



Analyse asymptotique des équations de dérive-diffusion et équations de Hamilton-Jacobi

Philippe Montarnal, Benoît Perthame

► **To cite this version:**

Philippe Montarnal, Benoît Perthame. Analyse asymptotique des équations de dérive-diffusion et équations de Hamilton-Jacobi. [Rapport de recherche] RR-2885, INRIA. 1996. <inria-00073805>

HAL Id: inria-00073805

<https://hal.inria.fr/inria-00073805>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Analyse asymptotique des équations de
dérive-diffusion et équations de
Hamilton-Jacobi*

Philippe Montarnal , Benoît Perthame

N° 2885

Mai 1996

THÈME 4



*Rapport
de recherche*



Analyse asymptotique des équations de dérive-diffusion et équations de Hamilton-Jacobi

Philippe Montarnal^{*}, Benoît Perthame^{**}

Thème 4 — Simulation
et optimisation
de systèmes complexes
Projet M3N

Rapport de recherche n° 2885 — Mai 1996 — 41 pages

Résumé : Nous étudions le comportement asymptotique des équations de dérive-diffusion (DD) des semi-conducteurs. Pour cela, après un changement d'échelle, nous faisons apparaître un petit paramètre λ devant le terme de diffusion. Pour obtenir un problème limite complet, nous devons introduire deux fonctions liées au logarithme de la concentration des électrons. Nous montrons, qu'avec ces nouvelles variables, le problème limite s'exprime sous la forme d'un système couplé équations de Hamilton-Jacobi - inéquations variationnelles. Dans le cas unidimensionnel, nous prouvons l'unicité de ce problème limite ; cela nous donne alors toutes les informations nécessaires pour étudier le comportement du modèle DD pour λ petit. Nous étudions aussi l'intérêt de ces nouvelles variables au niveau numérique. Notre méthode étend les résultats connus, précise également la convergence de la concentration des électrons, améliore les hypothèses nécessaires et enfin donne une approche originale au problème susceptible d'être utilisée au niveau numérique.

Mots-clé : Équations de dérive-diffusion des semi-conducteurs, Perturbation singulières, Équations de Hamilton-Jacobi, Solution de viscosité

(Abstract: pto)

*. Email : Philippe.Montarnal@inria.fr

**.. Laboratoire d'Analyse Numérique, BC 187, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France et INRIA, Projet M3N, Email : perthame@ann.jussieu.fr

Asymptotic analysis of the drift-diffusion equations and Hamilton-Jacobi equations

Abstract: We study the asymptotic behaviour of the semiconductor drift-diffusion (DD) equations with a vanishing diffusion term. In order to obtain a closed limit problem, we need to introduce two new variables defined with the logarithm of the electronic concentration. We show that the limiting problem is a coupled system of Hamilton-Jacobi equations and variational inequalities. In the monodimensional case, we show that this limit problem has a unique solution, allowing us to prove the convergence of the DD model for vanishing viscosities. We show also the interest of this new variables for the numerical point of view. Our method is an extension of previous asymptotic studies that sheds a new light on the convergence of the electronic concentration, improves some necessary mathematical hypotheses and provides an original approach of the problem, well suited for numerical purposes.

Key-words: Semiconductor drift-diffusion equations, Singular perturbations, Hamilton-Jacobi equations, Viscosity solutions

1 Introduction

Nous nous intéressons à la limite dopage fort des équations de dérive-diffusion (DD).

Le modèle DD est actuellement le modèle le plus utilisé pour la description des dispositifs de semi-conducteurs (voir P. A. Markowich et al. [17]). On peut le dériver des Équations de Transport de Boltzmann (voir [9, 24] et pour le point de vue mathématique [13, 23]). Pour prendre en compte les phénomènes électriques, on y ajoute l'équation de Poisson. Nous prenons comme conditions aux limites des conditions mixtes Dirichlet-Neumann.

En toutes généralité, les équations sont les suivantes (avec \bar{n} la concentration d'électrons, \bar{p} la concentration des trous et $\bar{\Phi}$ le potentiel) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x(D_n \nabla_x \bar{n} - \mu_n \bar{n} \nabla_x \bar{\Phi}) = R, \\ -\operatorname{div}_x(D_p \nabla_x \bar{p} + \mu_p \bar{p} \nabla_x \bar{\Phi}) = R, \\ -\operatorname{div}_x(\epsilon_s \nabla_x \bar{\Phi}) = q(C - \bar{n} + \bar{p}), \end{cases} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \bar{n}(x) = \bar{n}^0(x), \\ \bar{p}(x) = \bar{p}^0(x), \\ \bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}^0(x), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\nabla_x \bar{n} \cdot \mathbf{n} = 0, \nabla_x \bar{p} \cdot \mathbf{n} = 0, \nabla_x \bar{\Phi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (3)$$

où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \neq \emptyset$ et \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à Γ_N . La signification des différents paramètres physiques est donnée en annexe B.

Nous étudions ici une version simplifiée de ce problème. Nous ne considérons que les électrons et nous négligeons le terme de génération-recombinaison : $R \equiv 0$. Avec ces hypothèses et après le changement d'échelle suivant : $n_\lambda = \frac{\bar{n}}{C}$, $\Phi_\lambda = \frac{\epsilon_s}{Cq} \bar{\Phi}$; on obtient un problème de perturbation avec le petit paramètre $\lambda = \frac{D_n \epsilon_s}{\mu_n C q}$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x(\mathbf{J}_{n_\lambda}) = 0, \\ \mathbf{J}_{n_\lambda} = \lambda \nabla_x n_\lambda - \nabla_x \Phi_\lambda n_\lambda, \\ -\Delta_x \Phi_\lambda = 1 - n_\lambda, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} n_\lambda(x) = n_\lambda^0(x), \\ \Phi_\lambda(x) = \Phi_\lambda^0(x), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (5)$$

$$\nabla_x n_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0, \nabla_x \Phi_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (6)$$

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de Φ_λ et n_λ pour $\lambda \rightarrow 0$. Cela correspond à la limite dopage fort en considérant le cas d'un dispositif soumis à un champ fort (énergie thermique \ll énergie électrique).

Le changement d'échelle ci-dessus a déjà été étudié par F. Brezzi, A.C.S. Capelo, C. Gastaldi et L.D. Marini [4, 6, 5, 7, 12]. D'autres changements d'échelles peuvent être utilisés. P.A. Markowich, C.A. Ringhofer et C. Schmeiser [17, 18, 19, 20], font apparaître le paramètre λ devant le laplacien de l'équation de Poisson. Notre changement d'échelle est justifié par les conditions aux limites : potentiel appliqué important (de l'ordre de $1/\lambda$, voir annexe B).

Nous remarquons tout d'abord que l'étude de la limite distribution de Φ_λ et n_λ ne nous donne pas suffisamment d'informations pour obtenir l'unicité du problème limite. Cette limite, trop grossière, ne permet pas, et loin de là, de sélectionner le comportement convenable pour λ petit. Pour préciser ce comportement, on introduit classiquement les deux fonctions suivantes : le quasi-niveau de Fermi des électrons φ_λ défini par $n_\lambda = e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}}$ et χ_λ défini par $n_\lambda = 1 - e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}}$. Nous obtenons alors les deux systèmes suivants, écrits sous forme conservative :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \left(e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}} \nabla_x \varphi_\lambda \right) = 0, \\ -\Delta_x \Phi_\lambda = 1 - e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}}, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (7)$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \left(e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}} \nabla_x \chi_\lambda - \nabla_x \Phi_\lambda \right) = 0, \\ -\Delta_x \Phi_\lambda = e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}}, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (8)$$

sous forme non-conservative, nous pouvons les réécrire :

$$\begin{cases} -\lambda \Delta_x \varphi_\lambda + |\nabla_x \varphi_\lambda|^2 - \nabla_x \varphi_\lambda \cdot \nabla_x \Phi_\lambda = 0, \\ -\Delta_x \Phi_\lambda = 1 - e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}}, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (9)$$

$$\left| \begin{array}{l} -\lambda\Delta_x\chi_\lambda + |\nabla_x\chi_\lambda|^2 - \nabla_x\chi_\lambda \cdot \nabla_x\Phi_\lambda = -\lambda, \\ -\Delta_x\Phi_\lambda = e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}}, \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (10)$$

et les conditions aux limites deviennent alors :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda^0(x), \\ \chi_\lambda(x) = \chi_\lambda^0(x), \\ \Phi_\lambda(x) = \Phi_\lambda^0(x), \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (11)$$

$$\left| \begin{array}{l} \nabla_x\varphi_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \nabla_x\chi_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \nabla_x\Phi_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (12)$$

avec $\varphi_\lambda^0 = \Phi_\lambda^0 - \lambda \ln n_\lambda^0$ et $\chi_\lambda^0 = \Phi_\lambda^0 - \lambda \ln(1 - n_\lambda^0)$.

Dans le cas d'un contact Schottky unidimensionnel (Γ_N est alors vide), nous allons montrer que $\varphi_\lambda, \chi_\lambda, \Phi_\lambda$ converge uniformément dans tout compact de Ω vers des fonctions φ, χ, Φ qui vérifient un système couplé Équations de Hamilton-Jacobi - Inéquations Variationnelles :

φ est solution au sens de viscosité de

$$\left| \begin{array}{l} |\nabla_x\varphi|^2 - \nabla_x\Phi \cdot \nabla_x\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi(x) = \varphi^0(x) \quad \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right. \quad (13)$$

χ est solution au sens de viscosité de

$$\left| \begin{array}{l} |\nabla_x\chi|^2 - \nabla_x\Phi \cdot \nabla_x\chi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \chi(x) = \chi^0(x) \quad \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right. \quad (14)$$

et Φ est solution de :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Max}(-\Delta_x\Phi - 1, \Phi - \varphi) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \\ \text{Min}(-\Delta_x\Phi, \chi - \Phi) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \\ \Phi(x) = \Phi^0(x) \quad \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right. \quad (15)$$

avec $\varphi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi_{n_\lambda}^0, \chi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \chi_{n_\lambda}^0$ et $\Phi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi_\lambda^0$.

Rappelons que la notion de solution de viscosité a été introduite par G. Crandall et P.L. Lions [11] et qu'elle permet de montrer l'unicité des solutions des équations

de Hamilton-Jacobi sous des hypothèses générales. Cela en fait un outil majeur pour manipuler ces équations. Nous en faisons une brève présentation en annexe A.

Nous verrons ensuite qu'une étude uniquement en variables (φ, Φ) ne nous assure pas l'unicité de la solution du problème limite et qu'il faut donc bien introduire (φ, χ, Φ) . Ce phénomène est simple à expliquer. Dans les zones où on a $\varphi(x) = \Phi(x)$, la convergence de φ_λ vers φ ne donne aucune information sur n_λ , par contre la limite χ précise la convergence de n_λ dans cette zone.

L'introduction de ces nouvelles variables est aussi intéressante du point de vue numérique. Nous mettons en valeur cet intérêt en comparant différents schémas numériques en variables (n, Φ) , (φ, Φ) et (φ, χ, Φ) .

Dans des cas particuliers (dimension 1 en polarisation directe et dimension 1 et 2 en polarisation inverse) de telles études ont déjà été réalisées par P. Markowich, C.A. Ringhofer et C. Schmeiser [17, 18, 19, 20], par F. Brezzi, A.C.S. Capelo, C. Gastaldi et L.D. Marini [4, 6, 5, 7, 12] et par L.A. Caffarelli et A. Friedman [8].

Notre méthode étend donc les résultats connus, précise également la convergence de n_λ , améliore les hypothèses nécessaires et enfin donne une approche originale au problème susceptible d'être utilisée au niveau numérique. Elle est fondée sur une idée récente développée pour les équations de Hamilton-Jacobi (Barles et Perthame [2, 3]). On peut passer à la limite dans le système (7)-(12) dans un sens très faible n'utilisant que des bornes L^∞ . L'unicité pour le système limite (qui est la grande difficulté ici) permet alors d'obtenir la convergence uniforme des suites $\varphi_\lambda, \chi_\lambda$ sans avoir à prouver des estimations sur les gradients. Ainsi on n'a pas à manipuler le système de dérive-diffusion et ceci fait l'originalité et la puissance de notre méthode.

