériquement .

N	$\lambda_{min}^1$	$\lambda_{max}^1$	$\lambda_{max}^1/N^5$	$\lambda_o^1$
4	8	$4.40 \cdot 10^1$	$4.30 \cdot 10^{-2}$	$9.27 \cdot 10^{-15}$
8	2.56	$1.55 \cdot 10^3$	$4.72 \cdot 10^{-2}$	$6.75 \cdot 10^{-14}$
16	2.49	$4.89 \cdot 10^4$	$4.66 \cdot 10^{-2}$	$7.61 \cdot 10^{-12}$
32	2.47	$1.53 \cdot 10^6$	$4.57 \cdot 10^{-2}$	$5.12 \cdot 10^{-11}$
64	2.47	$4.85 \cdot 10^7$	$4.51 \cdot 10^{-2}$	$2.40 \cdot 10^{-9}$
128	2.47	$1.54 \cdot 10^9$	$4.48 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-7}$
256	2.47	$4.91 \cdot 10^{10}$	$4.46 \cdot 10^{-2}$	$2.33 \cdot 10^{-6}$

TAB. 2 – Valeurs propres de l'opérateur  $A_N^1$  calculées numériquement .

### 3.6 Essais numériques sur le problème de Darcy

Puisque les valeurs propres de  $A_N^\alpha$  sont toutes réelles, distinctes, négatives, sauf une et une seule qui est nulle, l'équation pseudo-Poisson (49) est résolue de manière directe par un solveur de Helmholtz utilisant une méthode de diagonalisation [11], en filtrant le mode de pression constant. Il ne reste plus qu'à reporter la valeur de la pression dans (47) et (48) pour obtenir aux points de collocation intérieurs le champ de vitesse associé, les valeurs de la vitesse au bord étant déterminées par la condition de Dirichlet (36).

Afin de comparer les deux approximations discrètes du problème de Darcy (44), avec  $\sigma = 1$ , nous avons choisi la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 u_{ex}(x, y) &= -4\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi y), \\
 v_{ex}(x, y) &= 4\pi \cos(4\pi x) \sin(4\pi y), \\
 p_{ex}(x, y) &= \cos(4\pi x) \cos(4\pi y).
 \end{aligned}$$

En reportant cette solution dans le problème de Darcy continu (35), on obtient les valeurs du terme source et des conditions aux bords correspondantes. La constante arbitraire de pression est choisie de manière à faire coïncider, au point central du maillage, la pression calculée  $p_N$  avec la pression exacte.

Notons  $\phi_N^\alpha$  (où  $\phi \in \{u, v, p\}$ ) les champs calculés par la formulation forte ( $\alpha = 0$ ) et la formulation faible ( $\alpha = 1$ ). Notons  $E(|\phi_N^\alpha - \phi_{ex}|)$  l'erreur moyenne normalisée, calculée sur les points de collocation intérieurs :

$$E(|\Phi_N^\alpha - \Phi_{ex}|) = \frac{\|\Phi_N^\alpha - \Phi_{ex}\|_{L^2(\Omega)}^N}{\|\Phi_N^\alpha\|_{L^2(\Omega)}^N},$$

$$\text{où} \quad \|\Phi_N^\alpha\|_{L^2(\Omega)}^N = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i,j=1}^{N-1} \Phi_N^\alpha(x_i, y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $16 \leq N = M \leq 64$ , les figures 1 et 2 comparent respectivement les erreurs sur la première composante de la vitesse  $E(|u_N^\alpha - u_{ex}|)$  (les erreurs sur  $v$  sont semblables) et sur la pression  $E(|p_N^\alpha - p_{ex}|)$ , issues des deux formulations. Les erreurs sur la vitesse et la pression obtenues par les deux formulations sont comparables pour  $N \leq 36$ , et à partir de  $N \geq 40$  les erreurs se situent à la limite de la précision de la machine.

Notons  $\|\nabla \cdot \mathbf{v}_N^\alpha\|_I$  la norme sur les points de collocation intérieurs de la divergence discrète de la vitesse :

$$\|\nabla \cdot \mathbf{v}_N^\alpha\|_I = \|D_N u_N^\alpha + v_N^\alpha {}^t D_N\|_{L^2(\Omega)},$$

et  $\|\nabla \cdot \mathbf{v}_N^\alpha\|_B$  la norme sur les points de collocation du bord de la divergence discrète de la vitesse :

$$\|\nabla \cdot \mathbf{v}_N^\alpha\|_B = \|D_N u_N^\alpha + v_N^\alpha {}^t D_N\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

$$\text{où} \quad \|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}^N = \left( \frac{1}{4(N-1)} \sum_{(x_i, y_j) \in \Gamma_c} \phi(x_i, y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le polynôme de divergence

