



# Stabilité des conditions aux limites pour l'équation des ondes par des méthodes énergétiques : le cas des bords courbes

Patrick Joly, Olivier Vacus

► **To cite this version:**

Patrick Joly, Olivier Vacus. Stabilité des conditions aux limites pour l'équation des ondes par des méthodes énergétiques : le cas des bords courbes. [Rapport de recherche] RR-2849, INRIA. 1996. <inria-00073842>

**HAL Id: inria-00073842**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073842>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Stabilité des conditions aux limites pour  
l'équation des ondes par des méthodes  
énergétiques : le cas des bords courbes*

Patrick Joly, Olivier Vacus

**N° 2849**

Mars 1996

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



*Rapport  
de recherche*



# Stabilité des conditions aux limites pour l'équation des ondes par des méthodes énergétiques : le cas des bords courbes

Patrick Joly, Olivier Vacus \*

Thème 4 — Simulation  
et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 2849 — Mars 1996 — 48 pages

**Résumé :** Ha Duong et Joly ont étudié par des méthodes énergétiques la stabilité de conditions aux limites pour l'équation des ondes dans le cas du demi-espace homogène. Ils considéraient donc un bord droit infini. Ce rapport constitue un prolongement de leurs travaux, où seront étudiées les frontières courbes suffisamment régulières d'ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous reprenons leurs démonstrations en les adaptant du fait de la courbure du bord ; on établit de nouveau un résultat de stabilité forte au sens de Kreiss pour une famille de conditions à l'aide de nouvelles estimations a priori.

Les conditions de stabilité sont similaires à celles établies pour le bord droit.

**Mots-clé :** Equation des ondes - Conditions aux limites - Frontières courbes régulières - Estimations a priori.

*(Abstract: pto)*

INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

# On the Stability Analysis of Boundary Conditions for the Wave Equation by Energy Methods: the Case of Curved Boundaries

**Abstract:** Ha Duong and Joly considered the stability theory of boundary conditions for the wave equation on a homogeneous half-space from the point of view of energy techniques. It corresponds to the case of an infinite straight boundary. We would like in this report to continue their work by the study of a smooth curved boundary of a bounded domain of  $\mathbb{R}^2$ .

Their demonstrations are adapted to take into account that the boundaries are curved ; we establish this time again a result of strong stability in the sense of Kreiss for a class of conditions by new a priori estimates.

The stability's conditions are the same as those established by Ha Duong and Joly.

**Key-words:** Wave equation - Boundary conditions - Smooth curved boundary - Energy estimates.

# Chapitre 1

## Introduction

Suite aux résultats de Kreiss ([6], [9]), et aux travaux de Trefethen et Halpern ([10]), la théorie de la stabilité forte des conditions aux limites absorbantes (CLA) pour l'équation des ondes a été ré-examinée par Ha Duong et Joly, qui ont montré que cette stabilité correspondait toujours à la décroissance d'une certaine énergie. Leurs travaux concernent le cas du demi-espace, c'est-à-dire le cas d'une frontière droite infinie. Nous souhaitons nous traiter ici de façon analogue le cas de frontières courbes suffisamment régulières.

Par rapport aux travaux existants sur le sujet (théorie de Kreiss), nos motivations sont les mêmes que celles de Ha Duong et Joly : obtenir des estimations  $L^\infty$  en temps des solutions au lieu d'estimations  $L^2$ , pouvoir traiter le cas des coefficients variables, ...

Comme on le verra sur un exemple, le fait, pourtant bien naturel dans le cas du bord droit, de connaître a priori la direction normale à la frontière joue un rôle fondamental dans leurs démonstrations ([4]). Pour cette raison, mais également par commodité pour exprimer la courbure de la frontière, nous avons choisi dans notre cas de nous placer dans un repère local  $(s, n)$  (où  $s$  est l'abscisse curviligne et  $n$  est la coordonnée suivant la normale sortante à la frontière), et de raisonner pendant de petits intervalles de temps dont la durée est liée à la courbure. Une fois cette démarche adoptée, ce travail se rapproche de celui mené sur le bord droit ; des termes nouveaux liés à la courbure sont

toutefois à considérer pour obtenir la décroissance de nouvelles énergies. On retrouve une nouvelle fois des conditions de stabilité désormais classiques (cf. [4]) et que nous rappelons ci-dessous, dans le cas où l'on considère un bord droit :

Sur un bord droit de normale sortante selon  $(Oy)$ , un opérateur de la forme

$$B_N^{t,y} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

est celui d'une CLA stable pour l'équation des ondes si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1 \\ \beta_k \geq 0, 1 \leq k \leq N \\ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} < \gamma \end{cases}$$

Le rapport s'organise ainsi.

On commence par illustrer les méthodes énergétiques sur un exemple simple pour rappeler la technique de Ha Duong et Joly (pour de plus amples informations, sur ce point comme sur les suivants – justification des hypothèses, cadre fonctionnel, ... –, on renvoie bien sûr à [4]).

Dans un deuxième temps, on montre comment tenir compte de la courbure de la frontière, et la structure de nos démonstrations est présentée dans un cadre général. Enfin dans une partie purement technique, on indique comment obtenir dans tous les cas de figures la partie principale de ces démonstrations : les estimations a priori. On distinguera les cas où le domaine est convexe et les cas où il ne l'est pas. (On verra en effet que l'hypothèse de convexité du domaine, qui sera discutée, joue un rôle particulier.)

Enfin, on montrera la difficulté d'obtenir des résultats analogues en fréquence.

## Chapitre 2

# Présentation des problèmes étudiés

Dans ce premier chapitre, nous allons définir le sujet exact de notre étude, le préciser par rapport au cas du bord droit et montrer clairement comment s'articulent nos démonstrations.

### 2.1 Le domaine d'étude

Soit  $\Omega$  un ouvert borné convexe ou non.

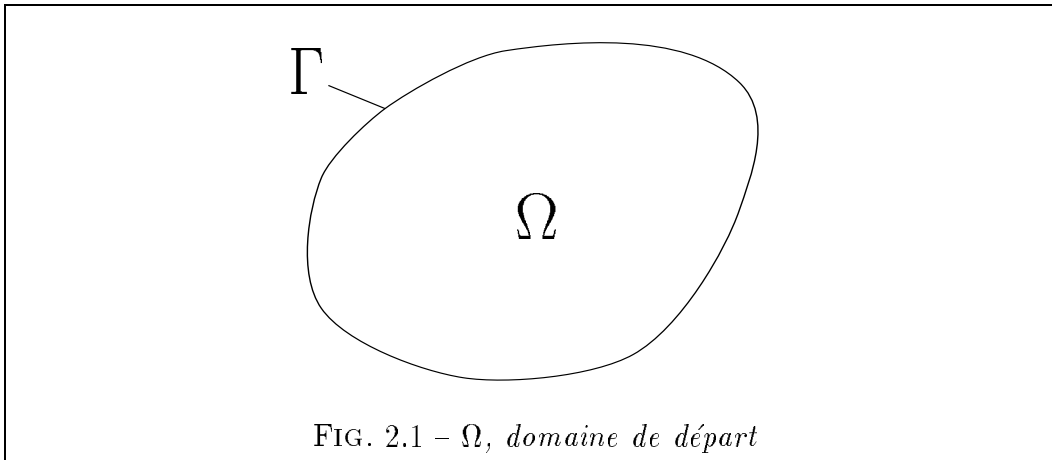


FIG. 2.1 –  $\Omega$ , *domaine de départ*



On pose naturellement  $\Gamma = \partial\Omega$ .  $\Gamma$  est supposée “suffisamment régulière”. Plus précisément, on va pour travailler définir  $\Gamma$  à l’aide de l’abscisse curviligne :

$$(2.1) \quad \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases},$$

où on impose à  $f$  et  $g$  d’être  $C^2$ . On suppose de plus que

$$f'^2(s) + g'^2(s) = 1$$

On note enfin  $K(s)$  la courbure, avec

$$(2.2) \quad K(s) = f'(s)g''(s) - f''(s)g'(s)$$

On suppose qu’elle est bornée et on notera  $M_K$  un majorant :

$$(2.3) \quad \forall s : |K(s)| \leq M_K$$

On notera  $R(s)$  le rayon de courbure

$$(2.4) \quad R(s) = \frac{1}{K(s)}$$

Une question peut se poser concernant la définition de notre problème : est-il nécessaire de travailler sur un domaine convexe ?