Le déroulement de ce papier est le suivant. Dans le paragraphe 2, nous étudions la limite au sens des distributions du modèle en variables $(\Phi_\lambda, n_\lambda)$. Ensuite nous introduisons les fonctions φ_λ et χ_λ et nous précisons le système (13,14,15). L'unicité du problème limite est étudié dans la paragraphe 3 pour le cas d'un contact Schottky modélisé en 1d. Dans ce paragraphe nous montrons aussi l'insuffisance du problème limite en variables $(\varphi_\lambda, \Phi_\lambda)$. La présentation et la comparaison des schémas numériques est effectuée dans le paragraphe 4.

Dans l'annexe A, nous présentons brièvement les solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Nous expliquons dans l'annexe B, pour le cas d'un contact

Schottky, l'obtention du problème asymptotique à partir du modèle classique de DD et son interprétation physique.

Ce rapport complète par des résultats numériques un article à paraître dans M³AS [22].

2 Étude asymptotique

Nous commençons par regarder la limite distribution des équations en variables n_λ, Φ_λ . Comme le problème limite obtenu ne nous donne pas d'informations suffisantes sur le comportement de la solution asymptotique, nous introduisons le quasi-niveau de Fermi φ_λ et la fonction χ_λ . Nous étudions alors la limite du modèle en variables $\varphi_\lambda, \chi_\lambda, \Phi_\lambda$. Nous en déduisons un problème limite sous la forme d'un système couplé Équations de Hamilton-Jacobi - Inéquations Variationnelles.

On suppose maintenant $0 < n_\lambda^0 < 1$ et Φ_λ^0 bornée dans $H^{\frac{1}{2}} \cap C^0$.

2.1 Limite distribution

Afin de vérifier que l'on peut passer à la limite dans les distributions, nous avons besoin de bornes a priori :

Proposition 1 *Le problème (4,5,6) admet une solution vérifiant les bornes uniformes en λ suivantes :*

$$0 \leq n_\lambda \leq 1, \tag{1}$$

$$\|\Phi_\lambda\|_{W_{loc}^{2,p}} \leq C, \quad \forall p, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2}$$

Démonstration de la proposition 1 :

La construction des solutions est classique. En remplaçant alors $\Delta_x \Phi_\lambda$ par $n_\lambda - 1$ dans l'équation de continuité, on obtient :

$$-\lambda \Delta_x n_\lambda + \nabla_x n_\lambda \cdot \nabla_x \Phi_\lambda + n_\lambda (n_\lambda - 1) = 0 \tag{3}$$

Les fonctions constantes 0 et 1 sont respectivement sous-solution et sur-solution de l'équation. On a donc bien $0 \leq n_\lambda \leq 1$.

Les propriétés de régularité des opérateurs elliptiques nous donnent enfin la borne sur $\|\Phi_\lambda\|_{W_{loc}^{2,p}}$. \square

La limite distribution s'obtient alors facilement :

Proposition 2 *A extraction près, il existe deux fonctions $n(x)$ et $\Phi(x)$, vérifiant (1),(2), telles que :*

$$\begin{aligned} n_\lambda &\rightarrow n \text{ dans } L^\infty w* \\ \Phi_\lambda &\rightarrow \Phi \text{ uniformément sur } \bar{\Omega} \text{ et } \nabla_x \Phi_\lambda \rightarrow \nabla \Phi \text{ localement uniformément.} \end{aligned} \quad (4)$$

La limite (n, Φ) vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(n \nabla_x \Phi) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\Delta \Phi = 1 - n & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

avec les conditions aux limites correspondantes.

La démonstration est classique, nous ne la refaisons donc pas.

Cette équation limite ne nous donne pas d'informations suffisantes car, comme on le verra, il existe des zones où $\nabla_x \Phi = 0$. Il est donc nécessaire d'introduire de nouvelles variables.

2.2 Quasi-niveau de Fermi et système couplé équations de Hamilton-Jacobi - Inéquations Variationnelles

Pour obtenir des informations supplémentaires sur le comportement asymptotique du modèle, il est naturel d'introduire le quasi-niveau de Fermi des électrons φ_λ défini par : $n_\lambda = e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}}$ et d'étudier le problème limite en variables $(\varphi_\lambda, \Phi_\lambda)$. Cependant, comme nous le verrons dans le paragraphe 3.5, ce problème limite ne nous donne pas encore suffisamment d'informations pour assurer l'unicité de la solution.

On introduit alors la fonction χ_λ définie par : $n_\lambda = 1 - e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}}$. On obtient donc les systèmes d'équations (7,8) sous forme conservative et (9,10) sous forme non-conservative avec les conditions aux limites (11,12).

On peut construire des fonctions Φ , φ_* , φ^* , χ_* et χ^* définies comme limites (à extraction près) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &\rightarrow \Phi \text{ dans } C^0(\bar{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,p}, \quad \forall p, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \nabla_x \Phi_\lambda &\rightarrow \nabla_x \Phi \text{ dans } L^2 \text{ faible et localement uniformément,} \\ \varphi_*(x) &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0, y \rightarrow x} \varphi_\lambda(y), \quad \varphi^*(x) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0, y \rightarrow x} \varphi_\lambda(y), \\ \chi_*(x) &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0, y \rightarrow x} \chi_\lambda(y), \quad \chi^*(x) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0, y \rightarrow x} \chi_\lambda(y). \end{aligned} \tag{6}$$

Cette méthode de $\lim \sup$ et $\lim \inf$, classique en théorie des équations de Hamilton-Jacobi, permet de n'utiliser que les bornes a priori (1), (2). L'introduction de deux fonctions φ , χ est équivalente à un changement de variables en \tanh plutôt que \exp . Cette méthode est aussi classique en présence de fronts (P.E. Souganidis [26]).

On peut alors établir le théorème suivant :

Théorème 3 (Convergence au sens de viscosité) :

Les fonctions φ_ , φ^* , χ_* , χ^* et Φ vérifient le système couplé équations de Hamilton-Jacobi - Inéquations Variationnelles suivant :*

φ_ et φ^* sont respectivement sur-solution et sous-solution au sens de viscosité de*

$$\left\{ \begin{array}{l} |\nabla_x \varphi|^2 - \nabla_x \Phi \cdot \nabla_x \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \varphi(x) = \varphi^0(x) \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nabla_x \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \tag{7}$$

χ_ et χ^* sont respectivement sur-solution et sous-solution au sens de viscosité de*

$$\left\{ \begin{array}{l} |\nabla_x \chi|^2 - \nabla_x \Phi \cdot \nabla_x \chi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \chi(x) = \chi^0(x) \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nabla_x \chi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \tag{8}$$

Φ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(-\Delta_x \Phi - 1, \Phi - \varphi_*) = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \\ \text{Min}(-\Delta_x \Phi, \chi_* - \Phi) = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \\ \Phi(x) = \Phi^0(x) \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nabla_x \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \tag{9}$$

avec $\varphi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi_{n_\lambda}^0$, $\chi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \chi_{n_\lambda}^0$ et $\Phi^0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \chi_\lambda^0$.

De plus,

$$\begin{aligned} \text{si } \varphi_*(x) > \Phi(x), \text{ alors } \chi_*(x) &= \chi^*(x) = \Phi(x), \\ \text{si } \chi_*(x) > \Phi(x), \text{ alors } \varphi_*(x) &= \varphi^*(x) = \Phi(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Notons en particulier que les conditions aux limites sont à prendre au sens de viscosité (voir Appendice A).

2.3 Démonstration du théorème de convergence à la limite

Nous montrons tout d'abord l'équation sur (φ_*, φ^*) . Le quasi-niveau de Fermi φ_λ est solution de :

$$\begin{cases} -\lambda \Delta_x \varphi_\lambda + |\nabla_x \varphi_\lambda|^2 - \nabla_x \varphi_\lambda \cdot \nabla_x \Phi_\lambda = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda^0(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nabla_x \varphi_\lambda \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Comme $\Phi_\lambda \rightarrow \Phi$ uniformément, on peut conclure (voir G. Barles et B. Perthame [2]) que φ^* et φ_* sont respectivement sous-solution et sur-solution de (7).

On obtient le même résultat sur (χ_*, χ^*) .

Nous étudions maintenant l'équation en Φ . Compte tenue de la convergence de Φ (voir proposition 2), les bornes a priori sur n_λ étudiées au paragraphe précédent, nous donnent par passage à la limite :

$$\Delta_x \Phi - 1 \leq 0, \quad -\Delta_x \Phi \geq 0, \quad \Phi - \varphi_* \leq 0 \text{ et } \chi_* - \Phi \geq 0.$$

Considérons alors un point x_0 de Ω tel que $\Phi(x_0) - \varphi_*(x_0) < 0$, alors $\Phi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x) < 0$ dans un voisinage \mathcal{V} de x_0 , donc $e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}} \rightarrow 0$ dans \mathcal{V} lorsque $\lambda \rightarrow 0$. On en déduit

$$-\Delta \Phi_\lambda = e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}} = 1 + o(\lambda) \text{ dans } \mathcal{V},$$

d'où

$$-\Delta \Phi(x_0) - 1 = 0 \text{ et } \chi_*(x_0) = \chi^*(x_0) = \Phi(x_0).$$

De même, considérons un point x_0 de Ω tel que $\chi_*(x_0) - \Phi(x_0) > 0$, alors $\chi_\lambda(x) - \Phi_\lambda(x) > 0$ dans un voisinage \mathcal{V} de x_0 , donc $e^{\frac{\Phi_\lambda - \chi_\lambda}{\lambda}} \rightarrow 0$ dans \mathcal{V} lorsque $\lambda \rightarrow 0$. On en déduit

$$-\Delta\Phi_\lambda = 1 - e^{\frac{\Phi_\lambda - \varphi_\lambda}{\lambda}} = o(\lambda) \text{ dans } \mathcal{V},$$

d'où

$$-\Delta\Phi(x_0) = 0 \text{ et } \varphi_*(x_0) = \varphi^*(x_0) = \Phi(x_0).$$

Les inéquations-variationnelles (9) et les implications (10) en résultent.

Les conditions aux limites sur Φ s'obtiennent de façon similaire.

3 Unicité d'un problème limite en 1d

Dans ce paragraphe nous étudions, pour le cas d'un contact Schottky en 1d, l'unicité du problème limite en variables $(\varphi_\lambda, \chi_\lambda, \Phi_\lambda)$ et nous en déduisons la convergence uniforme de ces quantités lorsque λ tend vers 0.

Nous présentons tout d'abord les conditions aux limites spécifiques à un contact Schottky en 1d et le problème limite que l'on obtient. Nous énonçons ensuite quelques propriétés du problème limite. Celles-ci nous permettent de démontrer l'unicité du problème limite. Finalement, nous soulignons l'insuffisance d'un problème limite en variables φ, Φ .

3.1 Problème limite d'un contact Schottky

Un contact Schottky est constitué d'une jonction entre un métal et un semi-conducteur [27, 28]. On étudie le comportement du semi-conducteur soumis à un potentiel $\Phi_{\text{appliqué}}$. L'origine $x = 0$ est prise à la jonction métal/semi-conducteur.

