



# Modèles bas-Reynolds appliqués à une couche limite compressible

Jérôme Francescatto

► **To cite this version:**

Jérôme Francescatto. Modèles bas-Reynolds appliqués à une couche limite compressible. RR-2837, INRIA. 1996. inria-00073853

**HAL Id: inria-00073853**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073853>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Modèles bas-Reynolds appliqués à une couche limite  
compressible*

Jérôme FRANCESCATTO

**N° 2837**

Mars 1996

———— THÈME 4 ————



*R*apport  
de recherche





# Modèles bas-Reynolds appliqués à une couche limite compressible

Jérôme FRANCESCATTO \*

Thème 4 — Simulation  
et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet SINUS \*\*

Rapport de recherche n° 2837 — Mars 1996 — 47 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, nous comparons plusieurs modèles à bas Reynolds pour une plaque plane supersonique dont les résultats expérimentaux ont été établis par Mabey [7]. On présentera les différentes modifications imposées durant cette étude afin de prendre en compte la compressibilité de l'écoulement et d'accélérer la vitesse de convergence vers l'état stationnaire. Ce travail a pour but de sélectionner le modèle présentant les meilleurs avantages numériques.

**Mots-clé :** Turbulence - Ecoulement Turbulent - Modèle Bas-Reynolds - Couche Limite - Ecoulement Compressible

*(Abstract: pto)*

\* . E-mail: Jerome.Francescato@sophia.inria.fr

\*\* . <http://www.inria.fr/sinus/personnel/Jerome.Francescato/Jerome.Francescato-fr.html>

# Application of low Reynolds and two-layer models to a supersonic flow over a flat plate

**Abstract:** In this report, we compare several Low-Reynolds models for a supersonic flat plate flow for which experimental results were set up by Mabey [7]. We will present the different modifications which have been imposed during this study in order to take into account the flow compressibility and to accelerate the speed of the convergence towards the stationary state. The aim of this work is to choose the model allowing the best numerical advantages.

**Key-words:** Turbulence - Turbulente Flow - Low-Reynolds Model - Boundary Layer - Compressible Flow

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modèles de turbulence pour des couches limites compressibles</b>	<b>2</b>
2.1	Ecriture du système sous forme conservative . . . . .	2
2.2	Modèle à haut Reynolds . . . . .	5
2.3	Modèles à bas Reynolds . . . . .	6
2.3.1	Modèle de Lam-Bremhorst (1981) . . . . .	7
2.3.2	Modèle de Nagano-Tagawa (1990) . . . . .	7
2.3.3	Modèle de Speziale-Abid-Anderson (1990) . . . . .	8
2.4	Modèle bicouche de Chen-Patel . . . . .	8
2.5	Modifications apportées aux modèles originaux . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Conditions aux bords</b>	<b>12</b>
3.1	Description du cas test de Mabey . . . . .	12
3.2	Profils d'entrée . . . . .	14
3.3	Conditions à la paroi et en sortie . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Validation des modèles en incompressible</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>25</b>
5.1	Stabilité et convergence . . . . .	25
5.2	Indépendance du maillage . . . . .	27
5.3	Comparaisons des modèles . . . . .	31
5.4	Comparaison avec le Workshop ETMA . . . . .	38
5.5	Analyse de l'écoulement . . . . .	40
5.5.1	Loi logarithmique . . . . .	40
5.5.2	Equilibre production-dissipation . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>Remerciements</b>	<b>45</b>

# 1 Introduction

Dans ce rapport, on s'intéresse à la simulation numérique d'une couche limite pour un écoulement de plaque plane à grand nombre de Mach. On utilise comme référence, les résultats expérimentaux établis par Mabey [7]. Le système régissant l'évolution de cet écoulement est composé des équations de Navier-stokes et d'un modèle à deux équations d'évolution des grandeurs caractéristiques de la turbulence à savoir l'énergie turbulente ( $k$ ) et son taux de dissipation turbulente ( $\epsilon$ ). Le modèle  $k - \epsilon$  de base utilisé pour cette étude est celui établi pour des écoulements à haut Reynolds par Launder-Spalding [15]. Afin de permettre la simulation jusqu'à la paroi, on introduit diverses fonctions de contrôle. Ces fonctions ont pour but d'amortir les différents composants du terme source dans l'équation de  $\epsilon$  et de corriger la viscosité turbulente. Trois modèles bas-Reynolds ont été considérés :

- **Modèle de Lam-Bremhorst (1981) [14]**
- **Modèle de Nagano-Tagawa (1990) [16]**
- **Modèle de Speziale-Abid-Anderson (1990) [22]**

Un autre modèle, tout à fait différent des précédents, a été testé. Il repose sur une décomposition du domaine de calcul en deux zones distinctes; une première zone loin de la paroi dans laquelle les équations  $k - \epsilon$  sont résolues et une autre près de la paroi où le taux de dissipation turbulente est déterminé en fonction de l'énergie cinétique ( $k$ ) et d'une longueur scalaire ( $l$ ). Ce modèle, appelé *bicouche*, a été introduit par Chen-Patel en 1988 [5].

Dans ce domaine, de nombreuses études ont été réalisées jusqu'à présent ([15], [16], [22], [20], [14] ...). On cite, comme référence à ce cas test, les résultats numériques provenant du Workshop ETMA 1995. Les personnes ayant participées à la simulation de la plaque plane sont : Yudiana et Buffat de l'Ecole Centrale de Lyon [26], Hirsch et Shang de l'université de Bruxelles [9] et Hughes, Jansen et Hauke de l'université de Stanford [10].

Cette étude prolonge le travail de B. Koobus [12] [13] et son but est de valider ces différents modèles sur une couche limite compressible tout en préservant une bonne vitesse de la convergence itérative. Pour cela, des modifications ont été apportées aux modèles. Dans une autre étude, on cherchera à résoudre l'ensemble des équations par une méthode multigrille ([8], [3]).

La suite de ce rapport est composée de quatre parties. La partie 2 décrit le système sous la forme conservative ainsi que les modèles étudiés. La partie 3 présente les étapes effectuées avant la simulation numérique, à savoir: les conditions aux bords et les profils en entrée de la plaque. La validation de l'implémentation de ces modèles réalisée sur une couche limite faiblement incompressible, est proposée dans la partie 4. La dernière partie concerne la validation des modèles sur la couche limite compressible de Mabey par comparaison avec les résultats expérimentaux. On s'efforcera de mettre en évidence le modèle présentant les meilleurs avantages numériques.

## 2 Modèles de turbulence pour des couches limites compressibles

La méthode numérique, développée à l'INRIA, est basée sur une approche mixte éléments finis / volumes finis utilisant des flux numériques décentrés. Cette résolution, pour les équations de Navier-Stokes et  $k-\varepsilon$  compressibles, est une extension aux cas visqueux des méthodes de résolution des équations d'Euler par volumes finis. La discrétisation des flux visqueux résulte, quant à elle, d'une formulation Galerkin éléments finis, qui est mieux adaptée et plus précise pour le calcul des opérateurs de diffusion dans le cas d'un maillage non structuré.

### 2.1 Ecriture du système sous forme conservative

Le système des équations de Navier-Stokes adimensionnées auquel on a ajouté le modèle de turbulence  $k - \varepsilon$  s'écrit en deux dimensions d'espace et en formulation conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial R(W)}{\partial x} + \frac{\partial S(W)}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tilde{R}(W)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{S}(W)}{\partial y} + \Omega(W)$$

où :

- $W(x, y, t)$  est une fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^6$ , dont les composantes sont les variables conservatives adimensionnées.
- $F(W)$  et  $G(W)$  sont les fonctions des flux convectifs appelés flux d'Euler ou flux hyperboliques
- $R(W)$ ,  $S(W)$  sont les fonctions de flux visqueux laminaires et  $Re$  est le nombre de Reynolds laminaire provenant de l'adimensionnalisation des équations.
- $\tilde{R}(W)$ ,  $\tilde{S}(W)$  sont les fonctions de flux visqueux turbulents.
- $\Omega(W)$  est le terme source associé au modèle  $k - \varepsilon$ .

L'introduction du modèle de fermeture dans les équations de Navier-Stokes moyennées ajoute, en plus de la viscosité de turbulente, des termes supplémentaires. Ces termes en  $2/3 \rho k$  dans l'expression des contraintes visqueuses turbulentes proviennent de l'existence d'un terme diagonal  $2/3 \rho k I_d$  dans les tenseurs de Reynolds. Afin de pouvoir traiter les termes hyperboliques, de la même façon que dans le cas laminaire, on utilise un changement de variables approprié. On pose :

$$\begin{cases} p' = p + \frac{2}{3}\rho k \\ E' = E + \beta \rho k \text{ avec } \beta = -1 + \frac{2}{3(\gamma - 1)} \end{cases}$$



avec :

$$\begin{cases} E = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \rho k \\ p = (\gamma - 1) \rho C_v T \end{cases}$$

où  $p$  est la pression,  $E$  l'énergie totale par unité de volume,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $k$  l'énergie cinétique turbulente,  $C_v$  désigne la chaleur spécifique à volume constant,  $T$  la température,  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques supposé constant ( $\gamma = 1.4$  pour un gaz parfait) et  $u, v$  sont les composantes de la vitesse moyennée.

La relation liant  $E'$  et  $p'$  prend la forme classique :

$$p' = (\gamma - 1) \left( E' - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right).$$

Ainsi, en introduisant ce changement de variables dans le système initial, les termes en  $2/3 \rho k$  sont retirés des flux visqueux turbulents pour être incorporés aux flux convectifs (d'après la définition de  $p'$  et de  $E'$ ). On obtient :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E' \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p' \\ \rho uv \\ (E' + p') u \\ \rho uk \\ \rho u \varepsilon \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p' \\ (E' + p') v \\ \rho vk \\ \rho v \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Les flux visqueux laminaires, s'écrivent :

$$R(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial k}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial e}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial k}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Les flux visqueux turbulents :

$$\tilde{R}(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^t \\ \tau_{xy}^t \\ u \tau_{xx}^t + v \tau_{xy}^t + \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy}^t \\ \tau_{yy}^t \\ u \tau_{xy}^t + v \tau_{yy}^t + \frac{\gamma \mu_t}{Pt} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\sigma_k}{\mu_t} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix},$$

et le terme source :

$$\Omega(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_k \\ \omega_\varepsilon \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, & u_1 = u, u_2 = v \\ \tau_{ij}^t = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \\ Pr = 0.725 \quad Pt = 0.86 \quad Re = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0} \end{cases}$$

où  $\mu$  et  $\mu_t$  sont respectivement un coefficient de viscosité laminaire adimensionné et un coefficient de viscosité turbulente adimensionné,  $\tau_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy,  $Pr$  et  $Pt$  sont respectivement le nombre de Prandtl laminaire et le nombre de Prandtl turbulent provenant de l'adimensionnement des équations. Les notations  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $L_0$  et  $\mu_0$  désignent respectivement une masse volumique de référence, une vitesse horizontale de référence, une longueur de référence et une viscosité de référence.

