HAL
open science

Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques

Houman Borouchaki, Paul-Louis George

To cite this version:

Houman Borouchaki, Paul-Louis George. Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques. [Rapport de recherche] RR-2928, INRIA. 1996. inria-00073770

HAL Id: inria-00073770

https://inria.hal.science/inria-00073770

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques

Houman BOROUCHAKI et Paul Louis GEORGE

N° 2928

4 juillet 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques

Houman BOROUCHAKI et Paul Louis GEORGE*

Thème 4 — Simulation
et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2928 — 4 juillet 1996 — 25 pages

Résumé : Ce papier présente une nouvelle approche pour la triangulation des surfaces paramétriques. L'idée de base consiste à construire la triangulation dans l'espace des paramètres. Le maillage est alors gouverné par un champ de métriques relevant des propriétés intrinsèques de la surface. La méthode utilisée est de type Delaunay appliquée dans un context riemannien. Des exemples montrant l'efficacité de la méthode proposée font l'objet de la partie II de ce papier.

Mots-clé : Triangulation de Delaunay, maillage anisotrope, maillage de surface, maillage adaptatif.

(Abstract: pto)

*E-mail : Paul-Louis.George@inria.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Parametric Surfaces Meshing. Part I: Theoretical Aspect

Abstract: This paper presents a novel approach for meshing parametric surfaces. The basic idea is to perform the triangulation completely in the parametric space. The mesh generation is then governed by metric specifications deduced from the intrinsic properties of the surface. The method is of Delaunay type applied in a riemannien context. Some examples showing the efficiency of the proposed method are given in Part II of this paper.

Key-words: Delaunay triangulation, Anisotropic mesh generation, Surface meshing, Mesh adaption.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Maillage unité d'un domaine de R^2 **6**
2.1 Maillage unité de la frontière 7
2.2 Maillage unité du domaine 8

3 La métrique du plan tangent **10**
3.1 La première forme fondamentale 10
3.2 Longueur d'une courbe tracée sur la surface 11
3.3 Interprétation géométrique de la métrique $\mathcal{M}_{\Phi_1}$ 13

4 Maillage unité de surfaces paramétriques **14**

5 Quelques métriques naturelles **15**
5.1 Maillage uniforme 15
5.2 Maillages géométriques 16
5.2.1 La deuxième forme fondamentale 16
5.2.2 Définition d'une métrique à partir des rayons de courbure principaux 18
5.2.3 Métrique isotrope du rayon de courbure minimal 22
5.2.4 Métrique anisotropes des rayons de courbure principaux 23
5.3 Maillage gouverné géométrique 23

6 Conclusions **24**

1 Introduction

La construction de triangulation pour des surfaces paramétriques est d'un interêt majeur pour de nombreuses applications, en CAO, pour des calculs par la méthode des éléments finis, etc. Le problème est d'approcher la surface, le plus fidèlement possible, par une surface plane par morceaux. En particulier chaque morceau peut être un triangle. Plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci on rappelle une méthode classique avant de proposer une nouvelle approche.

La méthode classique consiste à subdiviser un premier maillage grossier de l'espace des paramètres de manière récursive jusqu'à l'obtention d'un maillage satisfaisant, c'est-à-dire assez proche de la vraie surface. Pour cela il faut évaluer l'écart maximal d'un triangle donné, possédant trois sommets appartenant à la surface, à la surface elle-même, ceci nécessite la résolution d'équations non triviales. Dans le cas particulier de triangles possédant un angle droit, Filip et al [6] ont proposé un majorant pour cet écart. Ce résultat est généralisé par Sheng et Hirsh [11] au cas des triangles quelconques.

En effet, si $\sigma(u,v)$ est une surface paramétrée où (u,v) parcourt le domaine de définition de la surface et si K est un triangle paramétré dans ce domaine possédant trois sommets appartenant à la surface alors ces auteurs montrent que l'écart maximal δ_k,

$$\delta_K = \sup_{(u,v)\in\Omega(K)} ||\sigma(u,v) - K(u,v)|| \,,$$

où $\Omega(K)$ est le domaine de définition de K et $K(u,v)$ l'image de (u,v) sur le triangle, vérifie

$$\delta_K \leq \frac{2}{9}\, l_K^2\, (M_1 + 2M_2 + M_3)$$

où l_K est la longueur de la plus grande arête de K,

$$M_1 = \sup_{(u,v)\in\Omega(K)} ||\sigma''_{uu}(u,v)|| \,,$$

$$M_2 = \sup_{(u,v)\in\Omega(K)} ||\sigma''_{uv}(u,v)||$$

et

$$M_3 = \sup_{(u,v)\in\Omega(K)} ||\sigma''_{vv}(u,v)|| \,.$$

Connaissant pour K donné les valeurs M_1, M_2 et M_3, on constate ainsi que l'écart est contrôlé par l_K. La difficulté réside dans le calcul des quantités M_i, $1 \leq i \leq 3$. Dans le cas où $\sigma(u, v)$ est polynomiale ou rationnelle, une estimation de ces quantités est proposée dans [5], [6] et [10]. Dans le cas plus général, où σ n'est pas polynomiale, l'estimation de ces quantités est plus délicate.

Nous proposons une nouvelle méthode qui consiste également à trianguler l'espace des paramètres mais avec un contrôle, pour chaque sommet du maillage, sur l'écart maximal entre toutes les arêtes issues de ce sommet et la surface. En effet, comme on le verra, ce contrôle s'avère suffisant pour obtenir un maillage satisfaisant. La méthode proposée traduit alors ce contrôle en un critère sur la longueur des arêtes du maillage. Plus généralement, en contrôlant la longueur des arêtes on peut obtenir différents types de maillage gouverné de la surface, et en particulier un maillage isotrope de taille donnée.