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v_N}{\partial y}(x, y),$$

est un polynôme de degré  $N$  selon  $x$  et  $M$  selon  $y$ . Pour qu'il soit identiquement nul il faudrait que ses valeurs aux  $(N+1) \times (M+1)$  de collocation soient nulles, comme c'est le cas dans une méthode de matrice d'influence [16]. Or la formulation forte du problème de Darcy impose au polynôme divergence de n'être égal à zéro qu'aux points de collocation internes, comme l'illustre la figure 3, mais pas aux points de collocation du bord, comme le montre la figure 4. Néanmoins la quantité  $\|\mathbf{v}_N^0\|_B$  tend vers zéro lorsque  $N$  et  $M$  augmentent, et donc le polynôme divergence tend vers le polynôme nul lorsque la solution est une "bonne" approximation de la solution exacte. Dans le cadre de la formulation faible, la divergence

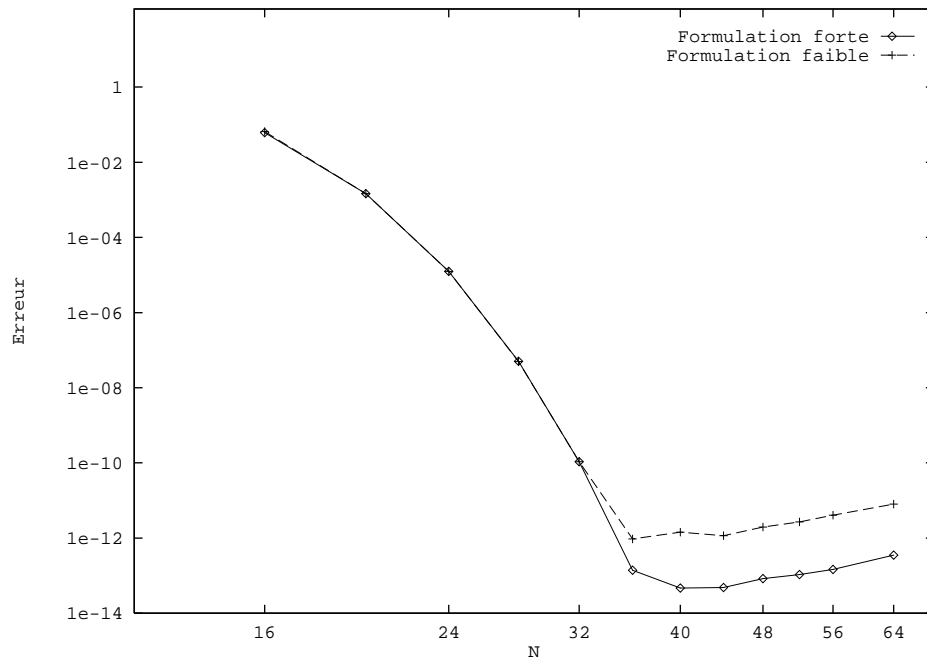


FIG. 1 – Erreur sur la vitesse  $u$  dans le cadre d'une formulation faible et d'une formulation forte, en fonction de  $N$ .

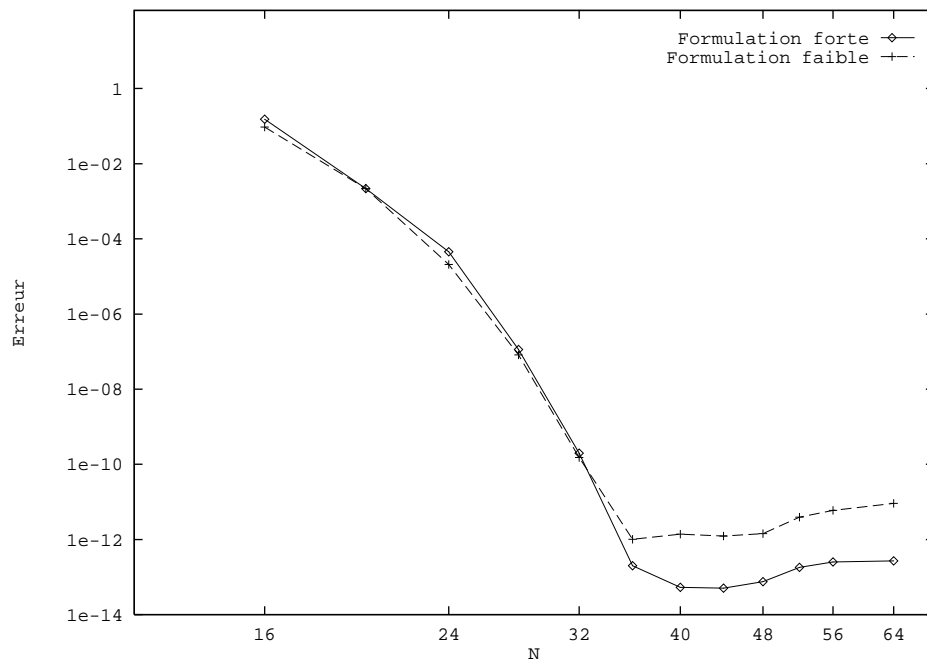


FIG. 2 – Erreur sur la pression  $p$  dans le cadre d'une formulation faible et d'une formulation forte, en fonction de  $N$ .