Enfin, on pose

$$\begin{cases} \mu_t = c_\mu \mathbf{f}_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \\ \omega_k = -\rho \varepsilon + \mathcal{P} \\ \omega_\varepsilon = c_{\varepsilon_1} \mathbf{f}_1 \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P} - c_{\varepsilon_2} \mathbf{f}_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

où

$$\mathcal{P} = - \left( \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

avec  $c_\mu$ ,  $c_{\varepsilon_1}$  et  $c_{\varepsilon_2}$  qui sont les constantes empiriques de la modélisation,  $\varepsilon$  est le taux de dissipation de la turbulence et  $\mathcal{P}$  le terme de production de la turbulence.

Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_\mu$  sont respectivement les fonctions d'amortissement pour le contrôle du terme source et la fonction de correction de la viscosité turbulente. Elles permettent artificiellement d'obtenir, près de la paroi, des valeurs numériques des grandeurs turbulentes, cohérentes avec les résultats expérimentaux.

- **Fonction  $f_1$ :**

Cette fonction n'affecte que le terme de production dans l'équation de  $\varepsilon$ . Dans la partie haut-Reynolds, la fonction  $f_1$  vaut approximativement 1. Par contre, dans la zone de proche paroi,  $f_1$  devient supérieure à l'unité, de sorte que le taux de dissipation s'accroît et par conséquent que le niveau d'énergie cinétique turbulente diminue.

- **Fonction  $f_2$ :**

Cette fonction affecte le terme de dissipation dans l'équation de  $\varepsilon$ . La fonction  $f_2$  varie entre 0 et 1, en principe de façon quadratique en  $y$ , dans la zone de proche paroi. Elle réduit le terme de destruction de la dissipation  $\varepsilon$ , de sorte que  $\varepsilon$  s'accroît. L'effet de  $f_2$  est limité à la sous-couche visqueuse et ne doit pas influencer les résultats en dehors de cette zone.

- **Fonction  $f_\mu$ :**

Cette fonction permet de corriger le comportement de la viscosité turbulente dans la couche limite. Pour qu'une modélisation de  $f_\mu$  soit acceptable, il faut tout d'abord que cette fonction soit de l'ordre de  $y$  très près de la paroi; d'autre part, elle doit tendre vers 1 à la frontière entre les deux écoulements à haut et bas Reynolds.

Les constantes  $c_\mu$ ,  $c_{\varepsilon_1}$ ,  $c_{\varepsilon_2}$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_k$  et  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_\mu$  font l'objet de définitions différentes suivant les modèles de turbulence utilisés.

## 2.2 Modèle à haut Reynolds

La fermeture du système d'équations moyennées est réalisée à partir d'un modèle de turbulence  $k - \varepsilon$  à haut-Reynolds de Launder-Spalding [15]. Cependant ce modèle ne permet pas une intégration des équations jusqu'à la paroi solide, principalement à cause de la singularité provoquée par  $k$  dans l'équation de  $\varepsilon$ . Il est valable seulement dans les régions où le nombre de Reynolds local est grand. Pour résoudre ce problème on utilise dans la zone de proche paroi des lois analytiques qui permettent d'imposer des conditions aux limites à une distance  $\delta$  de la "vraie" paroi. Ces lois sont fondées sur des approximations de la couche limite incompressible. Différentes lois de paroi ont été introduites numériquement, de la plus

classique à des lois plus complètes (lois de Mellor [18] et de Nakayama-Koyama [17]) sur un profil d'aile d'avion (RAE2822) [2].

Les fonctions et les constantes sont dans le cadre d'un modèle haut Reynolds:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_\mu = 1 \\ c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92. \end{array} \right.$$

Ce modèle modifié pour tenir compte de l'influence de la compressibilité sur les lois de paroi a été utilisé avec succès par D. Guezengar dans un travail parallèle à celui-ci.

### 2.3 Modèles à bas Reynolds

Le modèle  $k - \varepsilon$  de Launder-Spalding peut être modifié afin de permettre une intégration jusqu'à la paroi et de prendre en compte les effets visqueux dans la zone de proche paroi.

Ceci est réalisé par l'introduction de fonctions qui dépendent de la distance normale à la paroi  $y$ , du frottement à la paroi  $u_f$  et de l'énergie cinétique turbulente  $k$ . De nombreux modèles bas Reynolds ont été établis et testés ([15], [16], [22], [20], [14]). Dans ces modèles, les fonctions d'amortissement et de correction ont été établies afin d'obtenir une solution numérique cohérente dans la couche limite pour une plaque plane. L'un des inconvénients de ces modèles est la nécessité d'avoir une densité importante de points dans la couche limite; en effet un maillage très fin est indispensable afin de contrôler les fortes variations des quantités turbulentes.

Une autre approche dite "*bicouche*" a été introduite par Chen et Patel en 1988 [5]. Elle consiste à séparer l'écoulement en deux zones; la première, loin de la paroi où le nombre de Reynolds local est grand et la deuxième près de la paroi où la viscosité turbulente est prédominante. Le principe est d'appliquer le modèle  $k - \varepsilon$  à haut Reynolds dans la première zone et d'utiliser l'équation de  $k$  suivi d'une détermination algébrique du taux de dissipation turbulente dans la deuxième zone. Contrairement aux modèles bas Reynolds précédents, ce modèle présente de nombreux avantages. Une des propriétés importantes est la faible dépendance de la solution par rapport au nombre de points du maillage dans la couche limite; ce qui permet d'utiliser des maillages seulement faiblement étirés dans la zone de proche paroi.

L'ensemble de ces modèles dépend de trois variables:  $R_t$ ,  $R_y$  et  $y^+$  qui représentent respectivement les deux nombres de Reynolds local de la turbulence et une distance à la paroi adimensionnée. Ces variables ont été définies de manière à prendre en compte les effets de compressibilité:

$$R_t = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} \frac{k^2}{\nu_p \varepsilon}$$

$$R_y = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} \frac{\sqrt{k} y}{\nu_p}$$

$$y^+ = \frac{u_f y}{\nu_p}$$

où  $\rho_p$  est la masse volumique du fluide à la paroi et  $\nu_p$  la viscosité laminaire à la paroi.

### 2.3.1 Modèle de Lam-Bremhorst (1981)

C'est un modèle qui prédit assez bien le comportement des différentes variables physiques et turbulentes dans le cas d'une couche limite incompressible [12]. La description ci-dessous est celle donnée par Chen et Patel [5]; les trois fonctions d'amortissement et les constantes empiriques sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 1 + \left( \frac{0.06}{f_\mu} \right)^3 \\ f_2 = 1 - \exp[-(R_t)^2] \\ f_\mu = [1 - \exp(-0.0160 R_y)]^2 \left( 1 + \frac{19.5}{R_t} \right) \\ c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92 \end{array} \right.$$

### 2.3.2 Modèle de Nagano-Tagawa (1990)

Ce modèle préalablement étudié pour l'écoulement d'un fluide incompressible entre deux parois planes et parallèles supposées infinies latéralement, a donné une bonne prédiction de la vitesse maximum et de la localisation du pic de  $k$  par rapport à l'expérience [12].

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 1 \\ f_2 = \left[ 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{6}\right)^2 \right] \left[ 1 - 0.3 \exp\left(\frac{-R_t^2}{6.5^2}\right) \right] \\ f_\mu = \left[ 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{26}\right) \right] \left[ 1 + \frac{4.1}{R_t^{0.75}} \right] \\ c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.45, \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92 \end{array} \right.$$

### 2.3.3 Modèle de Speziale-Abid-Anderson (1990)

L'un des caractères nouveaux de ce modèle réside dans la définition de la constante  $c_{\varepsilon_2}$  en fonction du Reynolds local turbulent  $R_t$ . Les fonctions et les constantes sont pour le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 1 \\ f_2 = \left[ 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{4.9}\right) \right]^2 \\ f_\mu = \exp\left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}}\right) \tanh\left(\frac{y^+}{70}\right) \\ c_{\varepsilon_2} = 1.83 \left\{ 1 - \frac{2}{9} \exp\left[-\left(\frac{R_t}{6}\right)^2\right] \right\} \\ c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.36, \quad \sigma_\varepsilon = 1.36, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.44 \end{array} \right.$$

**Remarque :** Un point commun pour ces trois modèles est qu'aucun terme supplémentaire n'est introduit dans les équations  $k - \varepsilon$ . On peut noter aussi les trois limites suivantes:

$$\lim_{y^+, R_y, R_t \rightarrow \infty} f_1 = 1$$

$$\lim_{y^+, R_y, R_t \rightarrow \infty} f_2 = 1$$

$$\lim_{y^+, R_y, R_t \rightarrow \infty} f_\mu = 1$$

qui traduisent la convergence vers le modèle  $k - \varepsilon$  haut Reynolds lorsque l'on s'éloigne de la paroi.

Il peut être vérifié que les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_\mu$  pour les modèles de Nagano-Tagawa et de Speziale-Abid-Anderson sont respectivement de l'ordre de  $O(1)$ ,  $O(y^2)$ ,  $O\left(\frac{1}{y}\right)$  près de la paroi. C'est à dire que ces modèles, contrairement au modèle de Lam-Bremhorst, sont asymptotiquement consistants [22].

## 2.4 Modèle bicouche de Chen-Patel

Un autre modèle, de configuration différente, est proposée par Chen et Patel [5]. Ils proposent de résoudre le modèle  $k - \varepsilon$  seulement dans la région loin de la paroi où le nombre de Reynolds turbulent reste élevé et d'utiliser un modèle à une équation pour la région près de la paroi où le nombre de Reynolds turbulent est faible. Une zone de raccord est installée entre les deux régions afin de faciliter le raccordement de la viscosité turbulente.

L'approche de Chen-Patel introduit dans la présente définition le modèle à une équation de Wolfshtein (1969) [25]. Dans la région, où  $R_y < 200$ , les équations de l'écoulement moyen et de l'énergie cinétique turbulente sont résolues tandis que les longueurs d'échelle caractéristiques sont déterminées par des relations algébriques.

- **Zone haut Reynolds** ( $R_y > 200$ ) :

Les deux équations turbulentes à résoudre sont:

$$\begin{cases} \frac{D \rho k}{D t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \rho \varepsilon + \mathcal{P} \\ \frac{D \rho \varepsilon}{D t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P} - c_{\varepsilon_2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

où les constantes empiriques du modèle sont :  $c_{\varepsilon_1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon_2} = 1.92$  et  $c_\mu = 0.09$ .

