



# Géométrie synthétique et robots parallèles

Luc Tancredi, Monique Teillaud

► **To cite this version:**

Luc Tancredi, Monique Teillaud. Géométrie synthétique et robots parallèles. RR-2962, INRIA. 1996. <inria-00073736>

**HAL Id: inria-00073736**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073736>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Géométrie synthétique et robots parallèles***

Luc Tancredi, Monique Teillaud

**N° 2962**

Août 1996

THÈME 2

 ***rapport  
de recherche***



## Géométrie synthétique et robots parallèles

Luc Tancredi<sup>\*</sup>, Monique Teillaud<sup>\*\*</sup>

Thème 2 — Génie logiciel  
et calcul symbolique  
Projet Prisme

Rapport de recherche n° 2962 — Août 1996 — 27 pages

**Résumé :** Le modèle géométrique direct des robots parallèles consiste à déterminer la position et l'orientation de la plate-forme lorsque sont connues les valeurs des variables articulaires servant à commander le robot. Le problème posé étant très complexe, une approche consistant à le simplifier en utilisant les mesures de capteurs additionnels est aussi abordée.

Nous faisons un bilan des théorèmes de géométrie synthétique et des résultats qu'ils permettent d'obtenir lorsqu'ils sont appliqués à ce problème.

**Mots-clé :** robot parallèle, modèle géométrique direct, géométrie algébrique

*(Abstract: pto)*

<sup>\*</sup>. Ce travail a été effectué lorsque cet auteur était employé par l'INRIA

<sup>\*\*</sup>. INRIA Sophia-Antipolis, Phone: (33) 93-65-77-62, E-mail: Monique.Teillaud@sophia.inria.fr.

## Synthetic Geometry and Parallel Manipulators

**Abstract:** The forward kinematics problem for parallel manipulators consists in determining the position and the orientation of the platform when the values of the articular variables, which are used to command the robot, are known. This problem is very difficult, so we also consider an approach that simplifies it by using measures given by additional sensors.

We give a survey of theorems of synthetic geometry, and of the results they yield when applied to this problem.

**Key-words:** parallel manipulator, forward kinematics problem, algebraic geometry

## 1 Introduction

Dans le domaine de la robotique, les architectures de type *sériel* sont les plus répandues. Elles sont caractérisées par leur nature anthropomorphe : elles ressemblent à un bras humain.

Par opposition à l'architecture sérielle, nous parlerons d'*architecture parallèle* pour un robot (par exemple figure 1), lorsque plusieurs *chaînes cinématiques élé-*

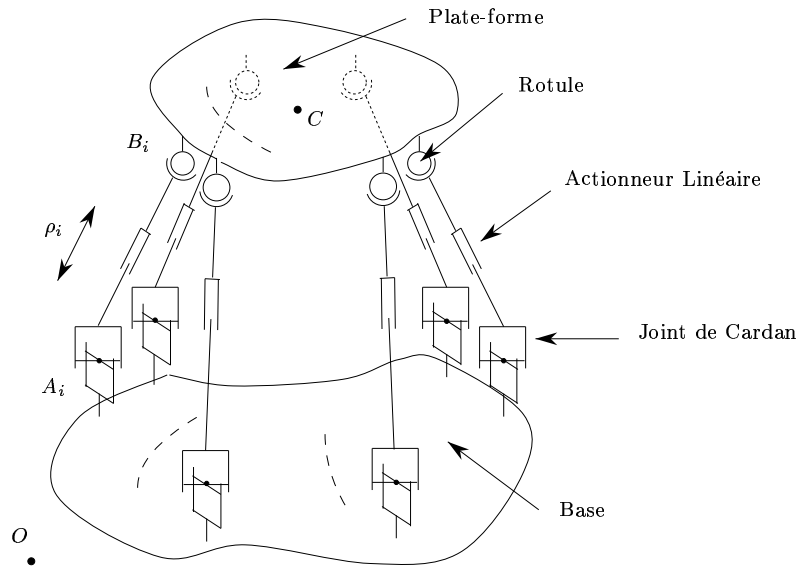


FIG. 1 – Robot parallèle à actionneurs linéaires

*mentaires* ( $s$  chaînes) sont à la fois au contact de la base et de l'effecteur. Un groupe d'articulations  $A_i$ , ( $i = 1, \dots, s$ ) est situé sur la *base* fixe. Un autre groupe  $B_i$ , ( $i = 1, \dots, s$ ) est situé sur la *plate-forme* qui est mobile par rapport à la base. Un couple d'articulations  $(A_i, B_i)$ , ( $i = 1, \dots, s$ ) est relié par une chaîne cinématique élémentaire équipée d'un seul moteur permettant de déplacer l'articulation correspondante de la plate-forme. Ce mouvement ne permet pas de découpler la position et l'orientation de l'organe terminal. Une comparaison des architectures sérielle et parallèle est présentée dans [33].

Nous ne considérerons que les manipulateurs *pleinement parallèles* [8], ayant six chaînes cinématiques élémentaires que nous appellerons *segments*. Nous nous restreindrons de plus à l'architecture suivante : les articulations dont les points  $A_i$  sont les centres sont des joints de cardan (deux degrés de liberté en rotation) constitués

de deux articulations *rotoïdes* (un degré de liberté) notées R ; les points  $B_i$  sont les centres d'articulations *sphériques* (trois degrés de liberté en rotation) notées S ; les chaînes cinématiques élémentaires reliant les couples de points  $(A_i, B_i)$  sont des segments équipés d'actionneurs linéaires, comme sur la figure 1. Des capteurs permettent de mesurer les longueurs des segments  $[A_i B_i]$ .

Cependant, ces restrictions n'en sont pas réellement, puisque de nombreuses autres architectures sont équivalentes à celle-ci (voir [33]) du point de vue du *modèle géométrique direct* (noté MGD) que nous étudions dans cet article. Par abus de langage, nous emploierons toujours simplement le terme pourtant plus général de *robot parallèle*.

En supposant que les valeurs des six longueurs  $\rho_i = \|A_i B_i\|$  sont données, le modèle géométrique direct consiste à déterminer la *posture* (position et orientation) du manipulateur. Le modèle géométrique direct s'écrit alors sous la forme du système d'équations

$$\|A_i B_i\|^2 = \rho_i^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\} \quad (1)$$

Ces équations sont quadratiques en les coordonnées des points  $B_i$ .

Il est clair que ce problème n'admet pas une solution unique. La figure 2 présente un cas très simple où deux solutions sont valides pour un même ensemble de longueurs.

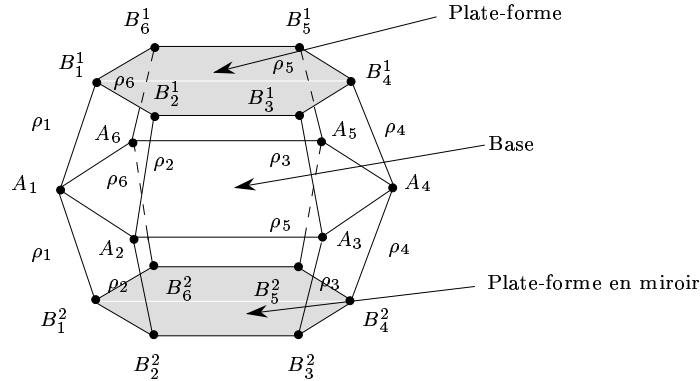


FIG. 2 – Exemple de solution multiple pour le modèle géométrique direct : deux solutions en miroir par rapport à une base plane.

Le modèle géométrique inverse, quant à lui, consiste à trouver les variables articulaires à partir de la posture. Sa résolution est immédiate.