Après le changement d'échelle (voir annexe B), le problème se pose sur $[0, 1]$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} n_\lambda(0) &= e^{-\frac{\beta}{\lambda}}, & n_\lambda(1) &= 1 - e^{-\frac{\beta}{\lambda}}, & \beta > 0 \\ \Phi_\lambda(0) &= 0, & \Phi_\lambda(1) &= V. \end{aligned}$$

Le problème limite est alors décrit par les fonctions φ_* , φ^* , χ_* , χ^* et Φ vérifiant :

φ_* et φ^* sont respectivement sur-solution et sous-solution de

$$\begin{cases} |\varphi'|^2 - \Phi'\varphi' = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ \varphi(0) = \beta, \quad \varphi(1) = V, \end{cases} \quad (1)$$

χ_* et χ^* sont respectivement sur-solution et sous-solution de

$$\begin{cases} |\chi'|^2 - \Phi'\chi' = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ \chi(0) = 0, \quad \chi(1) = V + \beta, \end{cases} \quad (2)$$

Φ est solution de

$$\begin{cases} \text{Max}(-\Phi'' - 1, \Phi - \varphi_*) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \\ \text{Min}(-\Phi'', \chi_* - \Phi) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = V. \end{cases} \quad (3)$$

On dispose également de propriétés découlant immédiatement de la construction

$$\text{si } \varphi_*(x) > \Phi(x), \text{ alors } \chi_*(x) = \chi^*(x) = \Phi(x), \quad (4)$$

$$\text{si } \chi_*(x) > \Phi(x), \text{ alors } \varphi_*(x) = \varphi^*(x) = \Phi(x), \quad (5)$$

$$\varphi_* \leq \varphi^* \text{ et } \chi_* \leq \chi^*, \quad (6)$$

$$\varphi_*(0) \leq \beta, \quad \varphi_*(1) \leq V, \quad \varphi^*(0) \geq \beta, \quad \varphi^*(1) \geq V, \quad (7)$$

$$\chi_*(0) \leq 0, \quad \chi_*(1) \leq V + \beta, \quad \chi^*(0) \geq 0, \quad \chi^*(1) \geq V + \beta. \quad (8)$$

3.2 Théorème d'unicité

Théorème 4 (Unicité de la solution du problème limite) :

Le problème limite décrit par les équations (1,2, 3) et vérifiant les propriétés (4)-(8) admet une unique solution et $\varphi^ \equiv \varphi_*$, $\chi^* \equiv \chi_*$ sur $]0, 1[$.*

De plus φ_λ converge vers φ et χ_λ converge vers χ uniformément sur tout compact de $]0, 1[$.

La difficulté de ce théorème provient de deux points. D'une part le couplage, via Φ , nécessite des arguments spécifiques. D'autre part l'équation de Hamilton-Jacobi (1) ou (2) ne possédant pas de terme de dérivé d'ordre 0 strictement positif, l'unicité est faussé lorsque Φ n'est pas monotone.

Avant de donner cette démonstration, on peut donner la forme exacte des solutions. Par convention, lorsque φ^* et φ_* (resp. χ^* et χ_*) coïncident en un point

du bord, nous prenons cette valeur pour φ (resp. χ), sinon nous n'indiquons pas de valeur précise. Cette valeur peut néanmoins se calculer (par l'unicité) mais ne présente pas d'intérêt.

Commençons par le cas $V > 0$,

$$\text{Pour } 0 < V \leq 1/2, \quad \Phi(x) = \begin{cases} -x^2/2 + \sqrt{2V}x & \forall x \in [0, \sqrt{2V}], \\ V & \forall x \in [\sqrt{2V}, 1], \end{cases}$$

$$\text{pour } V \geq 1/2, \quad \Phi(x) = -x^2/2 + (V + 1/2)x \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\text{pour } 0 < V < \beta, \quad \varphi(x) = V \quad \forall x \in]0, 1],$$

$$\text{pour } V \geq \beta, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \Phi(x) + \beta & \forall x \in [0, x_0] \\ V & \forall x \in [x_0, 1], \end{cases}$$

$$\text{avec } x_0 = \sqrt{2V} - \sqrt{2\beta} \text{ pour } V \leq 1/2,$$

$$x_0 = (V + 1/2) - \sqrt{(V - 1/2)^2 + 2\beta} \text{ pour } V \geq 1/2,$$

$$\chi(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Passons maintenant au cas $V < 0$. On a alors,

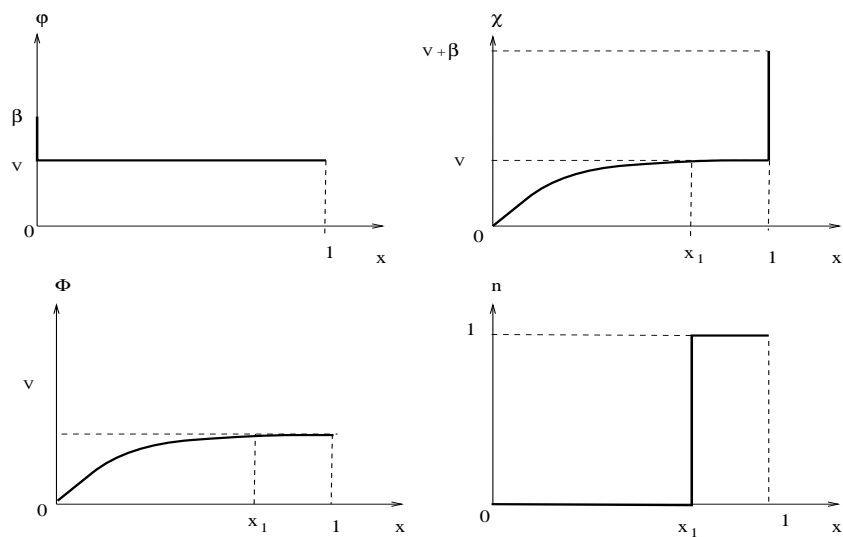
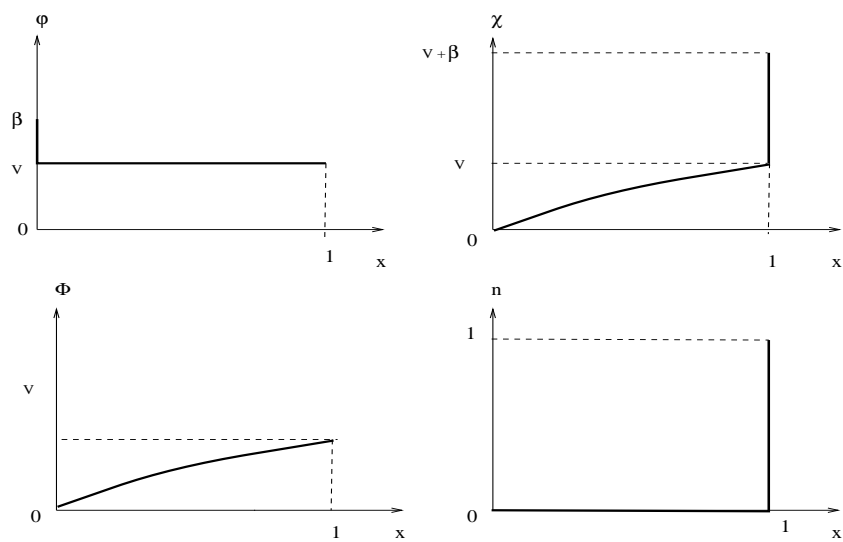
$$\Phi(x) = Vx, \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\varphi(x) = Vx \quad \forall x \in]0, 1],$$

$$\text{pour } V \geq -\beta, \quad \chi(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$\text{pour } V < -\beta, \quad \chi(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0, -\beta/V], \\ Vx + \beta & \forall x \in [-\beta/V, 1]. \end{cases}$$

Pour résumer, nous avons les graphes suivants :

FIG. 1 - $0 < V < \beta$ et $0 < V \leq 1/2$ FIG. 2 - $1/2 \leq V < \beta$

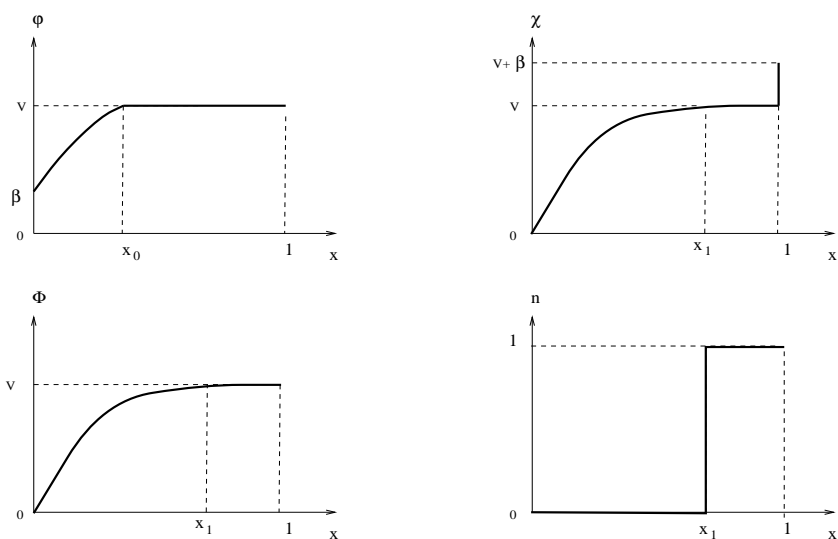


FIG. 3 - $\beta \leq V \leq 1/2$

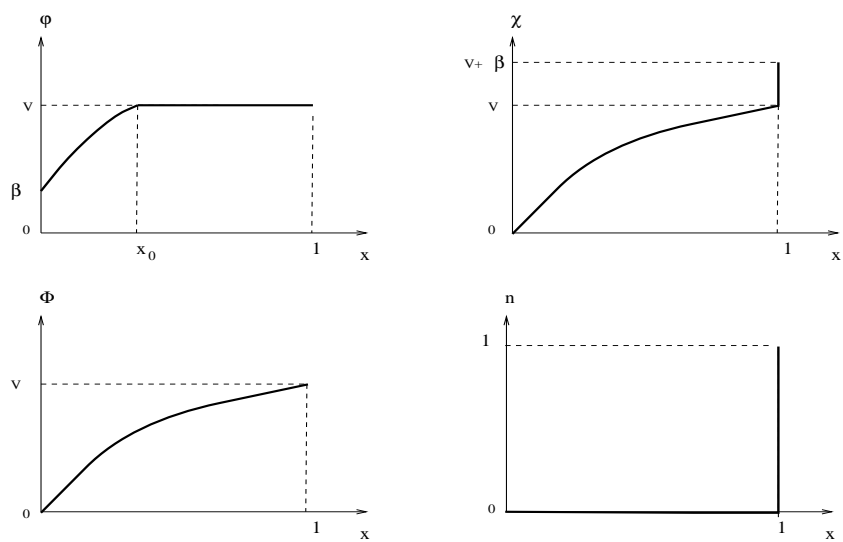
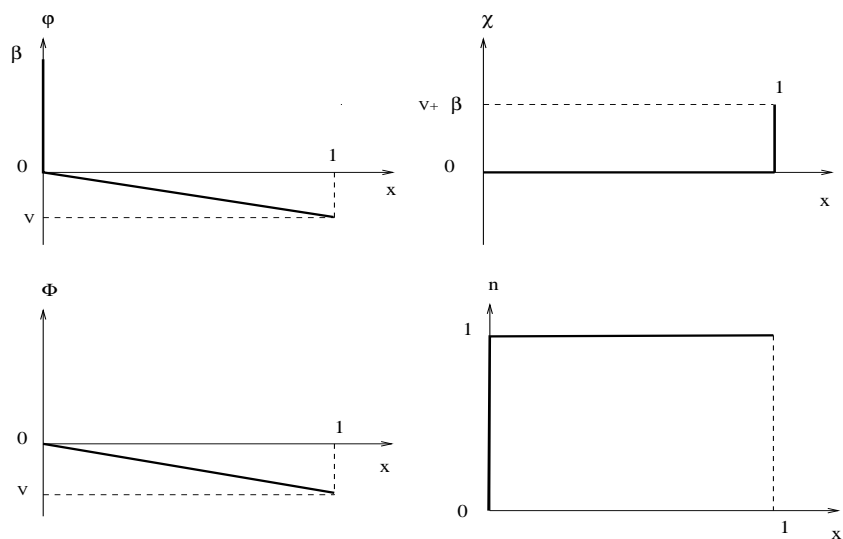
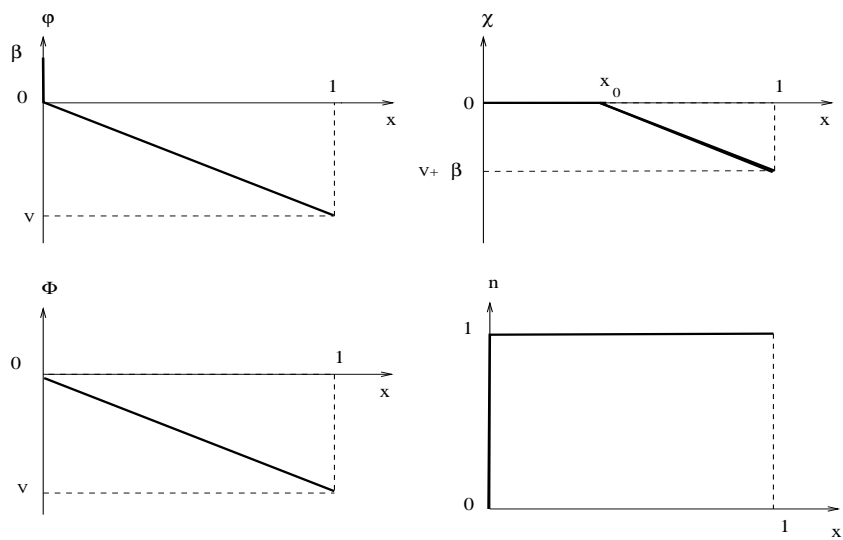


FIG. 4 - $V \geq \beta$ et $V \geq 1/2$

FIG. 5 - $-\beta \leq V < 0$ FIG. 6 - $V < -\beta$

3.3 Quelques propriétés du problème limite

Avant de démontrer le théorème, rappelons quelques résultats que nous utiliserons par la suite.