Notons que cette interrogation est un peu gratuite d’un point de vue purement théorique car nous avons développé deux démonstrations différentes, l’une plus élégante mais supposant la convexité, l’autre plus robuste. Comme on le précisera donc dans chaque cas, cette hypothèse de convexité sera donc par la suite suivant les cas tantôt indispensable, tantôt superflue, mais nous sommes toujours en mesure de conclure.

Toutefois, il faut peut-être rappeler que les conditions limites absorbantes ne modélisent **que** des ondes **sortantes**. En conséquence, travailler en pratique avec un domaine non convexe, c’est s’exposer à négliger des ondes qui, après s’être propagées dans le domaine et en être sorties (cf. figure ci-dessous), reviendraient – normalement – dans le domaine ...

L'hypothèse de convexité est donc de toute façon nettement préférable dans la pratique.

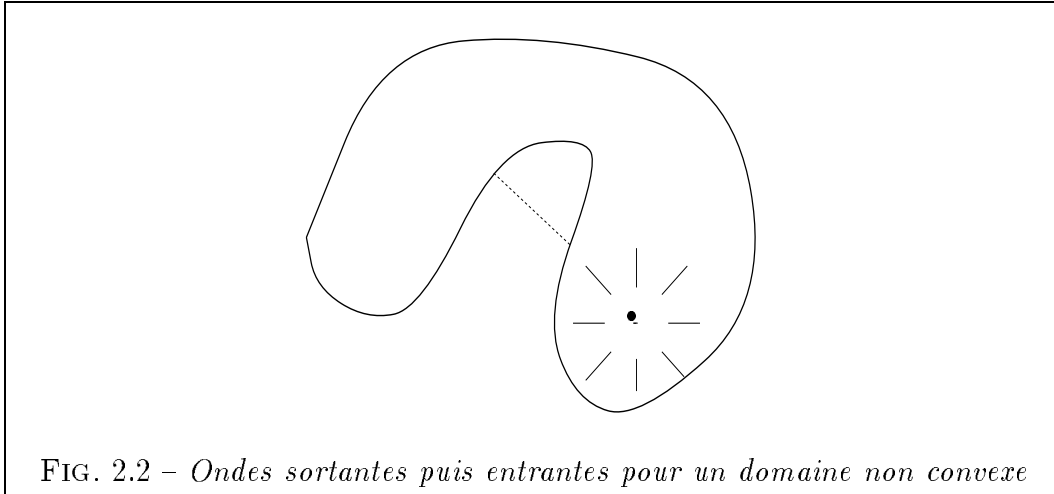


FIG. 2.2 – Ondes sortantes puis entrantes pour un domaine non convexe

Quand nous supposerons vérifiée l'hypothèse de convexité, nous pourrons affirmer que la courbure  $K(s)$  est de **signe constant** – il sera négatif en l'occurrence, vu le choix du repère que nous allons faire. C'est pour cette raison que le cas des ouverts convexes se prêtera à une démonstration adaptée.

## 2.2 Un repère local

Notre idée est d'exprimer l'équation des ondes (2.6) et la condition de bord en terme de coordonnées normale et tangentielle, c'est-à-dire en fait disposer d'un repère approprié où la courbure s'exprimera naturellement, et surtout où les calculs faits sur le bord droit se généraliseront facilement. La question est donc de savoir à quelle condition le changement de repère  $(x,y) \rightarrow (s,n)$  (coordonnées cartésiennes – coordonnées normales) est licite. (On comprend aisément que ce changement de repère ne saurait être valable pour tout point de  $\Omega$ .)

Le calcul du jacobien est le suivant :

$$\begin{cases} x = f(s) - g'(s)n \\ y = g(s) + f'(s)n \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} f'(s) - g''(s)n & -g'(s) \\ g'(s) + f''(s)n & +f'(s) \end{vmatrix}$$

$$J = f'^2(s) + g'^2(s) - n(f'(s)g''(s) - f''(s)g'(s))$$

$$J = 1 - K(s)n = 1 - \frac{n}{R(s)}$$

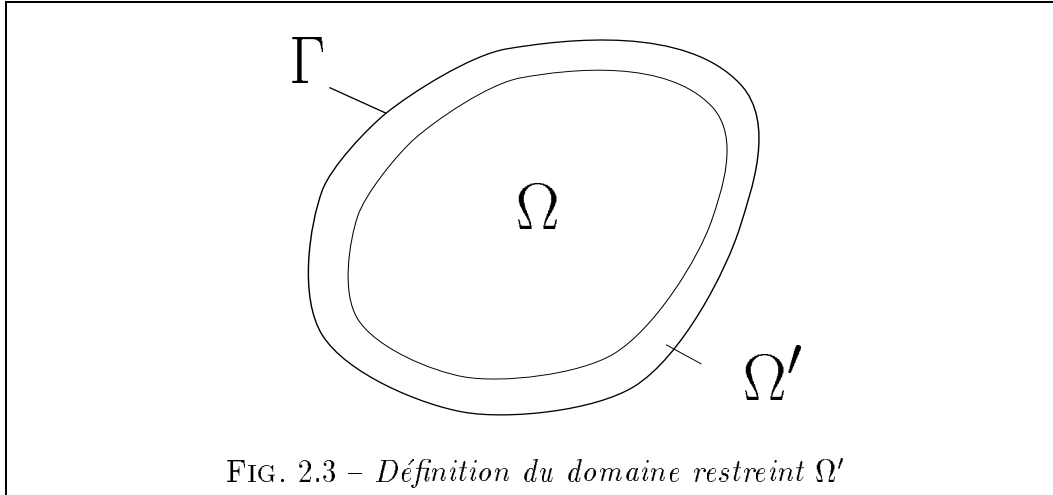
Pour que ce jacobien ne s'annule pas, il suffit donc que:  $\forall s : n < R(s)$ .  
La limitation pour pouvoir parler de repère local sera donc :

$$n < R_{min} = \frac{1}{M_K}$$

Il est alors aisé de définir la courbe  $\Gamma_{int}$ , qui admet pour équation dans le nouveau repère :

$$(2.5) \quad n = cste = R_0 = \alpha R_{min} \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

On considère alors le domaine  $\Omega'$  compris entre  $\Gamma$  (sa frontière extérieure) et  $\Gamma_{int}$  (sa frontière intérieure). Naturellement,  $\Omega' \subset \Omega$ , et dans  $\Omega'$ , on a montré qu'on pouvait travailler en coordonnées  $(s,n)$ .



## 2.3 Les équations du problème

Il s'agit dans ce paragraphe de préciser les équations de notre problème une fois écrites dans notre nouveau repère. Des modifications apparaissent dans l'écriture de l'équation des ondes, des opérateurs des conditions limites absorbantes et enfin dans l'identité énergétique sur laquelle se fondent nos calculs.

### 2.3.1 L'équation des ondes

Il nous faut en premier lieu réécrire l'équation des ondes :

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On calcule alors dans le nouveau repère :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} = f' \frac{\partial}{\partial x} + g' \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial n} = -g' \frac{\partial}{\partial x} + f' \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Soit en inversant ce système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = f' \frac{\partial}{\partial s} - g' \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial y} = g' \frac{\partial}{\partial s} + f' \frac{\partial}{\partial n} \end{cases}$$

On en déduit alors que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = f'^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + g'^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} - 2f'g' \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + f'f'' \frac{\partial}{\partial s} - f'g'' \frac{\partial}{\partial n}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = g'^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + f'^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} + 2f'g' \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + g'g'' \frac{\partial}{\partial s} + g'f'' \frac{\partial}{\partial n}$$

Tous calculs effectués, on tire la nouvelle expression de l'équation des ondes :

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + K(s) \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

On constate l'apparition d'un nouveau terme, lié à la courbure à l'abscisse curviligne  $s$  ; mais comme on le verra par la suite, l'important est qu'il soit d'ordre 1.