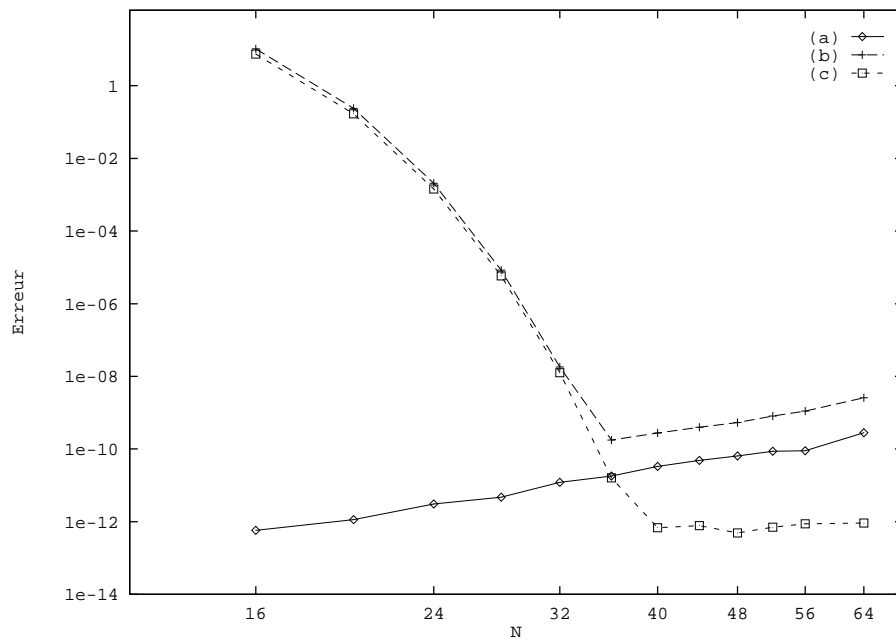


FIG. 3 – Comparaison entre les normes de la divergence discrète aux points intérieurs de (a) la vitesse issue d’une formulation forte, (b) la vitesse issue d’une formulation faible, et (c) la vitesse exacte.

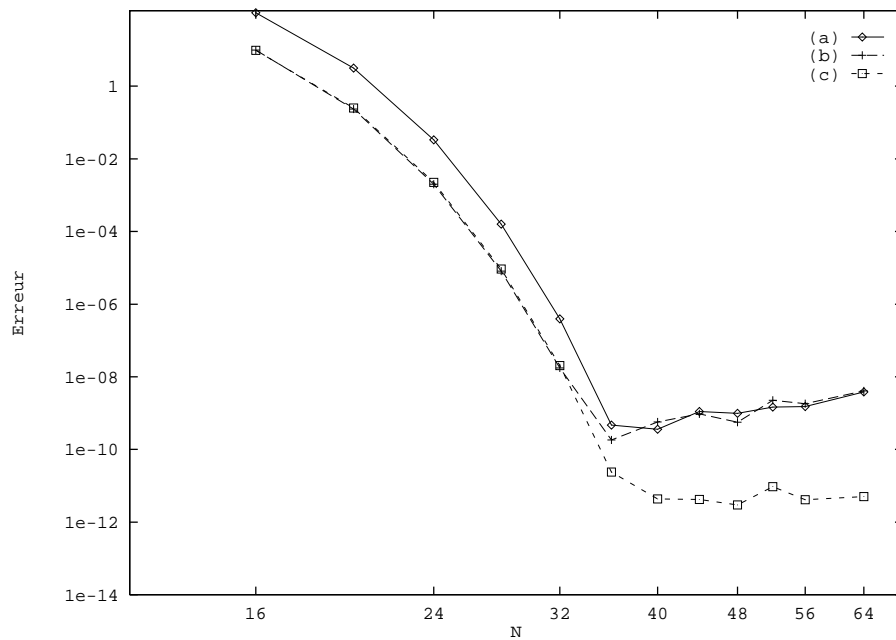


FIG. 4 – Comparaison entre les normes de la divergence discrète au bord de (a) la vitesse issue d’une formulation forte, (b) la vitesse issue d’une formulation faible, et (c) la vitesse exacte.



discrète au point de collocation intérieur  $(x_i, y_j)$  est une combinaison linéaire de la divergence aux points du bord

$$(+1, y_j), (-1, y_j), (x_i, +1), (x_i, -1),$$

mais elle n'implique pas que la divergence discrète est nulle à un point donné. Les figures 3 et 4 montrent que la divergence discrète n'est pas nulle, mais tend vers le zéro machine lorsque  $N$  et  $M$  augmentent. De même que dans le cas de la formulation forte, le polynôme divergence tends vers le polynôme nul lorsque la solution est une "bonne" approximation de la solution exacte.