Tout d'abord, les inéquations variationnelles de (3) nous donnent des informations sur le comportement de Φ . En particulier, on a :

$$0 \leq -\Phi'' \leq 1.$$

On en déduit que Φ est C^1 sur $]0, 1[$. La dérivée de Φ' est donc bornée, on en déduit que φ^* et χ^* sont lipschitziennes sur $]0, 1[$ (car $|\varphi^{*\prime}| \leq |\Phi'|$ et $|\chi^{*\prime}| \leq |\Phi'|$ sur $]0, 1[$, ce qui se justifie pour les solutions de viscosité).

L'équation de Hamilton-Jacobi $|u'|^2 - \Phi'u' = 0$ avec conditions de Dirichlet, a plusieurs solutions de viscosité lorsque Φ n'est pas monotone. Par contre, il y a unicité lorsque Φ est strictement monotone.

Plus généralement, considérons un couple de fonctions u_* (s.c.i.) et u^* (s.c.s.) respectivement sur-solution et sous-solution au sens de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi avec conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} |u'|^2 - \Phi'u' = 0 \quad \forall x \in]x_a, x_b[, \\ u(x_a) = u_a, \quad u(x_b) = u_b. \end{cases} \quad (9)$$

On prend les hypothèses suivantes (qui sont celles que l'on rencontrera naturellement, mais qui ne sont pas optimales) :

- (i) $u_* \leq u^*$ sur $[x_a, x_b]$,
- (ii) $u_*(x_{a,b}) \leq u_{a,b}$ et $u^*(x_{a,b}) \geq u_{a,b}$,
- (iii) la condition à la limite est atteinte de manière continue sur un des bords,
- (iv) Φ est strictement monotone sur $]x_a, x_b[$.

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 5 :

Avec les hypothèses précédentes, les fonctions u_ et u^* coïncident sur $]x_a, x_b[$ et sont données par le problème de contrôle optimal suivant :*

$$u(x) = \operatorname{Inf}_y \left\{ \frac{1}{4} \int_0^\tau (\dot{y}(s) - \dot{\Phi}(y(s)))^2 ds + \begin{matrix} u_a & \text{si } y(\tau) = x_a \\ u_b & \text{si } y(\tau) = x_b \\ 0 & \text{si } \tau = +\infty \end{matrix}, y(0) = x \right\},$$

L'infimum est pris sur les chemins y tels que $y(s) \in [x_a, x_b]$ pour $0 \leq s \leq \tau$.

De plus, les valeurs aux limites de u_ et u^* sont déterminées de manière unique.*

La démonstration fait appel à des arguments classiques de la théorie des solutions de viscosités [2, 3].

En particulier, lorsque $\Phi' > 0$ sur $]x_a, x_b[$ et $u_*(x_b) = u^*(x_b) = u_b$, on obtient

$$\begin{aligned} u_*(x_a) &= \lim_{x \rightarrow x_a} (u(x)), \quad u^*(x_a) = u_a, \\ u_*(x) &= u^*(x) = u(x) = \text{Min}(u_b, \Phi(x) + u_a - \Phi(x_a)) \quad \forall x \in]x_a, x_b[, \end{aligned}$$

et lorsque $\Phi' < 0$ sur $]x_a, x_b[$ et $u_*(x_a) = u^*(x_a) = u_a$, on obtient

$$\begin{aligned} u_*(x_b) &= \lim_{x \rightarrow x_b} (u(x)), \quad u^*(x_b) = u_b, \\ u_*(x) &= u^*(x) = u(x) = \text{Min}(u_a, \Phi(x) + u_b - \Phi(x_b)) \quad \forall x \in]x_a, x_b[. \end{aligned}$$

3.4 Démonstration du théorème d'unicité

Rappelons tout d'abord que l'unicité implique $\varphi^* = \varphi_*$ et $\chi^* = \chi_*$ et ces relations ont pour conséquence que les suites φ_λ et χ_λ convergent uniformément. C'est pour cela que les notions (6) ont été introduites. Il suffit donc de montrer l'unicité. Nous commençons par le cas $V > 0$ (polarisation inverse). La démonstration s'effectue alors en quatre étapes.

(i) Nous allons tout d'abord montrer que Φ est croissante sur $[0, 1]$.

D'après les inéquations variationnelles de (3), on trouve que Φ est concave. Il existe donc deux points x_1 et x_2 , avec $0 < x_1 \leq x_2 \leq 1$, tels que :

$$\Phi'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, x_1[, \quad \Phi'(x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad \text{et} \quad \Phi'(x) < 0 \quad \forall x \in]x_2, 1].$$

Il nous faut donc montrer que $x_2 = 1$. Par l'absurde nous allons montrer que, si l'on suppose $x_2 < 1$, on obtient $\chi_* > V$ sur $]x_2, 1]$. On a alors une contradiction : en effet, cela implique grâce à (3), que $\Phi'' \equiv 0$ et d'où une discontinuité de Φ' en x_2 ce qui contredit le fait que Φ'' est borné.

Supposons donc $x_2 < 1$. On remarque tout d'abord que $\chi_*(1) > V$. En effet, $\chi_*(1) \geq V$, car $\chi_* \geq \Phi$. Et si l'on suppose $\chi_*(1) = V$, χ_* est strictement inférieur à la condition aux limites en 1. La fonction χ_* est donc sur-solution en 1, soit

$$|\chi'_*(1)|^2 - \Phi'(1)\chi'_*(1) \geq 0$$

au sens de viscosité. En d'autres termes, pour toute fonction g continuellement dérivable telle que :

$$g \leq \chi_* \text{ et } g(1) = V,$$

on a

$$|g'(1)|^2 - \Phi'(1)g'(1) \geq 0.$$

Il suffit de prendre une fonction g telle que $\Phi'(1) < g'(1) < 0$ pour obtenir une contradiction.

Puis on déduit $\chi_* > V$ sur $]x_2, 1]$. En effet Φ étant strictement décroissante on a $\Phi > V$; ce qui implique $\chi_* \geq \Phi > V$.

Ceci termine cette première étape, on a bien démontré que $x_2 = 1$.

(ii) Nous allons maintenant montrer que sur $[x_1, 1]$, on a $\varphi_* \equiv \varphi^* \equiv \Phi \equiv V$ et les fonctions φ_* et φ^* sont donc continues en x_1 .

Considérons tout d'abord le cas particulier $x_1 = 1$. Il nous faut montrer les égalités $\varphi_*(1) = \varphi^*(1) = V$ et la continuité de φ_* et φ^* en 1.

On remarque tout d'abord que $\varphi^*(1) = V$. En effet, si $\varphi^*(1) \neq V$, on a grâce à (7) $\varphi^*(1) > V$. La fonction φ^* est donc strictement supérieure à la condition aux limites en 1. La fonction φ^* est donc sous-solution en 1. On a alors, pour toute fonction g continuellement dérivable et telle que $g \geq \varphi^*$ et $g(1) = V$,

$$|g'(1)|^2 - \Phi'(1)g'(1) \leq 0.$$

Il suffit de prendre une fonction g telle que $g'(1) < 0$ pour avoir une contradiction. On en déduit la continuité de φ^* en 1 et que la fonction φ_* est continue et égale à V en 1 car $\varphi^* \geq \varphi_* \geq \Phi$.

Étudions maintenant le cas $x_2 < 1$. On a immédiatement

$$\varphi_* \equiv \Phi \equiv V \text{ sur } [x_1, 1].$$

En effet, on a d'une part $\Phi' \equiv 0$ sur $[x_1, 1]$, par définition de x_1 , Φ de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $\Phi(1) = V$, et d'autre part $\text{Max}(-\Phi'' - 1, \varphi_* - \Phi) = 0$ sur $[0, 1]$.

De la même façon que précédemment, on démontre que $\varphi^*(1) = V$. De plus, sur $[x_1, 1[$, l'équation de Hamilton-Jacobi donne $\varphi^{*'} \equiv 0$ et $\varphi^* \geq V$. On en conclut donc

$$\varphi^* \equiv V \text{ sur } [x_1, 1].$$

La continuité de φ^* en x_1 est immédiate (φ^* est même lipschitzienne sur $]0, 1[$ car elle est sous-solution de (1)) et celle de φ_* se déduit de l'encadrement

$$V = \varphi^*(x_1) \geq \varphi_*(x_1) \geq \Phi(x_1) = V.$$

(iii) Nous passons à l'étude de Φ , φ_* et φ^* sur $[0, x_1]$.

Toutes les hypothèses du lemme 5 sont vérifiées sur $[0, x_1]$. On a donc

$$\varphi_*(x) = \varphi^*(x) = \text{Min}(V, \Phi(x) + \beta) \quad \forall x \in]0, x_1[.$$

Ceci donne pour le cas $V < \beta$

$$\varphi_*(0) = V, \varphi^*(0) = \beta \text{ et } \varphi_*(x) = \varphi^*(x) = V \quad \forall x \in]0, x_1],$$

et pour le cas $V \geq \beta$ (avec x_0 t.q. $\Phi(x_0) + \beta = V$)

$$\varphi_*(x) = \varphi^*(x) = \Phi(x) + \beta \quad \forall x \in [0, x_0], \quad u(x) = V \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

On a donc $\varphi_* > \Phi$ sur $[0, x_1[$, ce qui implique

$$\Phi'' \equiv -1 \text{ sur } [0, x_1[.$$

Ainsi, on a entièrement déterminé Φ , φ_* et φ^* .

(iv) Nous considérons finalement les fonctions χ_* et χ^* sur $[0, 1]$.

Sur $[0, x_1[$, $\varphi_*(x) > \Phi(x)$, on en déduit que

$$\chi_*(x) = \chi^*(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in [0, x_1[.$$

Sur $[x_1, 1[$, on a $\chi^{*'} \equiv 0$. De part la continuité de χ^* en x_1 , on en conclut : $\chi^* \equiv V$. Or on a $\Phi \leq \chi_* \leq \chi^*$, d'où

$$\chi_*(x) = \chi^*(x) = V \quad \forall x \in [x_1, 1[.$$

On obtient la condition à la limite en 1 par des arguments classiques des solutions de viscosités en utilisant les inégalités :

$$\chi_*(1) \leq V + \beta \text{ et } \chi^*(1) \geq V + \beta.$$

On a donc déterminé entièrement χ_* et χ^* et le théorème est démontré dans ce cas.

Il reste le cas $V < 0$ (polarisation directe). La démonstration est pratiquement identique au cas précédent et nous n'indiquons que les principales différences.

On démontre comme précédemment que $\Phi(x)$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Puis, en montrant que χ_* et χ^* sont continues et égales à 0 en 1, on obtient les hypothèses du lemme 5. On peut alors conclure sur le comportement de χ_* et χ^* sur $[0, 1]$. On en déduit que

$$\Phi(x) = Vx \quad \forall x \in [0, 1].$$

Le comportement de φ_* et φ^* s'obtient alors directement. Il suffit donc d'inverser les rôles de φ et χ dans la démonstration précédente.