En revanche, la résolution du modèle géométrique direct est très complexe. On rencontre deux difficultés majeures. L'une est de déterminer l'ensemble des solutions admissibles. L'autre difficulté majeure est de découvrir quelle est la solution correspondant, parmi toutes ces solutions, à la posture courante pour un ensemble donné de valeurs articulaires. La formulation analytique des solutions, si elle existe, n'a pas encore été trouvée.

Nous nous intéressons ici, non pas à la résolution du MGD, mais à l'obtention de *bornes* sur le nombre de solutions possibles de ce problème.

**Résultats antérieurs** Dans le cas d'un robot parallèle général, le nombre maximum de solutions dans l'espace des *réels* est inconnu. Mais une borne supérieure, atteinte dans certains cas, sur le nombre de solutions *complexes* est 40 [29, 30, 19, 24, 12]. Pour le moment seuls des exemples de manipulateurs avec au plus 24 solutions réelles ont pu être trouvés [16, 33]. Pour un robot dont la base serait plane et la plate-forme triangulaire, il y a encore jusqu'à 16 solutions réelles [4, 14]. La plate-forme de STEWART, quant à elle, n'admet qu'au plus 12 solutions [20].

On ne compte plus les travaux qui, faute de pouvoir montrer quoi que ce soit pour tout robot, ont étudié des architectures spécialisées (plate-forme plane, articulation multiple...).

De plus amples développements sur le MGD peuvent être trouvés dans [33].

**Géométrie synthétique** La géométrie synthétique est nommée ainsi pour des raisons historiques et pas forcément de manière judicieuse. Néanmoins nous utiliserons cette expression dans sa signification première. En effet les objets que nous utiliserons (surfaces, etc.) sont le résultat d'une synthèse à partir de points, de droites ou de plans.

Ce type de géométrie est utilisé par BURMESTER, PLÜCKER, CAYLEY, pour ne citer qu'eux. Au contraire des méthodes algébriques, la géométrie du problème est totalement exploitée et n'est pas limitée par des équations complexes de degré élevé et difficilement manipulables. D'un autre côté cette méthode n'est pas constructive : elle ne permet pas de disposer explicitement des solutions. En outre, en géométrie synthétique il existe peu de méthodes systématiques ; il faut étudier au cas par cas.

FICHTER [6] est allé rechercher cette approche, délaissée au profit de la géométrie analytique, en vue de l'appliquer à l'étude du mouvement des corps.<sup>1</sup> Si la géométrie

---

1. *Kinematics* à différencier de la *cinématique* où la vitesse fait aussi l'objet d'étude.



synthétique a probablement été utilisée dans certaines branches de la théorie des mécanismes, elle a en revanche été très peu appliquée aux robots parallèles.

Nous nous proposons dans cet article de montrer que la géométrie synthétique peut apporter un regard intéressant sur les problèmes posés par ces robots, en particulier sur le modèle géométrique direct, pour lequel elle fournit des démonstrations simples et élégantes.

**Plan de l'article** Dans la section suivante, nous introduisons la notion de capteurs additionnels qui permet de simplifier le MGD. La section 3 expose les théorèmes de la géométrie synthétique. Enfin la section 4 illustre comment la géométrie synthétique permet de démontrer des résultats sur le nombre de solutions du modèle géométrique direct des robots parallèles.

## 2 L'ajout de capteurs

Devant la difficulté du MGD, une approche pour le simplifier est d'obtenir des informations supplémentaires par le biais de capteurs additionnels.

Une première méthode consiste à ajouter des segments passifs dont la longueur est mesurable [26, 27]. Mais ces segments réduisent considérablement l'espace de travail du manipulateur en augmentant le risque de collisions entre segments.

Nous étudierons ici uniquement l'ajout de capteurs angulaires sur les joints de Cardan attachés à la base. Ces capteurs permettent d'obtenir une information sur la position des articulations  $B_{i,i=1,\dots,6}$  de la plate-forme, en mesurant un angle sur la base. Leur encombrement est limité, mais la précision dépend de la posture, l'erreur étant amplifiée par la longueur du segment  $[A_i B_i]$  [34].

L'ajout d'un capteur sur un segment  $i$  permet de déterminer un **plan** contenant  $B_i$  et  $A_i$ . L'ajout de **deux** capteurs sur le même segment  $i$  suffit à déterminer la **position** de  $B_i$ .

L'ajout de capteurs additionnels sur un robot parallèle permet donc de connaître dans certains cas la position d'une ou plusieurs des articulations de la plate-forme. Si ces articulations ne sont pas *fixées* par l'ajout de ces capteurs, elles sont néanmoins *connues*, et du point de vue de la résolution du modèle géométrique direct, le mécanisme obtenu est équivalent à un mécanisme pour lequel les articulations de la plate-forme équipées de capteurs supplémentaires seraient multiples. Cette correspondance sera utilisée dans l'étude effectuée dans la section 4.

INOUE, TSUSAKA et FUKUIZUMI en 1985 [17] sont probablement les premiers à avoir utilisé des capteurs en quantité excédentaire sur un robot parallèle. Une méthode numérique itérative est utilisée pour la résolution du MGD. ARAI et STOUGH-

TON [32] traitent du placement des capteurs et de la sensibilité de la solution par rapport à une erreur de mesure des capteurs ou même par rapport à une perte de capteurs. MERLET [23] utilise 3 ou 4 capteurs pour obtenir des formulations explicites des solutions admissibles. Il introduit la notion de conditions sur l'architecture ou la configuration suivant lesquelles le nombre de solutions varie. BARON et ANGELES [1, 2, 3] s'intéressent aux cas où l'utilisation de capteurs additionnels permet d'obtenir un découplage entre la position et l'orientation; ce découplage est par exemple obtenu pour les architectures étudiées dans [15] et [37]. HAN, CHUNG et YOUM [9] montrent que deux capteurs additionnels placés sur un même segment pour un robot à plate-forme et base planes suffisent pour obtenir une formulation explicite des solutions. Le nombre de solutions admissibles est alors de deux. Cependant, il peut y avoir alors plus que les deux solutions annoncées dans certains cas dégénérés, la borne sur le nombre de solutions étant huit [36, 33]. En utilisant des méthodes algébriques, TANCREDI, TEILLAUD et MERLET [36, 35] fournissent des bornes supérieures sur le nombre de solutions du MGD, en fonction du nombre de capteurs additionnels utilisés et de leur placement.

**Notation :** Pour signaler que  $m$  segments sont équipés de deux capteurs angulaires et que  $n$  autres segments sont équipés d'un seul capteur angulaire, nous écrirons : cas  $2^m - 1^n$ . Quand  $m = 0$  nous noterons : cas  $1^n$ ; et quand  $n = 0$  nous noterons : cas  $2^m$ .

### 3 Géométrie synthétique

L'utilisation de la géométrie synthétique est particulièrement adaptée à l'étude du comportement des corps en mécanique du solide. FICHTER [6] s'est attaché à l'étude de mécanismes ayant un ou deux degrés de liberté et aux lieux des points que peuvent décrire un de leurs points, droites ou plans. L'apport majeur de sa thèse consiste en les théorèmes 5 et 6.

#### 3.1 Théorèmes de Bézout

Le théorème fondamental lorsqu'il s'agit de connaître le nombre de solutions d'un système polynomial est le théorème de BÉZOUT.

**Définition 1 (Ordre d'une courbe)** *L'ordre d'une courbe spatiale est le nombre de points d'intersection entre cette courbe et un plan quelconque.*

Pour une courbe plane, l'ordre et le degré sont identiques.