## 4 Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes

Evaluons la précision temporelle des trois schémas de projection présentés au paragraphe 2.3, où les équations sont discrétisées soit par la formulation forte  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ , soit par la formulation faible  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ . Nous allons donc comparer les six schémas de projection suivant :

- Quatre schémas d'ordre 2,
  - le schéma de type *AB/ER2* (13)-(14) avec la formulation forte de l'étape de projection, noté *S21*,
  - le schéma de type *AB/ER2* (13)-(14) avec la formulation faible de l'étape de projection, noté *W21*,
  - la variante du schéma de type *AB/ER2* (15)-(16), dans lequel effectuée une extrapolation d'ordre 2 de la pression lors de l'étape de prédiction, avec la formulation forte de l'étape de projection, notée *S22*,
  - le même schéma (15)-(16), avec la formulation faible de l'étape de projection, noté *W22*.
- Deux schémas d'ordre 3,
  - le schéma de type *AB/ER3* (17)-(18) avec la formulation forte de l'étape de projection, noté *S32*,
  - le même schéma (17)-(18), avec la formulation faible de l'étape de projection, noté *W32*.

Nous allons considérer la solution des équations de Navier-Stokes :

$$u(x, y, t) = \cos(\gamma t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (50a)$$

$$v(x, y, t) = -\cos(\gamma t) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (50b)$$

$$p(x, y, t) = \frac{\cos^2(\gamma t)}{4} (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) + 10(x + y) \cos(\gamma t), \quad (50c)$$

à partir de laquelle nous définissons le terme source  $\mathbf{f}$ , les conditions aux limites  $\mathbf{g}$ , et la condition initiale  $\mathbf{v}_0$ . Le nombre de Reynolds est  $Re = 1/\nu = 100$ .

### 4.1 Essais stationnaires

En choisissant  $\gamma = 0$  la solution exacte (50) est indépendante du temps. La condition initiale choisie est la solution exacte. En utilisant les notations du paragraphe 3.6, notons :

$$E_u^\alpha = \|u_N^\alpha - u\|_{L^2(\Omega)}, \quad E_v^\alpha = \|v_N^\alpha - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad E_p^\alpha = \|p_N^\alpha - p\|_{L^2(\Omega)},$$

$N = M$	$E_u^0$	$E_v^0$	$E_p^0$	$\ \mathbf{v}_N^0\ _I$	$\ \mathbf{v}_N^0\ _B$
8	$9.57 \cdot 10^{-7}$	$9.84 \cdot 10^{-7}$	$9.76 \cdot 10^{-4}$	$8.06 \cdot 10^{-16}$	$4.92 \cdot 10^{-5}$
16	$2.77 \cdot 10^{-15}$	$3.17 \cdot 10^{-15}$	$7.35 \cdot 10^{-11}$	$1.10 \cdot 10^{-14}$	$3.55 \cdot 10^{-13}$
32	$4.94 \cdot 10^{-15}$	$4.96 \cdot 10^{-15}$	$5.08 \cdot 10^{-14}$	$1.68 \cdot 10^{-13}$	$2.23 \cdot 10^{-12}$

TAB. 3 – Erreurs sur la solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes, en formulation forte (schéma S22).

$N=M$	$E_u^1$	$E_v^1$	$E_p^1$	$\ \mathbf{v}_N^1\ _I$	$\ \mathbf{v}_N^1\ _B$
8	$2.25 \cdot 10^{-7}$	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$9.76 \cdot 10^{-4}$	$9.49 \cdot 10^{-6}$	$6.34 \cdot 10^{-6}$
16	$7.49 \cdot 10^{-15}$	$6.47 \cdot 10^{-15}$	$7.38 \cdot 10^{-11}$	$7.12 \cdot 10^{-14}$	$6.91 \cdot 10^{-14}$
32	$6.36 \cdot 10^{-14}$	$2.76 \cdot 10^{-14}$	$1.67 \cdot 10^{-12}$	$1.04 \cdot 10^{-12}$	$1.29 \cdot 10^{-12}$

TAB. 4 – Erreurs sur la solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes, en formulation faible (schéma W22).

les erreurs sur les vitesses et la pression. Les tableaux 3 et 4 présentent les erreurs  $E_u^\alpha$ ,  $E_v^\alpha$ ,  $E_p^\alpha$ , ainsi que les normes sur la divergence discrète, calculées avec les schémas S22 et W22. Il est à noter que pour une même discrétisation spatiale, les erreurs sur les champs de vitesses et de pression sont indépendantes du schéma en temps et du pas de temps.

A l'état stationnaire, les erreurs sur la solution exacte sont des erreurs d'approximation spatiale. On remarque que pour  $N = 32$ , la solution exacte est bien représentée, l'erreur sur les vitesses et la pression étant proche du zéro machine. Comme pour l'équation de Darcy, seul dans le cas de formulation forte la divergence discrète aux points intérieurs est au zéro machine.