3.5 Insuffisance du problème limite en variable $(\varphi_\lambda, \Phi_\lambda)$

Si l'on considère uniquement les variables $\varphi_\lambda, \Phi_\lambda$, on obtient le problème limite suivant au sens de viscosité :

$$\left| \begin{array}{l} |\varphi'|^2 - \Phi'\varphi' = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ \varphi(0) = \beta, \quad \varphi(1) = V, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Max}(-\Phi'' - 1, \Phi - \varphi) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = V. \end{array} \right. \quad (11)$$

Ce problème limite ne nous assure pas l'unicité de la solution. Nous pouvons le voir sur les deux exemples suivants :

Pour le cas $V = \frac{1}{4}, \beta = 1$, toutes les fonctions suivantes, pour $b \in [\frac{23}{32}, \frac{3}{4}]$, sont solutions au sens de viscosité :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2 + bx \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\frac{23}{2} - 16b)x^2 + (-18 + 25b)x + (\frac{27}{4} - 9b) \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{array} \right. \\ \varphi(x) &= \left| \begin{array}{l} 1 \text{ en } x = 0, \\ \frac{3}{4}b - \frac{9}{32} \quad \forall x \in]0, \frac{3}{4}], \\ \Phi(x) \quad \forall x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

Pour le cas $V < 0$, toutes les fonctions suivantes, pour $a \in [-1, 0]$, sont solutions au sens de viscosité :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= ax^2 + (V - a)x \quad \forall x \in [0, 1], \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \beta & \text{en } x = 0, \\ \Phi(x) & \forall x \in]0, 1]. \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

Il était donc bien nécessaire d'utiliser un couple (φ, χ) .

4 Expérimentations numériques

Le but de ce chapitre est double. D'une part, nous montrons que l'on observe le comportement limite étudié pour une valeur de λ de l'ordre de 10^{-3} . D'autre part, nous soulignons l'intérêt des variables introduites φ et χ en comparant des schémas en variables (n, Φ) , (φ, Φ) et (φ, χ, Φ) . En effet nous verrons que, pour certaines conditions de fonctionnement, un schéma en variables (φ, Φ) donne de meilleurs résultats qu'un schéma en variables (n, Φ) , ce qui était déjà connu des numériciens [14, 15]. Nous verrons aussi que, dans le cas de la polarisation directe ($V < 0$), un schéma combinant les variables φ , χ et Φ permet d'obtenir de meilleurs résultats sur le comportement de n dans la zone $n \approx 1$.

Le principe de ce dernier schéma est de combiner les variables φ et χ pour la résolution de l'équation de Poisson, en privilégiant φ dans la zone où n est proche de 0 et χ dans la zone où n est proche de 1. En effet, on retrouve un phénomène analogue à celui observé lors de la démonstration de l'unicité du problème limite. Dans la zone où n est proche de 1, ce qui correspond à φ proche de Φ , une simulation en variables φ, Φ ne nous donne que peu d'informations sur le comportement de n , ce qui entraîne des instabilités numériques sur la variable n reconstituée. Par contre une simulation intégrant la variable χ fournit un comportement correct pour n . On observe le phénomène inverse dans la zone où n est proche de 0.

4.1 Description des schémas numériques

Nous étudions plusieurs schémas de simulation : deux schémas en variables n et Φ (schémas décentrés et de Scharfetter-Gummel), un schéma en variables φ et Φ et un schéma combinant les variables φ , χ et Φ .

Les principes généraux sont les suivants :

- On considère le problème stationnaire comme la limite du problème évolutif lorsque

le temps tend vers l'infini.

- Le schéma en temps est implicite.
- A chaque pas de temps, on résout d'abord l'équation de continuité, puis celle de Poisson.
- Les non linéarités sont traitées par un algorithme de Newton-Raphson.
- L'équation de continuité est calculée sous sa forme conservative :

$$\partial_t n - \partial_x J = 0$$

- La discrétisation de l'équation de Poisson correspond à la discrétisation usuelle du Laplacien :

$$\frac{-\Phi_{i-1} + 2\Phi_i - \Phi_{i+1}}{\Delta x^2} = 1 - n_i$$

Pour les schémas en variables n et Φ , l'équation de continuité est discrétisée sous la forme :

$$\frac{n_i^{l+1} - n_i^l}{\Delta t} - \frac{J_{i+1/2}^{l+1} - J_{i-1/2}^{l+1}}{\Delta x} = 0.$$

On utilise deux méthodes pour calculer $J_{i+1/2}^{l+1}$.

Dans le schéma décentré, $J_{i+1/2}^{l+1}$ est calculé de la façon suivante :

$$J_{i+1/2}^{l+1} = \lambda \frac{n_{i+1}^{l+1} - n_i^{l+1}}{\Delta x} - \frac{\Phi_{i+1}^l - \Phi_i^l}{\Delta x} n_{i+1/2}^{l+1},$$

avec

$$n_{i+1/2}^{l+1} = \begin{cases} n_i^{l+1} & \text{si } E_{i+1/2} = \frac{\Phi_{i+1}^l - \Phi_i^l}{\Delta x} \geq 0, \\ n_{i+1}^{l+1} & \text{si } E_{i+1/2} = \frac{\Phi_{i+1}^l - \Phi_i^l}{\Delta x} \leq 0. \end{cases}$$

Dans le schéma de Scharfetter-Gummel, le principe est d'obtenir la valeur de $J_{i+1/2}^{l+1}$ par intégration exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$ de l'équation en \mathbf{J} (voir D.L. Scharfetter et H.K. Gummel [25] et M. S. Mock [21]).

On suppose que $J(x)$ est constant sur $[x_i, x_{i+1}]$ (égal à $J_{i+1/2}$) et que $\Phi(x)$ est affine sur $[x_i, x_{i+1}]$ (égal à $\Phi_i + (x - x_i) \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}$). On effectue le changement de variable $n(x) = N(x) e^{\frac{\Phi(x)}{\lambda}}$. On a alors $J(x) = \lambda N'(x) e^{\frac{\Phi(x)}{\lambda}}$. En multipliant l'équation par $e^{-\frac{\Phi(x)}{\lambda}}$ et en intégrant de x_i à x_{i+1} , on obtient :

$$J_{i+1/2}^{l+1} = \frac{1}{\Delta x} \left(B_\lambda (\Phi_{i+1}^l - \Phi_i^l) n_{i+1}^{l+1} - B_\lambda (\Phi_i^l - \Phi_{i+1}^l) n_i^{l+1} \right), \quad (14)$$

avec

$$B_\lambda(z) = \frac{z}{e^{z/\lambda} - 1}. \quad (15)$$

Remarque : Le schéma décentré revient à prendre le schéma de Scharfetter-Gummel avec une fonction $B_\lambda(z) = \lambda + \frac{|z|-z}{2}$.

Pour le schéma en variables φ et Φ , on discrétise l'équation de continuité sous la forme:

$$\frac{n(\Phi_i^l, \varphi_i^{l+1})}{\lambda} \frac{\varphi_i^{l+1} - \varphi_i^l}{\Delta t} - \frac{J_{i+1/2}^{l+1} - J_{i-1/2}^{l+1}}{\Delta x} = 0, \quad (16)$$

$$J_{i+1/2}^{l+1} = \frac{\varphi_{i+1}^{l+1} - \varphi_i^{l+1}}{\Delta x} n_{i+1/2}(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \varphi_i^{l+1}, \varphi_{i+1}^{l+1}), \quad (17)$$

avec

$$n_{i+1/2}(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \varphi_i^{l+1}, \varphi_{i+1}^{l+1}) = \left(e^{\frac{\Phi_i^l - \varphi_i^{l+1}}{\lambda}} + e^{\frac{\Phi_{i+1}^l - \varphi_{i+1}^{l+1}}{\lambda}} \right) / 2.$$

Remarque : La très forte non-linéarité des équations pose certains problèmes (convergence lente, échec de la méthode de Newton). Pour y remédier on peut, soit prendre un pas de temps très petit, soit diviser le potentiel appliqué Φ_a en m potentiels $\delta\Phi_a = \frac{\Phi_a}{m}$ et résoudre le problème m fois en prenant comme condition initiale le problème de l'étape précédente et comme conditions aux limites $\Phi_N^k = V_{bi} - k\delta\Phi_a$.

Pour le schéma en variables φ , χ et Φ , l'idée est de combiner les variables φ et χ pour la résolution de l'équation de Poisson. Le but recherché est de privilégier la variable φ dans la zone où n est proche de 0 (i.e. $\varphi \geq \chi$) et la variable χ dans la zone où n est proche de 1 (i.e. $\varphi \leq \chi$).

On introduit alors deux fonctions n^φ et n^χ , définies par :

$$n^\varphi(\Phi, \varphi) = e^{\frac{\Phi - \varphi}{\lambda}}, \quad n^\chi(\Phi, \varphi) = 1 - e^{\frac{\Phi - \chi}{\lambda}},$$

et on résout l'équation de Poisson sous la forme

$$-\Delta_x \Phi = 1 - (\theta n^\varphi + (1 - \theta)n^\chi),$$

où θ est une fonction de φ et χ , proche de 1 quand $\varphi > \chi$ et proche de 0 dans le cas contraire (par exemple $\theta(\varphi, \chi) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\frac{\varphi - \chi}{|\Phi|}))$).

A chaque étape en temps, on résout donc successivement, l'équation de continuité en variable Φ et φ ,

$$\frac{n^\varphi(\Phi_i^l, \varphi_i^{l+1})}{\lambda} \frac{\varphi_i^{l+1} - \varphi_i^l}{\Delta t} - \frac{J_{i+1/2}^{\varphi^{l+1}} - J_{i-1/2}^{\varphi^{l+1}}}{\Delta x} = 0,$$

$$J_{i+1/2}^{\varphi^{l+1}} = \frac{\varphi_{i+1}^{l+1} - \varphi_i^{l+1}}{\Delta x} n_{i+1/2}^\varphi(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \varphi_i^{l+1}, \varphi_{i+1}^{l+1}),$$

avec

$$n_{i+1/2}^\varphi(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \varphi_i^{l+1}, \varphi_{i+1}^{l+1}) = \left(e^{\frac{\Phi_i^l - \varphi_i^{l+1}}{\lambda}} + e^{\frac{\Phi_{i+1}^l - \varphi_{i+1}^{l+1}}{\lambda}} \right) / 2,$$

l'équation de continuité en variables Φ et χ ,

$$\frac{1 - n^\chi(\Phi_i^l, \chi_i^{l+1})}{\lambda} \frac{\chi_i^{l+1} - \chi_i^l}{\Delta t} - \frac{J_{i+1/2}^{\chi^{l+1}} - J_{i-1/2}^{\chi^{l+1}}}{\Delta x} + n^\chi(\Phi_i^l, \chi_i^{l+1}) - 1 = 0,$$

$$J_{i+1/2}^{\chi^{l+1}} = \frac{\chi_{i+1}^{l+1} - \chi_i^{l+1}}{\Delta x} \left(1 - n_{i+1/2}^\chi(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \chi_i^{l+1}, \chi_{i+1}^{l+1}) \right),$$

avec

$$n_{i+1/2}^\chi(\Phi_i^l, \Phi_{i+1}^l, \chi_i^{l+1}, \chi_{i+1}^{l+1}) = 1 - \left(e^{\frac{\Phi_i^l - \chi_i^{l+1}}{\lambda}} + e^{\frac{\Phi_{i+1}^l - \chi_{i+1}^{l+1}}{\lambda}} \right) / 2,$$

et finalement l'équation de Poisson en combinant les trois variables φ , χ et Φ ,

$$\frac{-\Phi_{i-1}^{l+1} + 2\Phi_i^{l+1} - \Phi_{i+1}^{l+1}}{\Delta x^2} = 1 - \left(\theta_i n^\varphi(\Phi_i^{l+1}, \varphi_i^{l+1}) + (1 - \theta_i) n^\chi(\Phi_i^{l+1}, \chi_i^{l+1}) \right)$$

avec

$$\theta_i = \theta(\varphi_i^{l+1}, \chi_i^{l+1}) = \left(1 + \tanh \left(\frac{\varphi_i^{l+1} - \chi_i^{l+1}}{|\Phi_i^l|} \right) \right) / 2$$

4.2 Résultats numériques

Nous pouvons remarquer à la lecture des résultats présentés les points suivants :

Le schéma Scharffeter Gummel est plus performant que le schéma décentré: Il décrit mieux le comportement du quasi-niveau de Fermi φ (voir figures 8 et 7).