### 2.3.2 Les conditions limites

Sur la frontière  $\Gamma$  de notre domaine, on impose bien sûr une condition limite absorbante (CLA) : c'est l'objet de notre étude. Sans rentrer dans les détails – voir pour cela [5],[7] ou bien encore [2] –, rappelons que sur un bord droit de normale sortante selon  $(Oy)$ , la condition d'ordre 1 s'écrit :

$$(2.8) \quad C1 : B_1^{t,x,y}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

et la condition d'ordre 2

$$(2.9) \quad C2 : B_2^{t,x,y}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Pour les ordres plus élevés, les conditions issues des approximations de Padé peuvent se calculer par récurrence. A l'ordre  $N$ , comme on l'a rappelé en introduction, on peut considérer en toute généralité les opérateurs de la forme

$$B_N^{t,y} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

En ce qui concerne les expressions dans le nouveau repère de ces conditions aux limites, deux "options" sont possibles.

Premièrement, elles peuvent être obtenues en fonction des nouvelles coordonnées par une "transposition" directe de l'expression des conditions limites absorbantes sur le bord droit, c'est-à-dire qu'on se contente de substituer  $s$  à  $x$  et  $n$  à  $y$ . On appellera à l'avenir les conditions ainsi obtenues "conditions classiques" car elles ne font pas intervenir de termes liés à la courbure. On aura par exemple à l'ordre 1 :

$$(2.10) \quad C1 : B_1^{t,s,n}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 ,$$

à l'ordre 2

$$(2.11) \quad C2 : B_2^{t,s,n}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 ,$$

etc.

Toutefois, pour une meilleure approximation, il peut être souhaitable de tenir compte de la courbure, et pour cela, d'adjoindre à ces opérateurs des termes supplémentaires. Nous avons retenu dans ce cas les expressions proposées dans [11] pour obtenir ce que nous appellerons les "conditions avec terme de courbure". Elles sont obtenues par l'ajout d'un unique terme à l'opérateur des conditions classiques :

$$(2.12) \quad CN : \mathcal{B}_N^t(u) = B_N^t(u) + \frac{K}{2} \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}} = 0$$

On aura ainsi par exemple à l'ordre 1 :

$$(2.13) \quad \mathcal{C}1 : \mathcal{B}_1^{t,s,n}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2}u = 0 ,$$

et à l'ordre 2 :

$$(2.14) \quad \mathcal{C}2 : \mathcal{B}_2^{t,s,n}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Comme on va le constater, c'est le fait que le nouveau terme dans la condition de bord est d'ordre inférieur qui nous permettra de conclure, car les termes nouveaux qu'il va engendrer seront redevables de théorèmes de majoration ad hoc. Cette explication est importante ; elle nous permet d'affirmer que nos démonstrations s'appliquent non seulement aux conditions que nous avons retenues, mais également à toutes celles dont l'opérateur se décomposerait en la somme de l'opérateur d'une condition "classique" d'ordre  $N$  d'une part, et des termes quelconques mais tous d'ordre inférieur à  $N$  d'autre part.

### 2.3.3 Une nouvelle identité énergétique

Toutes les démonstrations de [4] sont fondées sur une même identité énergétique, identité vérifiée par toute fonction solution de l'équation des ondes :

$$(2.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Pour l'obtenir, il suffit – presque – d'appliquer une fois la formule de Green. C'est ce calcul que nous devons reprendre dans le repère local du fait de l'expression modifiée de l'équation des ondes.

Après multiplication de (2.7) par  $\frac{\partial v}{\partial t}$ , on intègre sur  $\Omega'$  :

$$(2.16) \quad \int_{\Omega'} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + K \frac{\partial v}{\partial n} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Nous notons  $\Delta_l v$  le laplacien en coordonnées locales :

$$(2.17) \quad \Delta_l v = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}$$

On a donc

$$(2.18) \quad \int_{\Omega'} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \int_{\Omega'} \Delta_l v \frac{\partial v}{\partial t} + \int_{\Omega'} K \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

On applique comme dans le cas du bord droit la formule de Green-Laplace :

$$(2.19) \quad \int_{\Omega'} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_l v \frac{\partial \nabla_l v}{\partial t} \right) + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t} = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t},$$

où  $\nabla_l v$  désigne le gradient en coordonnées locales :

$$(2.20) \quad \nabla_l v = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n}$$

Finalement, on a obtenu que

$$(2.21) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla_l v|^2 \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t} + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t}$$

On notera  $E(u, t)$  “l’énergie” dont la dérivée apparaît dans cette identité :

$$(2.22) \quad E(u, t) = \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right)$$

L’équation (2.21) constitue notre nouvelle identité énergétique, à laquelle nous ferons donc référence dans tous les calculs ultérieurs ; nous l’appliquerons à toute fonction solution de l’équation des ondes sur  $\Omega'$ .

Par rapport au cas du bord droit, un terme supplémentaire est apparu dans le membre de gauche. Son origine est purement technique : il est dû à un changement de repère. Mais de même que le terme nouveau dans l’opérateur des conditions de bord – dû à une raison de fond : la courbure du bord –, il est d’ordre inférieur aux termes qui constituent l’énergie  $E(u, t)$ . C’est pourquoi nous pouvons apporter une même réponse à ces deux problèmes, pourtant d’origine différente.



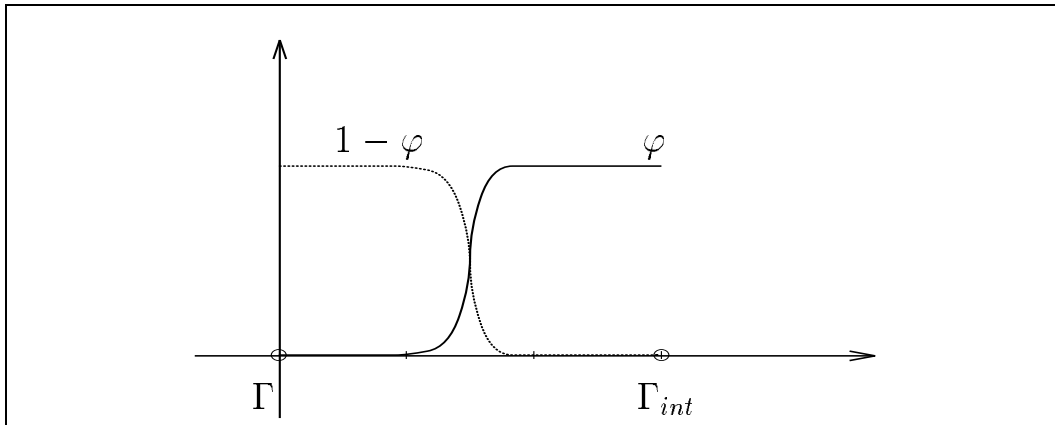
## 2.4 Schéma des démonstrations

On cherche à généraliser les techniques énergétiques mises au point pour le bord droit en vue d'établir la stabilité des CLA pour le problème :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ B_N^{t,x,y}(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u(x,y,0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u_1 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Comme on l'a vu, les calculs "en s et n" ne sont licites que sur  $\Omega'$  ; c'est pourquoi on va devoir opérer une décomposition du problème initial en deux sous-problèmes en décomposant les données initiales.

Introduisons pour ce faire une fonction  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , qui vaut 1 sur l'intérieur de  $\Omega$ , "s'aplatit" et finalement s'annule au bord :



On pourrait prendre par exemple :

- $\varphi = 1$  sur  $\Omega \setminus \Omega'$  ;
- $\varphi$  sur  $\Omega'$  :

$$- \varphi(s, n) = 0 \text{ si } n \in \left[0, \frac{R_0}{4}\right],$$

$$\begin{aligned}
- \varphi(s, n) &= 1 \text{ si } n \in \left[ \frac{R_0}{2}, R_0 \right], \\
- \varphi(s, n) &= e^{\frac{x-1}{x}} \left( 1 - e^{\frac{x}{x-1}} \right) \text{ sinon, où } x = 4 \left( n - \frac{R_0}{4} \right).
\end{aligned}$$

On va alors pouvoir à deux sous-problèmes en décomposant les conditions initiales du problème de base :

$$\begin{aligned}
(2.24) \quad u_0(x, y) &= \varphi(x, y)u_0(x, y) + [1 - \varphi(x, y)]u_0(x, y) \\
&= u_0^1(x, y) + u_0^2(x, y)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2.25) \quad u_1(x, y) &= \varphi(x, y)u_1(x, y) + [1 - \varphi(x, y)]u_1(x, y) \\
&= u_1^1(x, y) + u_1^2(x, y)
\end{aligned}$$

Ceci fait, on distingue :

1. un premier problème, avec pour conditions initiales  $(u_0^1, u_1^1)$  :

$$(2.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } R^2 \\ u(x, y, 0) = u_0^1(x, y) & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1^1(x, y) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ce problème, a priori défini dans tout l'espace, est en fait, du fait de la propagation des ondes à vitesse finie, strictement intérieur à  $\Omega$  pendant un temps  $\tau$  :

$$\tau = \frac{R_0}{4} = \frac{\alpha}{4M_K}$$

( $\tau$  est le temps minimum nécessaire à l'onde pour atteindre le bord  $\Gamma$  vu qu'on a supposé  $c = 1$ .) Pour cette raison, il ne fait pas intervenir de conditions de bord, et puisqu'on laisse l'onde se propager librement, on a bien sûr conservation de l'énergie.