La viscosité turbulente est donnée par:

$$\mu_t = c_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon}.$$

- **Zone bas Reynolds** ( $R_y < 200$ ) :

Seule l'équation de l'énergie turbulente est calculée. Le taux de dissipation turbulente est déduit de l'énergie cinétique turbulente et d'une échelle de longueur ( $l_\varepsilon$ ) :

$$\begin{cases} \frac{D \rho k}{D t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \rho \varepsilon + \mathcal{P} \\ \varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\varepsilon} \end{cases}$$

Dans cette région, la viscosité turbulente est définie par l'expression suivante :

$$\mu_t = c_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu.$$

Les deux échelles de longueurs  $l_\mu$  et  $l_\varepsilon$  sont définies de la manière suivante:

$$l_\mu = \kappa c_\mu^{-3/4} y \left( 1 - \exp \left( \frac{-R_y}{A_\mu} \right) \right)$$

et

$$l_\varepsilon = \kappa c_\mu^{-3/4} y \left( 1 - \exp\left(\frac{-R_y}{A_\varepsilon}\right) \right)$$

où  $\kappa = 0.45$ ,  $A_\mu = 70$  et  $A_\varepsilon = 2 \kappa c_\mu^{-3/4}$  sont des constantes du modèle.

- **Zone de raccord :**

C'est une zone située à cheval entre la zone à haut-Reynolds et celle à bas-Reynolds. Elle est comprise entre  $180 < R_y < 220$ . Dans cette zone, la viscosité turbulente est dépendante d'un coefficient  $\alpha \in [0, 1]$  qui est une fonction linéaire du Reynolds turbulent local  $R_y$  :

$$\mu_t = \alpha \mu_t^{k-l} + (1 - \alpha) \mu_t^{k-\varepsilon}$$

où

$$\alpha = \frac{220 - R_y}{40}.$$

**Remarque :** Au temps  $t^{n+1}$ , la condition au limite pour l'équation du taux de dissipation turbulente en  $R_y = 200$  est une condition de Dirichlet pris au temps  $t^n$ .

## 2.5 Modifications apportées aux modèles originaux

La simulation numérique de la plaque plane à grand nombre de Mach nous a permis d'apporter certaines améliorations dans les modèles à bas-Reynolds et dans le modèle bicouche. En effet, ce type d'écoulement est à l'origine de fortes variations de la masse volumique. De ce fait, les modèles établis dans le cas incompressible doivent être modifiés afin de prendre en compte les effets de compressibilité.

La première constatation, inspirée de Aupoix et Desmet [1], concerne la définition des Reynolds turbulents  $R_y$ ,  $R_t$  et de la longueur adimensionnée  $y^+$ .

Une autre amélioration a été apportée pour certain modèle. En effet, on a constaté durant les tests numériques un mauvais comportement de la masse volumique par rapport aux résultats expérimentaux. Ce comportement dans la zone pleinement turbulente nous a conduit à redéfinir la viscosité turbulente. Cette redéfinition consiste à multiplier la viscosité turbulente par un rapport de masse faisant intervenir la masse volumique à la paroi :

$$\nu_t = \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} & \text{si } y < \delta_t \\ c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\delta_t$  est l'épaisseur de la couche limite turbulente et  $\rho_p$  la masse volumique à la paroi.



Seule les résultats numériques obtenus par le modèle bas-Reynolds de Lam-Bremhorst et le modèle bicouche ont été améliorés par la définition (1). La variation de ce rapport de masse dans la couche limite turbulente a permis d'obtenir une très bonne approche des résultats expérimentaux dans la région entièrement turbulente (voir figures 1, 2, 3 et 4). La constante de von Karman qui intervient dans le calcul des échelles de longueur  $l_\mu$  et  $l_\varepsilon$  a été fixée à 0.45. Cette valeur, inspirée de B. Mohammadi [19], nous permet d'avoir le meilleur compromis calcul-expérience.

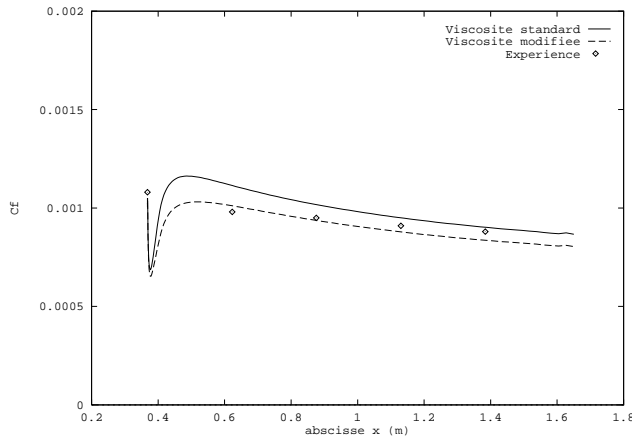


Figure 1 – Plaque de Mabey : répartition du coefficient de frottement suivant la viscosité turbulente pour le modèle de Lam-Bremhorst

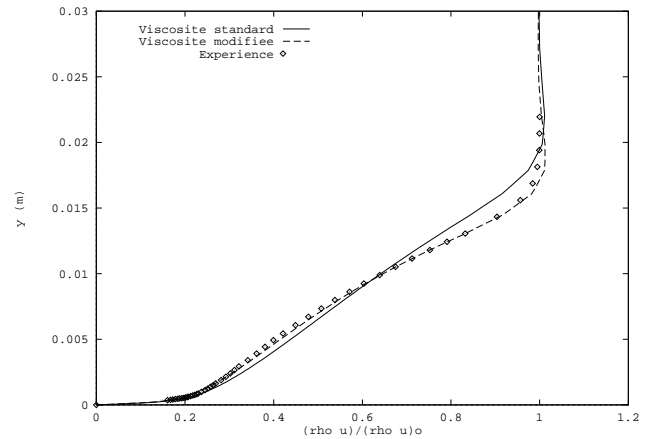


Figure 2 – Plaque de Mabey : profil de la quantité de mouvement  $\rho u$  en  $x = 1.130$  pour le modèle de Lam-Bremhorst

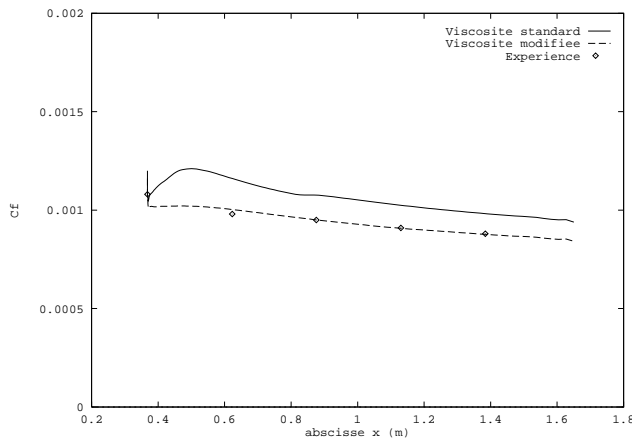


Figure 3 – Plaque de Mabey : répartition du coefficient de frottement suivant la viscosité turbulente pour le modèle de Chen-Patel

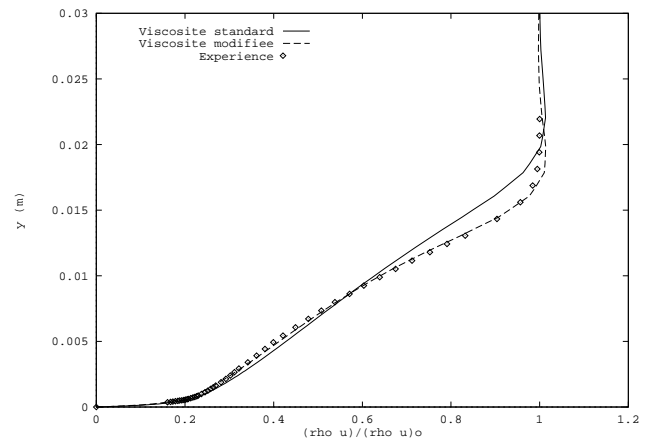


Figure 4 – Plaque de Mabey : profil de la quantité de mouvement  $\rho u$  en  $x = 1.130$  pour le modèle de Chen-Patel

### 3 Conditions aux bords

L'un des exemples les plus typiques et les plus simples d'écoulement de couche limite est celui de la plaque plane.

L'intérêt du cas de la plaque plane réside dans l'importance pratique de ces solutions pour de nombreux problèmes. Les obstacles étudiés en Aéronautique sont généralement des corps minces et fuselés sur lesquels les variations de la vitesse extérieure et en conséquence les gradients de pression longitudinaux sont modérés, et pour lesquels certains effets de la couche limite peuvent être assez peu différents de ceux d'une plaque plane.

Malgré sa simplicité, cette configuration est encore l'objet de nombreux travaux et on consultera avec profit le récent workshop ETMA 95 ([26], [9], [10]).

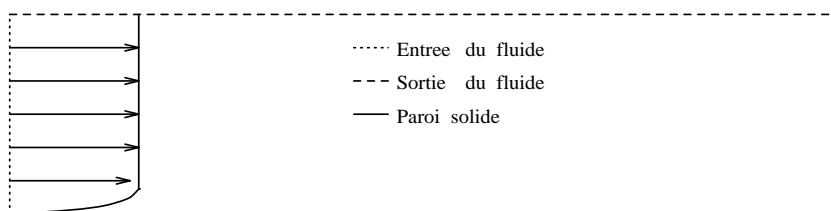


Figure 5 – Différentes zones frontières de la plaque plane

#### 3.1 Description du cas test de Mabey

Ce cas test représente un écoulement supersonique. L'étude expérimentale de cette plaque a été menée par Mabey [7]. L'expérience a été effectuée sur un écoulement d'air entre deux plaques parallèles de longueur 1.65 m avec une paroi adiabatique.