Cependant, pour certains points de fonctionnement, les schémas en variables n, Φ ne nous donnent pas suffisamment d'informations pour retrouver le comportement du quasi-niveau de Fermi φ . Il devient nécessaire de travailler avec des schémas utilisant φ comme variable. (voir figure 9 et 10).

Dans le cas d'une polarisation inverse le schéma en variable φ, Φ nous donne des résultats satisfaisants : on retrouve bien les résultats prévus par l'étude asymptotique (voir figures 12 et 11).

Par contre, dans le cas d'une polarisation directe ($V < 0$), le comportement de la concentration n est difficile à obtenir à partir du schéma en variable φ, Φ . Le schéma combinant les variables φ, χ, Φ donne alors de meilleurs résultats (voir figures 13-18).

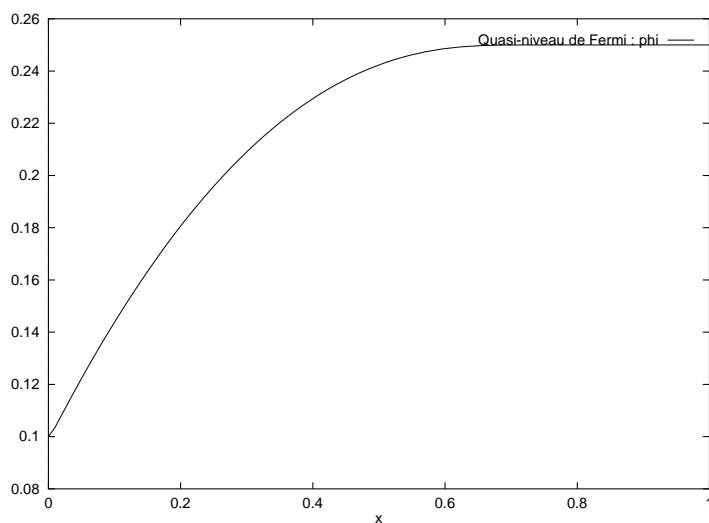


FIG. 7 - schéma décentré en variables n , Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.1$ et $V = 0.25$

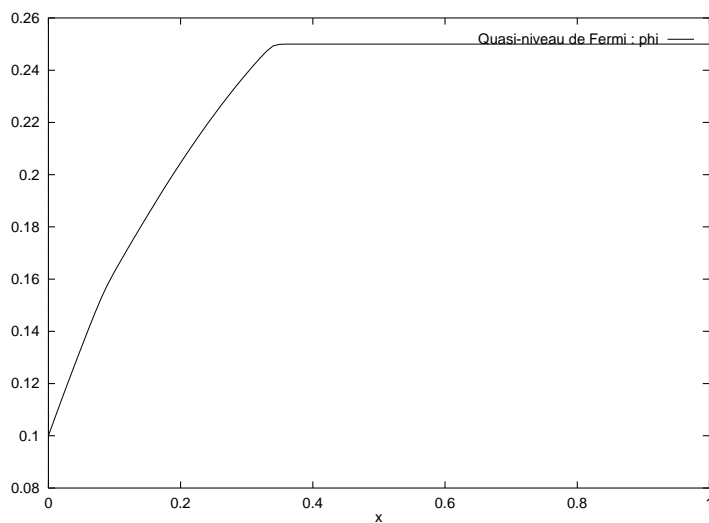


FIG. 8 - schéma Sharfetter-Gummel en variables n , Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.1$ et $V = 0.25$

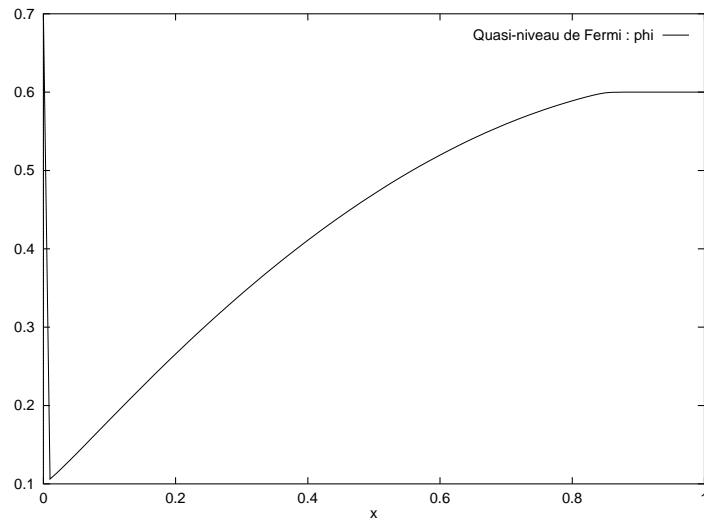


FIG. 9 - schéma Sharfetter-Gummel en variables n, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.7$ et $V = 0.6$

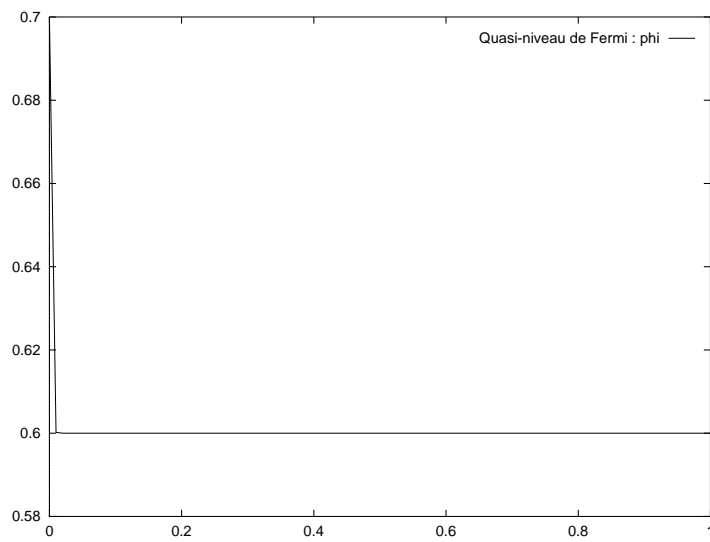


FIG. 10 - schéma en variables φ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.7$ et $V = 0.6$

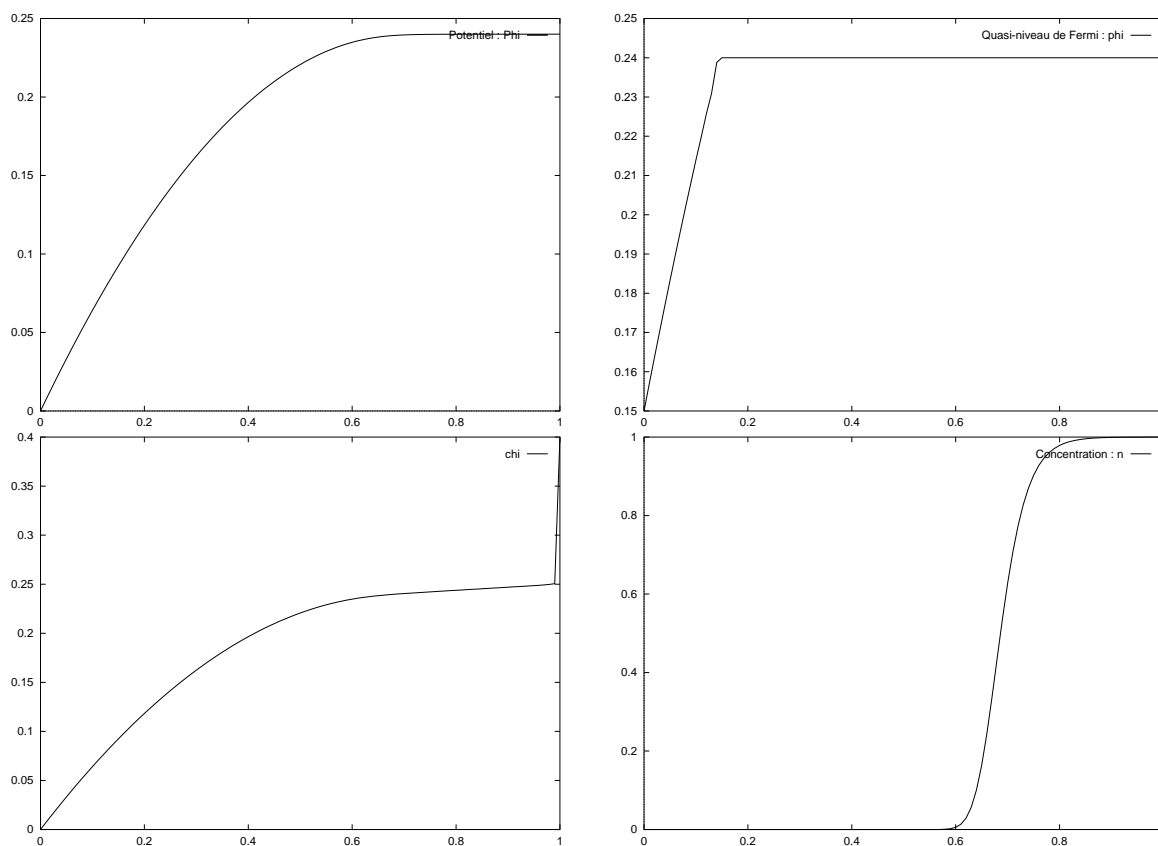


FIG. 11 - schéma en variables φ , Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = 0.25$

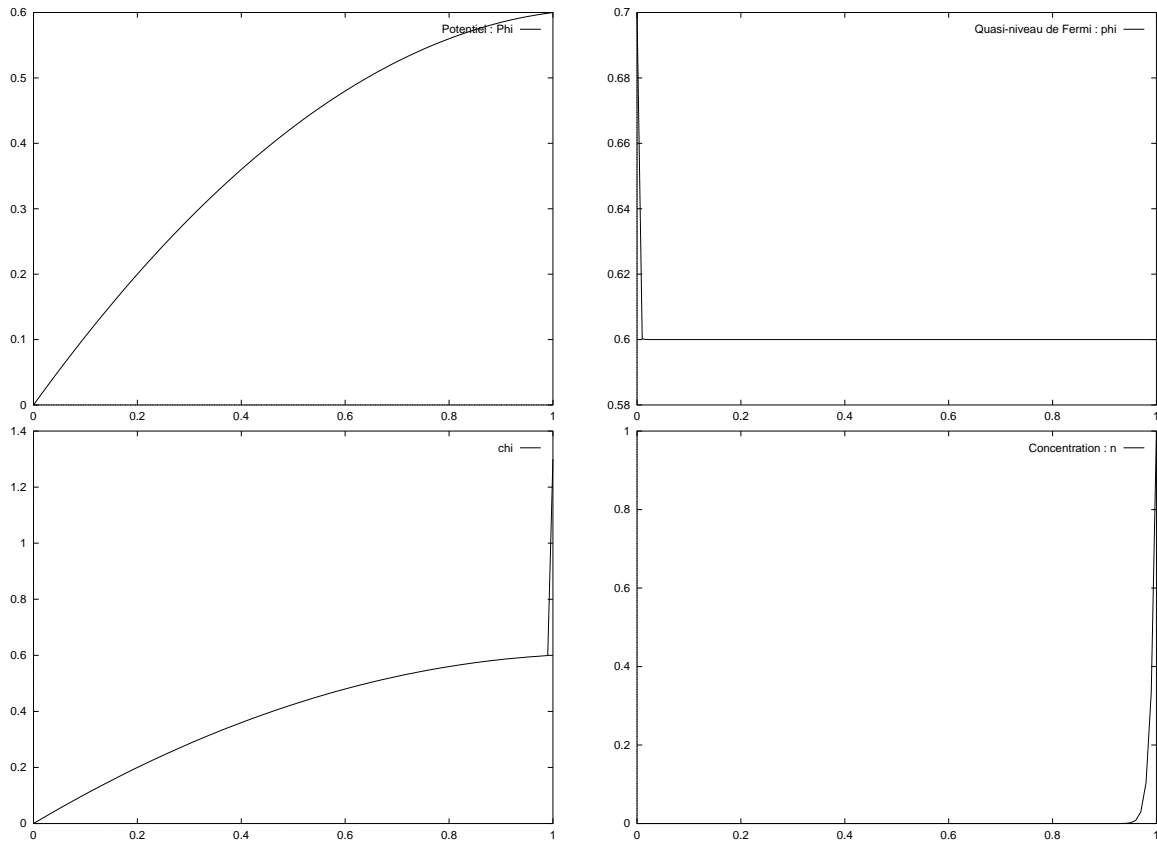


FIG. 12 - schéma en variables φ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.7$ et $V = 0.6$