Le schéma de construction du maillage comprend différentes étapes qui sont les suivantes

1. on construit un premier maillage quelconque, suffisamment fin (c'est-à-dire possédant beaucoup de points aux endroits où la variation de courbures sur la surface est importante), dans l'espace des paramètres et en reportant ce maillage sur la surface, on obtient alors un premier maillage de la surface,

2. en chaque sommet du maillage surfacique, on définit une métrique de telle manière que la longueur idéale (souhaitée) des arêtes issues de ce sommet dans toute les directions soit égale à l'unité (ces longueurs, spécifiées d'avance, serviront dans l'espace des paramètres à gouverner le maillage surfacique),

3. le champ de métriques ainsi défini est "reporté" dans l'espace des paramètres,

4. une structure riemannienne est alors construite dans l'espace des paramètres grâce au maillage initial et la carte de métriques induite associée,

5. on retriangule l'espace des paramètres de telle manière que toutes les arêtes du maillage aient une longueur unité dans la structure rieman-

nienne obtenue à l'étape précédente, ce maillage est appelé *maillage unité*,

6. on reporte le maillage unité de l'espace des paramètres sur la surface, donnant ainsi le maillage (unité) desiré.

La méthode consiste ainsi à générer le maillage unité de l'espace des paramètres via une structure riemannienne associée. Dans la section 2, on esquisse les grandes lignes d'un algorithme permettant l'obtention d'un maillage unité *plan* via une structure riemannienne. La définition de la carte de métriques induite dans l'espace des paramètres utilise les notions élémentaires liées aux propriétés intrinséques d'une surface, en particulier la première forme fondamentale qui est rappelée brièvement en section 3. En section 4, on montre la relation entre la carte de métriques spécifiée sur la surface et la carte induite dans l'espace des paramètres. Section 5, on définit quelques cartes "naturelles" de métriques et en particulier la carte de métriques permettant de générer un maillage approchant au mieux la surface. Enfin, Section 6, on conclut sur quelques problèmes qui font naturellement suite à ce travail.

2 Maillage unité d'un domaine de R^2

Soit Ω un domaine de R^2, muni d'une structure riemannienne, le problème que l'on se pose est de *mailler Ω de telle manière que toutes les arêtes du maillage aient une longueur unité*. Ce maillage est appelé *maillage unité* de Ω. La structure riemannienne permet en d'autres termes de gouverner le maillage de Ω. En pratique, elle est définie, par interpolation, à partir d'un champ discret de métriques associé aux sommets d'un maillage donné de Ω (un maillage de fond). La métrique en un sommet P du maillage de fond est définie par une matrice symétrique définie positive d'ordre deux, désigné par $\mathcal{M}_2(P)$ et donnée par

$$\mathcal{M}_2(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) \\ b(P) & c(P) \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $a(P) > 0$ et $a(P)c(P) - b^2(P) > 0$. Le but de la construction est de générer un maillage (unité par rapport au champ de métrique $\mathcal{M}_2$) dont chaque arête

$\overrightarrow{PX}$ issue d'un sommet P, doit (au mieux) satisfaire la relation (cf. figure 1)

$$ {}^t\overrightarrow{PX}\mathcal{M}_2(P)\overrightarrow{PX} = 1\,. \tag{2} $$

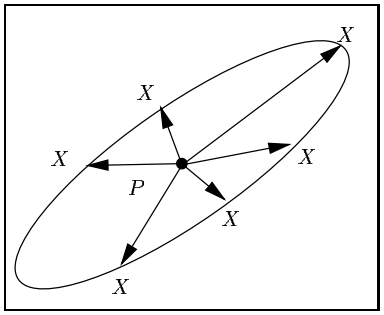

FIG. 1 - *Cercle unité associé à une métrique.*

Le couple constitué par le maillage de fond et le champ discret de métriques est appelé *espace de contrôle*. Le maillage du domaine, dans l'espace de contrôle, comprend alors deux phases

1. le maillage de la frontière de Ω et
2. le maillage de Ω en s'appuyant sur le maillage de sa frontière.

Dans la suite on rappelle les grandes lignes d'un algorithme proposé dans [3], [4] et [8] pour construire le maillage gouverné de Ω.

2.1 Maillage unité de la frontière

La géométrie du domaine est décrite via une discrétisation de sa frontière qui permet de construire un support (de définition) à l'aide d'une représentation mathématique adéquate. Tout maillage gouverné de la frontière est alors une discrétisation de ce support qui consiste à le subdiviser en des segments de *longueur d'arc unité* dans l'espace de contrôle. Pour cela on peut approcher le support par un segment polygonal, puis subdiviser le segment polygonal en des segments polygonaux de longueur un.

2.2 Maillage unité du domaine

Le maillage de la frontière de Ω fournit un ensemble d'arêtes appelées *arêtes contraintes*, qui ont pour sommets un ensemble de points noté $S(\Omega)$.

Pour mailler le domaine Ω, on construit, par une méthode de Delaunay [1], dans un premier temps un *maillage frontalier* de Ω [7] qui s'appuie uniquement sur les points de $S(\Omega)$, puis, en ajoutant des points à l'intérieur du maillage frontalier, on construit un nouveau maillage qui, après optimisation, donnera le maillage final de Ω.

Les points internes sont générés et insérés dans le domaine d'une manière itérative. En effet, à l'étape initiale le maillage du domaine est initialisé par son maillage frontalier et à chaque itération, les arêtes internes du maillage courant sont examinées et les points internes

- sont générés sur ses arêtes de telle manière qu'elles soient, d'une part, subdivisées en des segments de *longueur unité* et d'autre part que ces points ne soient pas à une distance inférieure à un des autres points déjà présents et
- sont insérés dans le maillage courant via le *noyau de Delaunay contraint* dans un context riemannien.

Ce procédé est itéré si le maillage courant est modifié.

Dans cette procédure on utilise essentiellement deux opérations, l'insertion d'un point ou noyau de Delaunay et le calcul de la longueur d'un segment, opérations que l'on va détailler par la suite.