**Théorème 1 (Théorème de Bézout)** *Deux courbes planes de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$  se rencontrent en  $n_1 n_2$  points (si leur intersection est finie).*

*La courbe d'intersection de deux surfaces de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$  est d'ordre  $n_1 n_2$  (si l'intersection est de dimension 1).*

Le théorème de BÉZOUT prévoit qu'il y a quatre points d'intersection pour deux coniques, donc *a fortiori* pour deux cercles. Or chacun sait que deux cercles n'ont au plus que deux points en commun. Dans l'espace il semble que l'intersection de deux sphères présente le même type d'incohérence. Leur intersection (un cercle) n'est que de degré deux où on attendrait un degré égal à quatre.

L'*homogénéisation* permet d'expliquer ce phénomène et d'identifier les solutions *manquantes* : ces solutions sont en fait des points à l'infini dans l'*espace projectif*. KLEIN offre une agréable introduction intuitive de la géométrie projective [18]. COXETER [5] propose un exposé rigoureux dans le cas du plan. Ces notions peuvent être retrouvées par exemple dans [6, 10, 25] et de très nombreuses autres références.

Plongeons  $\mathbb{C}^n$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  de dimension  $n$ . A un point de  $\mathbb{C}$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  on associe les *coordonnées homogènes*  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  définies par

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}} \quad \dots \quad x_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$$

où  $\xi_{n+1}$  est la *variable d'homogénéisation*. Tout point de l'espace affine correspond à un ensemble de points de l'espace  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de dernière composante non nulle, et qui sont tous identiques à un facteur multiplicatif non-nul près ; ils forment une droite passant par l'origine. Réciproquement tout point de  $\mathbb{P}^n$  défini à un facteur multiplicatif non-nul près, dont la dernière composante n'est pas nulle, correspond à un même point affine. Le cas où  $\xi_{n+1} = 0$  correspond à un point à l'infini. Un point à l'infini ne peut avoir d'autre coordonnée nulle que  $\xi_{n+1}$ .

**Cercles dans le plan** Étudions à présent l'intersection de deux cercles, en deux dimensions, dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^2$ . L'équation d'un cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r$  en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  d'un quelconque de ses points, s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

Soit  $w$  la variable d'homogénéisation. L'équation précédente se réécrit :

$$\left(\frac{x}{w} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{w} - b\right)^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

Multiplions l'équation par  $w^2$  :

$$(x - aw)^2 + (y - bw)^2 - r^2 w^2 = 0 \quad (4)$$

Tous les termes sont de degré deux, l'équation est homogène.

L'équation  $w = 0$  correspond à la droite à l'infini et coupe aussi le cercle. A l'infini,  $w = 0$ , l'équation (4) devient :

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0 \quad (5)$$

Ainsi la droite à l'infini coupe le cercle en deux points que l'on appellera les *points cycliques*<sup>2</sup> dont les coordonnées sont :

$$\mathcal{I} = \begin{cases} w = 0 \\ x = +iy \end{cases} \quad \mathcal{J} = \begin{cases} w = 0 \\ x = -iy \end{cases}$$

Ces points appartiennent à tout cercle du plan. Voilà les deux points manquant dans la borne de BÉZOUT. Deux cercles ont donc effectivement **quatre** points d'intersection dans l'espace projectif. Il est important de remarquer que les points  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  sont indissociables. Ils ne peuvent appartenir individuellement (l'un sans l'autre) à une courbe algébrique réelle.

**Sphères dans l'espace** En passant à la troisième dimension,  $\mathbb{P}^3$ , les objets géométriques que nous considérons pour notre raisonnement sont les sphères. L'équation d'une sphère de centre  $(a, b, c)$  et de rayon  $r$  s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0 \quad (6)$$

L'équation homogène d'une sphère se traduit de (6) en :

$$(x - aw)^2 + (y - bw)^2 + (z - cw)^2 - r^2 w^2 = 0 \quad (7)$$

Le plan à l'infini  $w = 0$  et la sphère se coupent suivant une courbe produite par l'intersection des surfaces :

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Ici encore, cette intersection à l'infini est absolument indépendante de la sphère considérée. Le degré de cette courbe est deux et correspond bien à la valeur manquante

---

2. *imaginary circular points*

pour l'intersection complète de deux sphères. Cette courbe imaginaire de degré deux et commune à toute sphère est appelée ombilic.<sup>3</sup> En outre regardons ce qui se passe dans le plan  $(xOy) \equiv z = 0$ . L'équation (8) est identique à l'équation (5). En fait on pourrait voir aisément que l'ombilic est l'ensemble des points cycliques de tous les plans de l'espace.

### **Théorèmes de Bézout étendus**

FICHTER [6] étend le décompte de ces solutions imaginaires à l'infini à des courbes et surfaces quelconques.

**Définition 2 (Circularité)** *La circularité d'une courbe réelle est la multiplicité de l'appartenance du couple de points cycliques à la courbe. La circularité d'une surface réelle est la multiplicité de l'appartenance de l'ombilic à la surface.*

**Théorème 2 (Bézout étendu, courbe/courbe)** *Deux courbes de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$  et de circularités respectives  $p_1$  et  $p_2$ , ont une intersection contenant un nombre de points réels d'au plus :*

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

*(si le nombre de points d'intersection est fini)*

**Théorème 3 (Bézout étendu, courbe/surface)** *Une courbe et une surface de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$  et de circularités respectives  $p_1$  et  $p_2$ , ont une intersection contenant un nombre de points réels d'au plus :*

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

*(si le nombre de points d'intersection est fini)*

**Théorème 4 (Bézout étendu, surface/surface)** *Deux surfaces de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$  et de circularités respectives  $p_1$  et  $p_2$ , ont une intersection contenant une courbe d'ordre au plus :*

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

*(si la dimension de l'intersection est 1)*

Notons que pour des courbes ou des surfaces dont la circularité est nulle, les théorèmes précédents sont cohérents avec la version usuelle du théorème de BÉZOUT, c'est-à-dire que la borne est atteinte. La notion de circularité permet d'éliminer un certain nombre de solutions à l'infini.

---

3. *imaginary spherical circle*

### Application : courbe du coupleur

Nous allons montrer comment étudier le nombre de solutions du MGD du robot plan en utilisant uniquement la notion de circularité et le théorème de BÉZOUT (voir aussi [22]). Des démonstrations purement algébriques permettent également de démontrer le même résultat [33].

Nous allons essayer d'obtenir le nombre de solutions au MGD du robot plan en calculant l'intersection de deux courbes. Considérons alors ce robot dont on aurait dissocié, par exemple, l'articulation  $B_3$  du segment 3 (voir figure 3). Le mécanisme

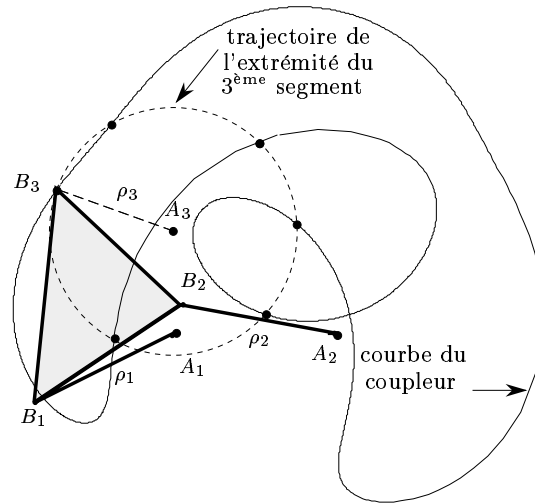


FIG. 3 – Mécanisme à 4 barres et courbe du coupleur

constitué des articulations  $A_1, A_2, B_1, B_2$  et  $B_3$  dont les longueurs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont figées, est appelé *mécanisme à quatre barres*. Il n'a plus qu'un degré de liberté. La courbe tracée par  $B_3$  appartenant au mécanisme à quatre barres est appelée *courbe du coupleur* et c'est une sextique.<sup>4</sup> L'intersection de cette courbe avec la droite à l'infini est (voir [10]) :

$$(x^2 + y^2)^3 \|B_1 B_2\|^2 = 0$$

Hormis le cas où  $B_1$  et  $B_2$  sont confondus et où la courbe du coupleur est dégénérée, il apparaît que la circularité de cette courbe d'ordre six est trois. C'est une *sextique tri-circulaire* ; elle est de circularité maximale.