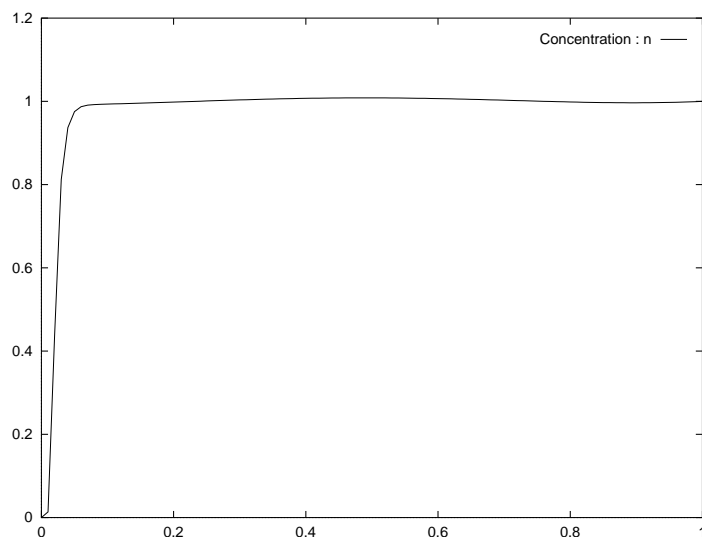


FIG. 13 - schéma en variables φ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.1$

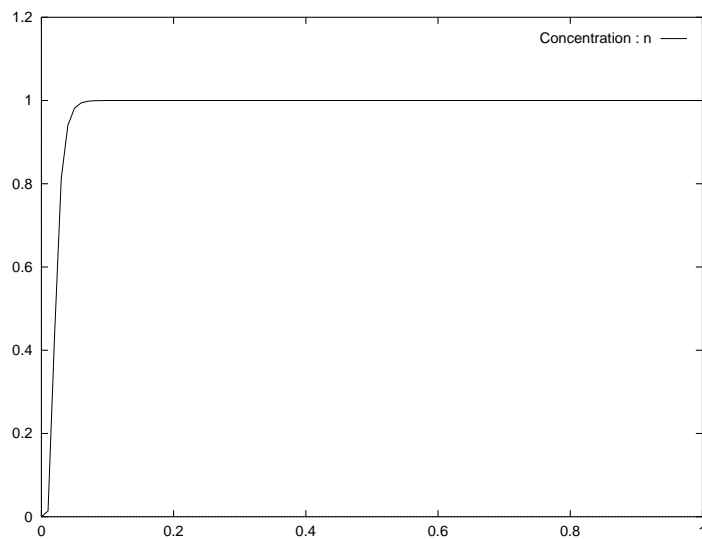


FIG. 14 - schéma en variables φ, χ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.1$

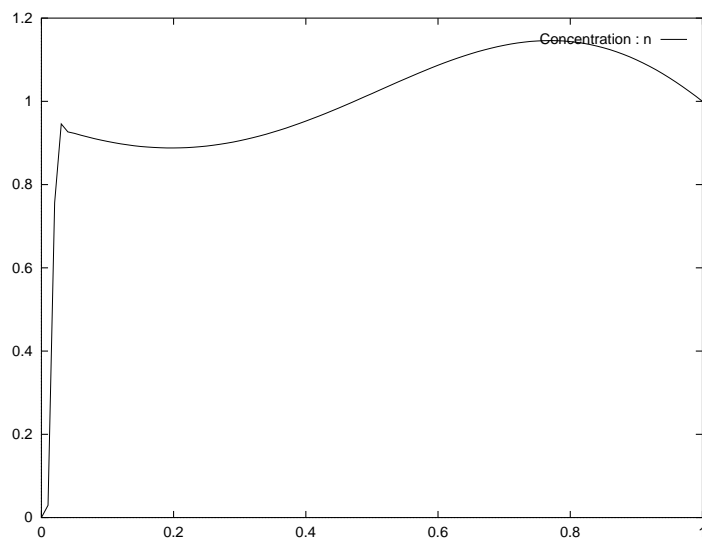


FIG. 15 - schéma en variables φ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.25$

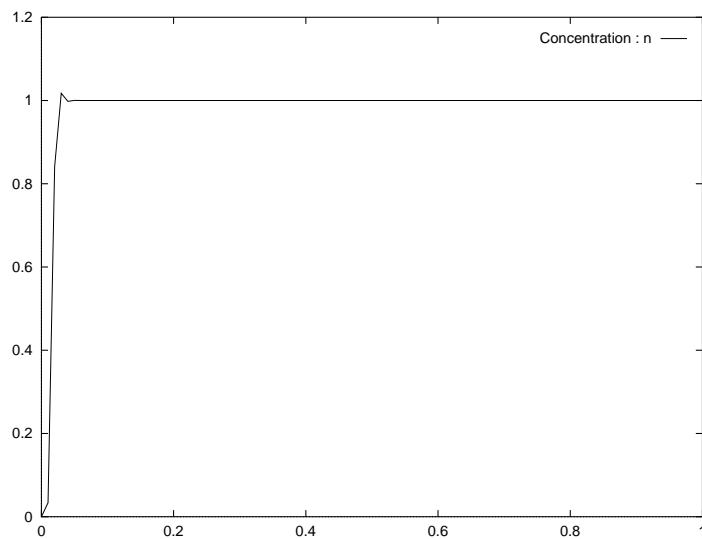


FIG. 16 - schéma en variables φ, χ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.25$

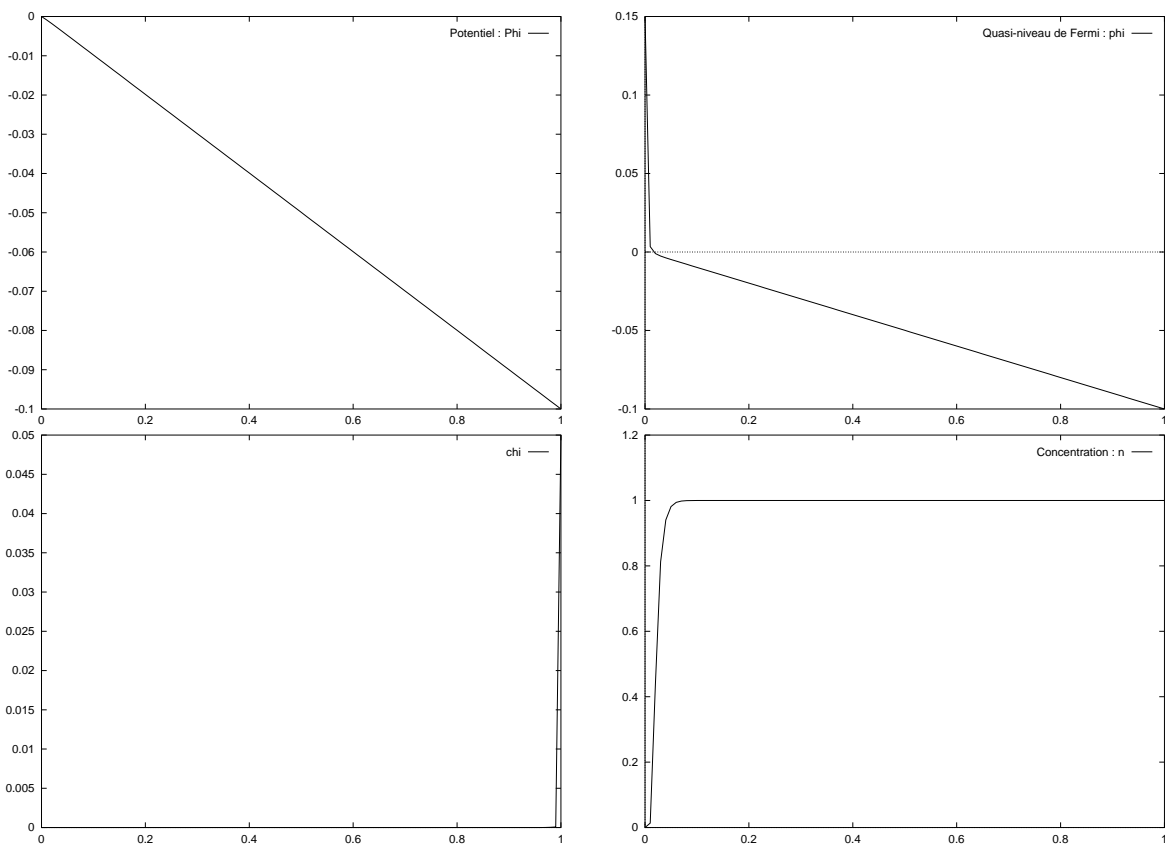


FIG. 17 - schéma en variables φ , χ , Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.25$

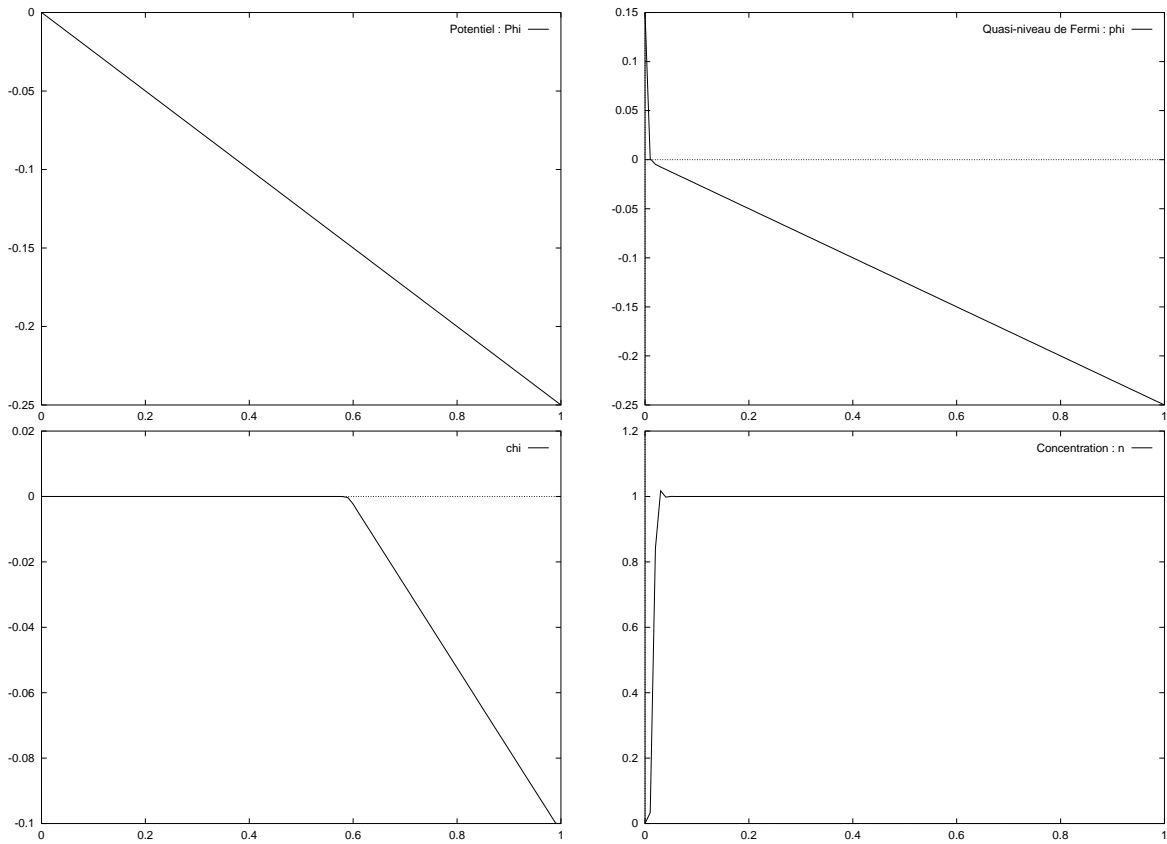


FIG. 18 - schéma en variables φ, χ, Φ avec $\lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.15$ et $V = -0.1$

5 Conclusions

Dans ce rapport nous avons tout d'abord développé une méthode pour l'étude du comportement asymptotique des équations de dérive-diffusion des semi-conducteurs. Cette méthode utilise deux fonctions similaires au quasi-niveau de Fermi et mène à un problème limite sous la forme d'un système couplé d'équations de Hamilton-Jacobi et d'inéquations variationnelles. Cette méthode étend les résultats connus, précise également la convergence de n_λ , améliore les hypothèses nécessaires et enfin donne une approche originale au problème susceptible d'être utilisée au niveau numérique.