Noyau de Delaunay. Le noyau de Delaunay contraint est une procédure d'insertion de point dans un maillage de Delaunay, qui est basée sur un critère de proximité. Formellement, le noyau de Delaunay contraint peut s'écrire comme [1]

$$T = T - C(P) + B(P) \tag{3}$$

où $C(P)$ est la *cavité* associée au point P, $B(P)$ est la triangulation de $C(P)$ ayant P comme sommet et T le maillage de Delaunay courant. La construction de la cavité est basée sur un critère de proximité défini par

$$\{K, K \in T, P \in Disc(K) \quad \text{et} \quad P \text{ visible des sommets de } K\} \tag{4}$$

où $Disc(K)$ est le disque circonscrit à l'élément K.

La généralisation de cette procédure consiste à redéfinir la cavité $C(P)$ dans un contexte riemannien [2]. Pour cela, on introduit dans un premier temps la *mesure de Delaunay* $\alpha_{\mathcal{M}}(P,K)$ associée au couple (P,K), par rapport à un métrique donnée $\mathcal{M}$ avec

$$\alpha_{\mathcal{M}}(P,K) = \left[\frac{d(O_K,P)}{r_K}\right]_{\mathcal{M}}, \tag{5}$$

où O_K (resp. r_K) est le centre (resp. rayon) du disque circonscrit à K et $[*]_{\mathcal{M}}$ indique que la quantité $*$ est évaluée dans l'espace euclidien défini par la métrique $\mathcal{M}$. Puis, on redéfinit simplement $C(P)$ comme

$$C(P) = C_1(P) \cup C_2(P) \tag{6}$$

avec

$$C_1(P) = \{K, K \in T, K \text{ contient } P\} \tag{7}$$

la base [1] associée au point P et

$$\begin{array}{c} C_2(P) = \{K, K \in T, \exists K' \in C(P), K \text{ adjacent à } K', \\ \alpha_{\mathcal{M}(P)}(P,K) \prod\limits_{V} \alpha_{\mathcal{M}(V)}(P,K) < 1\,,\ \text{V sommet de } K, \\ P \text{ visible des sommets de } K\}\,. \end{array} \tag{8}$$

Remarquons que la cavité généralisée ainsi définie est étoilée par rapport au point P et que la triangulation de $B(P)$ est valide.

Longueur d'un segment. La longueur d'un segment $[P,Q] = (P+t\overrightarrow{PQ})_{0\leq t\leq 1}$ de Ω est donnée par la relation

$$l(P,Q) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}(P+t\overrightarrow{PQ})\overrightarrow{PQ}}\,dt$$

où $\mathcal{M}(P+t\overrightarrow{PQ})$ est la métrique au point $P+t\overrightarrow{PQ}$ du segment qui est bien déterminée grâce à l'espace de contrôle. Ce calcul de longueur permet, pour chaque arête, de la subdiviser en segments de longueur unité.

Enfin, une procédure d'optimisation permet tant d'améliorer la longueur des arêtes obtenues est appliquée après insertion des points internes. Pour cela on utilise

- les bascule d'arêtes si les arêtes alternatives ont une longueur plus proche de l'unité et
- le bougé de points qui consiste à déplacer "pas à pas" chaque sommet du maillage vers un point où les arêtes concourantes ont une longueur unité.

Dans le cas où l'espace de contrôle, constitué du maillage initial et la carte de métriques associée, ne coïncide pas tout à fait avec le champ continu de métriques, on enrichit l'espace de contrôle, pour mieux gouverner le maillage et on recommence le processus complet. Par suite, le schéma du maillage, présenté ci-dessus, permet aisément de construire une boucle d'adaptation. Pour cela il suffit à chaque itération, de définir l'espace de contrôle correspondant. L'espace de contrôle à l'itération i est défini par le maillage adapté du domaine à l'étape $i-1$ et par une carte de métriques associée aux sommets de ce maillage.

3 La métrique du plan tangent

Soit Σ une nappe régulière définie par la paramétrisation

$$\sigma : \Omega \longrightarrow R^3, (u,v) \longmapsto \sigma(u,v) \tag{9}$$

où Ω est un domaine de R^2 et σ est une fonction de classe C^2.

En tout point P de Σ est définie une forme quadratique fondamentale qui permet, en particulier, de calculer la longueur d'une courbe tracée sur Σ. On se propose, dans cette section, de rappeler cette notion élémentaire que nous reformulons en terme de métrique.

3.1 La première forme fondamentale

En un point $P = \sigma(u,v)$ de Σ, où $(u,v) \in \Omega$, le plan vectoriel tangent $T(P)$ est dirigé par les deux vecteurs $\tau_1(P) = \sigma'_u(u,v)$ et $\tau_2(P) = \sigma'_v(u,v)$.

Soit $\nu(P) = \dfrac{\tau_1(P) \times \tau_2(P)}{||\tau_1(P) \times \tau_2(P)||}$ la normale unitaire en P au plan $T(P)$, alors

$$\mathcal{B}_l(P) = (\tau_1(P), \tau_2(P), \nu(P)) \tag{10}$$

constitue une base de R^3 et est appelée *base locale en P*. Tout vecteur V de $T(P)$ s'écrit comme $V = x_1\tau_1(P) + x_2\tau_2(P)$ avec $x_1, x_2 \in R$ et si $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel, on a

$$< V, V >= E(P)x_1^2 + 2F(P)x_1x_2 + G(P)x_2^2 \tag{11}$$

avec

$$\begin{array}{l} E(P) =< \tau_1(P), \tau_1(P) > \\ F(P) =< \tau_1(P), \tau_2(P) > \\ G(P) =< \tau_2(P), \tau_2(P) > \ . \end{array} \tag{12}$$

La restriction à $T(P)$ de la forme quadratique $\Phi_1(V) =< V, V >$ est appelée première forme fondamentale de Σ en $T(P)$. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\Phi_1}(P) = \begin{pmatrix} E(P) & F(P) \\ F(P) & G(P) \end{pmatrix} ,$$

on obtient

$$\Phi_1(V) = {}^tX\mathcal{M}_{\Phi_1}(P)X \ . \tag{13}$$

La matrice $\mathcal{M}_{\Phi_1}(P)$ (étant symétrique définie positive) représente ainsi une métrique et est appelée métrique du plan tangent en P à Σ.

