# Contribution à l'étude des schémas aux volumes finis décentrés à faible dissipation transverse

Christophe Debiez

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

# *Contribution à l'étude des schémas aux volumes finis décentrés à faible dissipation transverse*

Christophe Debiez

**N° 2985**

Septembre 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

# Contribution à l'étude des schémas aux volumes finis décentrés à faible dissipation transverse

Christophe Debiez

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Sinus

Rapport de recherche n° 2985 — Septembre 1996 — 35 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, on considère des schémas Mixte-Element-Volume sur des maillages non structurés. En particulier dans le cas de maillages étirés, ces méthodes présentent de fortes erreurs de troncature. On se propose de corriger ce défaut en adaptant les schémas "Narrow" au cas des volumes finis. On compare différentes techniques sur des problèmes d'advection et des écoulements 2D stationnaires.

**Mots-clé :** Mécanique des Fluides compressibles, Schémas décentrés , Advection, Equations d'Euler

*(Abstract: pto)*

# Contribution to the study of upwind finite-volume schemes with weak transverse dissipation

**Abstract:** In this report, we consider MEV-Schemes on unstructured meshes. These methods have a high troncation error especially in the case of stretched meshes. We suggest some improvements by building a new finite volume scheme adapted of Narrow Schemes. We compare several techniques on advection problems and 2D steady flows.

**Key-words:** Compressible Fluid Mechanics, Upwind Schemes, Advection, Euler Flows

# Table des matières



# 1 Introduction

Les schémas décentrés sont encore souvent trop dissipatifs pour donner des solutions précises sur des maillages grossiers non structurés. La présence des termes de dissipation qui agissent à la fois dans la direction de l'écoulement mais aussi dans la direction transverse dégrade fortement la solution. En particulier, la dissipation transverse ne permet pas d'obtenir une bonne représentation de la solution dans les chocs obliques par rapport au maillage, près des couches limites, aux points d'arrêt et bords de fuite pour des problèmes stationnaires et instationnaires.
Pour prendre en compte le cas de maillages non structurés, on considère une méthode Mixte-Element-Volume (MEV) [SPFD87] qui produit d'assez bons résultats sur des maillages triangulaires de type Voronoï pour des solutions régulières. En 2D non structuré, les singularités sont rarement alignées avec le maillage et les effets visqueux sur la solution sont notables. Si on applique aussi cette méthode sur des maillages fortement étirés, la dissipation transverse devient trop grande. Pour capturer des chocs obliques non alignés avec le maillage, une nouvelle classe de schémas (schémas "Narrow", schémas multidimensionnels) a été introduite dans [PDS+93]. Nous nous intéressons ici à l'adaptation du concept "narrow" à une formulation volumes finis sur maillages triangulaires de façon à construire un schéma advectif précis capable de bien capturer à la fois les singularités alignées avec le maillage et celles non alignées. Nous proposons aussi plusieurs traitements des maillages étirés.
Dans ce rapport, on expose tout d'abord une première relation intéressante entre la méthode éléments finis et volumes finis. On rappelle ensuite le principe des schémas multidimensionnels en présentant les schémas distributifs [PDS+93]. Puis on introduit une version "Narrow" du schéma volumes finis et une version adaptée aux maillages étirés. Enfin quelques résultats numériques montrent l'amélioration de la précision du schéma volumes finis.

# 2 Remarques sur la méthode Volumes Finis - Eléments Finis

Le paragraphe introductif motive la construction de la méthode mixte éléments finis/volumes finis originale. Le lecteur peut aussi consulter [AD89],[AD93].

### 2.1 Relation entre la méthode Eléments Finis Petrov-Galerkin et la discrétisation Volumes Finis

On considère l'équation scalaire suivante :

$$W_t \,+\, \vec{\nabla}\,.\,\vec{F}(W) \,=\, 0 \tag{1}$$

où $\vec{F}(W) = (F(\vec{W}), G(\vec{W}))^T$ .
En multipliant par une fonction test et après intégration, on obtient :

$$\int_\Omega W_t\,\psi_i\,d\Omega \,+\, \int_\Omega \psi_i\,\vec{\nabla}\,.\,\vec{F}\,d\Omega \,=\, 0\,. \tag{2}$$

On note $\varphi_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ les fonctions de base éléments finis dans l'espace discret; On peut alors écrire :

$$W \,=\, \sum_j^N W_j\,\varphi_j\,, \tag{3}$$

et

$$\vec{F} \,=\, \sum_{j=1}^N \vec{F}_j\,\varphi_j\,. \tag{4}$$

En injectant les expressions (3) et (4) dans (2), on a :

$$\sum_{j=1}^N M_{ij}\,W_{j,t} \,+\, \sum_{j=1}^N \vec{A}_{ij}\,.\,\vec{F}_j \,=\, 0 \tag{5}$$

où

$$M_{ij} \,=\, \int_\Omega \varphi_j\,\psi_i\,d\Omega\,, \tag{6}$$

$$\vec{A}_{ij} \,=\, \left(\int_\Omega \psi_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\,d\Omega,\ \int_\Omega \psi_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\,d\Omega\right) = \int_\Omega \psi_i\ grad\ \varphi_j\ d\Omega\,. \tag{7}$$

Soit les propriétés suivantes,

$$(P1) \qquad \int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\,\psi_i\,d\Omega \,=\, 0 \tag{8}$$

$$(P2) \quad \sum_j \int_\Omega \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\,\psi_i\,d\Omega \,=\, 0\,(k = 1, 2) \tag{9}$$

La propriété (P1) est liée au non décentrage de l'approximation. La propriété (P2) assure la consistance; dans le cas des Eléments Finis Lagrange, (P2) permet d'obtenir que $\vec{F}_i \,\equiv\, constante$ implique $\int_\Omega W_t \,=\, 0$.

