

# Fourth-Order Dissipation on Unstructured Anisotropic meshes for Convection-Diffusion problems

Katherine Mer

► **To cite this version:**

Katherine Mer. Fourth-Order Dissipation on Unstructured Anisotropic meshes for Convection-Diffusion problems. RR-2953, INRIA. 1996. <inria-00073745>

**HAL Id: inria-00073745**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073745>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Fourth-Order Dissipation on Unstructured  
Anisotropic meshes for Convection-Diffusion  
problems***

Katherine Mer

**N° 2953**

Juillet 1996

———— THÈME 4 ————



***rapport  
de recherche***



# Fourth-Order Dissipation on Unstructured Anisotropic meshes for Convection-Diffusion problems

Katherine Mer

Thème 4 —  
Projet Sinus

Rapport de recherche n° 2953 — Juillet 1996 — 45 pages

**Abstract:** We consider a linear convection diffusion equation in two space dimensions and propose to stabilise the Galerkin method with a fourth-order artificial dissipation. We then analyse the effect of this dissipation on the accuracy of the finite element method. We focus our study on stretched meshes in the boundary layers. The main result is that we can choose an appropriate local metric to control the dissipation in stretched regions of the mesh. This metric is defined by a local coordinate system and dissipation coefficients. We compare in this coordinate system, the dissipation distribution of the present finite element scheme with the one obtained for some classical second order finite volume schemes.

**Key-words:** Stretched or Anisotropic meshes, finite element, finite volume, error estimates, fourth order dissipation, boundary layers.

*(Résumé : tsvp)*

Inria, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France & Université de Nice-Sophia Antipolis

# Dissipation du Quatrième Ordre sur des maillages non structurés Anisotropes pour des problèmes de Convection-Diffusion

**Résumé :** On considère une équation de convection diffusion linéaire en deux dimensions d'espace, et on propose de stabiliser la méthode de Galerkin avec une dissipation artificielle du quatrième ordre. Les effets de cette dissipation sur la précision de la méthode éléments finis sont analysés. On restreint notre étude à des maillages étirés dans les couches limites. Le principal résultat est que l'on peut choisir une métrique locale appropriée de manière à contrôler la dissipation dans les régions étirées du maillage. Cette métrique est définie par un système de coordonnées local et des coefficients de dissipation. On compare dans ce système de coordonnées, la distribution de dissipation du présent schéma éléments finis avec celle obtenue pour quelques méthodes volumes finis classiques du second ordre.

**Mots-clé :** Maillages étirés ou anisotropes, éléments finis, volumes finis, estimations d'erreur, dissipation du quatrième ordre, couches limites.

# Introduction

On considère dans cette étude l'équation de convection-diffusion bidimensionnelle avec convection dominante, qui s'écrit:

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + \operatorname{div}(\vec{V}u) = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

La solution de ce problème peut présenter des régions de fortes variations, que l'on appelle *couches limites* ou *couches internes* (*couches libres*) suivant le cas. Les caractéristiques de ces couches dépendent des données de l'équation (terme source-conditions aux limites) ainsi que de la correspondance entre le champ des caractéristiques  $\vec{V}$  et le domaine  $\Omega$  [ECK72]. Quand on cherche à discrétiser un problème mixte hyperbolique-elliptique avec présence de couches limites, on s'aperçoit que la définition du maillage prend autant d'importance que le schéma d'approximation, du fait de la présence d'échelles différentes dans le domaine ou encore de directions privilégiées, par rapport à la solution. Il convient alors de considérer le couple maillage-solution  $(\mathcal{T}_h, u_h(\mathcal{T}_h))$  comme inconnue du problème d'approximation, l'idéal étant de réaliser une estimation optimale du type

$$|||u - u_h(\mathcal{T}_h)||| = O(h^\alpha(\mathcal{T}_h)), \quad \forall (u_h, \mathcal{T}_h) \in (u_h, \mathcal{T}_h)_h, \quad (2)$$

