

Sur l'analyse des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz

Patrick Joly, Olivier Vacus

▶ **To cite this version:**

Patrick Joly, Olivier Vacus. Sur l'analyse des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz. [Rapport de recherche] RR-2850, INRIA. 1996. inria-00073841

HAL Id: inria-00073841
https://inria.hal.science/inria-00073841

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Sur l'analyse des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz

Patrick Joly, Olivier Vacus

N° 2850

Mars 1996

THÈME 4



ISSN 0249-6399

Sur l'analyse des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz

Patrick Joly, Olivier Vacus*

Thème 4 — Simulation
et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 2850 — Mars 1996 — 39 pages

Résumé : Ha Duong et Joly ont montré, par des méthodes énergétiques, la stabilité d'une classe de conditions limites absorbantes pour l'équation des ondes. Notre but dans ce rapport est d'obtenir des résultats analogues pour l'équation de Helmholtz, et ceci en nous inspirant de leurs démonstrations.

Ce travail n'est qu'un premier pas dans cette direction. Nous considérons le cas simplifié de l'équation de Helmholtz 2D posée dans un carré et ne considérons la condition absorbante d'ordre élevé que sur un des cotés de ce carré. Nous démontrons alors un résultat d'unicité. Cela permet de résoudre complétement le problème lorsqu'on peut se placer dans le cadre de l'alternative de Fredholm. Nous montrons que cela est possible dans le cas de la condition d'ordre 2.

Les conditions sous lesquelles nous montrons nos résultats sont analogues à celles établies pour les problèmes en temps.

Mots-clé : Equation de Helmholtz - Conditions aux limites - Alternative de Fredholm - Théorème de prolongement unique - Analyse de Fourier.

(Abstract: pto)

INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

On the Analysis of Absorbing Boundary Conditions for the Helmholtz Equation

Abstract: Ha Duond and Joly have reconsidered the stability theory of boundary conditions for the wave equation from the point of view of energy techniques. We take aim in this report to obtain similar results for the Helmholtz equation by adapting their proofs to the problem in frequency domain.

This work is only a first step in this direction. We suppose that the 2D Helmholtz equation stands on a square and we consider an absorbing condition only on one of its boundaries. We show a result of uniqueness.h This allows us to conclude for the existence of a solution when the problem comes under the Fredholm alternative. We show it is true for the second order ABC.

Our results about the conditions of stability are the same as for the problem in time domain.

Key-words: Helmholtz equation - Boundary conditions - Fredholm alternative - Theorem of unique continuation - Fourier analysis.

Chapitre 1

Introduction

L'idée d'étudier la stabilité de conditions de bord pour l'équation de Helmholtz était devenue assez naturelle après les différents travaux sur le même sujet consacrés à l'équation des ondes par le biais de méthodes énergétiques. Le cas du demi-espace homogène, c'est-à-dire celui du bord droit infini, avait été étudié par Ha Duong et Joly ([5]), puis le cas des bords courbes réguliers ([7]), et enfin les questions liées à l'existence de singularités de frontière ([10]). Il était tentant de voir si une technique éprouvée pour des problèmes en temps pouvait permettre de conclure pour des problèmes en fréquence.

Etant donné les différences fondamentales entre ces deux types de problèmes, le parallèle s'arrête au niveau des motivations et des résultats.

Premièrement, les problèmes traités ne sont pas les mêmes. D'une part, les cas des bords courbes et des coins restent à considérer ; d'autre part, il n'est pas possible d'étudier l'équation de Helmholtz sur un demi-espace entier, les domaines non bornés étant à exclure. Le cadre de ce rapport sera en conséquence le carré unité. On pourra parler de "l'étude du bord droit" dans la mesure où les conditions de bord ne seront imposées que sur un seul de ses bords. Pour le reste de la frontière, on verra qu'on peut choisir indifféremment une condition de Dirichlet, une condition de Neumann, ou même une condition absorbante d'ordre 1.

Ensuite, les arguments invoqués sont de nature totalement différente. Si on reprend, par exemple, les calculs qui mènent au identités énergétiques, c'est uniquement pour constater que la solution au problème considéré va annuler

tel ou tel opérateur, mais on ne peut plus obtenir directement d'estimations a priori. En conséquence, nos démonstrations se déroulent en trois temps :

1. On vérifie que le problème considéré relève de l'alternative de Fredholm. Si tel est le cas, on sait que les questions de l'existence et de l'unicité de la solution sont équivalentes, et on se contente par commodité d'étudier l'unicité : on ne retient que le problème homogène et on cherche à vérifier que la solution est nécessairement la fonction nulle.

2. Pour ce faire, on veut montrer que u, cette solution, et sa dérivée normale s'annule simultanément sur une partie de mesure non nulle de la frontière. On y parvient à l'aide de calculs qui s'inspirent de ceux effectués en temps et par des développements en série de Fourier.

3. Enfin, on conclut à l'aide d'un théorème de prolongement unique, par exemple le théorème de Holmgren qui est ici suffisant. Si le point précédent est vérifié, et si u est solution de l'équation de Helmholtz, elle est nulle partout.

Par la suite, dans chaque cas, ce dernier point ne sera pas repris. Notre but sera atteint une fois prouvée la nullité de u et de sa dérivée normale. Ce second point, partie qui nous semblait la plus délicate, est le cœur de ce rapport.

Enfin, en ce qui concerne l'alternative de Fredholm, seuls les cas d'ordre 1 et 2 sont présentés. Pour les ordres supérieurs, la question reste ouverte.

Chapitre 2

Les premières conditions absorbantes

2.1 Rappel : cas du demi-espace en temps

Le but de ce premier paragraphe est de rappeler brièvement les résultats et les techniques mises en œuvre par Tuong Ha Duong et Patrick Joly dans [5] pour établir la stabilité des CLA sur un bord droit infini. Nous y renvoyons le lecteur avide de plus amples informations, d'autant plus que, dans [5] comme dans [1] d'ailleurs, l'analyse a le mérite d'être très complète ; le cadre fonctionnel y est notamment défini avec précision.

Ha Duong et Joly cherchent à établir le caractère bien posé – au sens de Kreiss – pour la catégorie de problèmes que nous définirons ci-dessous. Notons que, se fondant sur le critère de Kreiss, critère difficile à établir et très délicat à mettre en œuvre, des résultats de ce type avaient déjà été établis d'abord partiellement par Engquist et Majda [6], puis de façon tout-à-fait général par Halpern et Trefethen [9]. L'intérêt des travaux de Ha Duong et Joly réside donc autant dans la méthode que dans les résultats auxquels elle aboutit.