Les valeurs caractéristiques provenant des résultats expérimentaux sont :

- Vitesse horizontale :  $U_0 = 712 \text{ m/s}$
- Longueur :  $L_0 = 1 \text{ m}$
- Température :  $T_0 = 62 \text{ K}$
- Pression :  $P_0 = 3119 \text{ Pa}$
- Mach :  $M_0 = 4.52$
- Viscosité laminaire :  $\mu_0 = 4.44 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}$
- Masse Volumique :  $\rho_0 = 0.176 \text{ kg/m}^3$

Le Reynolds laminaire est donc:

$$Rey/m = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0} = 2.82 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

La simulation numérique débute en  $x = 0.386$  (profils d'entrée) et finit en  $x = 1.65$ . La longueur du domaine de calcul est de  $1.282 \text{ m}$  et la hauteur de  $0.2 \text{ m}$ . Le maillage est régulier. Il contient 113 points suivant l'axe de (Ox) et 81 points suivant l'axe de (Oy) soit, 9153 points au total. Le premier point près de la paroi est compris entre  $y^+ \in [0.1, 1]$ . Ce maillage présente une distribution parabolique suivant l'axe (Oy), entraînant de forts étirements suivant l'axe (Ox), pouvant atteindre des rapports de la forme  $\Delta x/\Delta y$  de 4500. La viscosité laminaire est calculée suivant la loi de Sutherland en fonction de la température:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu_0 \frac{T}{T_0} && \text{si } T \leq 120 \text{ K} \\ \mu(T) &= \mu(120) \left( \frac{T}{120} \right)^{1.5} \left( \frac{120 + 110}{T + 110} \right) && \text{si } T \geq 120 \text{ K}. \end{aligned}$$

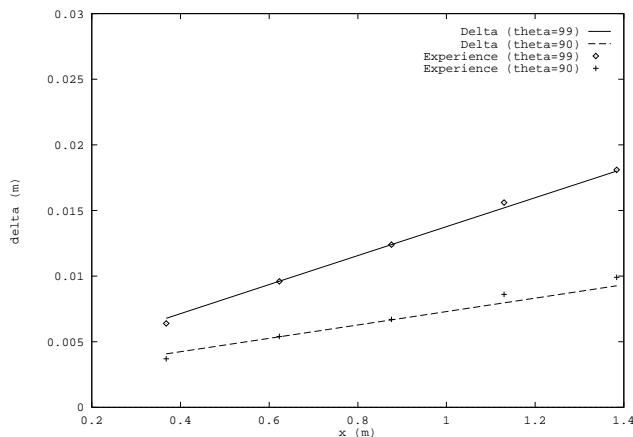
Un écoulement visqueux admet un effort tangentiel qui est la force de frottement à la paroi  $\tau_p$ ; sa valeur par unité de surface est fonction du coefficient de viscosité et du gradient normal de la vitesse :

$$\tau_p = \frac{F}{S} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Le coefficient de frottement correspondant est:

$$C_f = \frac{2 \tau_p}{\rho_0 U_0}.$$

En écoulement turbulent, les conditions imposées à la paroi permettent de formuler une hypothèse de couche limite turbulente. Cette hypothèse consiste à admettre que l'influence de la viscosité qui se traduit par des modifications des grandeurs physiques et turbulentes au voisinage de la paroi, ne se fait sentir que sur une épaisseur très faible devant les dimensions de l'obstacle  $L_0$ . L'épaisseur de la couche limite turbulente  $\delta_t$  est la distance comptée perpendiculairement à la surface de l'obstacle, à partir de laquelle la vitesse horizontale moyenne, reprend la valeur qu'elle aurait en écoulement non visqueux. La figure 6 représente l'épaisseur de la couche limite turbulente pour laquelle  $\theta \%$  de la vitesse caractéristique  $U_0$  est atteinte (en général, on prend  $\theta = 99$ ).

Figure 6 – *Epaisseur de la couche limite turbulente*

### 3.2 Profils d'entrée

La simulation numérique d'un écoulement interne ne peut être réalisée qu'à partir de bons profils d'entrée pour les différentes variables physiques et turbulentes.

Les profils d'entrée pour les deux quantités turbulentes  $k$  et  $\varepsilon$  ont été déterminés à l'aide d'un programme en une dimension d'espace proposé par Yudiana de l'école centrale de Lyon. Par contre, les profils des gradeurs physiques moyennes ont été établis à partir des résultats expérimentaux. Du fait de l'utilisation d'un Mach élevé, une attention particulière a été apportée dans la sous couche laminaire (couche très près de la paroi solide). En effet, le manque de points expérimentaux dans cette zone ne nous permet pas une interpolation linéaire. Seule une interpolation plus sophistiquée nous permet d'obtenir de bons profils.

- **Profil de la vitesse horizontale ( $u$ ):** Tout d'abord, on interpole linéairement les valeurs expérimentales sur le profil d'entrée. Ensuite, du fait du manque de résultats expérimentaux très près de la paroi, on raccorde la dernière valeur interpolée pour  $y = y_a$  à la paroi en  $y = 0$  par une interpolation polynomiale. Dans une étude approchée près de la paroi, le profil des vitesses adimensionné par la vitesse de frottement est représenté par un polynôme en  $y^+$  :

$$\frac{u}{u_f} = Q(y^+)$$

où

$$Q(y^+) = c_0 + c_1 y^+ + c_2 (y^+)^2 + c_3 (y^+)^3 + c_4 (y^+)^4 + c_5 (y^+)^5.$$

Les coefficients de ce polynôme ( $Q$ ) de degré 5 sont déterminés à l'aide des 6 conditions suivantes :

– En  $y = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad : \text{condition d'adhérence du fluide} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho_p u_f^2}{\mu_p} \quad : \text{condition sur le coefficient de frottement} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad : \text{condition sur la linéarité de } u \text{ près de la paroi} \end{array} \right.$$

– En  $y = y_a$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_a \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_a^{(1)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_a^{(2)} \end{array} \right.$$

où  $u_f = 36.16 \text{ m/s}$ ,  $\rho_p = 0.0368 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu_p = 1.89 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$  représentent des valeurs expérimentales à la paroi.

Les dérivées partielles première  $u^{(1)}$  et seconde  $u^{(2)}$  sont approchées au second ordre en espace sous la forme suivante :

$$u_i^{(j)} = \alpha_0^j u_i + \alpha_1^j u_{i+1} + \alpha_2^j u_{i+2}, \quad j = 1, 2$$

où  $\alpha_0^j$ ,  $\alpha_1^j$  et  $\alpha_2^j$  sont déterminés à partir d'un développement de Taylor.

Le profil de la vitesse horizontale est représenté dans les figures 9 et 10.

#### • Profil de la température ( $T$ ):

De la même manière que pour la vitesse horizontale, on raccorde le profil de la température à la paroi par une interpolation polynômiale. Les coefficients du polynôme ( $R$ ) de degré 3 sont déterminés suivants les quatres conditions :

– En  $y = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_p \quad : \text{température à la paroi} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad : \text{condition sur la température adiabatique} \end{array} \right.$$

– En  $y = y_a$  :

$$\begin{cases} T = T_a \\ \frac{\partial T}{\partial y} = T_a^{(1)}. \end{cases}$$

La température  $T$ , pour tout les  $y$  appartenant à l'intervalle  $[0, y_a]$ , s'écrit :

$$\frac{T}{T_p} = R(y^+)$$

où la température à la paroi  $T_p$  est une donnée expérimentale ( $T_p = 4.778 * T_0$ ).

On aurait pu aussi exprimer la température à partir de la vitesse horizontale  $u$  par la relation de Crocco :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{\gamma} M_0^2 \left( 1 - \left( \frac{u}{U_0} \right) \right).$$

Le profil numérique de la température  $T$  est représenté dans les figures 11 et 12.

• **Profil de la masse volumique ( $\rho$ ) et de la pression ( $P$ ) :**

La pression  $P$  est fonction de la température ( $T$ ) calculée précédemment :

$$P = (\gamma - 1) \rho C_v T.$$

Cette égalité permet de déduire la masse volumique pour  $y$  appartenant à l'intervalle  $[0, y_a]$  en fonction de la température et de la pression. Sachant qu'en dehors de cette intervalle les valeurs de la masse volumique sont interpolées linéairement à partir de résultats expérimentaux.

L'analyse des équations, dans chaque section, montre que la pression effective  $P' = P + \frac{2}{3} \rho k$  est constante :

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = 0.$$

Cette constante est précisément la valeur de la pression à l'infini ( $P_0$ ). De plus on peut écrire que  $P \simeq P'$  très près de la paroi, car  $k$  est proportionnelle à  $y^2$ . De cela, on en déduit la masse volumique pour  $y \in [0, y_a]$  (voir figure 7 et 8) :

$$\rho = \frac{P_0}{(\gamma - 1) C_v T}.$$

A partir du profil de la masse volumique, du profil de l'énergie cinétique turbulente et de la condition  $P' = P_0$ , on a :

$$P = P_0 - \frac{2}{3} \rho k.$$

Le profil de la pression est représenté dans les figures 13 et 14.

- **Profil de la vitesse verticale :**

L'approximation de la vitesse verticale pour l'étude de la couche limite est en général nulle. La considération de cette condition pour notre profil d'entrée engendre, lors de la simulation numérique à grand Mach, une onde de pression qui affecte nos résultats numériques. En effet l'analyse de l'équation de conservation de la masse volumique montre que la vitesse verticale est différente de zéro. Le manque de résultats expérimentaux pour cette variable, nous a amené à effectuer une transformation par similitude d'une coupe de la vitesse verticale en aval du domaine. Cette coupe est obtenue après une simulation numérique initialisée à partir d'un profil d'entrée nul :

$$\frac{v}{U_0} = f\left(\frac{y}{\delta_0}\right)$$

où  $\delta_0 = 0.0064$  est l'épaisseur pour la couche limite de la section d'entrée en  $x = 0.368$  et la fonction  $f$  discrétisée suivant  $\frac{y}{\delta_1}$  avec  $\delta_1 = 0.0166$  pour la section en  $x = 1.25$ .

La représentation du profil de la vitesse verticale  $v$  est visible dans la figure 17.