3.2 Longueur d'une courbe tracée sur la surface

Soit Γ un segment courbe tracé sur Σ défini par

$$\gamma \ : \ [a, b] \longrightarrow R^3, \ t \longmapsto \gamma(t) \tag{14}$$

où γ est une fonction de classe C^2. La longueur de Γ est donnée par

$$L(\Gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| \, dt = \int_a^b \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >} \, dt$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Comme Γ est tracé sur Σ, il existe une fonction ω (figure 2) définie par

$$\omega \,:\, [a,b] \longrightarrow \Omega,\; t \longmapsto \omega(t) \tag{15}$$

telle que

$$\gamma = \sigma \circ \omega\,. \tag{16}$$

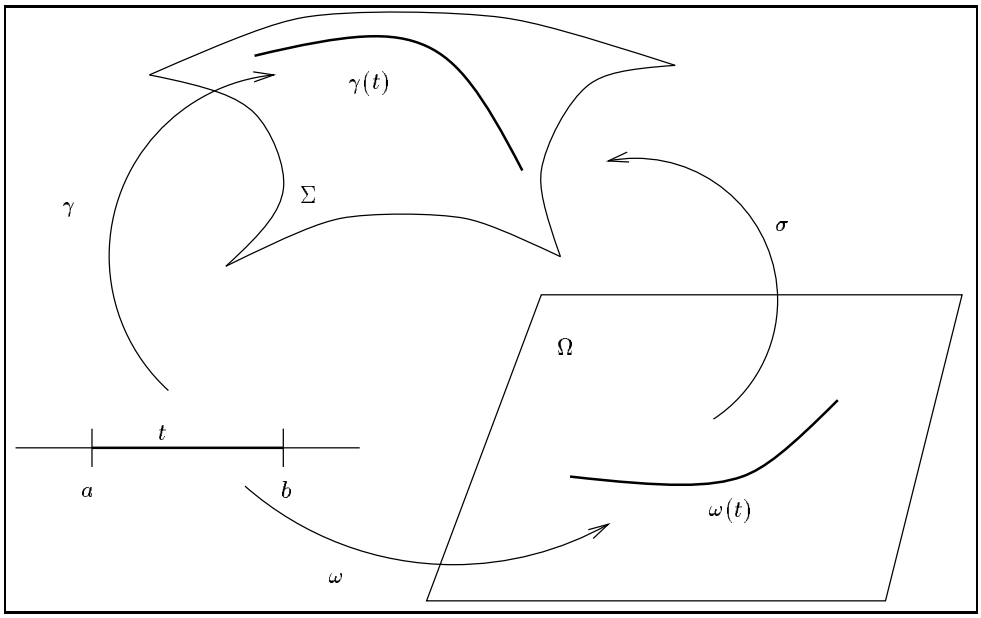

FIG. 2 - *Courbe tracée sur* Σ.

On a alors

$$< \gamma'(t), \gamma'(t) >= {}^t\gamma'(t)\gamma'(t) = {}^t\omega'(t){}^t\sigma'(\omega(t))\sigma'(\omega(t))\omega'(t) \tag{17}$$

mais comme

$$\sigma'(\omega(t)) = \begin{pmatrix} \sigma'_u(\omega(t)) & \sigma'_v(\omega(t)) \end{pmatrix} \tag{18}$$

on a

$${}^t\sigma'(\omega(t))\sigma'(\omega(t)) = \mathcal{M}_{\Phi_1}(\gamma(t)) \tag{19}$$

et on en déduit que

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{{}^t\omega'(t)\mathcal{M}_{\Phi_1}(\gamma(t))\omega'(t)}\, dt\,. \tag{20}$$

En particulier si $\omega(t)$ décrit un segment $[AB]$ de Ω, on a

$$L(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{AB}\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(A + t\overrightarrow{AB}))\overrightarrow{AB}}\, dt\,. \tag{21}$$

3.3 Interprétation géométrique de la métrique $\mathcal{M}_{\Phi_1}$

Soient $O \in \Omega$ et $\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O))$ la métrique du plan tangent en $\sigma(O)$. Soit ε un réel quelconque, le lieu géométrique des points X de Ω vérifiant

$${}^t\overrightarrow{OX}\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O))\overrightarrow{OX} = \varepsilon^2 \tag{22}$$

est une ellipse centrée en O que l'on désigne par $\mathcal{E}(O,\varepsilon)$. Dans R^2 muni de la métrique euclidienne définie par $\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O))$, $\mathcal{E}(O,\varepsilon)$ est un cercle de centre O et de rayon ε.

Supposons que $\mathcal{E}(O,\varepsilon) \subset \Omega$ et, pour tout $X \in \mathcal{E}(O,\varepsilon)$, considérons la courbe $\Gamma_X = \sigma([OX])$ tracée sur Σ, image par σ du segment $[OX]$ de Ω. La longueur de Γ_X est donnée par

$$L(\Gamma_X) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{OX}\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O + t\overrightarrow{OX}))\overrightarrow{OX}}\, dt\,. \tag{23}$$

Pour ε suffisamment petit, quel que soit t, on a

$$\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O + t\overrightarrow{OX})) \approx \mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O)) \tag{24}$$

et donc

$$L(\Gamma_X) = \sqrt{{}^t\overrightarrow{OX}\mathcal{M}_{\Phi_1}(\sigma(O))\overrightarrow{OX}} = \varepsilon\,. \tag{25}$$

Ainsi le lieu géométrique des courbes, tracées sur Σ, d'origine $\sigma(O)$ et de longueur ε (pour ε suffisamment petit) est l'image par σ de l'ellipse $\mathcal{E}(O,\varepsilon)$ tracée dans Ω.