2. un second problème, avec pour conditions initiales  $(u_0^2, u_1^2)$  :

$$(2.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ B_N^{t,x,y}(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u(x, y, 0) = u_0^2(x, y) & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1^2(x, y) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ce second problème est lui en réalité défini dans  $\Omega'$ , et le reste pendant la même durée  $\tau$ . Il est pour cette raison équivalent à :

$$(2.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + K(s) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Omega' \\ B_N^{t,s,n}(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u(s, n, 0) = u_0^2(s, n) & \text{sur } \Omega' \\ \frac{\partial u}{\partial t}(s, n, 0) = u_1^2(s, n) & \text{sur } \Omega' \end{cases}$$

C'est ce problème qui est l'objet à proprement parler de notre étude, puisque c'est pour ce problème qu'intervient le bord extérieur et donc les conditions limites absorbantes.

Au bout d'un temps  $\tau$ , il suffira bien sûr de sommer les contributions respectives de chacun des deux problèmes, puis de recommencer le même procédé avec pour nouvelles conditions initiales  $u(x, y, \tau)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, \tau)$ . On notera que la non nullité de  $\tau$ , ou de manière équivalente l'existence de  $\Omega'$ , sont bien sûr directement liés au caractère borné de la courbure.

En résumé, on peut résumer ainsi le travail que nous présentons dans la suite de ce rapport : on se place sur  $\Omega'$  pendant le temps  $\tau$  que nous avons défini plus haut, et on considère une solution du problème couplé équation des ondes - condition limite. On sait que cette solution est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur la frontière intérieure pendant la durée de l'expérience, et on tente d'exhiber une énergie, c'est-à-dire une forme quadratique définie positive, qui

soit décroissante au cours du temps. On en déduit alors que cette énergie au temps  $t$  peut-être contrôlée en fonction de normes des données initiales, ce qui constitue le résultat de stabilité forte annoncé.

## Chapitre 3

### Les conditions d'ordre 1 et 2

On commence par traiter le cas des conditions les plus “fines”, c’est-à-dire avec le terme de courbure, pour lesquelles les démonstrations sont un peu techniques mais le cas général, pour  $N$  quelconque, relèvera de telles techniques.

Toutefois, on montrera à la fin de ce chapitre qu’il existe des façons plus élégantes de conclure pour les conditions d’ordre 1 et 2 sans termes de courbures, et ce, en travaillant sur un domaine convexe.

Si nous commençons avec la condition d’ordre 1 “classique”, c’est seulement parce qu’il s’agit d’un cas extrêmement particulier.

#### 3.1 La condition d’ordre 1 “classique”. Rapports.

Il est connu (cf. [8] par exemple) que ce cas ne présente pas de difficultés. La condition de bord s’écrit

$$(3.1) \quad B_1^t(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Pour la démonstration, il suffit d’écrire l’identité (2.15) :

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Sans faire **aucune hypothèse sur la géométrie de la frontière**, il vient :

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u|^2 \right) \right] = - \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 ,$$

ce qui indique la décroissance de l'énergie en temps.

Puisqu'on en est aux rappels, il peut être utile de souligner que dans les calculs menés par Ha Duong et Joly dans le cas du bord droit, les deux points importants sont les suivants :

- la réécriture de l'opérateur de la condition de bord modulo l'équation des ondes, uniquement en dérivées en temps et en dérivées normales ; par exemple, pour la condition d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Cette réécriture sera dans notre cas légèrement différente du fait de la nouvelle expression de l'équation des ondes (2.7).

- l'astuce de calcul qui consiste à appliquer l'identité (2.15) à des fonctions judicieusement choisies et qui permet de conclure.

Toujours pour la condition d'ordre 2 par exemple, en appliquant (2.15) à  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et à  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , une simple somme mène en effet à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 \right) \right] \\ = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = -2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right|^2 \end{aligned}$$

De nouveau, on a la décroissance d'une énergie, des estimations a priori, etc. Ce sont ces deux points que nous cherchons à reprendre dans les cas qui nous intéressent.

### 3.2 Condition d'ordre 1 avec terme de courbure

La condition est dans ce cas :

$$C1 : \mathcal{B}_1^t(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2}u = 0$$

On mène les calculs directement à partir de (2.21) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \right] = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t}$$

L'idée – nouvelle – dont on va se servir est celle d'une décomposition particulière de l'opérateur  $\mathcal{B}_1^t$ . Ici, le calcul consistera simplement à ajouter quelques termes au membre de droite de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \right] &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{K}{2} u \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{K}{2} u \frac{\partial u}{\partial t} \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{K}{2} u \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{K}{2} u \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Rappelons que l'on pose

$$(3.4) \quad E(u, t) = \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right)$$

Après factorisation sur le bord, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(u, t)) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} u \right) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{K}{2} u \right) \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{K}{2} u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

En se servant de la condition sur le bord, on a donc montré que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(u, t)) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{K}{2} u \right|^2 + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t},$$

et on peut donc en déduire, puisque  $M_k$  est un majorant de la courbure, que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(u, t)) \leq +\frac{M_K}{8} \int_{\Gamma} |u|^2 + \frac{M_K}{2} \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right)$$

Notons que la courbure – donc en particulier son signe – ne jouera plus aucun rôle dans la suite des calculs. Seul compte le fait qu'elle soit bornée.

Contrairement au cas du bord droit, nous ne sommes pas parvenu à montrer que l'énergie d'ordre 2 associée à  $u$  telle que nous l'avons définie est décroissante. Il faut ici d'avantage travailler pour obtenir une estimation a priori.

Constatons d'abord que le premier terme du membre majorant est redevable du théorème de trace, ce qui permet d'affirmer que

$$(3.5) \quad \int_{\Gamma} |u|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |u|^2 \right)$$

On en déduit que

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \leq C M_K \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |u|^2 \right)$$

(Avertissement : pour éviter d'alourdir inutilement nos calculs, nous désignons par  $C$ , dans les nombreuses inégalités auxquelles nous avons recours, une constante universelle, réelle, strictement positive, et vérifiant néanmoins

$$C + C = C \quad \text{et} \quad C * C = C$$

Nous remercions par avance le lecteur de son aimable compréhension.)

Il ne nous reste qu'à nous débarrasser du module de  $u$  dans le membre de droite. On a recours pour ce faire à une inégalité de Poincaré. En effet, étant donné que  $u$  demeure identiquement nulle sur  $\Gamma_{int}$ , on a

$$\int_{\Omega'} |u|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right)$$



Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \right] \leq C M_K \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right)$$

soit encore

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} (E(u, t)) \leq 2C M_K E(u, t)$$

On peut alors appliquer le lemme de Gronwall. On en déduit que

$$(3.8) \quad E(u, t) \leq E(u, 0) e^{2C M_K t},$$

donc, pour  $0 < t < \tau$ ,

$$(3.9) \quad E(u, t) \leq E(u, 0) e^{2C M_K \tau}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que  $E(u, 0)$  se contrôle effectivement en fonction des données initiales, ce qui est direct :

$$(3.10) \quad E(u, 0) \leq \|u_0\|_{H_1(\Omega')}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega')}^2$$

On a donc établi que

$$(3.11) \quad \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \leq A \left( \|u_0\|_{H_1(\Omega')}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega')}^2 \right)$$

avec

$$A = e^{2C M_K \tau}$$

ce qui constitue bien un résultat de stabilité forte dans la mesure où la norme de **toutes** les dérivées du premier ordre de la solution  $u$  sont majorées par des normes comparables des données initiales.