où  $||| \cdot |||$  est la norme de l'énergie, et  $\alpha$  dépend du schéma considéré. On souhaite couvrir dans cette étude, sauf mention du contraire, le cas général des maillages non structurés. Cependant la classe de maillages considérée pour ce problème est souvent particularisée, et différentes méthodes d'adaptations émergent suivant la particularisation choisie. Dans le cas des maillages triangulaires, on peut par exemple considérer des maillages réguliers au sens classique des éléments finis, pour "assurer" une certaine qualité de la solution approchée; on peut également élargir la classe des maillages considérés en permettant une anisotropie des éléments; la qualité du maillage peut-être dans ce cas assurée par d'autres critères que la régularité classique. Indépendamment du choix de la triangulation, il y a deux grandes classes de méthodes d'adaptation de maillage, ce sont les méthodes dites *a priori* et les méthodes dites *a posteriori*. Dans un cas, on définit le maillage "optimal" par rapport à une connaissance *a priori* de certaines caractéristiques de la solution à approcher qui sont données par l'opérateur. Dans l'autre cas, on adapte un maillage initial quelconque par rapport à une solution approchée calculée sur ce maillage. Dans l'approche *a posteriori*, l'obtention d'un couple maillage-solution convenable est généralement réalisée par un processus itératif, qui fait appel à un critère d'arrêt, tel qu' un indicateur de raffinement en dessous d'un seuil de tolérance, ou l'équi-répartition d'un estimateur d'erreur local; cette erreur *a posteriori* est souvent basée sur une estimation de l'erreur d'interpolation, ou bien il peut y avoir une corrélation entre le critère d'adaptation et les caractéristiques du schéma. Ce dernier point mène à une série d'études théoriques de l'estimation de l'erreur *a posteriori* de différents schémas. Dans ce cadre, on peut citer par exemple

Médina, Picasso et Rappaz [MPR95], Eriksson et Johnson [EJ93], pour des approximations de type *SUPG*. En ce qui concerne les adaptations de maillage basées sur l'erreur d'interpolation, nous renvoyons aux travaux de Peraire *et al.* [PVMZ87], M.G. Vallet [VAL92] et Castro-Diaz *et al.* [CDHM95]. Les deux dernières références adaptent le maillage en utilisant une métrique qui permet de définir la forme des triangles en indiquant les directions privilégiées de la solution approchée; le maillage obtenu est anisotrope. Pour l'utilisation d'une telle métrique, on peut citer encore Rippa [RIP92] et d'Azevedo *et al.* [DS91].

Pour l'approche dite *a priori*, on peut citer indépendamment Apel et Lube [AL95] et Zhou et Rannacher [ZR], pour les méthodes de type *SUPG*-Least-Squares. On peut également citer le travail pionnier de Shishkin [SHI92] dans le cadre des différences finies en structuré. Dans [AL95], on trouve des estimations quasi-uniformes en  $\varepsilon$  du type (2) avec  $\alpha = 1$ , utilisant des estimations a priori sur la solution d'une équation voisine de (1). La définition du maillage est obtenue à partir d'une connaissance des régions à raffiner qui sont les couches limites, ainsi qu'à partir d'estimations des dérivées premières de l'erreur d'interpolation [AD92] [KRI91]; le nombre d'éléments est fixé en fonction de la taille maximale des éléments dans les régions non étirées et du paramètre  $\varepsilon$ .

Nous évoquons maintenant les approximations des équations de type convection-diffusion, en maillage isotrope ou anisotrope. Dans le cas d'un maillage isotrope (insuffisamment fin), la méthode de Galerkin produit une solution approchée présentant des oscillations non physiques dans le cas de la présence de couches limites [AXE84]; de plus cette méthode est très sensible aux conditions de bord. En présence d'une couche limite, elle a une précision globale d'ordre  $O(h^{1/4})$  dans la norme de l'énergie. Une stabilisation par la méthode *SUPG* permet d'obtenir une précision locale en dehors des couches limites d'ordre  $O(h^{3/2})$ . Cependant, la précision dans les couches limites passe nécessairement par une augmentation du nombre de points de discrétisation dans les régions où la solution présente de fortes irrégularités; il est alors plus avantageux au niveau du coût de raffiner le maillage dans une seule direction en étirant les éléments. Dans [AL95], il est montré que la quantité de dissipation du second ordre des méthodes de type Least-Squares doit être contrôlée quand des maillages anisotropes sont utilisés; le coefficient de dissipation dépend alors de la taille des mailles suivant les deux directions principales.

La stabilisation de la méthode de Galerkin par une dissipation d'ordre élevé peut-être envisagée soit par des techniques de reconstructions utilisées avec une approche décentré (schéma de type évolution/projection, *FVG* (Finite Volume Galerkin) + reconstruction), soit par l'approche centrée des schémas de type Jameson associée à un modèle de dissipation en dérivée quatrième. Dans [MER96], on établit que la propriété de Préservation de la Linéarité (*LP*) permet de garantir une consistance locale pour les maillages "réguliers"; les schémas décentrés d'ordre deux peuvent être *LP* si la reconstruction est appropriée. Cependant cette propriété n'est plus utile pour montrer la consistance dans le cas de maillages étirés; on constate en effet que la dissipation, dont

les coefficients sont imposés par le décentrage peut devenir excessive quand on étire le maillage [BAR94] [AGT95]. Le but de la présente étude est d’obtenir des coefficients “optimaux” pour une dissipation du quatrième ordre sur des maillages anisotropes; ces coefficients sont déterminés de manière à préserver la précision de la méthode de Galerkin.