E

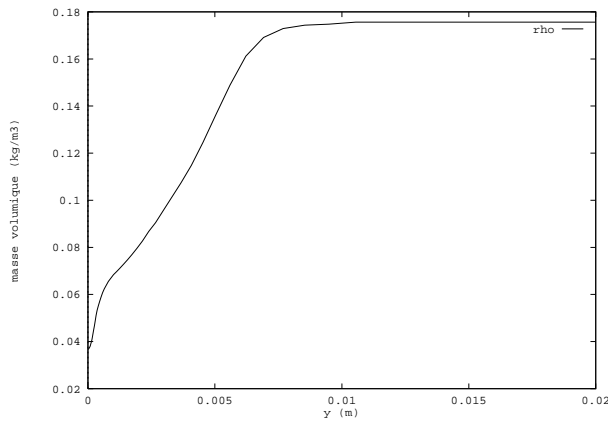


Figure 7 – Profil de la masse volumique en entrée

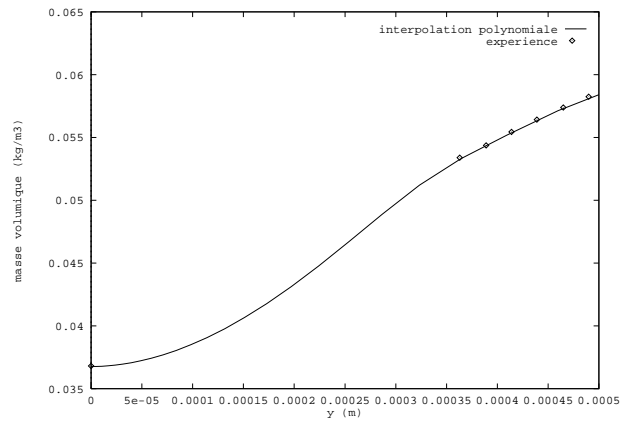


Figure 8 – Raccord de la masse volumique près de la paroi

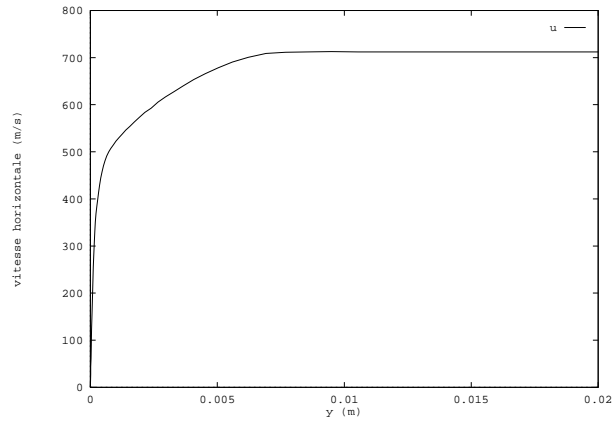


Figure 9 – Profil de la vitesse horizontale en entrée

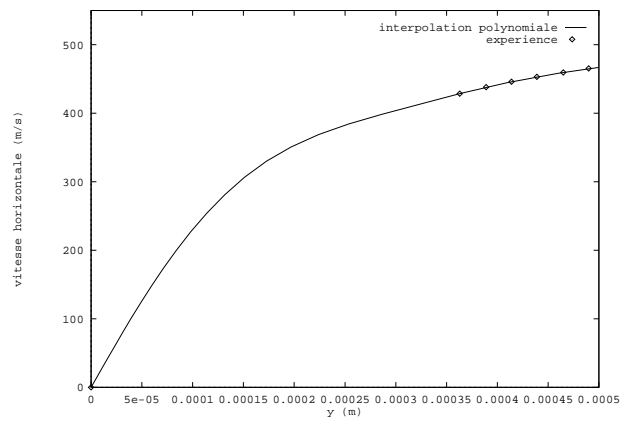


Figure 10 – Raccord de la vitesse horizontale près de la paroi

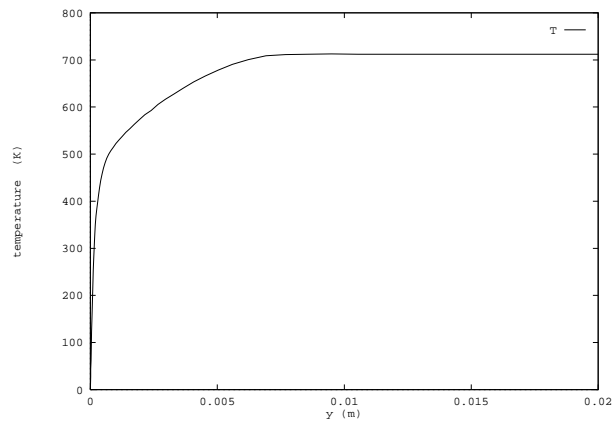


Figure 11 – Profil de la température en entrée

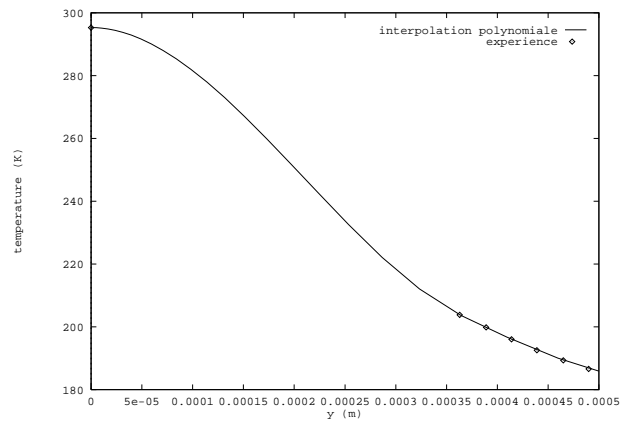


Figure 12 – Raccord de la température près de la paroi



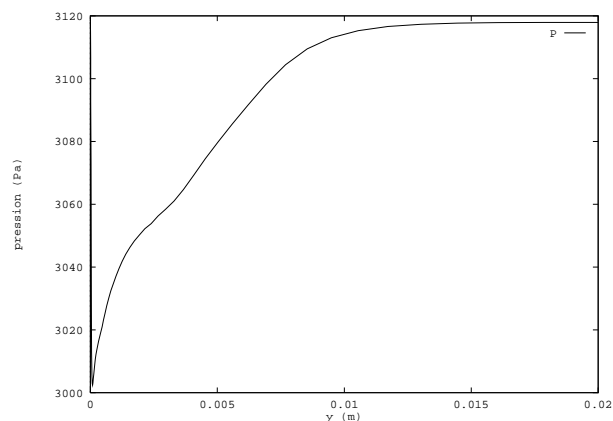


Figure 13 – Profil de la pression en entrée

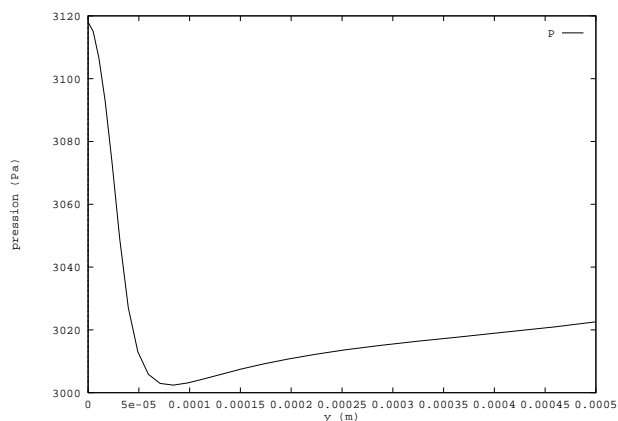


Figure 14 – Raccord de la pression près de la paroi

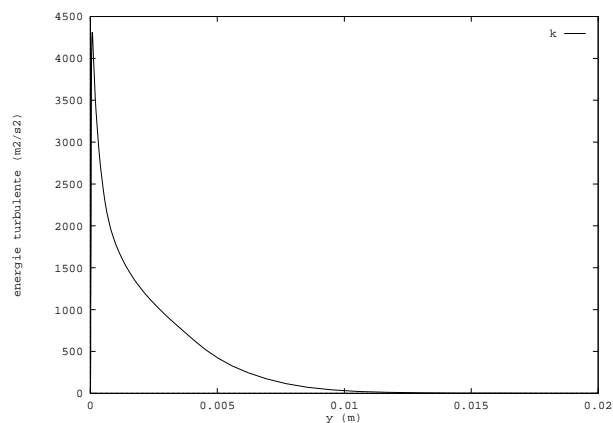


Figure 15 – Profil de l'énergie cinétique turbulente en entrée

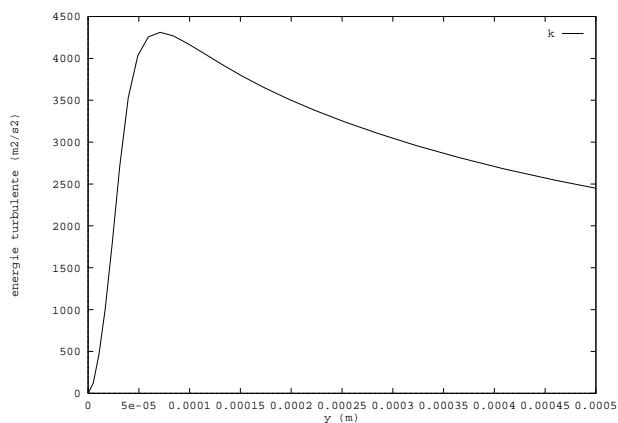


Figure 16 – Raccord de l'énergie cinétique turbulente près de la paroi

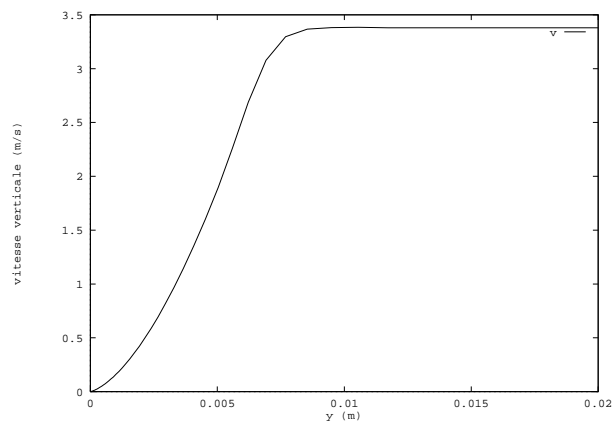


Figure 17 – Profil de la vitesse verticale en entrée

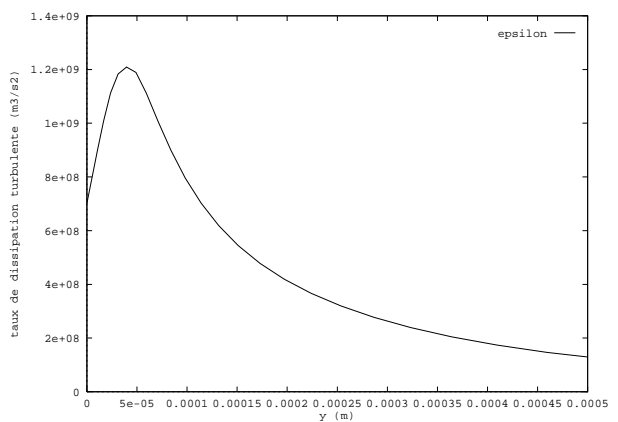


Figure 18 – Profil du taux de dissipation turbulente en entrée

### 3.3 Conditions à la paroi et en sortie

Les conditions imposées à la paroi solide ( $y=0$ ) pour les variables physiques sont celles d'un écoulement visqueux. L'existence de forces tangentielles impose que le fluide adhère à la paroi et que la vitesse moyenne ( $\vec{V}$ ) y soit nulle. Les gradients de la pression et de la température adiabatique dans la direction normale de la paroi sont nuls.