4 Maillage unité de surfaces paramétriques

Etant donné un champ continu $\Big(\mathcal{M}_3(P)\Big)_{P\in R^3}$ de métriques dans R^3, où

$$\mathcal{M}_3(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) & c(P) \\ b(P) & d(P) & e(P) \\ c(P) & e(P) & f(P) \end{pmatrix} \tag{26}$$

avec $a(P) > 0$, $a(P)d(P) - b^2(P) > 0$ et $\mathrm{Det}(\mathcal{M}_3(P)) > 0$, le problème que l'on se pose est de construire le maillage unité de la surface Σ par rapport à la structure riemannienne définie par ce champ dans R^3.

L'idée de base consiste à générer le maillage surfacique via la construction d'un maillage adéquate dans l'espace des paramètres. Pour cela, il suffit de définir le champ $\Big(\mathcal{M}_2(X)\Big)_{X\in R^2}$ des métriques induit sur le domaine des paramètres Ω. Ainsi on a

$$\begin{array}{c} \text{maillage gouverné } \Big(\Sigma, \mathcal{M}_3(P)_{P\in\Sigma}\Big) \\ \Updownarrow \\ \text{maillage gouverné } \Big(\Omega, \mathcal{M}_2(X)_{X\in\Omega}\Big) \end{array},$$

où $X \in \Omega$ et $P \in \Sigma$ sont liés par la relation $P = \sigma(X)$.

D'après la formule (21) qui permet le calcul de la longueur d'une courbe tracée sur Σ via l'espace des paramètres, $\mathcal{M}_2(X)$ est la métrique induite par $\mathcal{M}_3(P)$ sur le plan tangent à la surface Σ en P. Notons par $\Pi(P)$ la matrice de passage de la base canonique de R^3 à la base locale en P, la métrique $\mathcal{M}_2(X)$ est alors définie par les 2 premières colonnes et les 2 premières lignes de la matrice

$${}^t\Pi(P)\mathcal{M}_3(P)\Pi(P)\,. \tag{27}$$

A partir du champ de métriques $\mathcal{M}_3(P)$ ci-dessus, l'algorithme conduit à construire un maillage dans Ω gouverné par le champ de métriques induit $\mathcal{M}_2(X)$. Le report de ce maillage sur la surface définit un maillage de taille conforme à $\mathcal{M}_3$, dont les points sont sur la surface mais dont les éléments ne sont pas nécessairement proche de celle-ci. Par suite, on introduit d'autres

champs de métriques utilisant les rayons de courbure principaux, champs qui sont propres au respect de la géométrie. En particulier le champ initial $\mathcal{M}_3(P)$ doit être modifié au regard de ces derniers champs.

5 Quelques métriques naturelles

Dans cette section on définit quelques champs de métriques servant à gouverner la génération de maillages de différentes natures. Par exemple, des maillages

- isotropes de taille constante (maillage uniforme)
- isotropes de rayon de courbure minimal,
- anisotropes des rayons de courbure principaux,
- gouvernés géométriques,

qui seront explicités plus bas. Par ailleurs rappelons qu'en chaque point P, la métrique $\mathcal{M}_3(P)$ peut s'écrire sous la forme (plus parlante) suivante

$$ {}^t\mathcal{B}(P) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2(P)} \end{pmatrix} \mathcal{B}(P) \tag{28} $$

où $\mathcal{B}(P)$ est une base orthonormée de R^3 et $h_1(P)$, $h_2(P)$ et $h_3(P)$ représentent les longueurs d'arêtes (issues de P) souhaitées suivant les vecteurs de base $\mathcal{B}(P)$.

5.1 Maillage uniforme

Un maillage *uniforme* ou *à h constant* d'une surface est un maillage dont les éléments sont tous de taille fixe h. Le champ de métriques permettant de

générer un tel maillage est (trivialement) défini par

$$\mathcal{M}_3(P,h) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} . \tag{29}$$

En effet si $\overrightarrow{PX}$ est un vecteur de R^3 muni de la métrique euclidienne $\mathcal{M}_3(P,h)$, alors sa norme est donnée par

$$\sqrt{{}^t\overrightarrow{PX}\mathcal{M}_3(P,h)\overrightarrow{PX}} = \frac{||\overrightarrow{PX}||}{h} \tag{30}$$

où $||.||$ représente la norme euclidienne usuelle. Ainsi tout vecteur $\overrightarrow{PX}$, issu de P, de norme euclidienne h a une longueur unité dans la métrique euclidienne $\mathcal{M}_3(P,h)$.

5.2 Maillages géométriques

Un maillage *géométrique* d'une surface est un maillage qui approche au mieux la surface. On va montrer que le champ de métriques, permettant de gouverner la génération d'un tel maillage, peut être défini à partir des rayons de courbure principaux et des directions principales que l'on rappelle par la suite.

5.2.1 La deuxième forme fondamentale

Soit $V = x_1\tau_1(P) + x_2\tau_2(P)$ un vecteur du plan tangent $T(P)$ en P à Σ, rappelons que $\nu(P)$ est le vecteur normale à $T(P)$ et posons

$$\begin{array}{l} L(P) =< \nu(P), \sigma''_{uu}(u,v) > \\ M(P) =< \nu(P), \sigma''_{uv}(u,v) > \\ N(P) =< \nu(P), \sigma''_{vv}(u,v) > \ . \end{array} \tag{31}$$

La restriction à $T(P)$ de la forme quadratique

$$\Phi_2(V) = L(P)x_1^2 + 2M(P)x_1x_2 + N(P)x_2^2 \tag{32}$$

est appelée la deuxième forme fondamentale de Σ en $T(P)$.

On a les deux lemmes suivants, démontrés dans [9]

Lemme 1. *La courbure normale $\kappa(V)$ de Σ au point P, relative à la tangente V est le nombre*

$$\kappa(V) = \frac{\Phi_2(V)}{\Phi_1(V)}\,. \tag{33}$$

Lemme 2. *La courbure $\kappa_m(V)$ de Σ au point P correspondant à une section quelconque relative à la tangente V vérifie*

$$\kappa(V) = \kappa_m(V) < \nu(P), m > \tag{34}$$

où m est le vecteur unitaire normal à la courbe tracée sur Σ définie par cette section.