Dans ce travail, on s’intéresse à l’approximation de l’équation de convection-diffusion (1) avec une méthode éléments finis stabilisée avec une dissipation du quatrième ordre sous forme variationnelle. Dans [MER95], on a montré en particulier que si la dissipation est le carré d’un opérateur aux différences secondes s’écrivant sous la forme  $\Delta_i^h u = \frac{1}{m(C_i)} \sum_{j \in V_i} \alpha_{ij} (u(\vec{x}_j) - u(\vec{x}_i))$ , alors le schéma ne peut être  $LP$  que si les coefficients  $\alpha_{ij}$  dépendent du maillage (voir également [LIN88]). On considère dans cette étude un opérateur  $\Delta_i^h$  obtenu avec une discrétisation éléments finis. La démarche choisie pour le maillage est une démarche *a priori*, s’inspirant de celle de Shishkin [SHI92], Apel et Lube [AL95]. On considère une famille de maillages anisotropes dans les couches limites, et on montre que l’on peut choisir une métrique locale appropriée de manière à contrôler la dissipation numérique dans les régions étirées du maillage. Cette métrique est définie à partir d’un système de coordonnées locales et des coefficients de dissipation.

Dans la première partie de ce travail (Sections 1 à 4), on détermine une métrique de dissipation qui permet de préserver la précision du schéma centré. On montre en particulier l’importance sur la précision de l’alignement des triangles avec la direction des caractéristiques. En revanche, cette étude ne nécessite qu’une hypothèse faible de quasi-uniformité du maillage, ce qui est un point important en faveur de ces méthodes. Enfin dans la dernière partie (Section 5), on compare, dans le système de coordonnées de la métrique de dissipation, la distribution de dissipation du schéma étudié avec celle obtenue pour des schémas volumes finis du second ordre.

## 1 Le problème de perturbations singulières

Dans cette partie, on tente de justifier certaines hypothèses concernant des estimations *a priori* sur les dérivées secondes de la solution du problème (1), que l’on peut trouver dans [AL95] et que l’on utilise dans les sections suivantes (voir l’hypothèse  $\underline{H}_0$  en fin de section). On se réfère ici principalement à l’étude de problèmes de perturbations singulières effectuée dans [ECK72].

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine polygonal convexe borné, de frontière  $\Gamma$ . Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs régulier,  $f$  une fonction donnée dans  $L^2(\Omega)$  et  $\varepsilon$  un réel positif ou nul. On considère le problème de convection-diffusion (1).  $\Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega$ . On note  $\Gamma_-$  la partie de  $\Gamma$  sur laquelle  $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$  et  $\Gamma_+ = \{\vec{x} \in \Gamma; \vec{V} \cdot \vec{n} > 0\}$ ,



$\Gamma_0 = \{\vec{x} \in \Gamma; \vec{V} \cdot \vec{n} = 0\}$ . Les hypothèses suivantes sur  $\vec{V}$  sont introduites:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \vec{V} \in (L^\infty(\Omega))^2 \\ (ii) \quad & \operatorname{div}(\vec{V}) \geq \alpha_0 > 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ pour un réel positif } \alpha_0. \end{aligned} \quad (3)$$

L'hypothèse (ii) assure la coercivité de la forme bilinéaire associée à (1), et donc l'existence et l'unicité d'une solution dans  $H^1(\Omega)$  si  $\varepsilon \neq 0$  et dans  $L^2(\Omega)$  quand  $\varepsilon = 0$ .

Le terme de convection  $\operatorname{div}(\vec{V}u)$  domine sur le terme de diffusion  $-\varepsilon\Delta u$  quand  $\varepsilon$  est petit. Puisque dans le cas purement advectif ( $\varepsilon = 0$ ) les conditions aux limites sur  $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$  sont perdues, de fortes variations de la solution peuvent apparaître en raison de la présence des conditions aux limites; les estimations classiques sur la solution rendent compte de ces fortes variations, et on obtient par exemple une estimation en norme  $H^2$  de la forme

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C\varepsilon^{-2}.$$

Cette estimation globale n'est pas assez précise car elle n'indique pas les régions ni les directions dans lesquelles la solution présente de fortes variations. Grâce à des résultats de Nävert [NÄV82], on obtient une certaine régularité de la solution en dehors d'un voisinage de la frontière, si l'on considère des problèmes de type "channel". Ces problèmes sont définis à partir d'une correspondance entre le domaine  $\Omega$  et le champ des caractéristiques  $\vec{V}$  (voir par exemple la Figure 1). On peut montrer pour ce type de problème que la solution de (1) a des dérivées secondes bornées en dehors d'une région  $\mathcal{R}_\varepsilon$  définie par