En effet les résultats numériques, que nous avons ensuite présenté, prouvent l'intérêt des variables introduites pour la simulation numérique. Cela valide à nouveau l'utilisation des variables de quasi-niveaux de Fermi dans le code INRIA [14, 15].

Sur le plan théorique, la méthode semble s'adapter à des cas plus généraux (plusieurs porteurs, cas bidimensionnel). Sur le plan numériques, l'utilisation d'un couple de variables redondantes, pourrait permettre de bien calculer les courants de porteurs minoritaires.

Ce rapport complète par des résultats numériques un article à paraître dans M³AS [22].

A Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi

Pour une description complète nous faisons référence à l'article initial de M.G. Crandall et P.L. Lions [11], ou à P.L. Lions [16] , M.G. Crandall, H. Ishii et P.L. Lions [10], G. Barles [1].

On se donne un Hamiltonien $H(x, u, p)$ continu sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ et une fonction continue sur $\partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. On considère alors l'équation

$$\begin{aligned} H(x, u, Du) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ F(x, u, Du) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{A.18}$$

On définit tout d'abord G_* et G^* par :

$$\begin{cases} G_*(x, u, p) = G^*(x, u, p) = H(x, u, p) \text{ si } x \in \Omega, \\ G_*(x, u, p) = \text{Min}(H(x, u, p), F(x, u, p)) \text{ si } x \in \partial\Omega, \\ G^*(x, u, p) = \text{Max}(H(x, u, p), F(x, u, p)) \text{ si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.19}$$

La définition de solution de viscosité discontinue pour des équations discontinues est la suivante :

Définition 6 (Solution de viscosité discontinue) :

Une fonction localement bornée, s.c.s. sur $\bar{\Omega}$, u^* est une sous-solution de viscosité de (A.18) si et seulement si $\forall g \in C^1(\bar{\Omega})$, si $x_0 \in \bar{\Omega}$ est un point de maximum local de $u^* - g$, on a :

$$G_*(x_0, u^*(x_0), Dg(x_0)) \leq 0. \tag{A.20}$$

Une fonction localement bornée, s.c.i. sur $\bar{\Omega}$, u_* est une sur-solution de viscosité de (A.18) si et seulement si $\forall g \in C^1(\bar{\Omega})$, si $x_0 \in \bar{\Omega}$ est un point de minimum local de $u_* - g$, on a :

$$G^*(x_0, u_*(x_0), Dg(x_0)) \geq 0. \tag{A.21}$$

Remarques :

1. En général, il y a des couches limites et u_* est différent de u^* au bord.
2. La condition aux limites inhomogène de Dirichlet $u = u^0$ sur $\partial\Omega$ s'écrit donc au sens de viscosité :

$$\begin{aligned} \text{Min}(H(x, u^*, Dg), u^* - u^0) &\leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{pour la sous-solution}), \\ \text{Max}(H(x, u_*, Dg), u_* - u^0) &\geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{pour la sur-solution}). \end{aligned}$$

B Grandeurs physiques et interprétation du problème asymptotique

Le modèle de dérive-diffusion, pour un contact Schottky modélisé en 1d, s'écrit (voir Szee [27] et Yamnahakki [28]) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\bar{n}}{dx} - \mu \frac{d\bar{\Phi}}{dx} \bar{n} \right) &= 0 \\
 x &\in [0, L] \\
 -\frac{d^2\bar{\Phi}}{dx^2} &= \frac{q}{\epsilon_s} (C - \bar{n})
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(0) &= 0, & \bar{\Phi}(L) &= V_{bi} - \Phi_a \\
 \bar{n}(0) &= \rho_0 = C e^{-\frac{V_{bi}}{U_{th}}}, & \bar{n}(L) &= \rho_L = C (1 - e^{-\frac{V_{bi}}{U_{th}}}).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

La signification des variables physiques est la suivante (on prend le cas du *GaAs* pour les valeurs numériques) :

q : charge de l'électron ($1.602189.10^{-19}C$).

k_B : constant de Boltzman ($1.38066.10^{-23}J/K$).

$U_{th} = \frac{k_B T}{q}$: potentiel thermique (V) ($0.0259V$ à $300^\circ K$).

D : coefficient de diffusion ($m^2.s^{-1}$) ($0.022015m^2.s^{-1}$ pour le *GaAs* à $300^\circ K$).

μ : taux de mobilité ($m^2.s^{-1}.V^{-1}$) ($0.85m^2.s^{-1}.V^{-1}$ pour le *GaAs*).

ϵ_s : permittivité du semi-conducteur ($F.m^{-1}$) ($1.16.10^{-12}AsVB^{-1}cm^{-1}$).

V_{bi} : Built-in potentiel (V) (de l'ordre du Volt).

Φ_a : potentiel appliqué (V).

C : concentration de dopage (m^{-3}).

L : longueur du dispositif (m) de l'ordre du μm .

On effectue le changement d'échelle suivant : $n = \frac{\bar{n}}{C}$, $x = \frac{\bar{x}}{L}$, $\Phi = \frac{\epsilon_s}{CL^2q}\bar{\Phi}$. On obtient alors le système adimensionné suivant :

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dn}{dx} - \frac{d\Phi}{dx} n \right) &= 0 \\
 x &\in [0, L] \\
 -\frac{d^2\Phi}{dx^2} &= (1 - n)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 0, & \Phi(1) &= V_1 \\ n(0) &= e^{-\frac{\beta}{\lambda}}, & n(1) &= 1 - e^{-\frac{\beta}{\lambda}}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{D\epsilon_s}{\mu CL^2 q} \\ V_1 &= \frac{\epsilon_s}{CL^2 q}(V_{bi} - \Phi_a) = \frac{\mu}{D}\lambda(V_{bi} - \Phi_a) \\ \beta &= \frac{\mu q CL^2 V_{bi}}{\epsilon_s D U_{th}}\end{aligned}\tag{B.5}$$

Le problème asymptotique correspondant à $\lambda \rightarrow 0$, V restant de l'ordre de 1, correspond bien au cas d'un dopage fort (λ est en $1/C$) avec l'énergie thermique négligeable devant l'énergie électrique (on a $\Phi_a \frac{\mu}{D} \approx \frac{\Phi_a}{V_{th}}$ de l'ordre de $1/\lambda$).

Références

- [1] G. Barles. *Solutions de viscosités des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *SMAI Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [2] G. Barles and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 21(4):557–579, 1987.
- [3] G. Barles and B. Perthame. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *Siam J. Control and Optimization*, 26(5):1133–1148, September 1988.
- [4] F. Brezzi. Theoretical and numerical problems in reverse biased semiconductor devices. In *Proc. of the Seventh International Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Versailles, 1985. INRIA.
- [5] F. Brezzi, A. Capelo, and L.D. Marini. Singular perturbation problems in semiconductor devices. In J.P. Hennart, editor, *Proc. II MAS Workshop on numerical Analysis*, volume 1230, pages 191–198, Berlin, New-York, 1986. Springer Verlag.
- [6] F. Brezzi, A.C.S. Capelo, and L. Gastaldi. A singular perturbation analysis for semiconductor device equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:372–387, 89.
- [7] F. Brezzi and L. Gastaldi. Mathematical properties of 1-d semiconductors. *Mat. Applic. Comp.*, 5(2):123–137, 1986.
- [8] L.A. Caffarelli and A. Friedman. A singular perturbation problem for semiconductors. *Bull. Un. Mat. Ital.*, pages 409–422, 1987.
- [9] E.M. Conwell. *High-field transport in semiconductor*, volume g. of *Solid State Physics*. Academic Press, New-York, 1967.
- [10] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Soc.*, 27:1–67, 1992.
- [11] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277:1–42, 1983.

-
- [12] L. Gastaldi. Error analysis for a singular perturbation analysis in semiconductors. *Boll. U.M.I.*, 7(4-B):591–611, 1990.
- [13] F. Golse and F. Poupaud. Limite fluide des équations de Boltzman des semi-conducteurs pour une statistique de Fermi-Dirac. *Asymptotics Analysis*, 6:135–160, 1992.
- [14] F. Hecht and A. Marrocco. Numerical simulation of heterojunction structures using mixed finite elements and operators splitting. In R. Glowinski, editor, *Proceedings of the 10th International Conference on Computing methods in applied sciences and engineering*, pages 271–286, Paris(Le Vésinet) - France, February 1992. INRIA.
- [15] F. Hecht and A. Marrocco. Mixed finite elements simulation of heterojunction structures including a boundary layer model for the quasi-fermi levels. *COMPEL*, 13(4):757–770, 1994.
- [16] P.L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, volume 69 of *Research notes in Mathematics*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1982.
- [17] P.A. Markowich, C.A. Ringhofer, and Christian Schmeiser. *Semiconductor Equations*. Springer-Verlag, Wien, New-York, 1990.
- [18] P. Markowich. A singular perturbation analysis of the fundamental semiconductor device equations. *SIAM J. Appl. Anal.*, 44:896–928, 1984.
- [19] P. Markowich and C. Ringhofer. A singularly perturbed boundary value problem modelling a semiconductor device. *SIAM J. Appl. Anal.*, 44:231–456, 1984.
- [20] P. Markowich and C. Schmeiser. Uniform asymptotic representations of the basic semiconductor equations. *IMA J. Appl. Anal.*, 36:43–57, 1986.
- [21] M.S. Mock. *Analysis of mathematical models of semiconductor Devices*, volume 3 of *Advances in numerical computation*. Boole Press, Dublin, 1983.
- [22] Ph. Montarnal and B. Perthame. Asymptotic analysis of the drift-diffusion equations and Hamilton-Jacobi equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. to appear.

- [23] F. Poupaud. Diffusion approximation of the linear semiconductor equation : analysis of boundary layers. *Asymptotics Analysis*, 4:293–317, 1991.
- [24] D.L. Rode. *Low-field electron transport*, volume 10 of *Semiconductors and Semimetals*. Academic Press, 1995.
- [25] D.L. Scharfetter and H.K. Gummel. Large-signal analysis of a silicon read diode oscillator. *IEEE TRANSACTIONS ON ELECTRON DEVICES*, ED-16(1):64–77, January 1969.
- [26] P.E. Souganidis. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *A paraître dans CIME course, Springer-Verlag, (Berlin)*.
- [27] S.M. Sze. *Physics of semiconductor devices*. John Wiley & Sons, New-York, 2nd edition, 1981.
- [28] A. Yamnahakki. *Modélisation et simulation numérique de problèmes inhomogènes en physique des semiconducteurs*. PhD thesis, Laboratoire de mathématiques, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1994.



Unit ´e de recherche INRIA Lorraine, Technop ˆole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit ´e de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit ´e de recherche INRIA Rh ˆone-Alpes, 46 avenue F ´elix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unit ´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit ´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

´Editeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399