Les conditions à la paroi pour les variables moyennées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \\ \vec{V} = \vec{0} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Pour les deux variables turbulentes, seule la condition sur le taux de dissipation turbulente peut différer d'un modèle à un autre. Pour les modèles bas-Reynolds, on utilise une condition suggérée par Chapman and Kuhn [4] :

- **Energie cinétique turbulente :**

$$k = 0$$

- **Taux de dissipation turbulente [4] :**

$$\varepsilon = 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)$$

En sortie, les échanges avec le milieu extérieur sont déterminés à partir d'un flux décentré inspiré d'une décomposition de Steger-Warming [23]:

$$\Phi^{SW} (W_i, \tilde{W}_i, \vec{n}) = \mathcal{A}^+ (W_i, \vec{n}) W_i + \mathcal{A}^- (W_i, \vec{n}) \tilde{W}_i \quad (2)$$

avec

$$\tilde{W}_i = \left( \rho, \rho u, \rho v, \tilde{E}', \rho k, \rho \varepsilon \right)_i^T$$

où  $\mathcal{A}^+$  et  $\mathcal{A}^-$ , provenant de la décomposition de la matrice Jacobienne  $\mathcal{A}$  associée au flux convectif, sont respectivement la matrice associée aux valeurs propres positives et celle associée aux valeurs propres négatives.  $\tilde{E}'$  est l'énergie effective calculée à partir de la pression effective  $P'$  équivalent de la pression à l'infini et  $\vec{n}$  est la normale extérieure à la paroi. Cela s'écrit:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(W, \vec{n}) = n_x \frac{\partial F(W)}{\partial W} + n_y \frac{\partial G(W)}{\partial W} \\ \tilde{E}' = \frac{P_0}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \rho \end{cases}$$

En entrée, les profils sont maintenus en utilisant la décomposition (2) et en prenant pour  $\tilde{W}$  les valeurs des profils d'entrée.

## 4 Validation des modèles en incompressible

Nous considérons pour la validation un écoulement turbulent incompressible dans une conduite rectiligne à section droite circulaire de diamètre constant  $R = 2D$  avec  $D = 0.09 \text{ m}$ . L'expérience montre que dans toute section suffisamment éloignée de la section d'entrée est établi un écoulement dont les caractéristiques de la vitesse sont indépendantes de l'abscisse. La vitesse est donc en tout point parallèle à l'axe de la conduite.

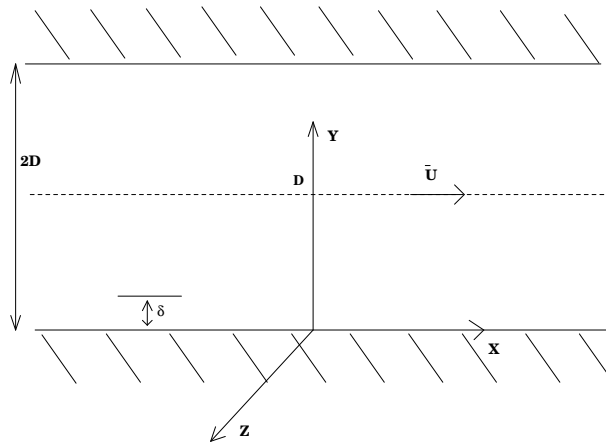


Figure 19 – *Expérience de la conduite*

L'expérience menée en 1965 par Comte-Bellot [6] permet de définir les différentes valeurs expérimentales de référence nécessaires pour l'adimensionnement des équations :

- Vitesse horizontale :  $U_0 = U_{max} = 10.5 \text{ m/s}$
- Longueur :  $L_0 = 0.09 \text{ m}$
- Température :  $T_0 = 293 \text{ K}$
- Pression :  $P_0 = 84102 \text{ Pa}$

- Mach :  $M_0 = 3.06 \cdot 10^{-2}$
- Viscosité laminaire :  $\mu_0 = 1.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$
- Masse Volumique :  $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$

Le Reynolds laminaire est donc:

$$Rey/m = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0} = 69500 \text{ m}^{-1}.$$

Le maillage de la demi conduite est constitué de 10 points suivant l'axe de (Ox) et de 60 points suivant (Oy) (voir figure 20). Ce maillage cartésien, de longueur 0.9 m et de largeur 0.09 m, présente des étirements constants suivant l'axe de (Ox). La longueur de l'élément minimum suivant l'axe (Oy) est de  $3.45 \cdot 10^{-5}$  et celle suivant (Ox) constant de 0.1. Le rapport de la forme  $\Delta x/\Delta y$  atteint par endroit 2900.

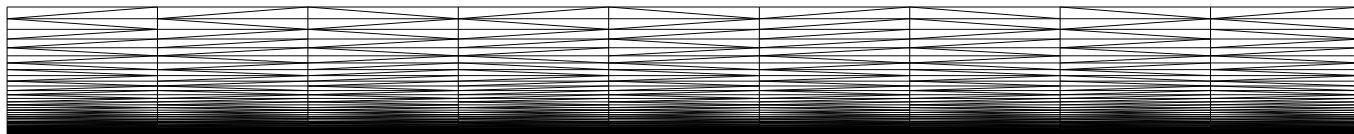


Figure 20 – Maillage structuré de la conduite :  $10 \times 60$  points

Les différents modèles de turbulence ont été préalablement étudiés sur des équations en une dimension d'espace. La validation en deux dimensions consiste à comparer la solution obtenue avec la solution de référence en une dimension. Seule la validation du modèle bicouche est présentée ici (voir figures 21, 22 et 23). Les trois modèles bas-Reynolds ayant déjà été validés dans la thèse de B. Koobus [12].

Les seules comparaisons avec l'expérience sont : la localisation de la valeur du pic de  $k^+ = \frac{k}{U_f^2}$  et de  $\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon \nu}{U_f^4}$ , la vitesse à l'axe central de la conduite  $U_{max}$  et la vitesse de frottement  $U_f$  :

modèle	$U_{max}$	$k_{max}^+/y^+$	$\varepsilon_{max}^+/y^+$	$\varepsilon_{wall}^+$	$U_f$
valeur expérimentale	10.50	4.50/20	0.20/10	[0.05;0.1]	0.39
Lam-Bremhorst	9.86	4.43/20	0.16/9.0	0.006	0.39
Nagano-Tagawa	9.91	4.14/20	0.18/10.8	0.062	0.39
Speziale-Abid-Anderson	9.67	4.08/20	0.20/8.9	0.093	0.39
Chen-Patel	10.50	4.30/26	0.20/11.7	0.044	0.39

Table 1 – Cas test de la conduite de Comte-Bellot: comparaison des valeurs numériques avec les valeurs expérimentales pour les différents modèles

On constate que les quatre modèles prédisent exactement la valeur de la vitesse de frottement à la paroi. Par contre, seul le modèle de Chen-Patel est capable de donner la bonne valeur de

la vitesse sur l'axe de la conduite. Le modèle de Lam-Bremhorst et le modèle de Chen-Patel donnent une bonne localisation des quantités turbulentes. Finalement, la modélisation de Chen-Patel permet d'obtenir les bonnes quantités physiques ( $U_f$  et  $U_{max}$ ). Ce modèle semble donc très prometteur pour la suite.

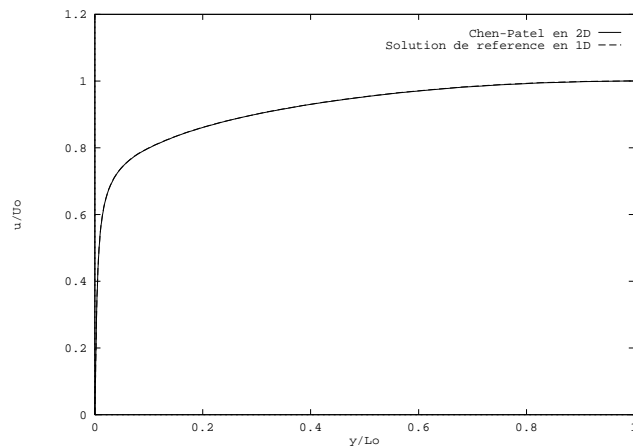


Figure 21 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison de la vitesse adimensionnée avec la solution de référence*

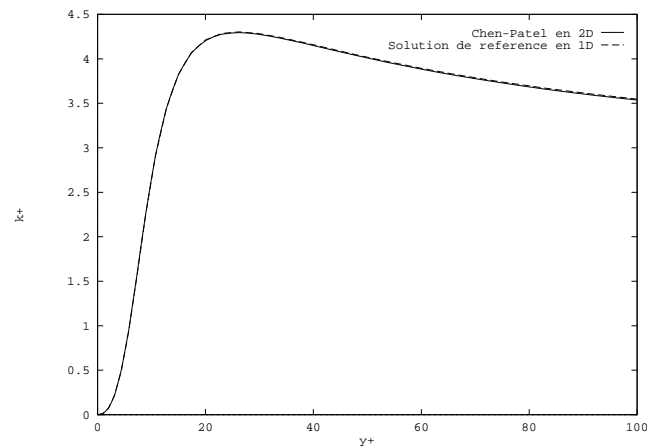


Figure 22 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison de l'énergie cinétique turbulente adimensionnée avec la solution de référence*

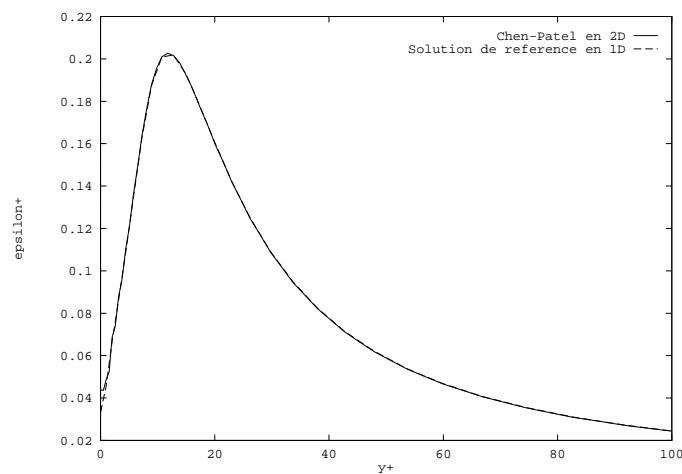


Figure 23 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison du taux de dissipation turbulente adimensionnée avec la solution de référence*