<sup>4</sup>. courbe d'ordre six.

D'autre part, dans le robot plan non dissocié,  $B_3$  doit appartenir au cercle de centre  $A_3$  et de rayon  $\rho_3$ . Le nombre de solutions au MGD est donc le résultat donné par le théorème 2 pour l'intersection d'une courbe d'ordre deux et de circularité un avec une courbe d'ordre six et de circularité trois, soit  $2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ . Il est même possible de trouver un exemple avec six solutions réelles comme la figure 3.

**Deux coupleurs associés** Considérons le mécanisme composé de deux mécanismes à quatre barres coopérant. Ils sont joints par leur extrémité:  $B_3 \equiv B'_3$ . Ce problème est étudié par INNOCENTI [13] qui utilise une méthode constructive et donc laborieuse. Il obtient un polynôme mono-variable de degré dix-huit, soit au plus autant de configurations possibles ; de plus il présente un exemple ayant dix-huit solutions réelles.

En utilisant la notion de circularité, nous sommes en présence de deux courbes de degré six et de circularité trois ayant une intersection finie. Par le théorème 2 il est immédiat de calculer le nombre de points appartenant à l'intersection de deux mécanismes à quatre barres :  $6 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ .

### 3.2 Acabit d'un mécanisme articulé

Pour commencer, nous nous intéressons au type d'articulation pour lequel nous étudierons la propriété d'acabit. Pour cela nous introduisons la notion de connexion algébrique.

**Définition 3 (Connexion algébrique [6])** *Une connexion entre deux solides est dite algébrique si tous les lieux des points tracés par n'importe quelle partie du mécanisme sont algébriques.*

Les résultats qui suivent ne portent que sur des connexions algébriques à un degré de liberté ou sur des connexions à deux degrés de liberté pouvant se ramener à deux connexions à un degré de liberté liées en série. Le degré de liberté d'une articulation entre deux corps est en fait le degré de liberté que l'un des deux corps a par rapport à l'autre.

L'idée repose sur l'étude systématique du comportement des objets géométriques que sont le point, la droite et le plan, quand le corps duquel ils sont solidaires a un mouvement. Des considérations sur l'analogie que l'on peut faire entre l'ordre d'une

courbe, le degré d'une surface et la classe d'une 1-enveloppe de plans amènent à regrouper ces termes sous celui d'*acabit*<sup>5</sup> car ils sont du même acabit.<sup>6</sup>

**Définition 4 (1-enveloppe de plans - classe)** *Une 1-enveloppe de plans est la surface réglée enveloppe de lieux des plans tangents à une courbe donnée. La classe d'une 1-enveloppe est le nombre de plans qui lui sont tangents et contiennent un même point quelconque.*

Le théorème suivant énonce le résultat que l'acabit est une propriété invariante d'une connexion algébrique à un degré de liberté.

**Théorème 5 (Acabit à 2 corps [6, 11])** *Soit deux solides  $A$  et  $B$  reliés par une connexion algébrique à un degré de liberté. Le lieu des points tracés dans l'un des solides par*

- *un point de l'autre solide donne une courbe d'ordre  $n$*
- *une droite de l'autre solide donne une surface réglée de degré  $n$*
- *un plan de l'autre solide donne une 1-enveloppe de plans de classe  $n$*

*Tous ces objets ont la même valeur (dite acabit)*

$$F_{AB} = n = F_{BA}$$

Maintenant, intéressons nous à un mécanisme reliant trois corps en série à l'aide de deux connexions algébriques à un degré de liberté ou du moins pouvant s'y ramener. L'acabit global du mécanisme est le produit des acabits des corps liés deux à deux.

**Théorème 6 (Acabit à 3 corps [6, 11])** *Soit trois solides  $A$ ,  $B$  et  $C$  reliés en série par des connexions algébriques à un degré de liberté. La relation suivante est vérifiée :*

$$F_{AC} = F_{AB}F_{BC}$$

FICHTER (voir [10]) a obtenu un résultat pour une liaison à trois degrés de liberté décomposable en trois liaisons à un degré de liberté. Par contre, aucun travail n'a pu établir l'invariance de l'acabit pour une connexion qui n'est pas décomposable en série en connexions à un degré de liberté.

---

5. *feather* est la dénomination de FICHTER

6. *birds of a feather*



Il existe une propriété fondamentale à propos de la circularité de certaines surfaces et qui nous permettra de déduire la circularité de surfaces dont on viendra de déterminer l'acabit.

**Propriété 1 (Circularité maximale [11])** *Dans un mécanisme spatial général constitué par des articulations rotoïdes ou sphériques, une surface engendrée par un mouvement circulaire autour d'une courbe ou d'une surface est de circularité maximale.*

### 3.3 Surface décrite par un segment

Jusqu'ici, les résultats établis semblent indiquer que l'approche géométrique s'est arrêtée. En effet, l'utilisation des théorèmes précédents nécessite la connaissance de l'ordre des courbes décrites et donc parfois du calcul explicite d'une équation analytique. Or il n'en est rien, il existe encore d'autres théorèmes qui permettent de déterminer l'ordre, qui correspondra à l'acabit, sans pour autant avoir à calculer une expression abominable. A partir des travaux de CAYLEY, FICHTER a introduit deux théorèmes très utiles.

**Théorème 7 (Cayley [6])** *Un segment de longueur fixée, dont chacune des deux extrémités est liée à une courbe  $i$ ,  $i = 1, 2$  d'ordre  $n_i$  et de circularité  $p_i$ , est porté par une droite décrivant une surface réglée de degré :*

$$2n_1(n_2 - p_2) + 2n_2(n_1 - p_1)$$

*si les courbes n'appartiennent pas à des plans parallèles.*

Le second théorème permet quant à lui de traiter le cas complémentaire du précédent, lorsque les courbes porteuses sont dans des plans parallèles, en donnant une valeur de l'acabit encore plus petite puisqu'il est alors possible de décompter encore les points cycliques.

**Théorème 8 (Cayley [6])** *Un segment de longueur fixée, dont chacune des extrémités est liée à une courbe plane  $i$ ,  $i = 1, 2$  d'ordre  $n_i$  et de circularité  $p_i$ , est porté par une droite décrivant une surface réglée de degré*

$$2n_1(n_2 - p_2) + 2n_2(n_1 - p_1) - 2p_1p_2$$

*si les courbes appartiennent à des plans parallèles distincts. Si ces plans ne sont pas distincts, alors il s'agit du lieu plan décrit par un point lié au segment, ayant ce degré.*

Il va de soi que ces théorèmes ne valent que pour des mécanismes généraux, et que certains cas, comme un segment de longueur nulle, ne conduiront pas au même degré. Comme le note HUNT [10], les théorèmes de CAYLEY ne donnent malheureusement aucune information quant à la circularité de l'objet décrit. Et cela même dans le cas de deux courbes appartenant au même plan. Il n'existe pas de théorème largement applicable permettant de connaître la circularité sans nécessiter un calcul à part.