**Lemme 1** *Si les fonctions tests sont identiques aux fonctions de base ($\psi_i \equiv \varphi_i$), alors les propriétés (P1) et (P2) sont satisfaites.*

Remarque :
Les propriétés (P1) et (P2) sont encore vérifiées dans le cas d'une approximation Elément Finis P1 (linéaire par morceaux) si on peut écrire $\psi_i = \varphi_i + \kappa_i$ où $\kappa_i$ est un petit terme de perturbation tel que $\int_T \kappa_i\ d\Omega = 0$ pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$.

Preuve que (P1) et (P2) sont vraies si $\varphi_i \equiv \psi_i (1 \leq i \leq N)$

Pour cela, on montre les propriétés équivalentes suivantes :

$(P_1')$ $\vec{A}_{ji} = -\vec{A}_{ij}$ and $\vec{A}_{ii} = 0$ $(1 \leq i, j \leq N)$

$$(P_2')\quad \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_{ij} = 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{ji} &= \int_{\Omega} \varphi_j \; grad \; \varphi_i \; d\Omega \\
&= \int_{\Omega_{ij} \equiv supp(\varphi_i \;\; \varphi_j)} grad(\varphi_j \; \varphi_i) \; d\Omega \; - \int_{\Omega_{ij}} \varphi_i \; grad \; \varphi_j \; d\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega_{ij}} \varphi_j \; \varphi_i \; \vec{n} \; d\sigma \; - \; \vec{A}_{ij} \; = \; - \; \vec{A}_{ij}
\end{aligned}$$

puisque $\varphi_i \varphi_j \; = \; 0$ sur $\partial\Omega_{ij} \; \equiv \; \partial(supp(\varphi_i \varphi_j))$.

En conséquence, $\vec{A}_{ji} \; = \; -\vec{A}_{ij}$ et $\vec{A}_{ii} \; = \; 0$.

De plus, si $\vec{F}$ est un vecteur constant, on a $div \; \vec{F} \; = \; 0$ et alors, par un calcul similaire à celui utilisé pour (5), on a :

$$0 \;=\; \int_{\Omega} \varphi_i \; div \; \vec{F} \; d\Omega \;=\; \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_{ij} \; . \; \vec{F}_j \;=\; (\sum_{j=1}^{N} \vec{A}_{ij}) \; . \; \vec{F}$$

donc

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{A}_{ij} \;=\; 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \; ,$$

ce qui démontre (P2).

**Proposition 1** *Si les propriétés (P1) et (P2) sont vérifiées, la formulation variationnelle Petrov-Galerkin est équivalente à la méthode volumes finis suivante :*

$$\sum_{j} M_{ij} \, W_{j,t} \; + \; \sum_{j \neq i} 2 \, \vec{A}_{ij} \, \frac{\vec{F}_i \; + \; \vec{F}_j}{2} \; = \; 0.$$

*L'aire des cellules est donnée par* $\sum_{j} M_{ij}$ *et les flux élémentaires à l'interface des cellules par* $\vec{\eta}_{ij} \; = \; 2 \, \vec{A}_{ij}$.

On notera que les méthodes de décentrage SUPG (voir par exemple [HMM86]) ne vérifient pas l'hypothèse (P1).

## 2.2 Approximation $P1$-Galerkin 2D

On se restreint aux fonctions de base P1-Galerkin.
Les fonctions $\varphi_i \; = \; \psi_i$ sont continues et linéaires par morceau sur chaque triangle, égales à 1 au noeud $i$ et zéro ailleurs.
On remarque que

$$\sum_{j} M_{ij} \; = \; aire(C_i) \, . \tag{10}$$

On applique la formule de "Masse Lumping" (10), on obtient :

$$aire(\, C_i \,) \, \frac{\partial W_i}{\partial t} \; + \sum_{j \,\in\, N(i)} \int_{\partial C_{ij}} \vec{F}(W) \, . \, \vec{\eta} \, d\sigma \; = \; 0 \tag{11}$$

avec

$$\sum_{j \,\in\, N(i)} \int_{\partial C_{ij}} \vec{F}(W) \, . \, \vec{\eta} \, d\sigma \; = \; \sum_{j \,\in\, N(i)} \vec{F}(W)|_{I_{ij}} \int_{\partial C_{ij}} \vec{\eta} \, d\sigma \, . \tag{12}$$