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \left\{ \vec{x} \in \Omega; \operatorname{dist}(\vec{x}, \Gamma_+) \leq C_1\varepsilon|\ln\varepsilon|, \operatorname{dist}(\vec{x}, \Gamma_0) \leq C_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon| \right\}.$$

Soit  $\mathcal{R} = \overline{\Omega \setminus \mathcal{R}_\varepsilon}$  la région régulière, et

$$\mathcal{R}_\varepsilon^+ = \{ \vec{x} \in \Omega; \operatorname{dist}(\vec{x}, \Gamma_+) \leq C_1\varepsilon|\ln\varepsilon| \},$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon^0 = \{ \vec{x} \in \Omega; \operatorname{dist}(\vec{x}, \Gamma_0) \leq C_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon| \},$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon^c = \mathcal{R}_\varepsilon^+ \cap \mathcal{R}_\varepsilon^0.$$

$\mathcal{R}_\varepsilon^+$  définit la couche limite dite ordinaire et  $\mathcal{R}_\varepsilon^0$  la couche limite dite parabolique, appelée également couche limite des caractéristiques.

On s'attache dans la suite de cette partie à obtenir des estimations plus précises sur les dérivées secondes de la solution d'un problème simplifié. On considère l'équation modèle suivante

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon L_2 u + L_1 u \equiv -\varepsilon \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} = f & \text{dans } D \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}, \quad (4)$$

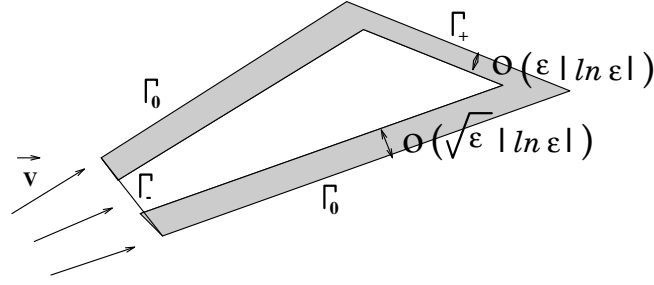


Figure 1: Problème de type “channel”.

où  $D$  est un domaine rectangulaire,  $D = [0, l_1] \times [0, l_2]$ .  $f$  et  $\varphi$  sont des fonctions suffisamment régulières (par exemple  $C^2(\overline{D})$ ). Les caractéristiques sont les droites  $\frac{dy(x)}{dx} = 0$ , et ce problème est un problème de type “channel”. L’équation réduite s’écrit:

$$\begin{cases} L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = f & \text{dans } D \\ u = \varphi_- & \text{sur } \partial D_- \end{cases} \quad (5)$$

La solution  $u_0$  de l’équation réduite s’écrit:

$$u_0(x, y) = \varphi_-(y) + \int_0^x f(s, y) ds.$$

Les analyses classiques utilisant des variantes du principe du maximum sur l’équation de base ne parviennent pas à ce jour à fournir des estimations satisfaisantes sur la solution  $u$  et ses dérivées (voir [OS91] [AR93]). On considère ici plutôt la théorie des développements asymptotiques. On donne dans un premier temps quelques définitions couramment utilisées pour cette théorie [ECK72]:

Une approximation asymptotique *formelle régulière* à l’ordre  $m$  de  $u$  dans une partie (notée  $D_r$ ) de  $\overline{D}$  est une fonction  $u_{as}^r$  telle que, pour  $(x, y) \in D_r$ ,

$$u_{as}^r = \sum_{n=0}^m \varepsilon^n u_n(x, y),$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_{as}^r - f = \varepsilon^{m+1} \theta_{m+1}(x, y).$$

Soit  $l$  une ligne dans le plan  $x, y$ , et  $(x, y) \longrightarrow (x', y')$  une bijection définie dans un sous-domaine de  $\overline{D}$  contenant  $l$ , telle que  $y' = 0$  représente la ligne  $l$ . Les variables  $\xi, \eta$  définies par:

$$\eta = \frac{x'}{\delta_\eta}, \xi = \frac{y'}{\delta_\xi},$$

sont appelées variables locales le long de  $l$  si  $\delta_\eta = O(1)$  et  $\delta_\xi = o(1)$ .