## 4 Application au modèle géométrique direct

Dans les sections précédentes nous avons mis en place les outils nous permettant à présent d'étudier le MGD.

### 4.1 A propos du RSSR

Le RSSR est un mécanisme spatial largement étudié dans la littérature [28] : il est aussi qualifié de mécanisme à quatre barres spatial (voir la figure 4). Sa première dénomination vient de ce qu'il est constitué en série d'une articulation rotoïde, de deux sphériques et enfin d'une autre rotoïde.

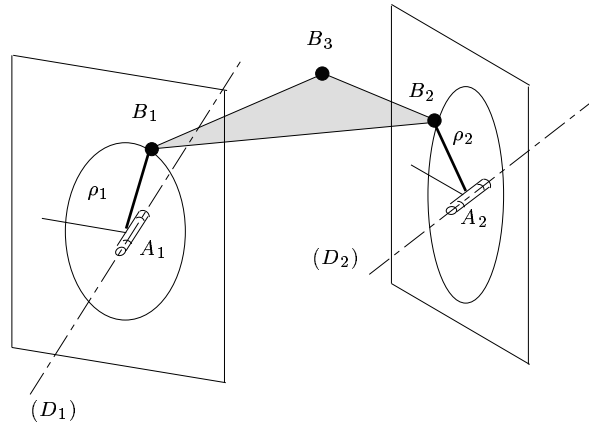


FIG. 4 – Mécanisme RSSR avec coupleur en  $B_3$ .

Les articulations rotoïdes ont pour centres  $A_1$  et  $A_2$  et pour axes de rotation  $(D_1)$  et  $(D_2)$  (voir la figure 4). Les articulations sphériques ont pour centres  $B_1$  et  $B_2$ . Du fait des articulations chaque  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) décrit un cercle centré en  $A_i$  respectivement et dont le plan est perpendiculaire à l'axe  $(D_i)$ . Par construction le segment  $[B_1B_2]$  a donc ses extrémités assujetties sur des courbes qui sont justement ces cercles, et donc

de degré deux et de circularité un. Ce sont exactement les conditions du théorème 7 de CAYLEY. Il est alors aisé de déduire que, si les plans des cercles ne sont pas parallèles, tout point du segment  $]B_1B_2[$  est situé sur une surface dont le degré est :

$$2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 8$$

De plus sa circularité est maximale d'après la propriété 1. Il est remarquable que cette démonstration ne demande pas plus de quelques lignes : *le segment SS d'un mécanisme RSSR décrit une surface de degré huit et de circularité quatre.*

De plus, à l'aide de l'autre théorème de CAYLEY (théorème 8), il est aussi rapide de déduire que si les plans des articulations rotoïdes sont parallèles, alors le degré de la surface décrite n'est plus que de six :

$$2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Mieux encore, en poussant à peine plus loin, on remarque que si les deux plans sont identiques alors ce n'est plus une courbe spatiale qui est décrite par un point lié au segment  $]B_1B_2[$ , mais bien une courbe plane de degré six. Or, ce mécanisme n'est autre que le mécanisme à quatre barres plan (voir 3.1). Il est bien établi que l'on obtient une sextique.

Il y a encore un cas qui mérite d'être étudié. Il s'agit du cas où les axes des cercles sont confondus (voir figure 5). FICHTER [6] remarque qu'un point de la droite  $(B_1B_2)$  est situé sur un cercle et donc que le point  $B_3$  du mécanisme est sur un tore. Il est possible de démontrer que cette surface a un degré de quatre et une circularité de deux. En utilisant le théorème 3, il est immédiat de retrouver que  $B_3$  ne peut prendre que quatre positions différentes (intersection d'un cercle et d'un tore).

## 4.2 Analogies avec des robots parallèles particuliers

Si l'on veut retrouver un cas analogue au RSSR, il est nécessaire de contraindre deux des articulations de la plate-forme à se déplacer uniquement sur un cercle. Lorsque deux articulations de la plate-forme sont confondues, *i.e.* quand une articulation est double, alors cette articulation ne peut se déplacer que sur un cercle, intersection des deux sphères correspondant aux deux segments ayant pour extrémité cette articulation commune.

### 4.2.1 Avec trois articulations doubles

Ainsi, un robot où  $B_1 \equiv B_4$  et  $B_2 \equiv B_5$  (et  $B_3 \equiv B_6$ ) et où on ne considérerait que les segments  $\{1, 2, 4, 5\}$  est un mécanisme équivalent du RSSR (voir figure 6).

En se basant sur les résultats précédents ou en reprenant le théorème 7 de CAY-

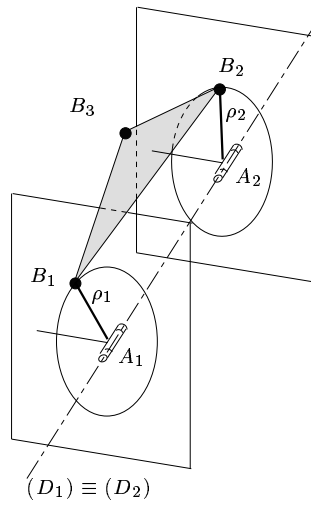


FIG. 5 – Mécanisme RSSR dont les axes des articulations rotoïdes sont confondus

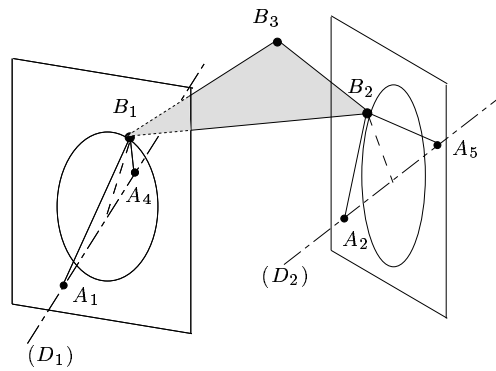


FIG. 6 – Mécanisme équivalent du RSSR

LEY, le segment  $]B_1B_2[$  décrit une surface de degré huit. Trouver l'acabit pour  $B_3$  donnerait une borne sur le nombre de positions. Ici, on aimerait savoir sur quelle surface se trouve  $B_3$  quand on le considère lié uniquement à  $B_1$  et  $B_2$ . En effet, fort de ce savoir et de celui de l'appartenance de  $B_3$  à une seconde courbe il devient alors possible d'utiliser le théorème 2 étendu de BÉZOUT qui donnera le nombre maximal de positions possibles pour  $B_3$  et donc de solutions au modèle géométrique direct.

En première étape,  $B_3$  en tant que partie intégrante du mécanisme équivalent au RSSR, est sur une surface dont le degré peut être obtenu à l'aide d'un des théorèmes de FICHTER. En l'occurrence les trois corps sont la base, l'axe  $(B_1B_2)$  et la plate-forme dont on supposera qu'elle n'est pas liée à la base par  $B_3$  et  $B_6$ . Il est important de signaler que  $B_3$  a pour axe de révolution  $(B_1B_2)$  et pour centre un *point* sur cet axe. Cela signifie que nous ne nous intéressons pas à la surface décrite par  $(B_1B_2)$ ; mais bien à la *courbe* engendrée par un des points de cet axe et dont le degré est identique. Cela revient à dire que  $B_3$  est connecté à la base via deux liaisons en série à un degré de liberté. En calculant le degré de mobilité [10], on verrait aussi qu'il y a effectivement seulement deux degrés de liberté dont un est une révolution autour de  $(B_1B_2)$ . Il découle de ces observations et du théorème 6 que  $B_3$  est sur une surface d'ordre seize. D'après l'importante propriété 1, sa circularité est de huit. En définitive afin d'exploiter ce résultat en le combinant à une utilisation d'un théorème étendu, il convient d'imposer à  $B_3$  d'être lié à la base par une courbe et non pas par une sphère comme c'est le cas pour le moment. De même que pour les deux précédents couples d'articulations sur la plate-forme, on peut imposer à  $B_3$  d'être sur un cercle en confondant  $B_6$  et  $B_3$ . Cette articulation est donc à l'intersection d'une surface de degré seize et de circularité huit et d'un cercle. Finalement, le théorème 3 indique qu'il y a au plus  $16 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 2 = 16$  points dans cette intersection (si elle est finie).