Le premier lemme permet le calcul du rayon de courbure de la courbe tracée sur Σ qui est définie par une section normale relative à une tangente V (plan qui contient P, V et $\nu(P)$) et le deuxième permet le même calcul pour une section quelconque relative à V.

En faisant varier V, appartenant à $T(P)$, dans l'expression $\kappa(V)$, on obtient les courbures relatives aux différentes sections normales de Σ au point P. En particulier, les extrema de $\kappa(V)$ sont appelés courbures principales de Σ au point P. Ces dernières vérifient alors

$$(\kappa)'_{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad (\kappa)'_{x_2} = 0 \tag{35}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Big(F(P)L(P) - E(P)M(P)\Big)x_1^2 + \Big(G(P)L(P) - E(P)N(P)\Big)x_1x_2 + \\ + \Big(G(P)M(P) - F(P)N(P)\Big)x_2^2 = 0\,.\end{aligned} \tag{36}$$

Si les trois coefficients de ce trinôme sont nuls, alors, quel que soit V, $\Phi_2(V)$ est proportionnelle à $\Phi_1(V)$ et la courbure est constante suivant toutes les sections normales. Dans ce cas, on a

$$\kappa(V) = \frac{L(P)}{E(P)}\,. \tag{37}$$

Dans le cas général, cette équation admet deux solutions distinctes $V_1(P)$ et $V_2(P)$ vérifiant $< V_1(P), V_2(P) >= 0$. Ces deux vecteurs définissent deux directions appelées directions principales. Soient les vecteurs unitaires $W_1(P) = \dfrac{V_1(P)}{||V_1(P)||}$ et $W_2(P) = \dfrac{V_2(P)}{||V_2(P)||}$, le couple de vecteurs $(W_1(P), W_2(P))$ constitue une base orthonormée de $T(P)$ et

$$\mathcal{B}_p(P) = \Big(W_1(P), W_2(P), \nu(P)\Big) \tag{38}$$

est appelée *base locale principale* en P.

Désignons la courbure principale et le rayon de courbure principal correspondant à $V_1(P)$ (resp. $V_2(P)$) par $\kappa_1(P)$ et $\rho_1(P) = \dfrac{1}{\kappa_1(P)}$ (resp. $\kappa_2(P)$ et $\rho_2(P) = \dfrac{1}{\kappa_2(P)}$), on a le lemme suivant, également démontré dans [9]

Lemme 3. *Soient* $V = ||V||(W_1(P)\cos\theta + W_2(P)\sin\theta)$ *un vecteur quelconque de* $T(P)$ *d'origine* P, *écrit dans la base* $(W_1(P), W_2(P))$, *et* $\rho(V) = \dfrac{1}{\kappa(V)}$ *le rayon de courbure correspondant à la section normale. Si* $z_1 = \sqrt{\rho(V)}\cos\theta$ *et* $z_2 = \sqrt{\rho(V)}\sin\theta$, *alors*

$$\frac{z_1^2}{\rho_1(P)} + \frac{z_2^2}{\rho_2(P)} = 1\,. \tag{39}$$

En d'autre terme, la racine des rayons de courbure suivant toutes les sections normales décrit une section conique dans le plan tangent.

5.2.2 Définition d'une métrique à partir des rayons de courbure principaux

Soient P un point de Σ, $W_1(P)$ et $W_2(P)$ les deux vecteurs unitaires suivant les directions principales et $\rho_1(P)$ et $\rho_2(P)$ les rayons de courbure correspondants. Supposons que $\rho_1(P) \leq \rho_2(P)$, on a le lemme suivant

Lemme 4. *Soient* $V = ||V||(W_1(P)\cos\theta + W_2(P)\sin\theta)$ *un vecteur quelconque de* $T(P)$ *d'origine* P *et* $\rho(V)$ *le rayon de courbure correspondant à la section normale. Soit* Y *le point intersection de la demi-droite* Δ *d'origine* P *et de vecteur directeur* V *avec l'ellipse* $\mathcal{E}$ *tracée dans* $T(P)$ *définie par*

$$\frac{z_1^2}{\rho_1^2(P)} + \frac{z_2^2}{\rho'^2_2(P)} = 1\,. \tag{40}$$

où $(z_1, z_2) = \overrightarrow{PZ}$ *est un point de l'ellipse et*

$$\rho'_2(P) = \rho_2(P)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\rho_1(P)}{\rho_2(P)}\right)^2}\,, \tag{41}$$

alors on a (figure 3)

$$||\overrightarrow{PY}|| \leq \rho(V)\,. \tag{42}$$

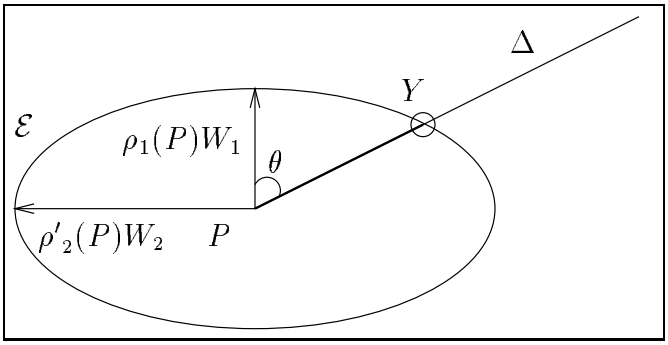

FIG. 3 - *Métrique des rayons de courbure principaux.*

En effet, d'après le lemme 3, comme

$$\rho(V) = \rho_1(P)\cos^2(\theta) + \rho_2(P)\sin^2(\theta)\,, \tag{43}$$

il suffit de montrer que $g(\theta) \geq 0$ où

$$g(\theta) = \Big(\rho_1(P)\cos^2(\theta) + \rho_2(P)\sin^2(\theta)\Big)^2 - \Big(\rho_1^2(P)\cos^2(\theta) + \rho'^2_2(P)\sin^2(\theta)\Big)\,. \tag{44}$$