Considérons le problème simple suivant, constitué de l'équation des ondes sur le demi-plan inférieur Ω et d'une condition d'ordre 1 sur la frontière Γ :

$$(2.1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega\,(x \in \mathbb{R}\ ,\ y\ <\ 0)\ ,\ t\ >\ 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma\,(x \in \mathbb{R}\ ,\ y\ =\ 0)\ ,\ t\ >\ 0 \\ u\,(x,y,0)\ =\ u_0 & \text{sur } \Omega\,(x \in \mathbb{R}\ ,\ y\ <\ 0)\ ,\ t\ =\ 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,y,0)\ =\ u_1 & \text{sur } \Omega\,(x \in \mathbb{R}\ ,\ y\ <\ 0)\ ,\ t\ =\ 0 \end{array} \right.$$

Pour obtenir (2.2), identité énergétique fondamentale, il suffit d'écrire, pour toute fonction v solution de l'équation des ondes :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \triangle v \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \int_\Omega \Delta v \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\bigtriangledown v|^2 \right) \right] - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On reconnaît la dérivée temporelle d'une "énergie du premier ordre", qui coïncide ici avec l'énergie physique traditionnelle. On montre que cette énergie – en fait une forme quadratique définie positive – est décroissante en temps en se servant de la condition de bord pour obtenir (2.2) :

$$(2.2)\qquad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\bigtriangledown v|^2 \right) \right] = - \int_\Gamma \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2$$

On en déduit directement que pour $(u_0, u_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la solution du problème est telle que :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^\infty(R^+;L^2)} \ \leq\ C \left(\| \bigtriangledown u_0 \|_{L^2(\Omega)} + \| \ u_1 \ \|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$\| \nabla u \|_{L^\infty(R^+;L^2)} \leq C \left(\| \nabla u_0 \|_{L^2(\Omega)} + \| u_1 \|_{L^2(\Omega)} \right)$$

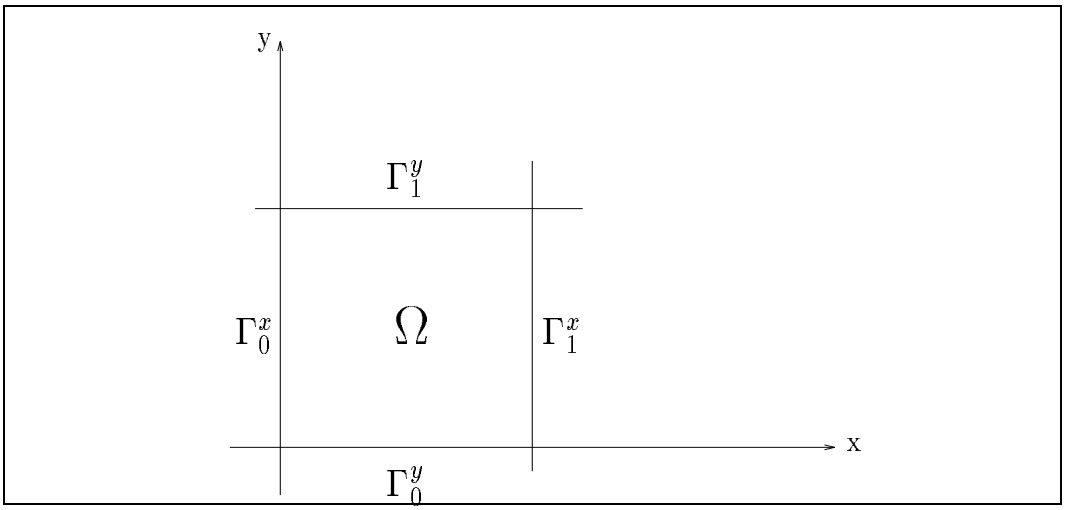
On a donc bien un résultat de stabilité forte au sens de Kreiss à travers ces estimations a priori. Pour les cas d'ordre supérieur, nous renvoyons bien sûr à [5]. Ce qu'il est suffisant de savoir, c'est que Ha Duong et Joly sont parvenus à écrire des énergies d'ordre N – pour une CLA d'ordre N – qui soient de la même façon décroissantes en temps, ce dont nous allons essayer de nous servir par la suite.

On peut déjà souligner que tout le succès de la méthode repose sur le fait que, après l'utilisation de la formule de Green, on obtient "les bons signes", c'est-à-dire la dérivée d'une somme de termes positifs. L'équation de Helmholtz n'étant pas elliptique, c'est de cette caractéristique pourtant vitale qu'il va falloir se passer. De même, on ne pourra évidemment plus parler de "décroissance en temps" pour un problème en fréquence. Il faut ici simplement comprendre que, au-delà de similitudes de premier abord, et comme on pourra encore le vérifier au fil des lignes, les problèmes en temps et les problèmes en fréquence sont radicalement différents.

2.2 Le problème en fréquence

Il faut, pour étudier le cas du bord droit, se placer d'emblée sur un domaine borné. En temps en effet, il était possible de considérer le problème sur l'espace entier car pour des données initiales locales, la vitesse de propagation étant finie, la solution était elle aussi forcément locale. En revanche, on n'a rien de comparable en fréquence. On peut dire que la solution en fréquence correspond à un régime permanent, c'est-à-dire qu'elle équivaut à la solution en temps quand on a attendu un temps quasi infini. Par conséquent, on ne peut pas espérer qu'elle soit locale ...

On peut tout de même dire que nous limitons notre étude dans ce chapitre au cas du bord droit dans la mesure où trois des bords du domaine rectangle que nous allons définir n'ont d'autre rôle que celui de borner l'espace. Plus précisément, on considère le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ de frontière $\Gamma_i^\xi = \{\xi = i\}$. Autrement dit, on a choisi par commodité de travailler sur le carré unité.



Sur Γ_1^y, on va imposer différentes conditions de tous ordres, qui sont l'objet à proprement parler de notre étude, tandis que sur les trois autres bords, on n'imposera qu'une condition d'ordre faible : une condition de Dirichlet dans un premier temps, puis on indiquera les modifications à apporter aux démonstrations si on avait choisi des conditions de Neumann ou la CLA d'ordre 1.

On a précisé le type des démonstrations que nous allons mettre en œuvre dans l'introduction. On montre dans un premier temps que les hypothèses de l'alternative de Fredholm sont vérifiées, puis on se contente en conséquence de n'établir que l'unicité des solutions. Pour cela, on montre que u, solution du problème, et sa dérivée normale sont nulles sur une partie du bord que l'on va se servir des techniques "énergétiques", et seule cette fin de démonstration, partie selon nous la moins évidente a priori, sera présentée dans tous les cas de figures. Enfin, on conclut à l'aide d'un théorème de prolongement unique pour les équations elliptiques du second ordre, qui nous permet d'affirmer :

Toute fonction u, solution de l'équation de Helmholtz sur un domaine borné de frontière Γ, et telle que de plus

$$\exists x_0 \in \Gamma \ , \ \exists \varepsilon > 0 \ , \ \forall x \in B(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma \ : \ u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n}$$

est identiquement nulle sur le domaine tout entier.

(On pourra consulter par exemple [4] p.969)

2.3 Un cas à part : la condition d'ordre 1

La particularité de ce cas vient du fait qu'on sait conclure quelle que soit la géométrie du bord et en imposant la condition sur **toute la frontière** du domaine.