Un tel robot ayant de plus les articulations de sa base coplanaires est un TSSM<sup>7</sup>. La borne de 16 est donc validée par le fait qu'elle se retrouve pour le TSSM, en outre elle s'applique à une classe de robots plus large [21].

**Théorème 9 (TSSM généralisé)** *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux à deux admet au plus seize (16) solutions pour le modèle géométrique direct.*

Jusqu'à présent seul le théorème 7 de CAYLEY a été utilisé. Qu'en est-il si le second est utilisé? Dans ce cas le RSSR se spécialise un peu en ayant ses deux segments  $[A_iB_i]$  ( $i = 1, 2$ ) décrivant des cercles situés dans des plans parallèles. Le théorème mène directement à une valeur de six pour l'acabit du segment  $[B_1B_2]$ . Ensuite

---

7. Triangular Symmetric Simplified Manipulator

par un raisonnement analogue à celui des paragraphes précédents, il vient que le modèle géométrique direct admet un maximum de 12 solutions. Or, un tel robot dont les articulations de la plate-forme sont doubles et sont cantonnées à des cercles contenus par trois plans parallèles est une plate-forme de STEWART (PFS). Voilà une démonstration élégante de plus à mettre au bénéfice de la géométrie synthétique, qui est utilisée dans [20].

Dans la démonstration précédente, aucune hypothèse sur le troisième plan n'est faite. On peut donc déduire le théorème suivant qui concerne l'architecture du robot de la figure 7.

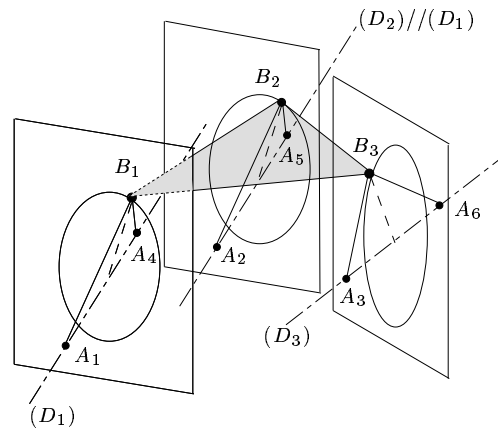


FIG. 7 – Plate-forme avec 3 articulations doubles dont deux se déplacent sur des cercles parallèles : plate-forme de Stewart généralisée

**Théorème 10 (Plate-forme de Stewart généralisée)** *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux à deux et dont au moins deux paires décrivent des cercles appartenant à des plans parallèles, admet au plus douze (12) solutions pour le modèle géométrique direct.*

Enfin, dernier cas particulier, pour un robot dont quatre articulations de la base sont alignées et dont les articulations sur la plate-forme sont confondues deux à deux (voir figure 8), il n'y a pas plus de quatre solutions au modèle géométrique direct. Cela découle directement de l'étude du RSSR dans le cas où les deux axes sont confondus.

**Théorème 11 (PFS généralisée à deux axes confondus)** *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux à deux et dont quatre*

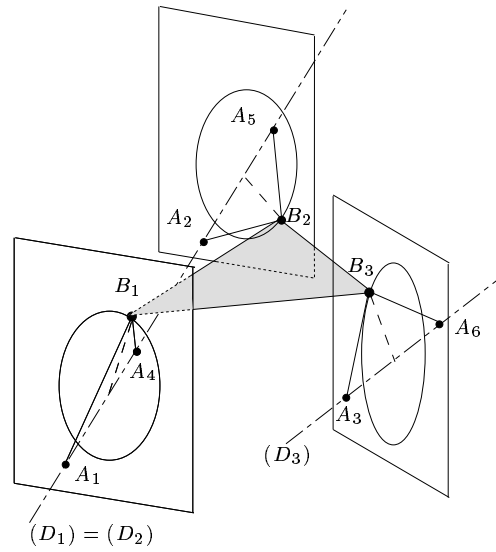


FIG. 8 – Plate-forme avec 3 articulations doubles dont deux se déplacent sur des cercles parallèles ayant leurs axes confondus : plate-forme de Stewart généralisée à axes confondus.

articulations de la base (correspondant à deux articulations seulement de la plate-forme) sont alignées, n'admet que quatre (4) solutions pour son modèle géométrique direct.

#### 4.2.2 Avec une articulation triple

Soit un manipulateur dont trois des articulations de la plate-forme,  $B_1, B_5, B_6$ , sont confondues en une articulation triple (voir figure 9). Cette articulation ne peut avoir

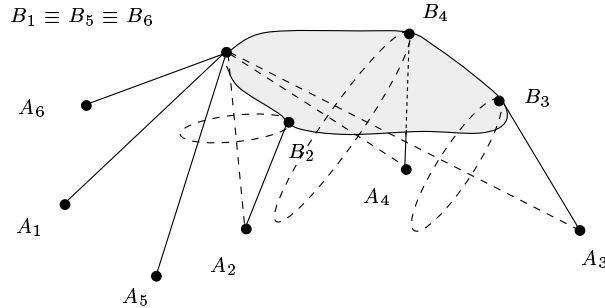


FIG. 9 – Manipulateur avec une articulation triple sur la plate-forme

que deux positions symétriques l'une de l'autre par rapport au plan défini par les points  $A_1, A_5, A_6$ . Choisissons l'une de ces deux positions. Une articulation de la plate-forme est connue et impose donc aux autres de se déplacer sur des sphères concentriques. Or ces mêmes articulations se déplacent chacune respectivement sur une autre sphère centrée en  $A_i, i = 2, 3, 4$ . En conclusion, ces articulations sont confinées à un déplacement circulaire. Et là sont retrouvées les conditions intéressantes d'applications des théorèmes de FICHTER: des solides en mouvement les uns par rapport aux autres et certains points contraints à un déplacement sur une courbe. En fait on retrouve un mécanisme sphérique à quatre barres [28]. Supposons pour le moment, que ce manipulateur ne soit pas connecté en  $B_4$  à la base. Par le théorème 7,  $B_2$  et  $B_3$  étant sur des cercles, le segment qu'ils composent décrit une surface réglée d'ordre huit. Et comme  $B_1$  est un point fixe, il ne reste plus qu'un degré de liberté à la plate-forme. En application du théorème 5 de l'acabit à deux corps, le point  $B_4$  a aussi un acabit de huit. Soit en utilisant la propriété 1, soit en appliquant le théorème étendu de BÉZOUT à  $B_4$  situé à l'intersection de l'objet précédent et de la sphère centrée en  $B_1$  et de rayon  $\|B_1B_4\|$ , la circularité est alors de quatre. Enfin, pour avoir le nombre de solutions il suffit d'exprimer que  $B_4$  est malgré tout aussi sur le cercle défini par  $A_4$  et  $\rho_4$ . Ainsi avec le théorème étendu de BÉZOUT, la borne



sur le nombre de solutions est de huit. Or au début du raisonnement, il a été vu que  $B_1$  pouvait prendre deux positions, ce qui veut dire que le nombre de solutions double et peut atteindre seize. Il est à noter, toutefois, que les solutions se partagent en deux ensembles découplés de huit solutions.