Une approximation asymptotique *formelle locale* de  $u$  dans une partie  $D_\gamma^*$  de  $\overline{D}$  est une fonction  $u_{as}^*$  telle que, pour  $(\xi, \eta) \in D_\gamma^*$ ,

$$u_{as}^* = \sum_{n=0}^m \varepsilon^n U_n(\xi, \eta),$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_{as}^* - f = \varepsilon^{m+1} \theta_{m+1}^*(\xi, \eta).$$

Par identification des puissances en  $\varepsilon$ , on obtient les équations suivantes sur les inconnues de l'approximation *régulière*:

$$\begin{aligned} L_1 u_0 &= f, \\ L_1 u_n &= -L_2 u_{n-1}, \quad n = 1, \dots, m, \\ \theta_{m+1}(x, y) &= L_2 u_m(x, y), \end{aligned}$$

et on impose  $u_{as}^r = \varphi_-$  sur  $\partial D_-$ .

Une approximation asymptotique d'ordre  $m$ ,  $u_{as}$  de  $u$  dans  $D_\gamma \subset \overline{D}$  est telle que  $u - u_{as} = o(\varepsilon^m)$  dans  $D_\gamma$ . L'approximation asymptotique est dite uniforme si  $\overline{D} \setminus D_\gamma = \emptyset$ .

Par un processus itératif consistant à approcher la solution en ajoutant à chaque fois une condition aux limites et en augmentant le domaine de validité par rapport aux approximations précédentes, on obtient le développement suivant pour  $m = 0$ :

$$u(x, y) = u_0(x, y) + U_0^{(1)}(x, y/\sqrt{\varepsilon}) + U_0^{(2)}(x, (l_2 - y)/\sqrt{\varepsilon}) + \psi_0((l_1 - x)/\varepsilon, y) + \mathcal{Z}_0. \quad (6)$$

$\mathcal{Z}_0$  est le reste et la validité de l'approximation dépend de sa décroissance quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On suppose pour simplifier que  $\varphi_- \equiv 0$  et  $\varphi(0, 0) = 0$ , et l'on pose

$$\begin{aligned} g_1^{(0)}(x) &= \varphi(x, 0) - u_0(x, 0) = \varphi(x, 0) - \int_0^x f(s, 0) ds, \\ g_2^{(0)}(x) &= \varphi(x, l_2) - u_0(x, l_2) = \varphi(x, l_2) - \int_0^x f(s, l_2) ds, \\ g_+^0(y) &= \varphi(l_1, y) - \int_0^{l_1} f(s, y) ds \end{aligned}$$

Soit  $\xi = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}$  la coordonnée locale suivant la normale à la frontière définie par  $y = 0$ .

$U_0^{(1)}$  est l'approximation asymptotique de couche limite parabolique le long de  $y = 0$ ; elle vérifie l'équation parabolique

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_0^{(1)}(x, \xi) - \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(1)}(x, \xi) = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$U_0^{(1)}(0, \xi) = 0, \quad U_0^{(1)}(x, 0) = g_1^{(0)}(x).$$

La solution s'écrit:

$$U_0^{(1)}(x, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi/\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-t^2/2} g_1^{(0)} \left( x - \frac{\xi^2}{2t^2} \right) dt.$$

Soit maintenant  $\xi = \frac{l_2 - y}{\sqrt{\varepsilon}}$  la coordonnée locale suivant la normale à la frontière définie par  $y = l_2$ . L'approximation asymptotique de couche limite parabolique le long de  $y = l_2$ ,  $U_0^{(2)}$ , vérifie de même une équation parabolique et s'écrit:

$$U_0^{(2)}(x, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi/\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-t^2/2} g_2^{(0)} \left( x - \frac{\xi^2}{2t^2} \right) dt,$$

Enfin, soit  $\xi = \frac{l_1 - x}{\varepsilon}$  la coordonnée locale suivant la normale à la frontière définie par  $x = l_1$ .  $\psi_0$  est l'approximation de couche limite ordinaire; elle vérifie l'équation ordinaire:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2}(\xi, y) + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}(\xi, y) = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \psi_0(0, y) &= g_+^0(y) - U_0^{(1)}\left(l_1, \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - U_0^{(2)}\left(l_1, \frac{l_2 - y}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = C_0(y), \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0(\xi, y) &= 0 \quad (\text{condition de raccord}). \end{aligned}$$

La solution s'écrit:

$$\psi_0(\xi, y) = C_0(y) e^{-\frac{l_1 - x}{\varepsilon}}.$$

Enfin,  $\mathcal{Z}_0$  vérifie l'équation avec des conditions aux limites et un second membre "petits":