## 4.2 Essais non stationnaires

Evaluons la précision en temps des schémas sur la solution exacte (50) avec  $\gamma = 5$ , qui est périodique de période  $2\pi/5$ . Les essais sont effectués en prenant  $\Delta t = 10^{-3}$ , et  $N = M = 32$ , de manière que la partie spatiale de l'erreur soit proche du zéro machine (cf. table 3 et 4), et que seule l'erreur en temps apparaisse. Pour les schémas à trois niveaux de temps (S21, W21, S22 et W22), l'intégration en temps est initialisée en prenant les champs aux instants  $-\Delta t, 0$  égaux à la solution exacte à ces niveaux de temps. De même, pour les schémas à quatre niveaux de temps (S32, W32), l'intégration en temps est initialisée en prenant les champs aux instants  $-2\Delta t, -\Delta t, 0$  égaux à la solution exacte à ces niveaux de temps. Notons  $\phi_N^n$  (où  $\phi \in \{u, v, p\}$ ) le champs calculé à l'instant  $t = n\Delta t$ . Pour chacun des six schémas, les figures 5 et 6 montrent respectivement l'évolution temporelle de l'erreur  $E_u^\alpha(t, \Delta t) = \|u_N^n - u(t)\|_{L^2(\Omega)}$  sur la première composante de la vitesse et de l'erreur  $E_p^\alpha(t, \Delta t) = \|p_N^{\alpha, n} - p(t)\|_{L^2(\Omega)}$  sur la pression (les erreurs sur la deuxième composante de la vitesse sont semblables à celles sur la première composante). Premièrement, on peut remarquer que ces erreurs sont indépendantes de la discrétisation spatiale choisie. On n'observe pas d'amplification des oscillations en temps des erreurs, ce qui montre la stabilité des solutions numériques. On

remarque que  $E_u^\alpha(t, \Delta t)$  est plus petit d'une décade pour les schémas  $S22$  et  $W22$  (où est effectuée une extrapolation d'ordre 2 de la pression lors de l'étape de prédiction) que pour les schémas  $S21$  et  $W21$ . Par contre, l'erreur maximale sur la pression est identique pour tous les schémas d'ordre deux. Les figures 7 et 8 comparent l'ordre temporel des schémas de projection en présentant respectivement les erreurs

$$\max_t E_u(t, \Delta t) \quad \text{et} \quad \max_t E_p(t, \Delta t),$$

pour différentes valeurs du pas de temps  $\Delta t$ , le maximum sur  $t$  étant pris lorsque l'état périodique est atteint. Les figures 7 et 8 confirment la précision du second ordre en temps de la vitesse et la pression calculée par les schémas  $S21$ ,  $W21$ ,  $S22$  et  $W22$ , ainsi que la précision du troisième ordre en temps de la vitesse et la pression calculée par les schémas  $S32$ ,  $W32$ .

Il est à noter que des essais numériques ont aussi été effectués avec le schéma de projection suivant :

– Etape de prédiction :

$$\begin{aligned} \frac{11\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - 18\mathbf{v}^n + 9\mathbf{v}^{n-1} - 2\mathbf{v}^{n-2}}{6\Delta t} - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \nabla(3p^n - 3p^{n-1} + p^{n-2}) \\ + 3(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n - 3(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n-1} + (\mathbf{v}^{n-2} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n-2} &= \mathbf{f}^{n+1}, \\ \tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\Omega}^{n+1} &= \mathbf{g}^{n+1}. \end{aligned}$$

– Etape de projection :

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla(p^{n+1} - 3p^n + 3p^{n-1} - p^{n-2}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} &= 0, \\ \mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{g}^{n+1} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

qui est un schéma de type  $AB/ER3$ , avec une extrapolation de la pression du troisième ordre dans l'étape de prédiction. En formulation forte, comme en formulation faible, des instabilités ont été observées pour des pas de temps supérieurs à  $10^{-3}$ .

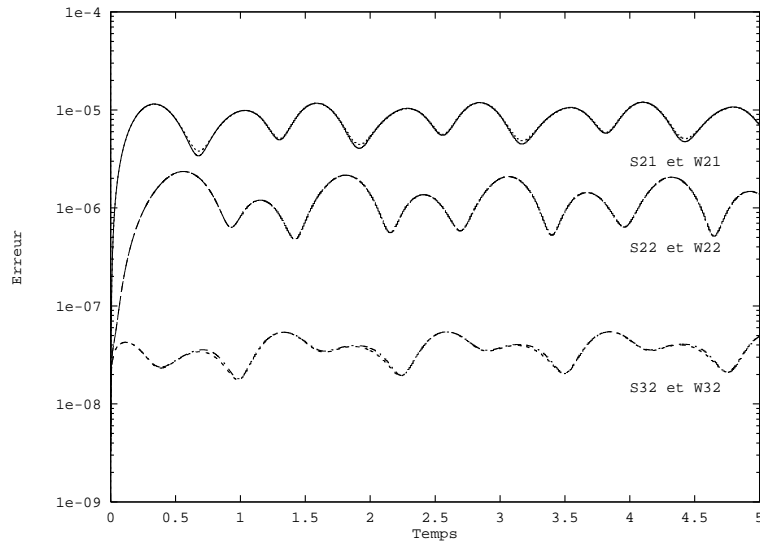


FIG. 5 – Evolution temporelle de l'erreur en temps sur la vitesse  $u$ ,  $E_u(t, \Delta t)$ , pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$ ,  $N = M = 32$ .