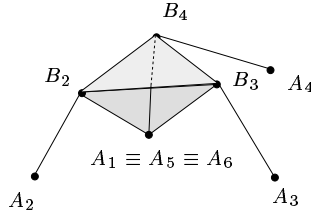


FIG. 10 – Manipulateur à trois articulations doubles sur la plate-forme et une articulation triple sur la base.

En regardant plus attentivement ce manipulateur, il est possible de tirer une spécialisation ayant un nombre maximum de solutions égal à huit. En effet, puisque la position de  $B_1$  est connue, tout se passe comme si l'articulation  $B_1$  la plate-forme appartenait plutôt à la base, ce qu'on peut imaginer. On aurait alors une spécialisation des mécanismes étudiés en 4.2.1 où trois des articulations de la base sont confondues (voir figure 10 où  $B_1$  prendrait la place du point  $A_1 \equiv A_5 \equiv A_6$ ). Et cette architecture a deux fois moins de solutions que celle<sup>8</sup> dont elle est tirée. D'ailleurs c'est en fait cette architecture, plate-forme triangulaire et articulation triple, qui est utilisée dans le robot *æil agile*<sup>9</sup> par GOSSELIN et GAGNÉ [7] pour orienter une caméra. A la nuance près que dans ce manipulateur, la triple articulation est virtuelle et réalisée par une intersection des axes des articulations rotoïdes (voir figure 11).

### 4.3 Analogies avec des capteurs supplémentaires

Pour avoir, sur des robots sans articulations confondues, des raisonnements semblables à ceux étudiés précédemment, il est possible d'utiliser des capteurs additionnels. En particulier, l'ajout d'un capteur angulaire sur une articulation de la base combiné avec la connaissance de la longueur du segment placé sur un cercle l'articulation correspondante de la plate-forme.

8. TSSM

9. Département de génie mécanique, Université Laval, S<sup>te</sup> Foy, Québec, Canada

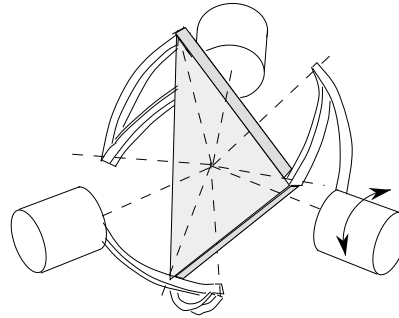


FIG. 11 – Robot sphérique à articulation triple virtuelle [7].

Ainsi pour simuler le mécanisme composé de trois articulations doubles vu en 4.2.1, il suffit de placer trois capteurs sur trois segments, un par segment (cas  $1^3$ ). Le système obtenu admet au plus seize solutions comme cela a été vu. Toutefois toute combinaison d'ajout de capteurs et d'articulations doubles permettant d'avoir trois articulations en mouvement sur un cercle (cas  $2^i - 1^{3-i}$ ) est valable et a ce nombre de solutions. En fait ce mécanisme est encore plus contraint. En effet les trois segments qui étaient rattachés à une articulation double ont vu leur rôle coercitif rempli par les capteurs supplémentaires. Néanmoins les trois autres segments sont toujours là et imposent donc des contraintes que toutes les postures solutions doivent aussi vérifier.

L'ajout de deux capteurs angulaires sur une même articulation de la base combiné avec la connaissance de la longueur du segment permet de déterminer la position de cette articulation. On se rapproche ainsi du mécanisme vu en 4.2.2. Les deux segments qui, auparavant, se joignaient à un troisième n'ont plus cette particularité de jonction. C'est donc un mécanisme plus contraint en terme de nombre de solutions admissibles. Ce qui amène au résultat suivant : deux capteurs additionnels équipant un même segment, font que le manipulateur parallèle n'a pas plus de huit solutions pour son modèle géométrique direct.

#### 4.4 Autres mécanismes

Fort de ces résultats intéressants qui ne demandent que de bien définir les solides avec lesquels on travaille, étudions d'autres cas pour les manipulateurs parallèles.

Soit un manipulateur où  $B_5 \equiv B_6$  et dont les segments 1, 2 et 3 sont équipés d'un capteur additionnel (voir figure 12). Il est possible de voir ce robot sous la forme de deux RSSR, un composé de  $B_1$  et  $B_2$ , l'autre composé de  $B_2$  et  $B_3$ , tout

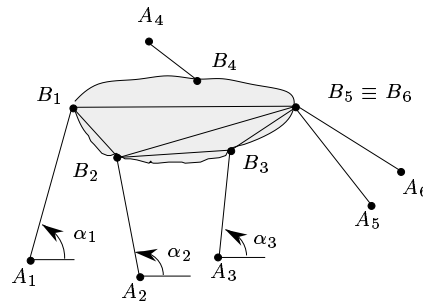


FIG. 12 – Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme deux RSSR

deux ayant pour point de coupleur  $B_5$ . D'après le premier RSSR on sait maintenant (voir 4.1) que  $B_5$  est sur une surface de circularité maximale et d'ordre seize.  $B_5$  est aussi à l'intersection de cette surface et du cercle créé par le fait que  $B_5$  est une articulation double, ainsi il y a 16 positions possibles. En considérant le second RSSR il y a aussi 16 positions possibles. Seules les positions communes parmi les deux ensembles de 16 solutions seront admissibles. Mais on ne peut rien dire de mieux sur la borne supérieure sinon qu'elle est de 16. Il est clair que cette approche n'est pas très utilisable pour décomposer un manipulateur parallèle en plusieurs mécanismes élémentaires d'acabits connus.

Gardons le même manipulateur ; mais voyons le maintenant sous une autre forme de mécanisme (voir figure 13). Considérons alors un point quelconque  $M$  du segment

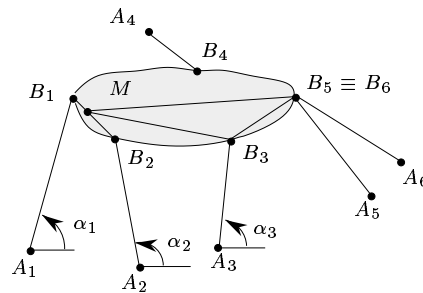


FIG. 13 – Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme un coupleur ( $M$ )

$]B_1B_2[$  et le segment qu'il forme avec  $B_3$ . Par le théorème 7 de CAYLEY, le segment  $[MB_3]$  décrit une surface réglée de degré 32. Il est clair (théorème 5) que  $B_5$  aussi décrira une surface d'un tel degré ce qui implique qu'il y a 32 solutions possibles. . . On constate qu'en exploitant plus d'information sur la pose du robot, la borne obtenue de cette façon est encore plus élevée.

Pour revenir au cas  $2^1$ , où la position d'une articulation de la plate-forme est connue, nous considérons les travaux de SARKISSIAN et PARIKIAN [31]. Ils supposent qu'un des segments a son orientation connue et ils déconnectent l'articulation correspondante (disons  $B_6$ ) du reste de la plate-forme. Ils obtiennent ainsi une courbe de coupleur devant passer au moins cinq fois par la position de  $B_6$ . Ils remarquent alors que le système obtenu est analogue au problème de BURMESTER (voir aussi [10]). Ainsi, la position de  $B_6$  est de multiplicité 5 sur la courbe du coupleur et il y a donc 5 postures qui partagent cette position pour  $B_6$ .