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta \mathcal{Z}_0 + \frac{\partial \mathcal{Z}_0}{\partial x} = \tilde{f} & \text{dans } D \\ \mathcal{Z}_0 = \tilde{\varphi} & \text{sur } \partial D \end{cases} \quad (7)$$

où  $\tilde{f} = \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_0^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right\}$ , et

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} -\psi_0\left(\frac{l_1}{\varepsilon}, y\right) & \text{pour } x = 0 \\ -U_0^{(2)}\left(x, \frac{l_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \psi_0\left(\frac{l_1 - x}{\varepsilon}, 0\right) & \text{pour } y = 0 \\ -U_0^{(1)}\left(x, \frac{l_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \psi_0\left(\frac{l_1 - x}{\varepsilon}, l_2\right) & \text{pour } y = l_2 \\ 0 & \text{pour } x = l_1. \end{cases}$$

Toutes les conditions aux limites sur  $\mathcal{Z}_0$  sont petites. On va voir dans la suite que le second membre  $\tilde{f}$  est un  $O(\varepsilon)$  en dehors d'un petit voisinage des points  $x = 0, y = 0$  et  $x = 0, y = l_2$ , où il présente des singularités. Cependant, on peut malgré cela obtenir  $\mathcal{Z}_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$  dans  $\overline{D}$  [EJ66] et même  $\mathcal{Z}_0 = O(\varepsilon)$  dans  $\overline{D}$  [MAU71]. Les analyses classiques des problèmes de perturbations singulières utilisant des développements asymptotiques visent à obtenir une approximation de la solution dans tout le domaine, mais pour obtenir une approximation précise des dérivées de la solution, il faudrait aller plus loin dans l'analyse déjà effectuée. En effet, on va voir que l'on peut calculer dans certaines régions de  $D$  les dérivées des termes principaux de (6), soit  $u_0, U_0^{(1)}, U_0^{(2)}$  et  $\psi_0$ ; une analyse complète du problème s'attacherait à étudier de même les dérivées du reste  $\mathcal{Z}_0$ , en utilisant les concepts de principe du maximum et de fonctions barrières comme dans [EJ66] [MAU71]. Ces analyses ne sont pas entreprises ici, et nous nous contenterons d'analyser les termes principaux pour avoir une première estimation sur les dérivées secondes de la solution.

Dans  $\overline{D}$ , on a immédiatement (avec  $\varphi_- \equiv 0$ ),  $\left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right| \leq C(f)$ .

On a, pour  $g_1^{(0)}(0) = \varphi(0, 0) - \varphi_-(0) = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U_0^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi/\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-t^2/2} g_1^{(0)'} \left( x - \frac{\xi^2}{2t^2} \right) dt.$$

On a également

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x^2}(x, \xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\xi}{(2x)^{3/2}} e^{-\xi^2/4x} g_1^{(0)'}(0) + \int_{\xi/\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-t^2/2} g_1^{(0)''} \left( x - \frac{\xi^2}{2t^2} \right) dt \right\}, \\ \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x \partial \xi}(x, \xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\xi^2/4x} g_1^{(0)'}(0) - \xi \int_{\xi/\sqrt{2x}}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} g_1^{(0)''} \left( x - \frac{\xi^2}{2t^2} \right) dt \right\}. \end{aligned}$$

On voit que  $\frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x \partial y}$  sont uniformément bornés en dehors d'un voisinage de l'origine. La singularité en  $x = 0, y = 0$  est appelée *singularité de coin* ou *problème de la naissance de couche limite*. En dehors d'un voisinage de l'origine, on a

$$\left| \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x^2} \right| \leq C(f, \varphi), \quad \left| \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial x \partial y} \right| \leq C(f, \varphi) \varepsilon^{-1/2}, \quad \left| \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial y^2} \right| \leq C(f, \varphi) \varepsilon^{-1}.$$

Une régularisation de l'approximation de couche limite parabolique peut-être envisagée; on peut ainsi obtenir une fonction régularisée, appelée  $\bar{U}_0^{(1)}$ , et qui vérifie [EJ66]:

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{U}_0^{(1)}}{\partial x^2} \right| = O(1) + O(\varepsilon^{-1/2}), \quad \text{dans } \bar{D}.$$

Cette régularisation permet notamment de s'affranchir du problème de la singularité à l'origine du second membre  $\tilde{f}$  de l'équation vérifiée par  $Z_0$ . En attendant une étude plus détaillée du problème, nous supposons cependant dans la suite (voir Hyp.  $\underline{H}_0$  ci-après) que *la dérivée seconde de  $u$  suivant la direction des caractéristiques est uniformément bornée dans les couches limites paraboliques, excepté au voisinage des intersections de couches limites.*