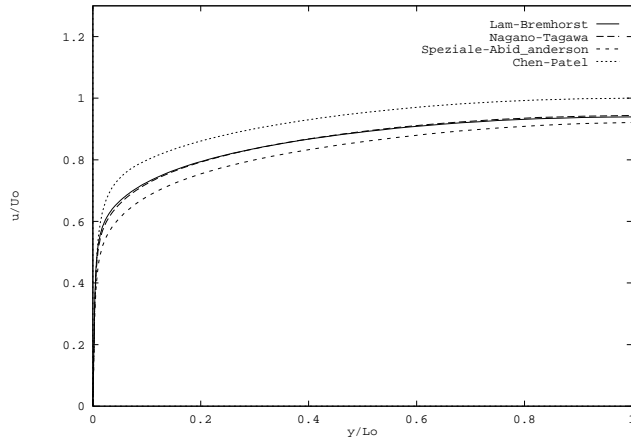


Figure 24 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison de la vitesse adimensionnée pour les différents modèles*

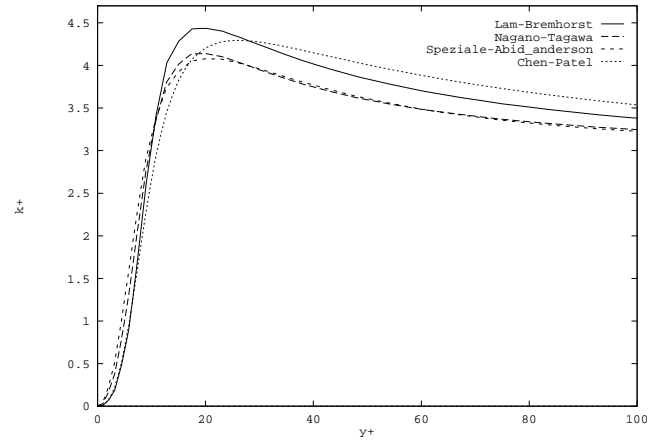


Figure 25 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison de l'énergie cinétique turbulente adimensionnée pour les différents modèles*

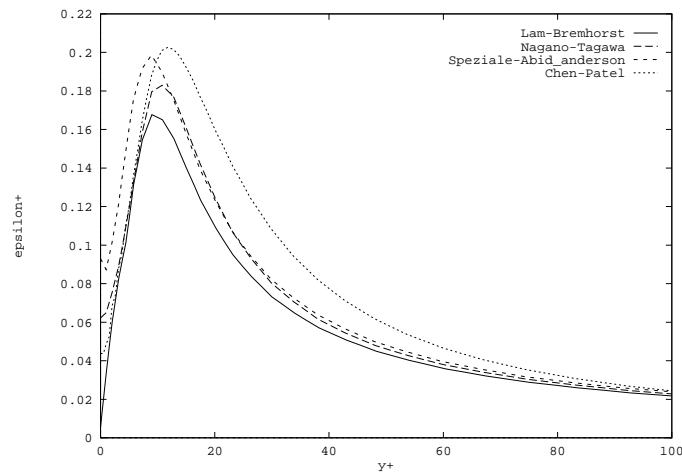


Figure 26 – *Conduite de Comte-Bellot: comparaison du taux de dissipation turbulente adimensionné pour les différents modèles*

## 5 Résultats numériques

### 5.1 Stabilité et convergence

Les simulations numériques menées jusqu'à présent, à partir de modèles à bas Reynolds, montrent une fragilité de la stabilité du schéma numérique. En effet, la convergence itérative en temps vers l'état stationnaire s'effectue, en générale, très lentement [12]. Afin de pouvoir utiliser à chaque itération en temps des pas de temps plus importants, une attention toute particulière a été portée sur ce problème. On constate, pour les premières itérations en temps, un mauvais comportement des fonctions  $f_\mu$ ,  $f_1$  et  $f_2$  très près de la paroi, dû à la variation brutale des quantités turbulentes. Ce comportement peut rendre les variables de fermeture négatives. Pour préserver leur positivité, on approche près de la paroi ( $y^+ < 10$ ) les variables  $R_y$  et  $R_t$  en fonction de  $y^+$  [20] :

$$\begin{cases} R_y = c_\mu^{-\frac{1}{4}} y^+ \\ R_t = R_y \frac{l_\mu}{y} \end{cases} \quad (3)$$

où  $l_\mu$  est la longueur scalaire définie dans le modèle de Chen-Patel :

$$l_\mu = \kappa c_\mu^{-3/4} y \left( 1 - \exp\left(\frac{-R_y}{A_\mu}\right) \right) \quad (4)$$

avec  $\kappa = 0.45$ ,  $A_\mu = 70$  et  $c_\mu = 0.09$ .

Ce raccord est utilisé pour les trois modèles à bas-Reynolds. La discrétisation numérique, des quatre équations des quantités physiques et des deux équations des quantités turbulentes, est basée sur une approche mixte éléments finis/volumes finis [3]. La précision du schéma est à l'ordre deux en espace. La méthode de la résolution numérique est une formulation implicite des flux. Cette formulation est suivie d'une linéarisation des flux à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre un en temps. Finalement, on aboutit à la résolution d'un système linéaire dépendant du temps. Dans ce rapport, tous les résultats numériques ont été obtenus à partir de la méthode de Gauss-Seidel relaxée (paramètre de relaxation égal à un). A chaque itération en temps, 20 balayages de Gauss-Seidel sont effectués.

Dans les figures 27 et 28, on constate que les courbes de convergence du résidu normalisé de  $k$ , pour les différents modèles, ont pratiquement la même pente. La vitesse de convergence obtenue avec le raccord (3) est largement supérieure à celle obtenue sans le raccord (voir B. Koobus [12] [13]). La comparaison sur le nombre d'itération en temps pour une convergence du résidu jusqu'à  $10^{-5}$  fait apparaître un gain d'un facteur 18 (250 au lieu de 4500).

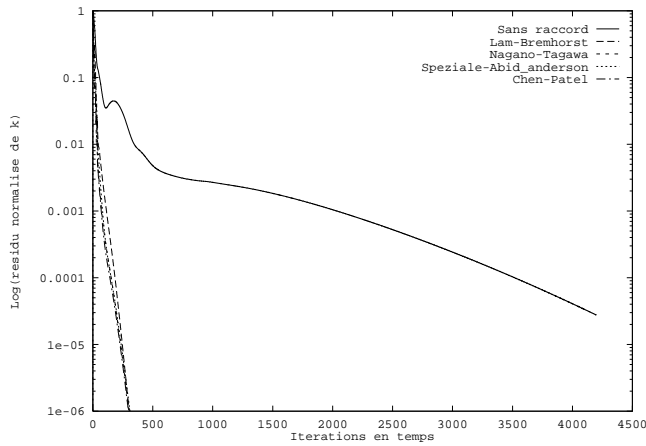


Figure 27 – *Plaque de Mabey*: convergence non linéaire de l'énergie cinétique turbulente pour les différents modèles

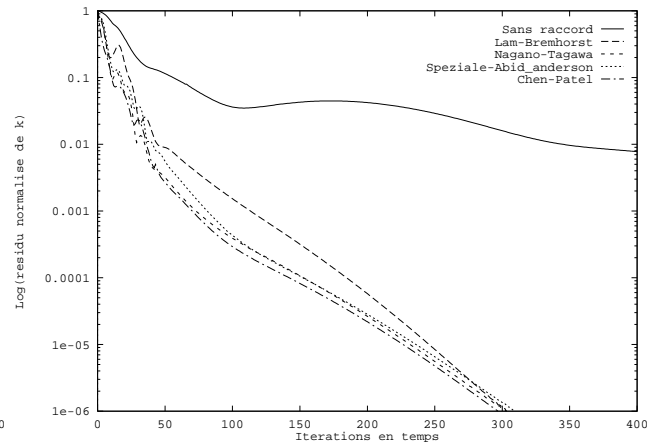


Figure 28 – *Plaque de Mabey*: zoom de la convergence non linéaire de l'énergie cinétique turbulente pour les différents modèles

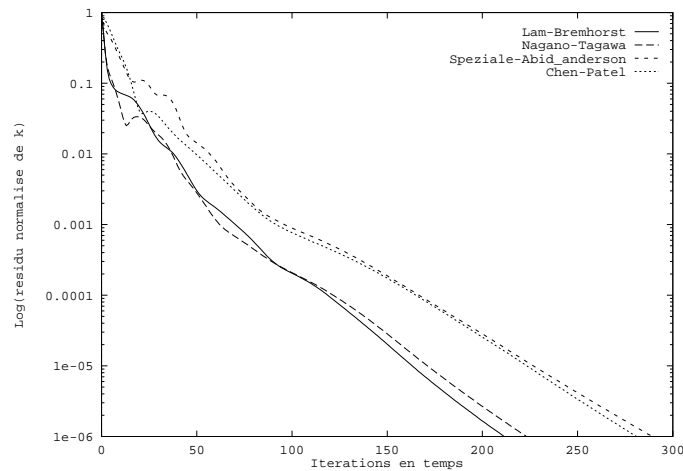


Figure 29 – *Conduite de Comte-Bellot*: convergence non linéaire de l'énergie cinétique turbulente pour les différents modèles



## 5.2 Indépendance du maillage

Une des propriétés intéressantes que l'on s'efforce de montrer ici est la moindre dépendance de la solution par rapport au nombre de points du maillage dans la couche limite, ce qui permet d'utiliser des maillages seulement faiblement étirés sans perturber la stabilité du schéma numérique. Pour montrer cette propriété, trois maillages emboîtés ont été construits. Le premier maillage est constitué de  $113 * 81$  points (figure 32), le deuxième obtenu par déraffinement du premier comprend  $57 * 41$  points (figure 33) et le troisième par déraffinement du précédent est composé  $29 * 21$  points (figure 34). On étudie cette propriété pour le modèle de Lam-Bremhorst (modèle à bas-Reynolds) et pour le modèle de Chen-Patel (modèle bi-couche).

Les résultats provenant du modèle de Lam-Bremhorst (voir figures 30, 35, 37, 39, 41) montrent une forte dépendance, contrairement au modèle de Chen-Patel (voir figures 31, 36, 38, 40, 42). En effet, le pourcentage d'écart entre le coefficient de frottement ( $cf$ ) du maillage fin et le  $cf$  du maillage moyen est d'environ de 10 pour le modèle de Lam-Bremhorst et de 2 pour le modèle de Chen-Patel. Les différences, pour les deux modèles, sont surtout constatées dans la zone de raccordement ( $y \approx \delta_t$ ) avec l'écoulement extérieur de la couche limite turbulente (voir figures de 35 à 40). On constate, pour le modèle de Lam-Bremhorst, une augmentation importante de la valeur de l'énergie cinétique turbulente dans la couche limite (voir figure 41) lorsque le maillage devient de plus en plus grossier. Le temps CPU sur une Dec 266 est de 27 minutes pour le maillage fin, de 2 minutes pour le maillage moyen et de 30 secondes pour le maillage grossier (indépendant du modèle). Le CPU comprend le temps de calcul des flux explicites, de la matrice implicite et de la résolution du système linéaire (20 balayages de Gauss-Seidel) pour chaque itération en temps.