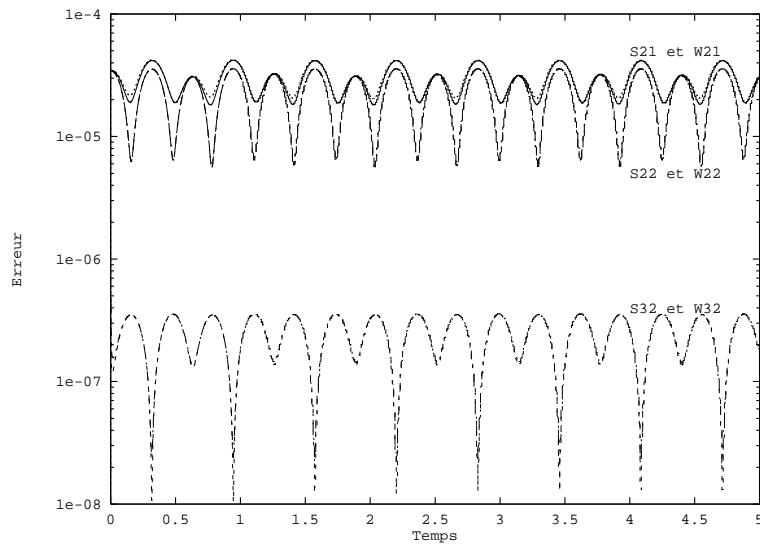


FIG. 6 – Evolution temporelle de l'erreur en temps sur la pression  $p$ ,  $E_p(t, \Delta t)$ , pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$ ,  $N = M = 32$ .