2.3.1 Alternative de Fredholm

Dans un premier temps, on profite de la simplicité du problème (2.3) pour détailler la partie portant sur l'alternative de Fredholm. On a donc a priori :

$$(2.3) \qquad \begin{cases} -\omega^2 u - \Delta u = f & x \in \Omega \ , \ f \in L^2(\Omega) \\ i\omega u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

Ecrire une formulation faible du problème, c'est chercher $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \qquad\qquad a(\omega; u, v) \ = \ L(v)$$

avec

$$a(\omega; u, v) \ = \ \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown \bar{v} - \omega^2 \int_\Omega u\bar{v} + i\omega \int_\Gamma u\bar{v}$$

(après application de la formule de Green ...) et

$$L(v) \ = \ \int_\Gamma f\bar{v}$$

Clairement, la forme sesquilinéaire a présente le défaut de coercivité dont on a déjà parlé, et le théorème de Lax-Milgram n'est pas applicable directement (cf. [2]). On va pour y remédier réécrire le problème (2.3) sous la forme (2.4) :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = (1+\omega^2)u + f & x \in \Omega \\ i\omega u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

Pour résoudre ce nouveau problème, il nous faut rappeler que le problème (2.5) admet une solution unique :

$$(2.5) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = \hat{f} & x \in \Omega \ , \ \hat{f} \in L^2(\Omega) \\ i\omega u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = \hat{g} & x \in \Gamma \ , \ \hat{g} \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

En effet, la nouvelle forme sesquilinéaire $\hat{a}$ associée à (2.5) s'écrit :

$$(2.6) \qquad \hat{a}(\omega; u, v) \ = \ \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown \bar{v} + \int_\Omega u\bar{v} + i\omega \int_\Gamma u\bar{v}$$

et la forme antilinéaire

$$\hat{L}(v) \ = \ \int_\Gamma \hat{f}\bar{v} + \int_\Gamma \hat{g}\bar{v}$$

On a $Re(\hat{a}(\omega; u, v)) \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, Donc, $\hat{a}$ est coercif dans $H^1(\Omega)$. On est alors en droit de définir l'application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} R_\omega \ : & L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ & (\hat{f}, \hat{g}) & \longrightarrow & u \end{array}$$

En repartant de (2.4), on voit alors que :

$$(2.7) \qquad u \ = \ R_\omega \left[(1+\omega^2)u, 0\right] + R_\omega \left[f, 0\right]$$

On peut pour finir poser

$$\varphi \ = \ R_\omega(f, 0)$$

et introduire

$$\begin{array}{rccc} T_\omega \ : & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ & u & \longmapsto & R_\omega \left[(1+\omega^2)u, 0\right] \end{array}$$

Le problème que l'on doit donc finalement résoudre s'écrit

$$(I - T_\omega)\, u \ = \ \varphi$$

Comme $T_\omega \in \left(\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))\right)$ et que Ω est borné, T_ω est un opérateur compact et les hypothèses de l'alternative de Fredholm sont vérifiées : on peut affirmer que $(I - T_\omega)$ est inversible dès qu'il est injectif ; autrement dit, établir l'unicité des solutions revient aussi à affirmer leur existence.

2.3.2 Fin de la démonstration

La fin de la démonstration est encore particulière. En effet, c'est le seul cas où l'on sait conclure rapidement et pour lequel la géométrie de la frontière n'a toujours aucune importance.

Considérons sur Γ_1^y :

$$C1 \ : \ B_1^\omega(u) = i\omega u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

On se place dans le cas homogène – puisqu'on cherche à établir l'unicité – et on effectue le simple calcul suivant : pour toute solution u du problème homogène, on a

$$\int_\Omega \left(\omega^2 u + \triangle u\right) \bar{u} \ = \ \int_\Omega \left(\omega^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \bar{u} \ = \ 0$$

et donc

$$\Leftrightarrow \qquad \omega^2 \int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 + \int_\Gamma \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{2.8}$$

Cette identité, valable pour toute fonction solution de l'équation de Helmholtz, équivalent en fréquence de (2.2), va nous servir sans cesse à l'avenir, elle est donc à retenir. On poursuit en exploitant la CLA d'ordre 1 pour obtenir :

$$\omega^2 \int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 = i\omega \int_\Gamma |u|^2 = -\frac{1}{i\omega} \int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2$$

Ces égalités entre des quantités imaginaires pures et une quantité réelle permettent de conclure immédiatement à la nullité de u sur le bord ainsi qu'à celle de sa dérivée normale, donc à la nullité de u sur le domaine tout entier par le théorème de prolongement. On a établi l'unicité, et donc l'existence en découle. CQFD.

2.4 La condition d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on a sur Γ_1^y :

$$C2 \ : \ B_2^\omega(u) = -\omega^2 u + i\omega \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2.4.1 Alternative de Fredholm

Pour la première partie de la démonstration, on va se contenter de reprendre la réécriture du problème. Il nous faut considérer à présent (2.9) :

$$(2.9) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = (1+\omega^2)u + f & x \in \Omega \\ i\omega \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (1+\omega^2)u & x \in \Gamma_1^y \end{cases}$$

On cherche cette fois u dans V :

$$V \ = \ \left\{ v \ \in \ H^1(\Omega) / v_{|\Gamma} \in H^1(\Gamma_1^y) \right\}$$

V est un espace de Hilbert quand on le munit de la norme

$$\|v\|_V^2 \ = \ \int_\Omega \left(|v|^2 + |\bigtriangledown v|^2 \right) \ + \ \int_\Gamma \left(|v|^2 + |\bigtriangledown v|^2 \right)$$

Nous considérons dans ce second paragraphe le problème suivant :

$$(2.10) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = \hat{f} & x \in \Omega \ , \ \hat{f} \in L^2(\Omega) \\ i\omega \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \hat{g} & x \in \Gamma \ , \ \hat{g} \in L^2(\Gamma) \end{cases}$$

On vérifie aisément que la forme variationnelle de (2.10) s'écrit
trouver $u \in V$ telle que,

$$(2.11) \qquad \hat{a}(\omega; u, v) \ = \ \hat{L}(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

avec

$$\hat{a}(\omega; u, v) \ = \ \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown \bar{v} + \int_\Omega u\bar{v} - \frac{1}{i\omega} \left(\int_\Gamma u\bar{v} + \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

et

$$\hat{L}(v) \ = \ \int_\Omega \hat{f}\bar{v} + \int_\Gamma \hat{g}\bar{v}$$

Lemme: le problème 2.11 admet une unique solution.

Démonstration : on constate facilement que la forme sesquilinéaire $\hat{a}$ est coercive dans V :

$$|\hat{a}(w;u,u)|^2 \;\geq\; \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\omega}\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad |\hat{a}(w;u,v)|^2 \;\geq\; \frac{1}{2}\inf\left(1,\frac{1}{4\omega^2}\right)\left(\|u\|^2_V\right)^2$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Nous pouvons à présent désigner par R^2_ω l'opérateur de $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)$ qui à $(\hat{f},\hat{g})$ associe l'unique solution de (2.11) dans V. (R^2_ω est un opérateur linéaire continu.)