Cette relation est vérifiée car

$$g(\theta) = (\rho_2(P) - \rho_1(P))^2 (1 - \cos^2(\theta))^2 \,. \tag{45}$$

Remarquons que si l'on remplace ${\rho'}_2(P)$ par $\rho_2(P)$ dans $g(\theta)$ alors on obtient

$$g(\theta) = (\rho_2(P) - \rho_1(P))^2 \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1) \leq 0 \tag{46}$$

et que ${\rho'}_2(P)$ est la plus grande valeur qui vérifie à la fois les inégalitées $\rho_1(P) \leq {\rho'}_2(P) \leq \rho_2(P)$ et $g(\theta) \geq 0$. Par ailleurs, on peut remplacer ${\rho'}_2(P)$ par toute valeur comprise entre $\rho_1(P)$ et ${\rho'}_2(P)$, en particulier pour

$${\rho'}_2(P) = \rho_1(P) \,, \tag{47}$$

la relation $g(\theta) \geq 0$ est vérifiée.

Le lemme 4 montre que l'on peut définir une métrique en P dans le plan tangent $T(P)$ telle que suivant chaque direction la longueur unité associée à la métrique ne dépasse pas la mesure du rayon de courbure relatif à cette direction. Une telle métrique est donnée par

$$\mathcal{M}_\rho = {}^t \begin{pmatrix} W_1(P) & W_2(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho_1^2(P)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{{\rho'}_2^2(P)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(P) & W_2(P) \end{pmatrix} . \tag{48}$$

La spécification de la métrique $\mathcal{M}_\rho$ en P permet de contrôler les longueurs des arêtes issues de P pour l'obtention d'un maillage correspondant à une approximation de la surface au second ordre. En effet, on a le lemme suivant

Lemme 5. *Soit V un vecteur quelconque de $T(P)$ d'origine P. La section normale relative à V coupe Σ en une courbe Γ et représente également le plan osculateur de Γ en P. Dans ce plan une approximation au second ordre de Γ au voisinage de P est un cercle appelé cercle osculateur.*

Soit $\gamma(s)$ une paramétrisation de Γ où s est l'abscisse curviligne. Désignons par $\tau = \dfrac{V}{||V||}$ (resp. ν) le vecteur unitaire tangent (resp. normale) à Γ en P dans le plan osculateur. Si $P = \gamma(s_0)$, on a

$$\gamma(s_0 + \Delta s) = P + \tau \Delta s + \frac{1}{2\rho(V)} \nu \Delta s^2 + \Delta s^2 \varepsilon(\Delta s) \,, \tag{49}$$

où Δs est un accroissement petit de s, $\rho(V)$ le rayon de courbure correspondant à la section spécifiée et $\varepsilon(\Delta s)$ est un terme qui tend vers zéro si Δs tend vers zéro. Il suffit alors de remarquer que le point défini par

$$P + \tau\Delta s + \frac{1}{2\rho(V)}\nu\Delta s^2 \tag{50}$$

appartient au cercle de centre $O = P + \rho(V)\nu$ et de rayon $\rho(V)$ (figure 4).

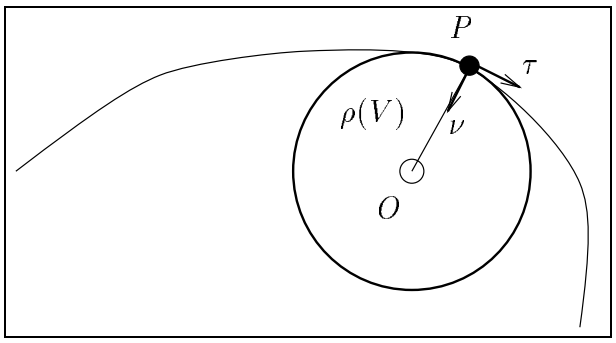

FIG. 4 - *Cercle osculateur.*

Ainsi au voisinage de P, on peut approcher la courbe par un cercle de rayon $\rho(V)$ et la spécification de la métrique $\mathcal{M}_\rho$ en P oblige à discrétiser ce cercle avec un pas de discrétisation inférieur à $\rho(V)$. Notons que l'on peut discrétiser ce cercle avec un pas inférieur à $\alpha\rho(V)$ permettant de contrôler l'écart entre la discrétisation du cercle et le cercle lui-même. Si δ représente cet écart (figure 5), le contrôle consiste à définir α de telle manière que, pour un ϵ donné, on ait

$$\frac{\delta}{\rho(V)} \leq \epsilon\,; \tag{51}$$

comme on a

$$\delta = r(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}})\,, \tag{52}$$

on obtient alors

$$\alpha \leq 2\sqrt{\epsilon(2-\epsilon)}\,. \tag{53}$$

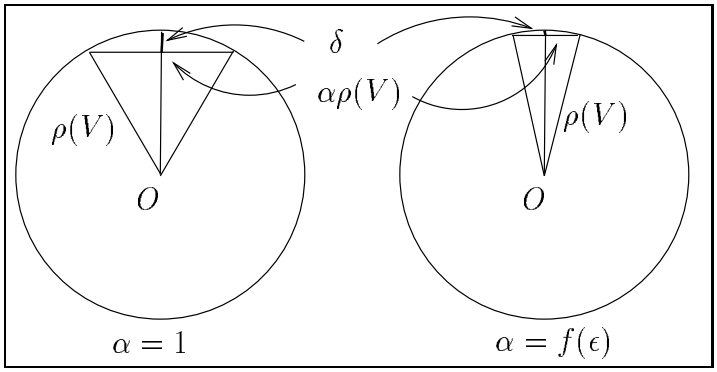

FIG. 5 - *Discrétisation d'un cercle.*

Avec ce contrôle, la métrique $\mathcal{M}_\rho$ doit être remplacée par

$$\frac{\mathcal{M}_\rho}{\alpha^2}. \tag{54}$$

On a ainsi montré la proposition suivante

Proposition. *La spécification de la métrique* $\frac{\mathcal{M}_\rho}{\alpha^2}$ *dans le plan tangent, en chaque point de la surface, permet un contrôle sur la longueur des arêtes issues du point, pour gouverner la construction d'un maillage approchant la surface au second ordre.*