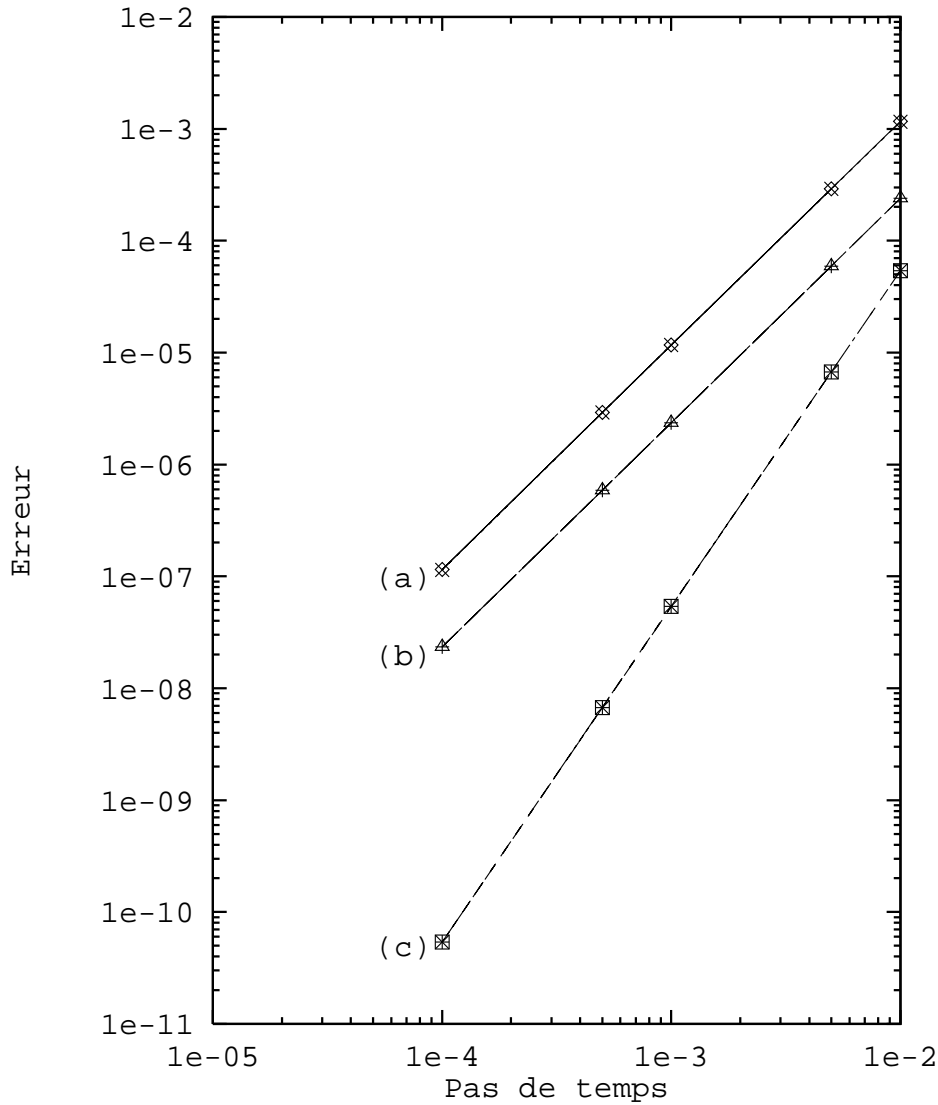


FIG. 7 – Maximum de l'erreur en temps sur la vitesse  $u$ ,  $E_u(t, \Delta t)$ , en fonction du pas de temps  $\Delta t$ , pour les schémas (a) : S21 et W21 , (b) : S22 et W22 , (c) : S32 et W32 .

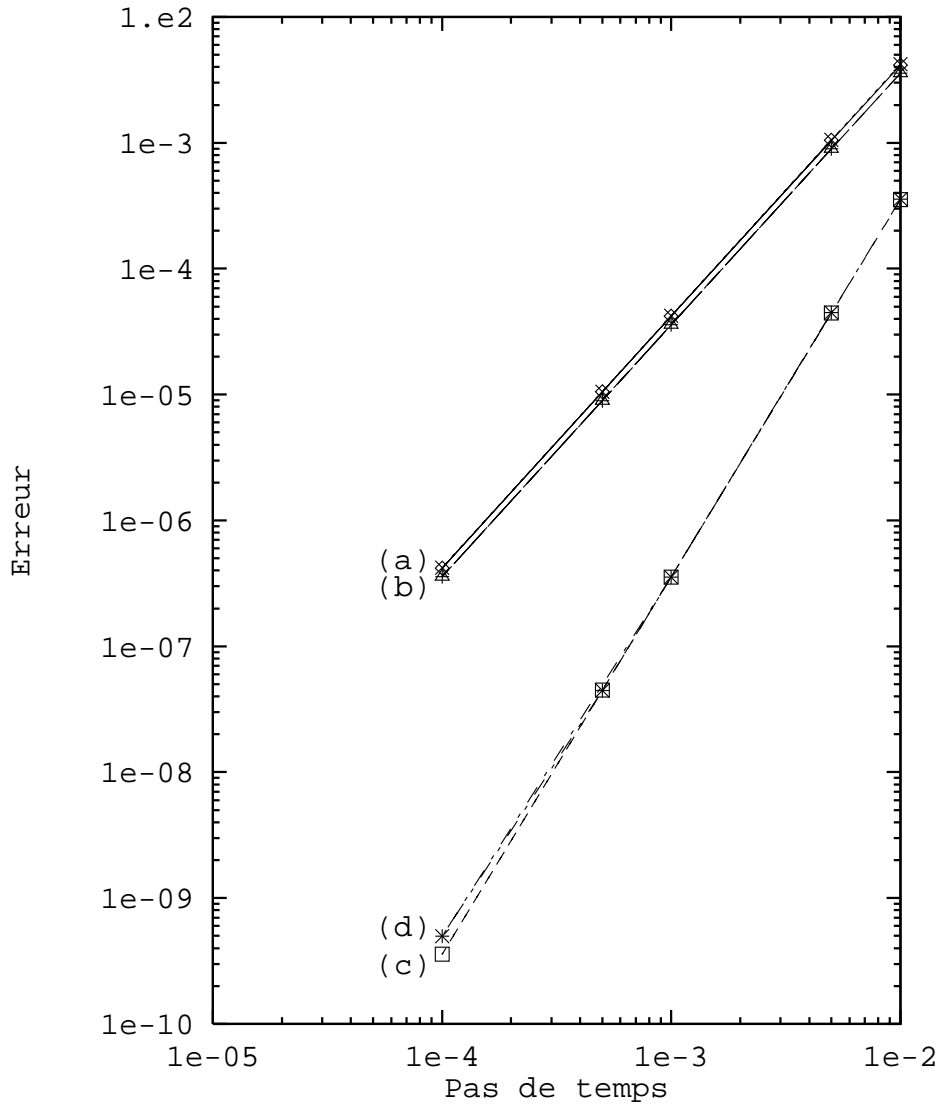


FIG. 8 – Maximum de l'erreur en temps sur la pression  $p$ ,  $E_p(t, \Delta t)$ , en fonction du pas de temps  $\Delta t$ , pour les schémas (a) : S21 et W211 , (b) : S22 et W22 , (c) : S32 et (d) : W32 .

## 5 Conclusion

Nous avons présenté et discuté des schémas de projection, d'ordre 2 et 3 en temps, approximant les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, utilisant une méthode directe, et dont l'approximation de la pression ne possède pas de modes parasites.