Ceci étant, nous avons montré que u est solution de

$$u \;=\; R^2_\omega\left[(1+\omega^2)u,(1+\omega^2)u_{|\Gamma}\right] + R^2_\omega\left[f,0\right]$$

Comme nous l'avons fait dans le cas précédent, on pose pour finir

$$\varphi^2 \;=\; R^2_\omega(f,0)$$

et

$$\begin{array}{rccl} T^2_\omega \;:\; & L^2(\Omega) & \longrightarrow & V \\ & u & \longmapsto & R^2_\omega\left[(1+\omega^2)u,0\right] \end{array}$$

Le problème que l'on doit donc finalement résoudre s'écrit

$$\left(I - T^2_\omega\right)u \;=\; \varphi^2$$

Les conclusions sont identiques à celles du paragraphe précédent.

2.4.2 Fin de la démonstration

On applique cette fois l'identité (2.8) à u

$$\omega^2\int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 + \int_\Gamma \bar{u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\;, \tag{2.12}$$

ensuite à $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

$$\omega^2 \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 - \int_\Omega \left| \bigtriangledown \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \tag{2.13}$$

On peut alors combiner $(-\omega^2(2.12) + (2.13))$ pour tirer :

$$- \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \left(-\omega^2 \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) = \omega^2 \int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega | \bigtriangledown u|^2 + \omega^2 \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 - \int_\Omega \left| \bigtriangledown \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2$$

On en déduit que

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \left(-\omega^2 \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

Pour simplifier cette quantité, il faut rappeler que sur les trois bords avec conditions de Dirichlet, u et toutes ses dérivées tangentielles sont nulles. Sur les bords verticaux, l'intégrale ci-dessus est donc nulle. Elle l'est aussi sur le bord du bas, mais il faut alors raisonner – par continuité – modulo l'équation de Helmholtz.

$$\left(-\omega^2 \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \ = \ -2\omega^2 \bar{u} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad \text{sur } \Gamma_0^y \right)$$

On en déduit que

$$\int_{\Gamma_1^y} \frac{\partial u}{\partial y} \left(-\omega^2 \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

Or, l'opérateur de bord est équivalent, pour les solutions de l'équation de Helmholtz, à

$$B_2^\omega(u) \simeq \left(i\omega u + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = -\omega^2 u + 2i\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

On en déduit que $-2i\omega \displaystyle\int_{\Gamma_1^y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \in \mathbb{R}$, donc que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ sur Γ_1^y – ce qui constitue la moitié de la conclusion voulue. En conséquence, la condition de bord s'écrit à présent :

$$C2 \ : \ \omega^2 u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On est ramené à l'étude d'un problème 1D, avec les conditions limites suivantes (qu'on tire des conditions de Dirichlet sur Γ_1^x et Γ_0^x) :

$$u(0) = 0 = u(1)$$

C'est alors un résultat élémentaire qui permet d'affirmer que
- soit u est identiquement nulle sur Γ_1^y, et on a alors la conclusion complète,
- soit $\exists n_0$ tel que $2\omega^2 = n_0^2\pi^2$, et il faut alors travailler encore un peu.

Supposons donc que $\omega^2 = \frac{1}{2}n_0^2\pi^2$. On peut alors développer u en série de Fourier, en l'occurrence en série de sinus,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y) sin(n\pi x)$$

et écrire qu'elle vérifie l'équation de Helmholtz :

$$-\omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y)\sin(n\pi x) + n^2\pi^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y)\sin(n\pi x) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n''(y)\sin(n\pi x) = 0$$

qui se réduit ici à

$$u_{n_0}''(y) + (n_0^2\pi^2 - \omega^2)u_{n_0}(y) = 0 \tag{2.16}$$

Comme on suppose que $n_0^2\pi^2 - \omega^2 > 0$ et qu'on sait $\forall n \ : \ u_n(0) = 0 = u_n'(1)$ (vu qu' on a obtenu $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ sur Γ_1^y), on conclut directement que u_{n_0} est nulle, donc que u est nulle sur Ω tout entier, et la démonstration est – enfin – complètement terminée.

2.4.3 Autres conditions sur $\Gamma \setminus \Gamma_1^y$

On a vu le rôle que jouent les conditions de Dirichlet sur le reste de la frontière.

Avec des conditions de Neuman, les modifications sont réellement minimes. Il faut juste vérifier qu'on peut de nouveau écrire (2.15) ce qui est élémentaire. Après, on développe u en série de cosinus, et on vérifie que tous les calculs se

passent sans difficulté.

Le cas des conditions d'ordre 1 est plus intéressant ; les calculs aboutissent assez facilement et on obtient la conclusion sur les bords secondaires ! C'est d'ailleurs ce qu'on retrouvera dans le cas général.

En effet, si on repart de (2.14), en se servant du fait que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -i\omega u$ sur $\Gamma_1^x \cup \Gamma_0^x \cup \Gamma_0^y$, on peut écrire :

$$-i\omega \left[2 \int_{\Gamma_1^y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \int_{\Gamma_1^x \cup \Gamma_0^x \cup \Gamma_0^y} \left(\omega^2 |u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \right] \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

L'expression entre crochets est donc nulle, et la nullité de cette somme de termes tous positifs indiquent directement que u et sa dérivée normale sont nulles sur $\Gamma_1^x \cup \Gamma_0^x \cup \Gamma_0^y$.

Ce résultat surprenant peut même paraître un peu inquiétant dans un premier temps : aurait-on la stabilité pour n'importe quelle condition d'ordre 2 sur le bord du haut ? La réponse est évidemment non, et nous verrons dans le paragraphe suivant comment les coefficients de la CLA imposée sur Γ_1^y interviennent dans (2.17).

2.5 Une condition d'ordre 2 plus générale

Il est clair que seule la fin de la démonstration précédente est à reprendre si on considère que sur Γ_1^y :

$$C2' \ : \ -\gamma\omega^2 u + i\omega \frac{\partial u}{\partial y} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

A quelle condition sur γ et β va-t-on pouvoir conclure à la stabilité ?

On reprend les calculs jusqu'à l'obtention de (2.12) et de (2.13), et on opère cette fois la combinaison $-(\gamma - \beta)\,\omega^2 (2.12) + \beta (2.13)$ pour obtenir l'analogue de (2.14):

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \left((\gamma - \beta)\omega^2 \bar{u} + \beta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \in \mathbb{R}$$

Puis, pour les mêmes raisons que précédemment, c'est-à-dire que, via l'équation de Helmholtz, on constate que

$$B_2^{\omega}(u) \simeq -(\gamma - \beta)\,\omega^2 u + i\omega\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et donc :

$$i\omega \int_{\Gamma_1^y} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \in \mathbb{R}$$

On peut alors conclure comme on l'a déjà fait que $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est nulle sur Γ_1^y et réécrire notre nouvelle CLA :

$$C2' \ : \ \gamma\omega^2 u + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

De nouveau, on peut dire que

- soit u est nulle sur Γ_1^y et conclure,
- soit elle ne l'est pas et alors $\omega^2 = \dfrac{\beta}{\gamma} n_0^2\pi^2$ (Cette égalité permet déjà de supposer que $\beta\gamma > 0$).