On notera que la constante  $A$  n'est pas fonction de la courbure, dans la mesure où  $\tau$  est inversement proportionnel à  $M_K$ . Cette propriété ne sera plus vérifiée pour les conditions d'ordre plus élevé.

### 3.3 Condition d'ordre 2 avec terme de courbure

La condition sur le bord est à présent :

$$(3.12) \quad C2 : \mathcal{B}_2^t(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

On commence dans un premier temps par appliquer l'identité (2.21) à

$$v_1 = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial n},$$

et on somme les deux égalités ainsi obtenues. Il vient :

$$(3.13) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|^2 \right) = \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n}$$

ou encore

$$(3.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [E(v_1, t) + E(v_2, t)] = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

On réécrit ensuite la condition de bord modulo l'équation des ondes :

$$(3.15) \quad \mathcal{B}_2^t(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \left( \mathcal{B}_2^t(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 - K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \right)$$

Nous exploiterons cette condition sous la forme suivante :

$$\mathcal{B}_2^t(u) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) + \left( -K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

Pour utiliser ce nouveau regroupement des termes, on va décomposer le terme

$$(3.16) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \\ + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

en ajoutant et en retranchant un certain nombre de “termes manquants” :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) = \\ \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) \left( -K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left( -K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ - \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right) \left( -K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left( -K \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (3.17)$$

En opérant ainsi, nous avons fait apparaître l’opérateur de la CLA, ce qui nous permet alors d’écrire

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left| 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 - \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|^2 \\ + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left| \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2$$

On revient alors à l’égalité de départ (3.14) pour obtenir que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(v_1, t) + E(v_2, t)) \leq \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left| \frac{K}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \quad (3.18)$$

et donc

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(v_1, t) + E(v_2, t)) &\leq M_K^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + M_K^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \\ &\quad + M_K \int_{\Omega'} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \end{aligned}$$

Cette fois encore, nous n'avons pas montré que l'énergie est décroissante, mais de nouveau, on s'est débarrassé des termes d'ordre  $N$  (ici  $N = 2$ ) sur le bord ; on va réussir à conclure car les termes restants sont d'ordre inférieur. Il faut aussi remarquer que le signe de la courbure n'intervient pas cette fois non plus dans notre démonstration ; ce résultat est donc valable pour des domaines convexes ou non.

On commence par les deux premiers termes du membre de droite qui sont contrôlables par le théorème de trace, et les calculs se mènent comme dans le paragraphe précédent :

$$(3.20) \quad \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 \right)$$

et

$$(3.21) \quad \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|^2 \right)$$

Il nous faut enfin nous débarrasser des termes de degré 1 et on use à cet effet d'une inégalité de Poincaré. En effet, on sait que dans le cadre de notre problème,  $u$  est identiquement nulle en dehors de  $\Omega'$ , donc nulle ainsi que sa dérivée en temps sur  $\Gamma_{int}$ . On en déduit que

$$(3.22) \quad \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 \right)$$

et

$$(3.23) \quad \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq C \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 \right)$$

Finalement, on obtient que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [E(v_1, t) + E(v_2, t)] \leq A (E(v_1, t) + E(v_2, t))$$

avec

$$A = C M_K$$

et on peut alors appliquer le lemme de Gronwall. On notera qu'à présent la constante  $A$  est fonction de  $M_K$ .

Dernier point à démontrer : le contrôle de  $E(v_1, 0) + E(v_2, 0)$  par  $\|u_0\|_{H^2(\Omega')}^2$  et  $\|u_1\|_{H^1(\Omega')}^2$ . Pour cela, on opère

- par une majoration directe pour les dérivées spatiales
- via l'équation des ondes pour le dernier terme

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega')}^2 \leq M_K \|u_0\|_{H^2(\Omega')}^2$$

Finalement, nous montre facilement que

$$(3.24) \quad \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|^2 \right) \leq C \left( \|u_0\|_{H_2(\Omega')}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Omega')}^2 \right)$$

Toutes les dérivées secondes de  $u$  peuvent être uniformément majorées par  $\|u_0\|_{H_2(\Omega')}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Omega')}^2$ , à l'exception de  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ . Cette ultime estimation est obtenue par le biais de l'équation des ondes :

$$(3.25) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + K(s) \frac{\partial u}{\partial n}$$

On rappelle que  $\frac{\partial u}{\partial n}$  est bien contrôlé (cf. 3.21) et que  $K$  est majoré.

Ceci achève la démonstration.

### 3.4 La condition d'ordre 2 "classique"

La raison pour laquelle nous traitons ce cas à présent, bien qu'il relève des résultats du paragraphe précédent, est qu'il existe une façon beaucoup plus élégante de mener à bien les calculs : plutôt qu'une majoration "grossière" des termes d'ordre 1, ceux-ci sont associés à l'énergie, qui prend donc une nouvelle forme, mieux adaptée. On va voir qu'on évite ainsi d'avoir recours au théorème de trace et à l'inégalité de Poincaré.

Comme l'indique le titre de ce paragraphe, l'opérateur de notre condition de bord, privé de terme de courbure, sera donc :

$$(3.26) \quad C2 : B_2^t(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$

Comme dans le paragraphe précédent, on somme dans un premier temps les expressions obtenues en appliquant l'identité (2.21) à  $v_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $v_2 = \frac{\partial u}{\partial n}$ . Nous repartons donc de (3.14) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(v_1, t) + E(v_2, t)) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

Pour pouvoir exploiter la condition de bord, nous rajoutons cette fois directement de part et d'autre de l'égalité le "terme manquant"

$$- \int_{\Gamma} K \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \frac{\partial u}{\partial n}$$

Pour gérer ce nouveau terme dans le membre de gauche, nous allons l'ajouter à l'énergie, et c'est là qu'intervient l'hypothèse de convexité. En effet, ceci est possible compte tenu du fait que, quand  $\Omega$  est convexe,

$$\forall s \quad , \quad K(s) \leq 0 \quad ,$$

comme on l'a rappelé au cours du premier chapitre. On a alors :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (E(v_1, t) + E(v_2, t)) + \int_{\Gamma} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \frac{\partial u}{\partial n} =$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - K \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

ou en se servant de la CLA :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( E(v_1, t) + E(v_2, t) + \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) = \\ -2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \end{aligned}$$

On peut poser :

$$\hat{E}_2(t) = E(v_1, t) + E(v_2, t) + \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2$$

On a alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\hat{E}_2(t)) \leq M_K \int_{\Omega'} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)$$

puis, en usant d'inégalités de Young appropriées :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\hat{E}_2(t)) \leq \frac{1}{2} M_K \int_{\Omega'} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|^2 \right)$$

et finalement

$$\frac{d}{dt} (\hat{E}_2(t)) \leq M_K \hat{E}_2(t)$$

On utilise maintenant le lemme de Gronwall pour affirmer que

$$\hat{E}_2(t) \leq \hat{E}_2(0) e^{M_K t} \leq \hat{E}_2(0) e^{M_K \tau}$$

Comme  $\tau = \frac{\alpha}{4M_K}$ , on a même dans ce cas

$$\hat{E}_2(t) \leq e^{\frac{\alpha}{4}} \hat{E}_2(0) \quad \forall t \in [0, \tau]$$

Contrairement au cas du paragraphe précédent, la constante ne dépend plus du majorant de la courbure, ce qui est dû bien sûr au fait qu'il n'y a pas eu

de termes de bord à majorer. Nous allons perdre de résultat en cherchant à contrôler  $\hat{E}_2(0)$  par  $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2$  et  $\|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2$  :

- par l’intermédiaire de l’équation des ondes, qui indique que

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M_K \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2$$

- par une majoration directe pour les dérivées spatiales
- par le théorème de trace en ce qui concerne le terme de bord :

$$\int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \leq C M_K \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2$$

On conclut que

$$\hat{E}_2(0) \leq C M_K \left( \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)$$

Donc,  $\forall t \in [0, \tau]$ ,

$$\hat{E}_2(t) \leq C_{ste} * M_K \left( \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)$$

et on peut poursuivre comme on l’a déjà fait.