## 5 Conclusion

La géométrie synthétique permet de faire des démonstrations très élégantes et sobres. D'un autre côté, il n'a pas été possible de l'utiliser pour beaucoup d'architectures. Ce sont les premiers résultats obtenus avec des capteurs supplémentaires dans le cas de robots spatiaux. De plus ces résultats sont valides pour une plate-forme quelconque. Cet aspect de la géométrie pourrait être redoutablement efficace si l'on disposait de théorèmes spécialement adaptés à nos mécanismes, ou pour des architectures de robot ayant des chaînes plus spécifiques (tel le robot *Delta*) contraignant les déplacements sur des courbes bien identifiées au lieu de sphères.

En outre, des résultats très récents [31] montrent que cette voie commence à être étudiée et que son application aux robots parallèles semble prometteuse.

## Références

- [1] Baron (L.) et Angeles (J.). – The decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators using redundant sensors. *In: International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 974–979. – San Diego Californie, USA, Mai 1994.
- [2] Baron (L.) et Angeles (J.). – The measurement subspaces of parallel manipulators under sensor redundancy. *In: ASME Design Automation Conference.*, pp. 467–474. – Minneapolis, MN, USA, Septembre 1994.
- [3] Baron (L.) et Angeles (J.). – The isotropic decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators under sensor redundancy. *In: International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. – Nagoya Japon, Mai 1995.
- [4] Charentus (S.) et Renaud (M.). – *Calcul du modèle géométrique direct de la plate-forme de Stewart*. – Rapport technique n° 89260, Toulouse, France, LAAS, Juillet 1989.
- [5] Coxeter (H.S.M.). – *Projective Geometry*. – New York, Springer-Verlag, 1987.

- [6] Fichter (E.F.). – *Algebraic loci traced by certain mechanisms: A determination of loci of points, planes or line with one or two degree of freedom.* – Clayton, Victoria, Australie, Thèse de doctorat, Monash University, 1975.
- [7] Gosselin (C. M.) et Gagné (M.). – A closed-form solution for the direct kinematics of a special class of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *In: Computational Kinematics*, éd. par Merlet (J-P.) et Ravani (B.), pp. 231–240. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [8] Gosselin (Clément M.). – *Kinematic Analysis, Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators.* – Montréal, Canada, Thèse de doctorat, McGill University, 1988.
- [9] Han (K.), Chung (W-K.) et Youm (Y.). – Local structurization for the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensor data. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE, pp. 514–520. – Nagoya Japon, Mai 1995.
- [10] Hunt (K.H.). – *Kinematics Geometry of Mechanisms.* – Oxford, Clarendon Press, 1990, seconde édition.
- [11] Hunt (K.H.) et Primrose (E.J.F.). – Assembly configurations of some in-parallel actuated manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 28, n° 1, Janvier 1993, pp. 31–42.
- [12] Husty (M.L.). – *An algorithm for solving the direct kinematics of Stewart-Gough-type platforms.* – Rapport technique n° TR-CIM-94-7, Montréal, Canada, McGill University, Juin 1994.
- [13] Innocenti (C.). – Analytical determination of the intersections of two coupler-point curves generated by two four-bar linkages. *In: Computational Kinematics*, éd. par Angeles (J.), Hommel (G.) et Kovács (P.), pp. 251–262. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [14] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, n° 6, 1990, pp. 611–621.
- [15] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled. *In: European Robotics and Intelligent Systems Conference.* – Corfou, Grèce, Juin 1991.
- [16] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct kinematics in analytical form of a general 5-4 fully-parallel manipulator. *In: Computational Kinematics*, éd. par Angeles (J.), Hommel (G.) et Kovács (P.), pp. 141–152. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [17] Inoue (H.), Tsusaka (Y.) et Fukuizumi (T.). – Parallel manipulator. *In: 3rd ISRR*, pp. 321–327. – Gouvieux, France, Octobre 1985.
- [18] Klein (F.). – *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Geometry.* – Londres, Grande-Bretagne, Dover Publications Inc., 1939. Traduit de l'allemand.
- [19] Lazard (D.). – Generalized Stewart Platform: How to compute with rigid motions? *In: IMACS*, pp. 85–88. – Lille, France, Mai 1993.
- [20] Lazard (D.) et Merlet (J-P.). – The (true) Stewart platform has 12 configurations. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE, pp. 2160–2165. – San Diego, Californie, USA, Mai 1994.
- [21] Merlet (J-P.). – *Manipulateurs parallèles, 4eme partie: mode d'assemblage et cinématique directe sous forme polynômiale.* – Rapport technique n° 1135, INRIA, Décembre 1989.

- [22] Merlet (J.-P.). – *Les Robots parallèles*. – Paris, France, Hermès, 1990.
- [23] Merlet (J.-P.). – Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data. *In: International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 200–204. – Atlanta, USA, Mai 1993.
- [24] Mourrain (B.). – The 40 generic position of a parallel robot. *In: ISSAC'93*, éd. par Bronstein (M.), pp. 173–182. – Kiev, Ukraine, Juillet 1993.
- [25] Mourrain (B.). – Enumeration problems in geometry, robotics and vision. *In: MEGA*, p. 18. – Santander, Espagne, Septembre 1994.
- [26] Nair (R.). – *On the kinematics geometry of parallel robot manipulators*. – College Park, USA, Mémoire de Master, University of Maryland, 1992.
- [27] Nair (R.). – On the forward kinematics of parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13, n° 2, Avril 1994, pp. 171–188.
- [28] Primrose (E.J.F.) et Freudenstein (F.). – Spatial motion I - point paths of mechanisms with four or fewer links. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, Février 1969, pp. 103–114.
- [29] Raghavan (M.). – The Stewart platform of general geometry has 40 configurations. *In: ASME Design and Automation Conference*, pp. 397–402. – Chicago, IL, USA, Septembre 1991.
- [30] Ronga (F.) et Vust (T.). – Stewart platforms without computer? *In: International Conference on Real Analytic and Algebraic Geometry*. – Berlin, 1995. Présenté lors de la conférence en 1992, Trento, Italie.
- [31] Sarkissian (Y.L.) et Parikian (T.F.). – Direct position problem for stewart platform and multiple points of 5(SS) linkage coupler curve. *In: Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. IFTOMM, pp. 1614–1618. – Milan, Italie, Septembre 1995.
- [32] Stoughton (R.) et Arai (T.). – Optimal sensor placement for forward kinematics evaluation of a 6-dof parallel link manipulator. *In: IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, (IROS)*, pp. 785–790. – Osaka, Japon, Novembre 1991.
- [33] Tancredi (L.). – *De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles*. – Sophia Antipolis, France, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Décembre 1995.
- [34] Tancredi (L.) et Merlet (J.-P.). – Evaluation of the errors when solving the direct kinematics of parallel manipulators with extra sensors. *In: Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry*, éd. par Lenarčič (J.) et Ravani (B.), pp. 439–448. – Springer-Verlag, 1994.
- [35] Tancredi (L.), Teillaud (M.) et Merlet (J.-P.). – Extra sensors for solving the forward kinematics problem of parallel manipulators. *In: Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. IFTOMM, pp. 2122–2126. – Milan, Italie, Septembre 1995.
- [36] Tancredi (L.), Teillaud (M.) et Merlet (J.-P.). – Forward kinematics of a parallel manipulator with additional rotary sensors measuring the position of platform joints. *In: Computational Kinematics*, éd. par Merlet (J.-P.) et Ravani (B.), pp. 261–270. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [37] Zhang (C.D.) et Song (S.M.). – Forward kinematics of a class of parallel (Stewart) platforms with closed-form solutions. *In: International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 2676–2681. – Sacramento, CA, USA, Avril 1991.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399