De nouveau, on pratique une décomposition en série de Fourier qui nous amène à écrire :

$$u''_{n_0}(y) + n_0^2\pi^2(1 - \frac{\beta}{\gamma})u_{n_0}(y) = 0$$

Il faut supposer que $1 - \dfrac{\beta}{\gamma} > 0$ pour se placer dans un cas "coercif" et conclure. Finalement, on a eu besoin de

$$0 < \beta < \gamma$$

qui est bien la même condition que celle établie en temps (cf. [5]).

N.B. : on écarte le cas $0 > \beta > \gamma$ pour des raisons qui sont propres à la définition des CLA, à savoir qu'elles "n'approchent" a priori que des ondes sortantes et non rentrantes ... (Pour plus de précisions, cf. [3])

Il ne reste plus qu'à donner quelques précisions sur les calculs avec des CLA d'ordre 1 sur $\Gamma_1^x \cup \Gamma_0^x \cup \Gamma_0^y$.

Comme on a obtenu (2.17), on reprend

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y}\left((\gamma-\beta)\omega^2\bar{u}+\beta\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right) \in \mathbb{R}$$

et on en tire :

$$-2i\omega\left[\int_{\Gamma_1^y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2+\int_{\Gamma_1^x\cup\Gamma_0^x\cup\Gamma_0^y}\left((\gamma-\beta)\omega^2|u|^2+\beta\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2\right)\right] \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

On voit apparaître encore plus clairement la condition $0 < \beta < \gamma$: si elle est vérifiée, on a cette fois encore une somme de termes tous positifs qui est nulle, et toute la conclusion est acquise d'un seul coup.

Chapitre 3

Le cas général

Dans cette partie, nous ne présentons que la deuxième moitié de la démonstration (montrer qu'on est bien dans le cadre de l'alternative de Fredholm n'est malheureusement pas acquis...). Les techniques mises en œuvre tiennent à la fois de celles décrites dans [5] et de celles du paragraphe précédent.

3.1 Hypothèses, notations et résultats désirés

Comme on le rappelle dans l'annexe consacrée aux CLA, la condition de bord générale est tirée de l'approximation de $\sqrt{1-s^2}$ par la fraction rationnelle :

$$R(s) \;=\; \gamma - \sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k s^2}{1-\alpha_k s^2}$$

où γ, β_k et α_k sont des réels. La condition ainsi obtenue est d'ordre $2N+1$ si $\alpha_1 \neq 0$ et $2N$ si $\alpha_1 = 0$, et s'écrit :

$$\begin{aligned} B_N^{\omega}(u) \;=\; & \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\omega\gamma\right) \prod_{k=1}^{N} \left(-\omega^2 - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \\ & -i\omega \sum_{k=1}^{N} \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\prod_{j\neq k} \left(-\omega^2 - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le résultat que nous souhaitons établir est celui connu en temps, c'est-à-dire que

$$(3.2) \qquad \begin{cases} 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ 0 \leq \alpha_1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{1-\alpha_k} < \gamma \end{cases}$$

doit constituer un jeu de conditions suffisantes pour établir la stabilité.

On a vu que pour nos calculs, il était nécessaire de travailler avec un opérateur équivalent à celui de la CLA où n'apparaissent plus que des dérivées en t ou en y. On commence cette fois encore par ré-exprimer la CLA à l'aide de l'équation de Helmholtz :

$$(3.3) \quad B_N^{\omega}(u) \simeq \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\omega\gamma\right) \prod_{k=1}^{N} \left(-\omega^2(1-\alpha_k) + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - i\omega \sum_{k=1}^{N} \beta_k \left(-\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left[\prod_{j\neq k} \left(-\omega^2(1-\alpha_j) + \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]$$

En vue de faciliter les manipulations de ces opérateurs, on introduit les notations suivantes :

$$P_j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \omega^2(1-\alpha_j) \left(\simeq -\omega^2 - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \prod_{j=1}^{N} P_j$$

$$Q_k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \prod_{j\neq k}^{N} P_j$$

Ce qui permet dans un premier temps d'écrire la CLA, à partir de (3.3) :

$$\frac{\partial Qu}{\partial y} + i\omega\gamma Qu - i\omega \sum_{k=1}^{N} \beta_k \left(-\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Q_k u = 0$$

Or, en constatant que

$$\left(-\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \;=\; \frac{1}{1-\alpha_k}\left(P_k - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

On peut réécrire la condition

$$\frac{\partial Qu}{\partial y} + i\omega\left(\gamma - \sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\right)Qu - i\omega\sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{1-\alpha_k}\frac{\partial^2 Q_k u}{\partial y^2} \;=\; 0$$

Enfin, pour alléger encore les notations, nous noterons

$$a_k \;=\; \frac{\beta_k}{1-\alpha_k}$$

et

$$a \;=\; \gamma - \sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k$$

Finalement, on a montré que la CLA était équivalente pour les solutions de l'équation de Helmholtz à

$$\frac{\partial Qu}{\partial y} + i\omega a Qu - i\omega\sum_{k=1}^{N} a_k\frac{\partial^2 Q_k u}{\partial y^2} \;=\; 0 \tag{3.4}$$

3.2 Premiers calculs

On applique l'identité énergétique (2.8) d'abord à $v = Qu$. On en déduit que

$$\int_\Gamma \frac{\partial Qu}{\partial n}\,Qu \in \mathbb{R}$$

On vérifie qu'avec les conditions de Dirichlet, cette intégrale se réduit à

$$\int_{\Gamma_1^y} \frac{\partial Q\bar{u}}{\partial n}\,Qu \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

(ce qui est dû au fait que le symbole de l'opérateur Q est un polynôme en y^2 ...)

On opère de même avec $v_k = Q_k \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. On montre ainsi que

$$\int_{\Gamma_1^y} Q_k \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3}\, Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Enfin, avec $w_k = Q_k \dfrac{\partial u}{\partial y}$,On montre que

$$\int_{\Gamma_1^y} Q_k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\, Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

Il ne nous reste plus qu'à effectuer une combinaison linéaire judicieuse de (3.5), (3.6) et (3.7) ; on constate dans un premier temps que

$$\alpha_k\,(3.6) - \omega^2(1-\alpha_k)\,(3.7) \;\Leftrightarrow\; \int_{\Gamma_1^y} Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \underbrace{\left(\underbrace{\alpha_k Q_k \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} - \omega^2(1-\alpha_k) Q_k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{Q\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \right)}_{} \in \mathbb{R}$$

On multiplie ces N quantités, on les somme et on ajoute a (3.5) pour obtenir :

$$\int_{\Gamma_1^y} \left(\sum a_k \frac{\partial^2 Q u}{\partial y^2} + a Q u \right) \frac{\partial Q \bar{u}}{\partial y} \in \mathbb{R}$$

Alors, (3.4) nous permet d'affirmer que

$$i\omega \int_{\Gamma_1^y} \left| \frac{\partial Q u}{\partial y} \right|^2 \in \mathbb{R}$$

Donc que, sur Γ_1^y :

$$\frac{\partial Q u}{\partial y} = 0 \tag{3.8}$$

C'est ce résultat qu'il nous faut à présent exploiter.