### 3.5 Une condition d’ordre 2 “classique” plus générale

L’intérêt de ce paragraphe n’est pas fondamental. Nous voulons simplement montrer que notre démonstration s’adapte sans effort au cas de coefficients indéterminés.

Pour la condition suivante

$$(3.27) \quad C2 : B_2^t(u) = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 ,$$



qui se réécrit

$$(3.28) \quad C2 : B_2^t(u) = (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} + \beta K \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 ,$$

on va combiner  $(\gamma - \beta)$  fois l'identité (2.21) appliquée à  $v_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\beta$  fois cette même identité appliquée à  $v_2 = \frac{\partial u}{\partial n}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\gamma - \beta) E(v_1, t) + \beta E(v_2, t)) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \\ &\quad + \beta \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \end{aligned}$$

Comme on l'a déjà fait, on rajoute le terme manquant de chaque côté, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\gamma - \beta) E(v_1, t) + \beta E(v_2, t)) - \beta K \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \frac{\partial u}{\partial n} &= \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) & \\ + \beta \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) & \end{aligned}$$

puis en se servant de la CLA :

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( (\gamma - \beta) E(v_1, t) + \beta E(v_2, t) + \beta \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) &= \\ - \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega'} (-K) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial n} \left( (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) & \end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on peut poser :

$$\hat{E}_2(t) = (\gamma - \beta) E(v_1, t) + \beta E(v_2, t) + \beta \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2$$

(On suppose toujours la convexité du domaine si bien que  $(-K)$  est positif.)

Pour que l'application du lemme de Gronwall soit exploitable, il faut que la fonction que l'on contrôle soit positive (que ce soit une "énergie" ...). On constate que ce sera le cas, à la condition que :

$$0 < \beta < \gamma$$

On retrouve un résultat connu pour le bord droit.

## Chapitre 4

# Cas général pour la condition d'ordre $N$

Dans ce chapitre, du fait de la généralité de la condition étudiée, les calculs sont très techniques. C'est pourquoi, pour éviter des lourdeurs inutiles, nous avons choisi de travailler d'emblée sous l'hypothèse  $\Omega$  convexe.

### 4.1 Notations, définitions

Dans un premier temps, et pour alléger encore les calculs à venir, nous allons introduire un certain nombre de notations en vue de la réécriture de l'opérateur de la CLA à l'ordre  $N$ . Rappelons que la “partie principale” de cet opérateur vaut :

$$B_N^t = \left( \frac{\partial}{\partial n} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right]$$

Cet opérateur est d'ordre  $2N + 1$  si  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $2N$  sinon. Eventuellement, on peut rajouter un terme de courbure, mais cela ne change rien aux calculs qui vont suivre.

En utilisant l'équation des ondes (2.7), on remplace dans l'expression de l'opérateur toutes les dérivations du second ordre par rapport à la variable

tangentielle  $s$ . On obtient :

$$(4.1) \quad B_N^t = \left( \frac{\partial}{\partial n} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \prod_{k=1}^N \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \alpha_k K \frac{\partial}{\partial n} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial n^2} + K \frac{\partial}{\partial n} \right) \left[ \prod_{j \neq k} \left( (1 - \alpha_j) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \alpha_j K \frac{\partial}{\partial n} \right) \right]$$

En s'inspirant de ce qui est fait dans [4], l'idée est d'écrire que

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial n^2} + K \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{1 - \alpha_k} \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \alpha_k K \frac{\partial}{\partial n} \right) \\ - \frac{1}{1 - \alpha_k} \left( \frac{\partial^2}{\partial n^2} - K \frac{\partial}{\partial n} \right),$$

et, pour alléger les écritures, d'introduire les opérateurs suivants :

$$P_k = (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \alpha_k K \frac{\partial}{\partial n},$$

$$Q = \prod_{k=1}^N P_k$$

et

$$Q_k = \prod_{j \neq k} P_j$$

Avec ces notations, on a

$$B_N^t = \frac{\partial Q}{\partial n} + \left( \gamma - \sum \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \right) \frac{\partial Q}{\partial t} - \sum \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \frac{\partial^3 Q_k}{\partial t \partial n^2} + K \sum \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \frac{\partial^2 Q_k}{\partial t \partial n}$$

Cette réécriture est bien adaptée aux calculs qui vont suivre. Les termes de degré inférieur notamment s'expriment naturellement. On peut enfin poser

$$a_k = \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \quad \text{et} \quad a = \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} = \gamma - \sum_{k=1}^N a_k$$

pour manipuler à l'avenir une expression très concise :

$$(4.3) \quad B_N^t = \frac{\partial Q}{\partial n} + a \frac{\partial Q}{\partial t} - \sum a_k \frac{\partial^3 Q_k}{\partial t \partial n^2} + K \sum a_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial t \partial n} = 0 \quad .$$

On voit qu'il suffirait de rajouter un terme d'ordre inférieur pour tenir de la courbure et obtenir le type de conditions que nous avons définies dans l'introduction, ou bien ajouter plusieurs termes d'ordre inférieur à celui de la condition pour avoir une condition encore plus "exacte". Toutefois, ces terme ne modifieraient pas les calculs qui vont suivre car, comme on le soulignera, les calculs font apparaître dans tous les cas de figure un terme de bord au moment de la majoration. Comme ils sont déjà suffisamment ardues, nous ne travaillerons donc pas avec

$$(4.4) \quad \mathcal{B}_N^t = \frac{\partial Q}{\partial n} + a \frac{\partial Q}{\partial t} - \sum a_k \frac{\partial^3 Q_k}{\partial t \partial n^2} + K \sum a_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial t \partial n} + \frac{K}{2} \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}} = 0 ;$$

nous considérons pour la suite de ce chapitre l'opérateur - "classique" -  $B_N^t$  et nous supposons que le domaine  $\Omega$  est convexe.

## 4.2 Estimations a priori

Ce premier temps de la démonstration va nous mener à la majoration d'une énergie adaptée à notre problème. On opère à la façon de Ha Duong et Joly dans [4], c'est-à-dire qu'on applique l'identité énergétique habituelle (2.21) à trois types de fonctions :

1. d'abord, à  $v = Qu$  pour obtenir

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt}(E(v)) = \int_{\Gamma} \frac{\partial Qu}{\partial n} \cdot \frac{\partial Qu}{\partial t} + \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial Qu}{\partial n} \frac{\partial Qu}{\partial t} ;$$

2. puis, aux  $N$  fonctions  $v_k = \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2}$ , ( $1 \leq k \leq N$ ) :

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt}(E(v_k)) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} \cdot \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} + \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} \cdot \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} ;$$

3. enfin, aux  $N$  fonctions  $w_k = \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n}$ , ( $1 \leq k \leq N$ ):

$$(4.7) \quad \frac{d}{dt}(E(w_k)) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3}{\partial t \partial n^2} Q_k u \cdot \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial n} Q_k u + \int_{\Omega} \frac{\partial^3}{\partial t \partial n^2} Q_k u \cdot \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial n} Q_k u$$

Pour exploiter ces  $2N + 1$  équations, on commence par faire les  $N$  combinaisons linéaires  $(\alpha_k(4.6) + (1 - \alpha_k)(4.7))$ :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_k E(v_k) + (1 - \alpha_k)E(w_k)) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t^2 \partial n} + \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} \right) \\ &+ \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t^2 \partial n} \right) \end{aligned}$$

(4.8)