Nous avons les mêmes conclusions que précédemment sur les dérivées de  $U_0^{(2)}$ . Quand la coordonnée locale de couche limite parabolique  $\xi \rightarrow +\infty$ , les dérivées premières et secondes de  $U_0^{(1)}$  (resp.  $U_0^{(2)}$ ) tendent vers 0. Ceci se démontre en notant que, pour  $\alpha$  un réel strictement positif, et  $N$  un entier naturel quelconque, on a

$$\frac{1}{\varepsilon^N} \left( \int_{\alpha/\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right) = o(1).$$

On considère alors  $y > \delta$  (resp.  $y < l_2 - \delta$ ),  $\delta > 0$  fixé, et  $\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{2x}}$ . Ainsi, on a par

$$\text{exemple pour } y \text{ fixé, } \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial y^2} \left( x, \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En ce qui concerne l'approximation de couche limite ordinaire, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} C_0(y) \exp\left(-\frac{l_1 - x}{\varepsilon}\right), & \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\varepsilon} C_0'(y) \exp\left(-\frac{l_1 - x}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} &= C_0''(y) \exp\left(-\frac{l_1 - x}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne, dans les régions où  $U_0^{(1)}$ ,  $U_0^{(2)}$  et leurs dérivées sont négligeables ( $y \in [p, l_2 - p]$ ):

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} \right| \leq C(f, \varphi) \varepsilon^{-2}, \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \right| \leq C(f, \varphi) \varepsilon^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right| \leq C(f, \varphi),$$

Dans les coins, on a

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \right| \leq C(f, \varphi) \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon^{-1/2}), \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right| \leq C(f, \varphi) (1 + \varepsilon^{-1}).$$

Quand la coordonnée locale de couche limite ordinaire  $\xi = \frac{l_1 - x}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ , les dérivées secondes de  $\psi_0$  tendent vers 0, et elles sont uniformément bornées pour  $l_1 - x \geq C\varepsilon |\ln \varepsilon|$ ,

où  $C$  est une constante; en effet, soit  $\varepsilon < 1$  et  $C \geq 2$  une constante; si  $C_0(y)$ ,  $C_0'(y)$  et  $C_0''(y)$  sont uniformément bornés pour  $y \in [p, l_2 - p]$ ,  $p > 0$ , alors les dérivées secondes de  $\psi_0$  sont uniformément bornées pour  $l_1 - x \geq C\varepsilon|ln\varepsilon|$  et  $y \in [p, l_2 - p]$ ; dans les régions où  $C_0(y)$  et ses dérivées ne sont pas uniformément bornées, on peut toujours trouver une constante  $C$  qui convienne; ceci est en accord avec le résultat de Nævert (voir plus haut et [NÄV82]).

On a vu que l'influence des termes  $\partial^\alpha U_0^{(1)}$ ,  $\partial^\alpha U_0^{(2)}$ ,  $\partial^\alpha \psi_0$ ,  $|\alpha| = 2$ , est locale et se limite à un voisinage de la couche limite correspondante, bien que l'épaisseur des couches limites ne soit pas ici toujours bien définie. On en déduit que chacune des estimations précédentes peut-être valable pour la solution  $u$ , si le reste  $\mathcal{Z}_0$  a des dérivées secondes uniformément bornées. Enfin, on note ici que le même type d'analyses peut être effectué sans difficulté dans le cas où la convection est non constante, pourvu que les caractéristiques ne se coupent pas dans  $\overline{D}$ , ainsi que dans le cas d'un domaine  $D$  plus général, en notant toutefois qu'un domaine non convexe peut impliquer la présence de couches internes. De même, le cas d'une équation avec un terme de transport  $cu$  ne pose pas de difficulté additionnelle, et surtout ne change pas la nature des estimations obtenues précédemment, si ce n'est que les constantes s'écrivent alors  $C(f, \varphi, c)$ . Pour des précisions sur ces différents points, on renvoie à [ECK72] [EJ66].