3.3 Une EDP matricielle

pour cela, on examine les conséquences de (3.8) sur (3.4) ; on voit qu'elle se simplifie en

$$aQu - i\omega \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial y^2} \;=\; 0 \tag{3.9}$$

Cet opérateur peut se mettre sous forme vectorielle. Il s'écrit en effet

$$aP_k\,(Q_k u) - i\omega \sum_{k=1}^{N} a_k \left(-\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q_k u \;=\; 0 \tag{3.10}$$

Posons $V_k = Q_k u$. Vu que $P_K = -\omega^2 - \alpha_j \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, (3.10) équivaut à

$$-\alpha_k a \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_k - \sum a_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_j \;=\; a\omega^2 V_k + \sum a_j \omega^2 V_j \tag{3.11}$$

Soit en posant $V = [V_k]$ (notation vectorielle)

$$-\,M \frac{\partial^2}{\partial x^2} V \;=\; \omega^2 K V \tag{3.12}$$

où M et K sont deux matrices $N \times N$:

$$M \;=\; \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ a_1 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_N \end{vmatrix}$$

et

$$K = a \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_N \\ a_1 & a_2 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_1 & . & . & . & a_N \end{vmatrix}$$

On se livre comme on l'a déjà fait à un développement en série de Fourier de V, qui donne ici une série de sinus :

$$\forall k \qquad : \qquad V_k(x,y) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} V_k^{(n)}(y) sin(n\pi x)$$

L'identité matricielle (3.12) donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\pi^2 M V^{(n)} sin(n\pi x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^2 K V^{(n)} sin(n\pi x)$$

Donc, pour $y = 1$, c'est-à-dire sur Γ_1^y,

$$M\, V^{(n)} \;=\; \frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\, K\, V^{(n)}$$

ou encore

$$M\, K^{-1} V^{(n)} \;=\; \frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\, V^{(n)}$$

De nouveau, comme on l'avait fait à l'ordre 2, on peut dire que

- soit $V^{(n)}(y = 1) = 0$ et on conclut alors que pour tout k, $Q_k u$ est nulle sur Γ_1^y,
- soit $V^{(n)}(y = 1) \neq 0$ et il faut alors travailler pour arriver à la même conclusion.

Dans le second cas en effet, il faut nécessairement que

$$\frac{\omega^2}{n^2\pi^2} \;=\; \lambda \;\in\; Sp\left(M\, K^{-1}\right)$$

Or, on montre sous forme d'un lemme tout à la fin de ce paragraphe que le jeu de conditions (3.2) entraîne notamment que

$$\forall \lambda \in Sp\left(M K^{-1}\right) , \qquad \lambda \leq 1$$

Alors, chaque V_k vérifiant l'équation de Helmholtz, on a pour tout n

$$-V_k^{(n)''}(y) + (n^2\pi^2 - \omega^2)V_k^{(n)} = 0$$

soit

$$-V_k^{(n)''}(y) + n^2\pi^2(1-\lambda)V_k^{(n)} = 0$$

De nouveau, on est dans un cas coercif, et on sait qu'il suffit de deux conditions limites nulles pour pouvoir conclure à la nullité des $V_k^{(n)}$.

On sait déjà que $V_k^{(n)}(y=0) = 0$ par la condition de Dirichlet sur le bord du bas. Or, de (3.8), on va pouvoir tirer que $V_k^{(n)'}(y=1) = 0$, ce qui nous permettra de conclure à la nullité de $Q_k u$ pour tout k. En effet,

$$(3.8) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\omega^2 - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q_k u(y=1) = 0$$

En repartant du développement en série de Fourier, cela s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha_k n^2\pi^2 - \omega^2)V_k^{(n)}(y=1)sin(n\pi x)\right] = 0$$

soit

$$n^2\pi^2(\alpha_k - \lambda)V_k^{(n)'}(y=1)sin(n\pi x) = 0$$

CQFD.

Pour conclure à la nullité de u sur le bord du haut, il suffit maintenant de voir que les $Q_k(x)$ forment une base des polynômes de degré N-1 :

- ce sont N polynômes dans un espace de dimension N ;
- c'est une famille libre : ils sont nuls en α_k sauf Q_k.

Formant base, ils engendrent l'unité...

Un raisonnement tout-à-fait similaire mène à la même conclusion pour $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sur Γ_1^y.

Posons pour le voir $W_k = Q_k \dfrac{\partial u}{\partial y}$ et repartons de (3.8). On tire :

$$\frac{\partial Q u}{\partial y} \;=\; 0 \;=\; P_k\, Q_k \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; \left(-\omega^2 - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) W_k$$

Une nouvelle fois, on a l'alternative

- soit $W_k^{(n)}(y=1) = 0$,
- soit $W_k^{(n)}(y=1) \neq 0$

Dans le second cas, il faut cette fois que

$$\frac{\omega^2}{n^2\pi^2} \;=\; \alpha_k$$

Ecrire l'équation de Helmholtz fournit à nouveau une équation différentielle coercive car on sait que $\alpha_k < 1$. Les conditions limites seront cette fois fournies par la relation (3.12) : si on la dérive à l'aide de l'équation de Helmholtz deux fois "normalement" – c'est-à-dire qu'on la dérive tangentiellement et qu'on combine...–, on obtient :

$$-M \frac{\partial^2}{\partial x^2} W' \;=\; \omega^2 K W'$$

Le lemme de fin de paragraphe précisera que $\forall k\ ,\ \alpha_k \notin Sp(MK^{-1})$. Ceci permet de conclure que, en plus de $W_k'(y=0) = 0$, on a $W_k'(y=1) = 0$. CQFD.

On est donc en mesure d'affirmer que u et sa dérivée normale sont nulles sur Γ_1^y, ce qui constituait notre objectif.

3.4 Cas des autres conditions "secondaires"

Nous ne nous étendrons pas sur ces autres cas qui ne posent en fait que des difficultés techniques. Il faut vérifier d'une part que les sommes réelles (3.5), (3.6) et (3.7) obtenues par application de (2.8) à v, v_k et w_k se réduisent bien à des sommes sur Γ_1^y avec des conditions de Neuman : c'est en effet toujours le cas quitte à avoir recours à l'équation de Helmholtz. Puis se pose la question des conditions limites dans les équations différentielles coercives que l'on fait apparaître, ce qui ne pose pas de problème, toujours avec des conditions de Neuman.