Comme nous savons que

$$P_k = (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \alpha_k K \frac{\partial}{\partial n},$$

il est naturel d'ajouter de part et d'autre de (4.8) le terme

$$\int_{\Gamma} \alpha_k K \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2}$$

pour obtenir

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_k E(v_k) + (1 - \alpha_k)E(w_k)) + \int_{\Gamma} \alpha_k (-K) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2} = \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t^2 \partial n} + \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} - \alpha_k K \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2} \right) \\ + \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t^2 \partial n} \right) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_k E(v_k) + (1 - \alpha_k)E(w_k)) + \int_{\Gamma} \alpha_k (-K) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \frac{\partial^2 Q_{ku}}{\partial n^2} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} (P_k Q_{ku}) \\ &+ \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t^2 \partial n} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \alpha_k E(v_k) + (1 - \alpha_k)E(w_k) + \alpha_k \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial^2 Q_{ku}}{\partial n^2} \right|^2 \right) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \frac{\partial Q_u}{\partial n} \\ &+ \int_{\Omega} (-K) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t^2 \partial n} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On voit ici se définir une énergie qui tient compte du fait que le bord n'est pas droit. On multiplie alors (4.11) par  $a_k$ , on somme sur  $k$  et on ajoute à  $a(4.5)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( aE(v) + \sum_k \alpha_k E(v_k) + \sum_k (1 - \alpha_k)E(w_k) + \sum_k a_k \alpha_k \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial^2 Q_{ku}}{\partial n^2} \right|^2 \right) &= \\ &\int_{\Gamma} \frac{\partial Q_u}{\partial n} \left( \frac{\partial Q_u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \right) \\ &+ \int_{\Omega} (-K) \left[ \frac{\partial Q_u}{\partial n} \frac{\partial Q_u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t^2 \partial n} \right) \right] \end{aligned}$$

On en déduit alors à l'aide de (4.3) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( aE(v) \alpha_k E(v_k) + (1 - \alpha_k)E(w_k) + \sum_k a_k \alpha_k \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial^2 Q_{ku}}{\partial n^2} \right|^2 \right) &= \\ &-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial Q_u}{\partial n} \right|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-K) \left| a \frac{\partial Q_u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_{ku}}{\partial t \partial n^2} \right|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-K) \left| \sum_k a_k \frac{\partial^2 Q_{ku}}{\partial t \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega} (-K) [\dots] \end{aligned}$$

En posant

$$\mathcal{E}(t) = aE(v) + \sum_k \alpha_k E(v_k) + \sum_k (1 - \alpha_k) E(w_k) + \sum_k a_k \alpha_k \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2} \right|^2$$

on a donc montré

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathcal{E}(t)) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-K) \left| \sum_k a_k \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} (-K) \left[ \frac{\partial Q u}{\partial n} \frac{\partial Q u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \left( \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial n^3} + (1 - \alpha_k) \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t^2 \partial n} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Comme annoncé, on constate que le majorant contient un terme de bord (dont l'ordre est inférieur à celui des termes qu'on intègre sur tout l'intérieur du domaine). C'est pour cette raison que nous nous sommes contentés de l'étude de ce seul cas.

### 4.3 Fin de la démonstration

La première partie des calculs nous a permis d'établir la majoration (4.12). A partir de là, on peut conclure notre démonstration de la façon suivante :

1. Pour se débarrasser du terme de bord, on applique d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(4.13) \quad \int_{\Gamma} \left| \sum_k a_k \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2 \leq \sum_k a_k^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2,$$

puis  $N$  fois le théorème de trace :

$$(4.14) \quad \sum_k a_k^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2 \leq \sum_k a_k^2 \left[ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial s \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \right|^2 \right]$$



2. Tous les termes dans le membre majorant sont alors du même ordre sauf  $N$  :

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2$$

Bien que ce ne soit pas obligatoire, une façon de faire pour que la démonstration ne s'allonge pas inutilement consiste à le majorer à l'aide de l'inégalité de Poincaré, qui sert donc une première fois. (Rappelons que, par hypothèse,  $u$  et toutes ses dérivées sont nulles sur  $\Gamma_{int}$ .) Cela revient à dire que

$$(4.15) \quad \sum a_k^2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial t \partial n} \right|^2 \leq C \sum a_k^2 \left[ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial s \partial n} \right|^2 + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^3 Q_k u}{\partial t \partial n^2} \right|^2 \right]$$

3. Par des majorations directes – mais nombreuses! –, on voit alors facilement que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}(t)) \leq C \mathcal{E}(t)$$

et on peut appliquer le lemme de Gronwall :

$$(4.16) \quad \mathcal{E}(t) \leq C \mathcal{E}(0)$$

4. On se sert ensuite de l'équation des ondes pour remplacer chaque facteur  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  dans l'opérateur  $\mathcal{E}(t)$ . Ceci fait chaque terme de  $\mathcal{E}(t)$  ne contient plus aucune, ou une et une seule dérivation en temps.
5. Il ne reste alors plus qu'à montrer que  $\mathcal{E}(0)$  est contrôlable par  $\|u_0\|_{H^{2N+1}}^2$  et  $\|u_1\|_{H^{2N}}^2$ . Ceci est possible par une seconde application de l'inégalité de Poincaré, ou plus précisément d'un de ses corollaires (cf [3] p. 921) :

*Soit  $\Omega$  contenu dans une bande d'épaisseur finie  $d$ . Alors*

$$u \longrightarrow \left( \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H_0^m(\Omega)$  équivalente à la norme

$$\|u\|_m = \left( |u|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |u|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit facilement que ceci assure que

$$(4.17) \quad \mathcal{E}(t) \leq C \left( \|u_0\|_{H^{2N+1}}^2 + \|u_1\|_{H^{2N}}^2 \right)$$

## 4.4 Conclusion

Pour l'instant, nous avons seulement montré qu'il existait une fonction  $\mathcal{E}(t)$  contrôlée au cours du temps par les données initiales. Deux points restent à vérifier.

Il faut premièrement constater que, pour que la fonction  $\mathcal{E}$  sera une forme quadratique définie positive, une condition suffisante est que

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \\ 0 \leq \alpha_k \\ 0 \leq 1 - \alpha_k \\ 0 \leq a_k \alpha_k \end{array} \right.$$

ce qui est parfaitement équivalent à

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_N \\ 0 \leq \beta_k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} < \gamma \end{array} \right.$$

On retrouve bien un résultat de stabilité connu, établi d'abord par Trefethen et Halpern, puis par Ha Duong et Joly dans le cas du bord droit.

Plus délicat a priori, il faut s'assurer que nous avons bien établi un résultat de stabilité forte, c'est-à-dire que toute dérivée d'ordre  $2N + 1$  – ou  $2N$  si  $\alpha_k$  est nul – est contrôlée par notre estimation :

$$aE(v) + \sum_k \alpha_k E(v_k) + \sum_k (1 - \alpha_k) E(w_k) + \sum_k a_k \alpha_k \int_{\Gamma} (-K) \left| \frac{\partial^2 Q_k u}{\partial n^2} \right|^2 \leq$$

$$C \left( \|u_0\|_{H^{2N+1}}^2 + \|u_1\|_{H^{2N}}^2 \right)$$

(4.20)

En fait, on arrive facilement à la conclusion en se ramenant à ce qui a été fait dans ([4]). En effet, l'inégalité ci-dessus reste vraie si on fait abstraction de tous les termes de degré inférieur. Or, ceci revient à faire  $K = 0$  dans l'expression de chaque opérateur, c'est-à-dire annuler tous les termes liés à la courbure. On se retrouve donc bien dans le cas traité par Ha Duong et Joly, ce qui nous permet de conclure.

# Chapitre 5

## Prolongements

Il nous semble que notre étude pourrait avoir des prolongements concernant les deux problèmes suivants.

### 5.1 Le problème en fréquence

Dans [8], nous avons montré comment il était possible d'étendre les résultats de Ha Duong et Joly pour l'équation des ondes dans le cas du demi-espace homogène à l'équation de Helmholtz. Il est tentant de vouloir renouveler cette extension.

Ceci n'a rien de trivial. On comprend bien que la technique même des démonstrations dont on s'est servi dans ce rapport ne peut s'utiliser directement pour l'équation de Helmholtz. D'une part, il n'y a plus de données initiales; ce point n'est pas le plus grave car, par la multiplication de la solution du problème par une fonction  $\varphi$  habilement définie, on peut ramener l'étude à l'intérieur de  $\Omega'$  et travailler avec le repère local si pratique pour nos calculs.

Par contre, en ce qui concerne les arguments décisifs développés dans [8], et notamment les développements en séries de Fourier, nous ne sommes pas parvenus à leur trouver des "équivalents".