Pour conclure cette partie, on revient à l'équation de départ (1) et on énonce l'hypothèse suivante, inspirée des conclusions (partielles et à approfondir) précédentes:

Soit  $e$  un sous-domaine quelconque de  $\Omega$ , et  $g_1$  et  $g_2$  telles que:

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon, e) &= O(1), & g_2(\varepsilon, e) &= O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{si } e \subset \mathcal{R}_\varepsilon^0, \\ g_1(\varepsilon, e) &= O(1), & g_2(\varepsilon, e) &= O(\varepsilon) & \text{si } e \subset \mathcal{R}_\varepsilon^+, \\ g_1(\varepsilon, e) &= O(\sqrt{\varepsilon}), & g_2(\varepsilon, e) &= O(\varepsilon) & \text{si } e \subset \mathcal{R}_\varepsilon^C. \end{aligned}$$

Pour un point  $\vec{x}$  proche de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , on considère le système de coordonnées locales  $(\eta, \xi)$  tel que  $\xi = \text{dist}(x, \Gamma)$  et  $\eta$  est la coordonnée portée par la tangente à  $\Gamma$ . Dans  $\mathcal{R}_\varepsilon^C$ , on considère le système de coordonnées locales de  $\mathcal{R}_\varepsilon^+$ . Soit  $\alpha$  un multi-indice tel que  $|\alpha| = 2$ ; on suppose que la solution exacte du problème (1) vérifie

$H_0$  :

$$\left| D_{\eta, \xi}^\alpha u \Big|_{0, e} \leq C(f) \sqrt{m(e)} \left\{ g_1(\varepsilon, e)^{-\alpha_1} + g_2(\varepsilon, e)^{-\alpha_2} + g_1(\varepsilon, e)^{-\alpha_1} g_2(\varepsilon, e)^{-\alpha_2} \right\}. \quad (8)$$

Cette hypothèse est également présente dans [AL95] pour l'analyse d'approximations en maillages anisotropes. Elle sera utile pour l'obtention d'estimations quasi-uniformes en  $\varepsilon$  pour le schéma stabilisé présenté dans la partie suivante.

## 2 Une méthode de Galerkin stabilisée avec une dissipation du quatrième ordre

Dans cette partie on construit une stabilisation en dérivée quatrième sous forme variationnelle, en considérant la *méthode variationnelle des différences finies* (voir [MER94] [MER95]) et une discrétisation *éléments finis* d'un opérateur du second ordre. Grâce à l'utilisation d'une métrique locale, on contrôle les coefficients de la dissipation numérique pour chaque nœud du maillage.

### 2.1 Présentation du schéma

Soit  $(\mathcal{T}_h)_h$  une famille de triangulations de  $\Omega$  par des  $n$ -simplex  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, N_e$ . Les sommets du maillage sont notés  $\vec{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N + M$  où  $N$  est le nombre de points intérieurs et  $M$  le nombre de points localisés sur la frontière  $\Gamma$ ; on note  $\Sigma_h = \{\vec{x}_i, i = 1, \dots, N + M\}$ . Pour tout  $e \in \mathcal{T}_h$ , soit  $h_e$  le diamètre du plus petit cercle qui contient  $e$ , et  $\rho_e$  le diamètre du plus grand cercle contenu dans  $e$ . On définit  $h$  et  $\rho$  par:

$$\begin{aligned} h &= \max \{h_{e_k}, k = 1, \dots, N_e\} \\ \rho &= \min \{\rho_{e_k}, k = 1, \dots, N_e\}. \end{aligned}$$

Soit  $V_i$  l'ensemble des nœuds voisins du sommet  $\vec{x}_i$ , et  $N_i = \text{card}(V_i)$ . On considère les sous-espaces de  $H^1(\Omega)$  de dimension finie définis par

$$V^h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}); v_h \in P_1(e), \forall e \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_0^h = \{v_h \in V^h; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (ou } \Gamma_- \text{ si } \varepsilon = 0)\}.$$

Les fonctions de base habituelles de  $V_0^h$  sont notées  $\phi_{ih}$  et  $S_i$  est leur support; l'interpolée linéaire d'une fonction  $v$  continue est notée  $\pi_h v \in V^h$ . Soit enfin  $\mathcal{C}_h$  une partition duale de  $\Omega$  en cellules barycentriques, construites à partir des médianes des triangles (voir Fig. 2); la mesure d'une cellule de contrôle  $C_i$  vérifie:

$$m(C_i) = \sum_{e \in S_i} \frac{m(e)}{3} = 2|\phi_{ih}|_{0,\Omega}^2. \quad (9)$$

On définit  $W^h = \{v_h; v_h \in P_0(C), \forall C \in \mathcal{C}_h\}$ . On considère une méthode de Galerkin avec une stabilisation du quatrième ordre, qui s'écrit:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in V_0^h \text{ tel que} \\ &a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_0^h, \end{aligned} \quad (10)$$

où  $a_h$  et  $l$  sont définis par :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= a(u_h, v_h) + b_h(u_h, v_h), \\ a(u, v) &= \varepsilon \left( \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \right)_\Omega + \left( \text{div} \left( \vec{V} u \right), v \right)_\Omega \\ l(v) &= (f, v)_\Omega \end{aligned} \quad (11)$$