Dans le cas de CLA d'ordre 1, on assiste au petit miracle habituel qui nous épargne ce genre d'arguments. En effet, on n'a plus (3.5), (3.6) et (3.7) mais, par substitution sur les trois autres bords de $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ par $-i\omega$, on tire

$$-i\omega \left(\int_{\Gamma - \Gamma_1^y} |Qu|^2 \right) \in R$$

$$-i\omega \left(\int_{\Gamma - \Gamma_1^y} \left| Q_k \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) \in R$$

$$+i\omega \left(\int_{\Gamma - \Gamma_1^y} \left| Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 \right) \in R$$

Or, les coefficients multiplicatifs de ces deux premières expressions sont positifs, celui de la dernière est négatif. On retrouve, sous le jeu de conditions (3.2) une somme de termes positifs qui est nulle... On factorise alors $-i\omega$ et on se retrouve donc en mesure de conclure dans ce dernier cas.

3.5 Le lemme

Le but de ce lemme est donc double. Il s'agit en fait d'une étude du spectre de MK^{-1} où

$$M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \alpha_N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_N \\ a_1 & a_2 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_1 & . & . & . & a_N \end{vmatrix}$$

et

$$K = a \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_N \\ a_1 & a_2 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_1 & . & . & . & a_N \end{vmatrix}$$

Il semble difficile d'expliciter ce spectre. Nous nous contenterons de montrer que sous le jeu de conditions (3.2), on a

$$\forall \lambda \in Sp(MK^{-1}) , \qquad \begin{cases} |\lambda| < 1 \\ \lambda \neq \alpha_k , \forall k \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour obtenir tous les résultats à la fois, on va expliciter le polynôme caractéristique de MK^{-1}. Pour ce faire, on montre dans un premier temps que cette matrice a une forme bien particulière :

$$MK^{-1} = \frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix} \alpha_1\gamma-\beta_1 & -a_2(\alpha_1-1) & & -a_N(\alpha_1-1) \\ -a_1(\alpha_2-1) & \alpha_2\gamma-\beta_2 & & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ -a_1(\alpha_N-1) & . & . & \alpha_N\gamma-\beta_N \end{vmatrix}$$

ou encore

$$MK^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & \\ & . & \\ & & . \\ & & \alpha_N \end{vmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix} -a_1(\alpha_1-1) & . & . & -a_N(\alpha_1-1) \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ -a_1(\alpha_N-1) & . & . & -a_N(\alpha_N-1) \end{vmatrix}$$

Pour parvenir à ce résultat simplement, on remarque que K^{-1} se calcule aisément ; en effet, vu sa structure, on a, pout tout vecteur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (et je note à partir de maintenant les vecteurs en gras) :

$$\mathbf{x} = K\,\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = a\mathbf{y} + (v,y)1 \tag{3.14}$$

où

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_N \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{vmatrix}$$

On poursuit le calcul de $\mathbf{y}$:

$$(v,x) = a(v,y) + (v,y)(v,1)$$

Donc

$$(v,y) \;=\; \frac{(v,x)}{a+(v,1)}$$

Comme $a+(v,1)=\gamma$, on obtient finalement en reportant dans (3.14)

$$\mathbf{y} \;=\; \frac{1}{a}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{\gamma}(v,x)1\right) \;=\; K^{-1}\mathbf{x}$$

Donc

$$K^{-1} \;=\; \frac{1}{a}I-\frac{1}{\gamma}(v,1) \;=\; \frac{1}{a}I-\frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_N \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ a_1 & . & . & a_N \end{vmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit de M par K^{-1}.

Le calcul direct du polynôme caractéristique par récurrence, quoique faisable, n'est pas aisé. Une manière plus élégante de l'obtenir consiste à observer que le polynôme caractéristique d'une matrice A de rang 1 se calcule très facilement puisque 0 est (N-1) fois valeur propre :

$$P_A(x) \;=\; x^{N-1}\,(x-Tr(A))$$

Comme $M\,K^{-1} \;=\; D+UV$ où

$$U \;=\; -\frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_N \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad V \;=\; \begin{vmatrix} 1-\alpha_1 \\ . \\ . \\ 1-\alpha_N \end{vmatrix}$$

on a

$$xI-MK^{-1} \;=\; (xI-D)\;-\;UV \;=\; (xI-D)\left(I-(xI-D)^{-1}UV\right)$$

et donc

$$xI - MK^{-1} \;=\; (xI - D)\,(I - U'V)$$

où

$$U' \;=\; \left|\begin{array}{c} \dfrac{a_1}{x-\alpha_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{a_N}{x-\alpha_N} \end{array}\right| \qquad \text{et} \qquad V \;=\; \left|\begin{array}{c} 1-\alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1-\alpha_N \end{array}\right|$$

On a alors

$$P_{MK^{-1}}(x) \;=\; det(xI - MK^{-1}) \;=\; det(xI - D).det(I - U'V)$$

soit

$$P_{MK^{-1}}(x) \;=\; P_D(x) \,*\, P_{U'V}(1)$$

On a finalement montré que

$$P_{MK^{-1}}(x) \;=\; \prod_{i=1}^{N}(x-\alpha_i) \,*\, \left[1 - \frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{x-\alpha_k}\right]$$

soit, après simplification,

$$P_{MK^{-1}}(x) \;=\; \frac{1}{\gamma}\prod_{i=1}^{N}(x-\alpha_i)\left[\gamma - \sum_{k=1}^{N}\frac{\beta_k}{x-\alpha_k}\right]$$

C'est alors une étude de fonction triviale qui permet d'affirmer que, (3.2) étant vérifiée et son rôle clairement mis en évidence, les valeurs propres de MK^{-1} sont inférieures à 1, et distinctes des α_i.

En effet,

$$P_{MK^{-1}}(\alpha_k) \;=\; 0 \,+\, \beta_k \prod_{i\neq k}(\alpha_k - \alpha_i) \;\neq\; 0$$

et

$$P_{MK^{-1}}(1) \;=\; \frac{a}{\gamma}\prod_{i}(1-\alpha_i) \;>\; 0$$

Or, pour $x > 1$, $P_{MK^{-1}}(x)$ est clairement une fonction croissante. (N'oublions pas que malgré les apparences, c'est un polynôme ...)

Ainsi s'achève notre étude du bord droit en fréquence.

Chapitre 4

Un résultat pour le coin

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème du coin en fréquence. Contrairement au cas des bords courbes où l'on n'est pas parvenu à conclure (cf. [7]), il est possible de reprendre pour l'équation de Helmholtz une partie de l'étude menée dans [10].

Plus précisément, nous allons donner une démonstration complète de la stabilité de conditions limites d'ordre 2 issues des approximations de Padé. La partie "alternative de Fredholm" mets en évidence la rôle des conditions de coin (cf. [1] et [10]). La fin de la démonstration se sert de l'existence d'énergies d'ordre plus élevé que celui des conditions de bords (cf. [8] et [10]).

Cette démonstration se généralise sans peine à des conditions d'ordre 2 plus générales. Par contre, seule la deuxième partie s'étend facilement à des conditions d'ordre quelconque ; nous ne sommes pas parvenus à montrer dans le cas général que les hypothèses de l'alternative de Fredholm étaient vérifiées.