Sur  $\Omega'$ , l'équation de Helmholtz s'écrit en effet :

$$(5.1) \quad -\omega^2 v - \Delta_l v + K \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

En temps, nous avons eu recours à une partition des données initiales après avoir échoué dans la recherche d'une bonne fonction "cut-off". En fréquence, les contraintes étant moins fortes, c'est cette technique qui va nous permettre un premier pas.

En effet, les calculs portant sur des quantités complexes, on se moque de la positivité d'une éventuelle  $\varphi$ , propriété dont on ne pouvait se passer en temps. Effectuons le calcul de

$$\int_{\Omega} \left( \omega^2 v + \Delta_l v - K \frac{\partial v}{\partial n} \right) \varphi \bar{v} = 0$$

Si on suppose que  $\varphi$  vaut 0 en dehors de  $\Omega'$ , on tire

$$\omega^2 \int_{\Omega} \varphi |v|^2 - \int_{\Omega'} \varphi |\nabla v|^2 - \left( \int_{\Omega'} K \varphi \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} + \int_{\Omega'} \bar{v} \nabla v \nabla \varphi \right) = - \int_{\Gamma} \varphi \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n}$$

On a vu que ce dont on a besoin, c'est que le membre de gauche soit réel. Or, obtenir ceci est enfantin car le terme entre parenthèses est linéaire en  $\varphi$ ! Cette identité peut s'écrire

$$\omega^2 \int_{\Omega} \varphi |v|^2 - \int_{\Omega'} \varphi |\nabla v|^2 - L_u(\varphi) = - \int_{\Gamma} \varphi \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n}$$

Recherchons tout simplement  $\varphi$  telle que :

- $\varphi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$
- $\varphi|_{\Gamma} = 1$
- $\varphi|_{\Gamma_{int}} = 0$
- $\varphi$  est  $C^1$  (on pourrait imposer n'importe quelle régularité...)

Il ne reste plus qu'à considérer  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux telles  $\varphi$ . Posons

$$I_1 = \mathcal{I}m(L_u(\varphi_1))$$

$$I_2 = \mathcal{I}m(L_u(\varphi_2))$$

Si  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) est nulle, alors  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) est une bonne  $\varphi$ . Sinon, on pose

$$\varphi_u = \frac{1}{I_2 - I_1} (I_2 \varphi_1 - I_1 \varphi_2)$$

(Montrer qu'on peut toujours avoir  $I_1 \neq I_2 \neq 0$  est très facile : il suffit d'exhiber une suite  $\varphi_n$  telle que  $L_u(\varphi_n) = 0$ , ce qui est trivial ...)

$\varphi_u$  a toutes les caractéristiques voulues.

On a montré qu'on est en mesure, quelle que soit  $u$  solution de l'équation de Helmholtz, de trouver une  $\varphi_u$  qui nous permet de montrer que

$$\int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \in R$$

C'est le résultat de départ de tous les calculs de [8].

Par contre, en ce qui concerne les arguments décisifs développés dans [8], et notamment les développements en séries de Fourier, nous ne sommes pas parvenus à leur trouver des "équivalents".

Considérons la condition d'ordre 2 classique :

$$B_2^\omega(u) = -\omega^2 u + i\omega \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$

ou

$$B_2^\omega(u) = -\omega^2 u + 2i\omega \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - K \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Reprenant les calculs de [8], on est en droit d'espérer obtenir que

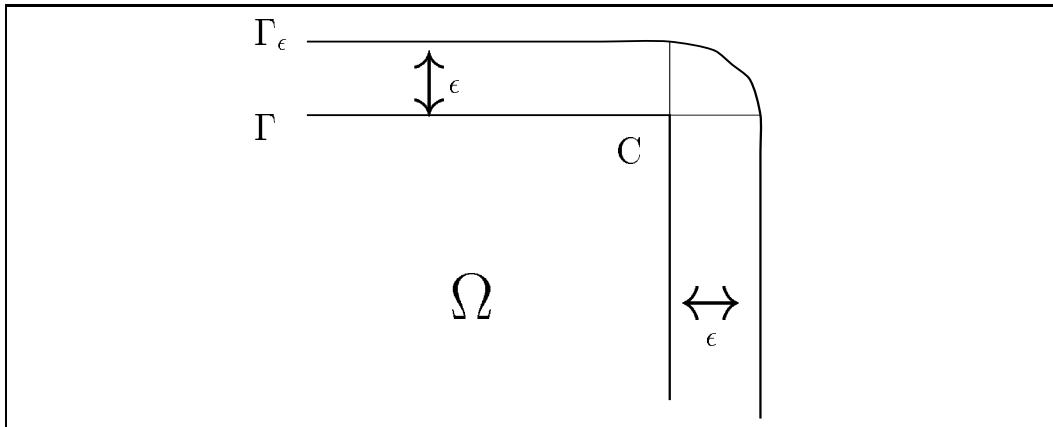
$$i\omega \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \in R$$

et donc que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma$ . Malheureusement, il semble difficile d'aller plus loin. S'il est certes possible d'opérer de nouveau un développement en série de Fourier, ce sera de peu d'intérêt car on ne sait rien de  $u$  sur  $\Gamma_{int}$  : on va manquer de conditions limites...

## 5.2 Le problème du coin

On sait combien le problème des singularités de frontière est délicat. Si des résultats existent (cf [2], [1] et [12]), on ne peut toutefois pas affirmer que la nature des conditions de coins soit parfaitement comprise. On sait que l'adjonction d'une équation spécifique vérifiée au coin uniquement est nécessaire pour définir un problème mathématique bien posé (cf [1]). Mais laquelle?

Ce qu'on pourrait attendre d'une étude asymptotique (où l'on considèrerait une singularité de frontière – un coin – comme un passage à la limite d'une frontière courbe régulière), une meilleure compréhension de la nature même de ces conditions.



Reste-t-il une trace, après le passage à la limite, de la condition absorbante imposée sur le bord courbe qui a “disparu”?

Nous ne sommes pas parvenu, pour le moment, à répondre à cette question.

## Bibliographie

- [1] A. BAMBERGER, P. JOLY, and J.E. ROBERTS. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, Avril 1990.
- [2] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde. Technical Report 1790, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, avril 1993.
- [3] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique*. Masson, 1987.
- [4] T. HA DUONG and P. JOLY. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Octobre 1990.
- [5] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.
- [6] B. GUSTAFSON, H.O. KREISS, and A. SUNDSTROM. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.ii. *Math. Comp.*, 26(119):649–686, Juillet 1972.
- [7] R.L. HIGDON. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Math. Comp.*, 47(176):437–459, 1977.



- [8] P. JOLY and O. VACUS. Stabilité de conditions aux limites pour l'équation de helmholtz. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.
- [9] H.O. KREISS. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.i. *Math. Comp.*, 22:703–714, 1968.
- [10] L. TREFETHEN and L. HALPERN. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.
- [11] J. TUOMELA. *Analyse, contrôle et identification de certains systèmes*. PhD thesis, Université Dauphine - Paris VI, 1987.
- [12] O. VACUS. Singularités de frontières du domaine de calcul : le problème du coin. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Présentation des problèmes étudiés</b>	<b>5</b>
2.1	Le domaine d'étude . . . . .	5
2.2	Un repère local . . . . .	7
2.3	Les équations du problème . . . . .	9
2.3.1	L'équation des ondes . . . . .	9
2.3.2	Les conditions limites . . . . .	10
2.3.3	Une nouvelle identité énergétique . . . . .	12
2.4	Schéma des démonstrations . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Les conditions d'ordre 1 et 2</b>	<b>18</b>
3.1	La condition d'ordre 1 "classique". Rappels. . . . .	18
3.2	Condition d'ordre 1 avec terme de courbure . . . . .	20
3.3	Condition d'ordre 2 avec terme de courbure . . . . .	23
3.4	La condition d'ordre 2 "classique" . . . . .	27
3.5	Une condition d'ordre 2 "classique" plus générale . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Cas général pour la condition d'ordre <math>N</math></b>	<b>32</b>
4.1	Notations, définitions . . . . .	32
4.2	Estimations a priori . . . . .	34
4.3	Fin de la démonstration . . . . .	37
4.4	Conclusion . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Prolongements</b>	<b>41</b>
5.1	Le problème en fréquence . . . . .	41

5.2	Le problème du coin . . . . .	44
-----	-------------------------------	----



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENoble Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399