5.2.3 Métrique isotrope du rayon de courbure minimal

Si $\rho(P)$ est le plus petit des rayons de courbure principaux $\rho_1(P)$ et $\rho_2(P)$ alors le champ de métriques

$$\mathcal{M}_3(P,\rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2(P)} \end{pmatrix} \tag{55}$$

est appelé *champ isotrope du rayon de courbure minimale* et d'après les formules (47) et (48) permet d'obtenir un maillage isotrope correspondant à une approximation au second ordre de la surface.

5.2.4 Métrique anisotropes des rayons de courbure principaux

De même, en supposant $\rho_1(P) \leq \rho_2(P)$, le champ de métriques

$$\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2) = {}^t\mathcal{B}_p(P) \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho'^2_2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathcal{B}_p(P) \tag{56}$$

où λ est un scalaire quelconque, est appelé *champ anisotrope des rayons de courbure principaux* et d'après la formule (48) permet d'obtenir un maillage anisotrope correspondant à une approximation au second ordre de la surface.

5.3 Maillage gouverné géométrique

Soit un champ quelconque $\mathcal{M}_3(P)$. A priori ce champ n'est pas nécessairement *conforme* à la définition géométrique de la surface. Le problème que l'on se pose est de respecter au mieux ce champ et générer un maillage géométrique. Pour cela on propose de considérer l'intersection du champ initial $\mathcal{M}_3(P)$ avec le champ anisotrope des rayons de courbure principaux $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$. Cette intersection peut se définir de deux manières différentes

- soit en conservant la forme de la métrique initiale,
- soit en approchant aux mieux les deux métriques.

La première solution consiste à définir un scalaire α de telle manière que la boule unité correspondant à la métrique intersection

$$\alpha\, \mathcal{M}_3(P) \tag{57}$$

soit la plus grande inclus dans la boule unité correspondant à la métrique $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$.

Quant à la deuxième solution, elle revient à construire la plus grande boule unité inclus à la fois dans la boule unité de $\mathcal{M}_3(P)$ et dans celle de $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$, puis de considérer la métrique correspondante.

6 Conclusions

Dans ce papier, après avoir rappelé brièvement les grandes lignes d'un algorithme permettant la construction d'un maillage gouverné isotrope ou anisotrope plan, on a montré que le problème du maillage d'une surface paramétrique est équivalent à celui du maillage gouverné d'un domaine plan où les spécifications sont traduites en terme de métriques relevant des propriétés intrinsèques de la surface. Le même concept peut être également appliqué au cas du maillage gouverné de surfaces. Quelques spécifications pour l'obtention de maillages classiques de surfaces ont été proposées qui conduisent à construire une approximation au second ordre. Ces spécifications dépendent des rayons de courbure principaux. En particulier, elles permettent de gouverner la construction d'un maillage géométrique isotrope ou anisotrope. Des exemples de maillages de surfaces, ainsi que des maillages surfaciques cylindriques sont présentés dans la partie II de ce papier illustrant l'efficacité de la méthode proposée.

Le problème que l'on se pose est de savoir si l'on peut considérer la courbure de Gauss pour gouverner le maillage correspondant à une approximation au second ordre de la surface. Dans la mesure où l'espace de contrôle dépend des plans tangents à la surface, une recherche future consiste à prendre en compte les symboles de Kristoffel dans la définition de cet espace. Une suite naturelle du présent travail est la construction du maillage d'une surface qui est définie par un nombre de cartes raisonnable. Pour cela, la construction comprend deux étapes indépendantes, le maillage des interfaces (frontières des cartes) et le maillage de l'intérieur des cartes. Pour conclure, on mentionne le problème du maillage gouverné d'une surface polyèdrique quelconque, dans la mesure où l'on ne peut pas appliquer directement les méthodes décrites dans ce papier.

Références

[1] H.Borouchaki and P.L.George, Aspects of 2D Delaunay mesh generation, à paraître dans *Int. J. Numer. Methods Eng.*

[2] H.Borouchaki et P.L.George, Triangulation de Delaunay et métrique riemannienne. Applications aux maillages éléments finis, à paraître dans *Revue européenne des éléments finis.*

[3] H.Borouchaki, P.L.George, F.Hecht, P.Laug and E.Saltel, Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part I: Algorithms., à paraître dans *Finite Elements in Analysis and Design.*

[4] H.Borouchaki, P.L.George and B.Mohammadi, Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part II: Applications., à paraître dans *Finite Elements in Analysis and Design.*

[5] A.Dolenc and I.Mäkelä, Optimized triangulation of parametric surfaces, *Mathematics of Surfaces IV*, Sep 1990.

[6] D.Filip, R.Magedson and R.Markot, Surface algorithm using bounds on derivatives, *Comput.-Aided Geom. Des.*, Vol 3, pp. 295–311, 1986.

[7] P.L.George, Automatic Mesh Generation, Application to Finite Element Methods, *Wiley*, 1991.

[8] P.Laug, H.Borouchaki et P.L.George, Maillage de courbes gouverné par une cartes de métriques, *Rapport de recherche INRIA*, no 2818, 1996.

[9] J.Lelong-Ferrand et J.M.Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique, *Dunod Université*, Bordas, 1977.

[10] L.A.Piegl and A.M.Richard, Tessellating trimmed NURBS surfaces, *Comput.-Aided Des.*, Vol 27, No 1, pp. 16–26, 1995.

[11] X.Sheng and B.E.Hirsch, Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *Comput.-Aided Des.*, Vol 24, No 8, pp. 437–444, 1992.

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue F´elix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399