4.1 Alternative de Fredholm

Considérons de nouveau le carré unité. On impose cette des CLA d'ordre 2 en fréquence sur ses quatre côtés :

$$\text{sur } \Gamma_1^y \ : \qquad -\omega^2 u + 2i\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{sur } \Gamma_1^x \ : \qquad -\omega^2 u + 2i\omega \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{sur } \Gamma_0^y \ : \qquad -\omega^2 u - 2i\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{sur } \Gamma_0^x \ : \qquad -\omega^2 u - 2i\omega \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Reprenons à présent les calculs du premier chapitre consacrés à la condition d'ordre 2 sur le bord droit. La présence du coin n'entraîne aucune modification (problèmes (2.9) et (2.10)) jusqu'à l'obtention de

$$\hat{a}(w;u,v) \ = \ \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown \bar{v} + \int_\Omega u\bar{v} - \frac{1}{i\omega}\left(\int_\Gamma u\bar{v} - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\bar{v}\right)$$

L'intégration par parties fait cette fois apparaître un terme supplémentaire :

$$\hat{a}(w;u,v) \ = \ \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown \bar{v} + \int_\Omega u\bar{v} - \frac{1}{i\omega}\left(\int_\Gamma u\bar{v} + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} - \frac{1}{2}\left[\bar{v}\frac{\partial u}{\partial s}\right]\right)$$

La fonction entre crochets est à évaluer aux quatre coins du domaine. Si on prend soin de spécifier que, dans chacun de ces coins, il existe une relation du type de

$$\gamma i\omega u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \ = \ 0 \ ,$$

on peut tirer que

$$\hat{a}(w;u,u) \ = \ \int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 + \int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{i\omega}\left(\int_\Gamma |u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2\right) + \frac{\gamma}{2}\sum_i |u(c_i)|^2$$

(où on a noté $u(c_i)$ la valeur de u au "coin i")

On voit donc que, si $\gamma \geq 0$, on a

$$|\hat{a}(w;u,u)|^2 \;\geq\; \Big(\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2\omega}\|u\|^2_{H^1(\Gamma)}\Big)^2$$

Autrement dit, $\hat{a}$ est coercive et la preuve peut se terminer comme on l'a déjà fait : on est bien dans le cadre de l'alternative de Fredholm.

Notons que la condition $\gamma \geq 0$ correspond justement à un résultat connu en temps (cf. [1]).

4.2 Deuxième partie de la démonstration

On va reprendre en fréquence les calculs effectués par Dong Woo Sheen en temps (cf. [8] par exemple). On remarquera que, avec des CLA d'ordre quelconque, il suffirait de se reporter à [10] où les calculs ont été généralisés.

On dérive donc chaque CLA suivant sa composante tangentielle. On obtient sur la frontière de notre domaine :

$$\text{sur } \Gamma_1^y \;:\quad \left\{\begin{array}{l} -\omega^2 u + 2i\omega\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\omega^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2i\omega\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{sur } \Gamma_1^x \;:\quad \left\{\begin{array}{l} -\omega^2 u + 2i\omega\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ -\omega^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2i\omega\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{sur } \Gamma_0^y \;:\quad \left\{\begin{array}{l} -\omega^2 u - 2i\omega\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\omega^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2i\omega\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{sur } \Gamma_0^x \;:\quad \left\{\begin{array}{l} -\omega^2 u - 2i\omega\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ -\omega^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2i\omega\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = 0 \end{array}\right.$$

On applique l'identité (2.8) à $\bar{u}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$. On présente synthétiquement les résultats sur le bord dans le tableau ci-dessous :

sur Γ_1^x :	$\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$	$\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$	$\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$
sur Γ_1^y :	$\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$	$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$	$\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$	$\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$
sur Γ_0^x :	$-\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$	$-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$	$-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$	$-\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$
sur Γ_0^y :	$-\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$	$-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$	$-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$	$-\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$

On factorise $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}$ sur tout le bord, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ sur Γ_1^x et Γ_0^x et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sur Γ_1^y et Γ_0^y. On obtient que

$$-2i\omega \int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n}\right|^2 \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

On en déduit que $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est nulle sur le bord. Ceci permet de réécrire chaque CLA ; on a par exemple sur Γ_1^y :

$$-\omega^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \omega^2 u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

Il ne reste plus qu'à conclure, ce qui est encore plus simple que dans le cas du bord droit : il est inutile de décomposer en séries de Fourier.

On note $u_{\Gamma_1^y}$ la trace de u sur Γ_1^y. Compte tenu de la nullité de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ sur Γ_1^x et Γ_0^x, on a

$$\frac{d}{dx} u_{\Gamma_1^y}(x=0) = 0 = \frac{d}{dx} u_{\Gamma_1^y}(x=1)$$

D'autre part, on peut constater que u est forcément nulle en chaque coin du domaine. En effet, en chaque coin, on a l'équation de Helmholtz et deux CLA, c'est-à-dire trois équations du type

$$\omega^2 u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\omega^2 u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\omega^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

C'est un système de trois équations indépendantes à trois inconnues ; on en déduit que u est nulle aux coins.

On en déduit entre autres que

$$u_{\Gamma_1^y}(x=0) = 0 = u_{\Gamma_1^y}(x=1)$$

On a bien plus de conditions limites pour l'équation différentielle 4.2 qu'il n'en faut pour conclure à la nullité de u sur toute la frontière. C'était déjà le cas pour sa dérivée normale. CQFD.

Bibliographie

[1] A. BAMBERGER, P. JOLY, and J.E. ROBERTS. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, Avril 1990.

[2] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, 1983.

[3] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde. Technical Report 1790, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, avril 1993.

[4] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique.* Masson, 1987.

[5] T. HA DUONG and P. JOLY. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Octobre 1990.

[6] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.

[7] P. JOLY and O. VACUS. Stabilité de conditions aux limites pour l'équation des ondes par des méthodes énergétiques : le cas des bords courbes. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.

[8] D-W SHEEN. Absorbing boundary conditions for wave transmissions. Technical report, Purdue University, July 1991.

[9] L. TREFETHEN and L. HALPERN. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.

[10] O. VACUS. Singularités de frontières du domaine de calcul : le problème du coin. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Les premières conditions absorbantes **5**
2.1 Rappel : cas du demi-espace en temps 5
2.2 Le problème en fréquence 7
2.3 Un cas à part : la condition d'ordre 1 9
2.3.1 Alternative de Fredholm 9
2.3.2 Fin de la démonstration 11
2.4 La condition d'ordre 2 11
2.4.1 Alternative de Fredholm 12
2.4.2 Fin de la démonstration 13
2.4.3 Autres conditions sur $\Gamma \setminus \Gamma_1^y$ 15
2.5 Une condition d'ordre 2 plus générale 16

3 Le cas général **19**
3.1 Hypothèses, notations et résultats désirés 19
3.2 Premiers calculs 21
3.3 Une EDP matricielle 23
3.4 Cas des autres conditions "secondaires" 27
3.5 Le lemme 28

4 Un résultat pour le coin **32**
4.1 Alternative de Fredholm 32
4.2 Deuxième partie de la démonstration 34



Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue F´elix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399