Nous avons comparé deux approximations spectrales de type  $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$  distinctes. L'une, appelée formulation forte, assure que l'équation de continuité est satisfaite aux points de collocation intérieurs, tandis que la formulation faible annule une combinaison linéaire de la divergence à l'intérieur et aux points du bord. Il est observé que la divergence tend vers zéro lorsque l'écoulement est bien représenté. Un tel comportement est observé pour la divergence aux points du bord pour la formulation forte.

Ces deux approximations ont permis de bâtir des schémas d'ordre deux et trois en temps, en effectuant des extrapolations de la pression d'ordre élevé. Une catégorie de ces schémas, notée  $S$  (regroupant les schémas  $S21$ ,  $S22$ ,  $S32$ ) utilise la formulation forte, l'autre catégorie, notée  $W$  (regroupant les schémas  $W21$ ,  $W22$ ,  $W32$ ) utilise la formulation faible. Des premiers essais numériques ont montré que les schémas  $S$  et  $W$  permettaient d'obtenir des approximations de la vitesse et la pression d'ordre élevé en temps. Des essais supplémentaires [6] portant sur l'écoulement de référence dans la cavité régularisée ont démontré la précision et la robustesse de ces schémas.

## Remerciements

Je voudrais remercier M. R. Peyret pour ses précieux conseils et l'aide apportée au cours de ce travail.



## Références

- [1] M. Azaïez. *Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation*. Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud, 1990.
- [2] M. Azaïez, C. Bernardi, and M. Grundmann. Spectral methods applied to porous media equations. *East-West J. Numer. Math.*, **2**, 91-105, 1994.
- [3] M. Azaïez, A. Fikri, and G. Labrosse. A unique grid spectral solver of the  $nd$  cartesian unsteady Stokes system. Illustrative numerical results. *Finite Elements in Analysis and Design*, **16**, 247-260, 1994.
- [4] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, 1992.
- [5] C. Bernardi, Y. Maday, and B. Métivet. Calcul de la pression dans la résolution spectrale du problème de Stokes. *Rech. Aérop.*, **1986-1**, 1-21, 1986.
- [6] O. Botella. On the solution of the Navier-Stokes equations using Chebyshev projection schemes with third-order accuracy in time. *à paraître dans Computers and Fluids*.
- [7] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O*, **R.2**, 129-151, 1974.
- [8] C. Canuto, C. Bernardi, and Y. Maday. Generalized Inf-Sup Condition for Chebyshev Approximation of the Navier-Stokes Equations. Technical report, No. 86-61, ICASE, 1986.
- [9] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] A. Chorin. Numerical simulation of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, **22**, 745-762, 1968.
- [11] U. Ehrenstein and R. Peyret. A Chebyshev-collocation method for the Navier-Stokes equations with application to double-diffusive convection. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **9**, 427-452, 1989.
- [12] J-L. Guermond. Remarques sur les méthodes de projection pour l'approximation des équations de Navier-Stokes. *Numer. Math.*, **67**, 465-473, 1994.
- [13] W. Heinrichs. Operator splitting for the Stokes equations. *à paraître*.
- [14] W. Heinrichs. Splitting techniques for the pseudospectral approximation of the unsteady Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**, 19-39, 1993.

- [15] J.C. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I: Regularity of the solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Num. Anal.*, **19**, 275-311, 1982.
- [16] L. Kleiser and U. Schumann. Treatment of Incompressibility and Boundary Conditions in 3-d Numerical Spectral Simulations of Plane Channel Flows. In *Proc. 3rd GAMMM Conf. Numerical Methods in Fluid Mechanics*, E. H. Hirschel ed., p. 165-173, Vieweg, Braunschweig, 1980.
- [17] P. Le Quéré. Mono and multi domain Chebyshev algorithm on staggered grid. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems*, T.J. Chung and G.R. Karr eds., p. 1434-1439, UAH Press, Huntsville, Al, 1989.
- [18] Y. Maday, A.T. Patera, and E.M Rønquist. the  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_{N-2}$  method for the approximation of the Stokes problem. *Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris VI*, **11**, fasc. 4, 1992.
- [19] Y. Morchoisne. Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode spectrale de sous-domaines. In *Comptes-Rendus du 3ème Congrès Intern. sur les Méthodes Numériques de l'Ingénieur*, P. Lascaux ed., p. 181-208, Paris, 1983.
- [20] J.B. Perot. An analysis of the fractional step method. *J. Comput. Phys.*, **108**, 51-58, 1992.
- [21] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [22] E. M. Rønquist. *Optimal spectral element methods for the unsteady 3-dimensionnal incompressible Navier-Stokes equations*. PhD thesis, M.I.T. , Cambridge, Mass, 1990.
- [23] M. Schumack, W. Schultz, and J. Boyd. Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids. *J. Comput. Phys.*, **94**, 30-58, 1991.
- [24] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires II. *Archiv. Rat. Mech. Anal.*, **32**, 377-385, 1969.
- [25] R. Temam. *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [26] R. Temam. Remark on the pressure boundary condition for the projection method. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **3**, 181-184, 1991.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399