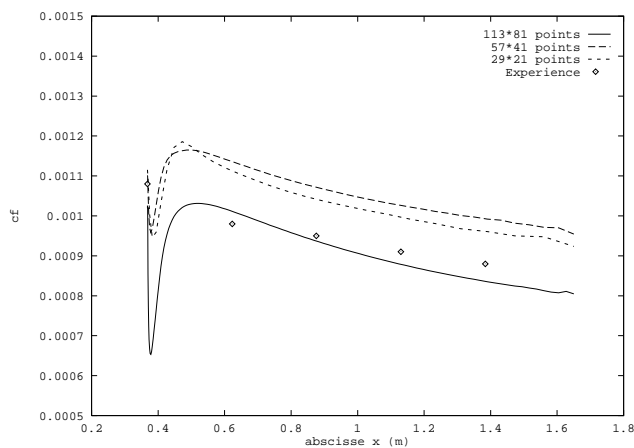


Figure 30 – *Plaque de Mabey: section sur trois maillages emboîtés du coefficient de frottement en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-bremhorst)*

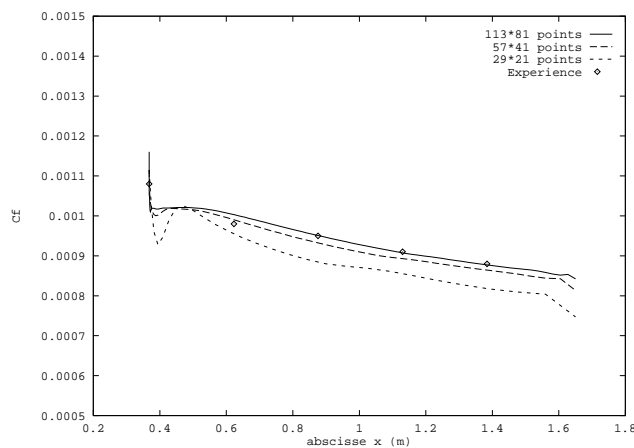


Figure 31 – *Plaque de Mabey: section sur trois maillages emboîtés du coefficient de frottement en  $x = 1.384$  (modèle de Chen-Patel)*

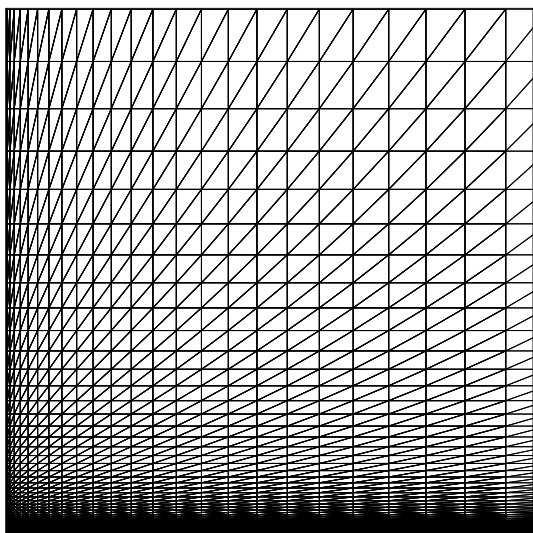


Figure 32 – Zoom du maillage structuré de la plaque :  $113 \times 81$  points

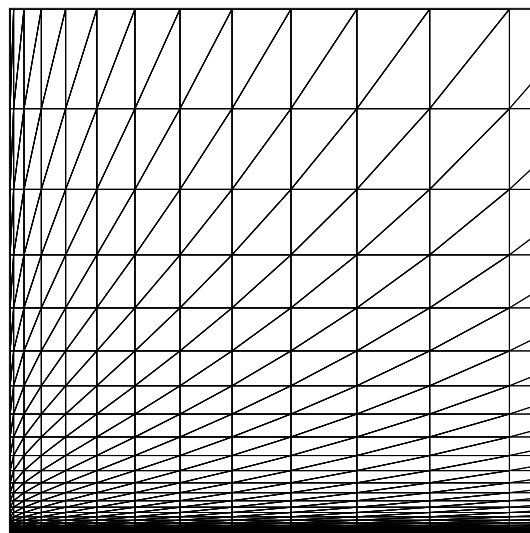


Figure 33 – Zoom du maillage structuré de la plaque :  $57 \times 41$  points

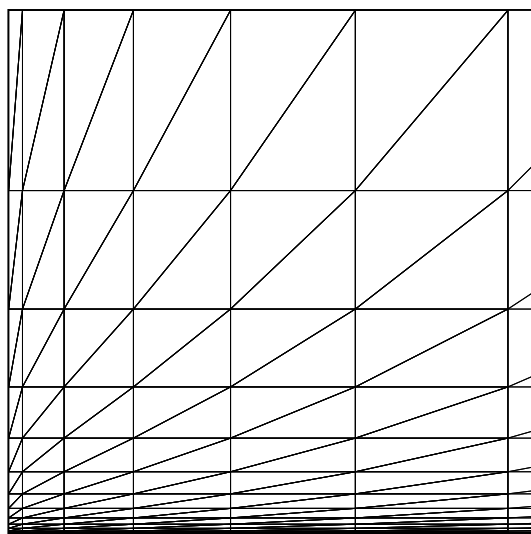


Figure 34 – Zoom du maillage structuré de la plaque :  $29 \times 21$  points

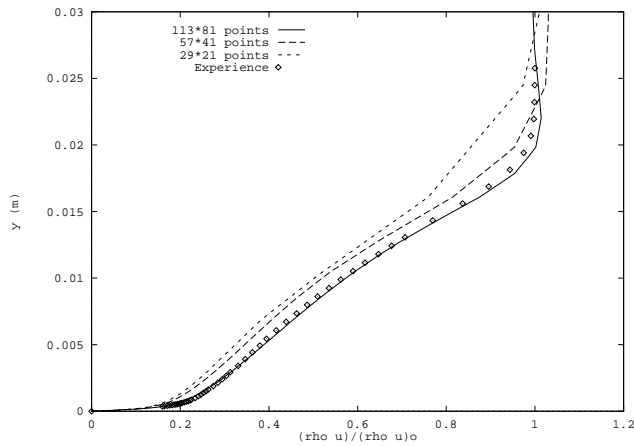


Figure 35 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de la quantité de mouvement en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)

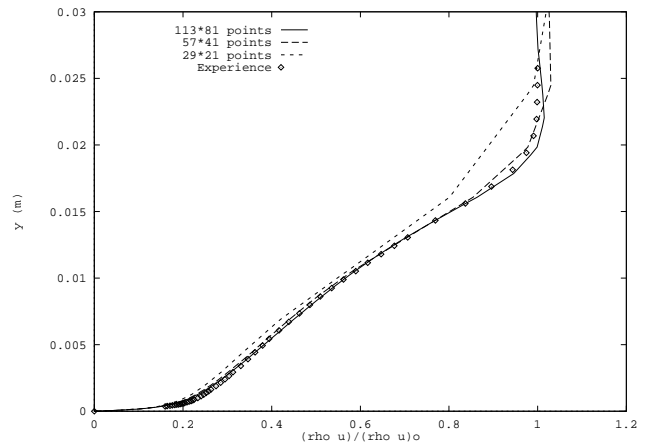


Figure 36 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de la quantité de mouvement en  $x = 1.384$  (modèle de Chen-Patel)

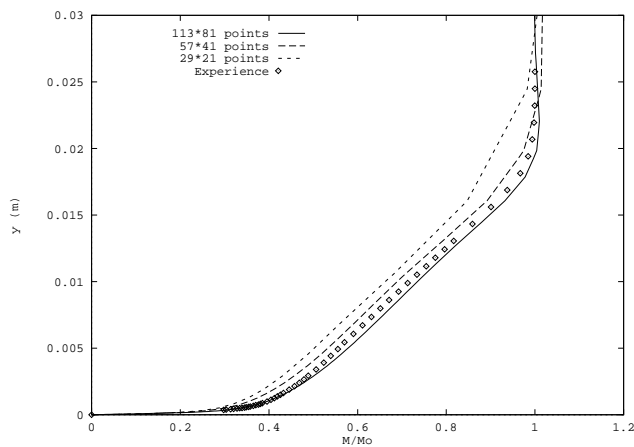


Figure 37 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés du Mach adimensionné en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)

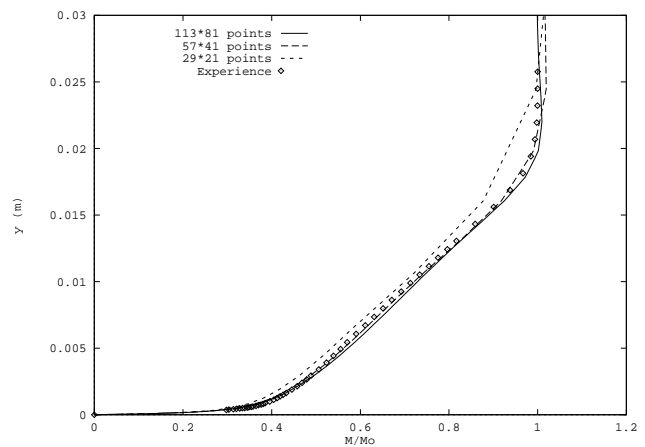


Figure 38 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés du Mach adimensionné en  $x = 1.384$  (modèle de Chen-Patel)

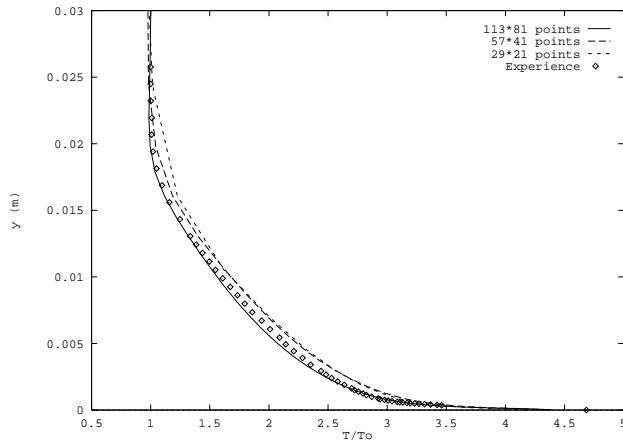


Figure 39 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de la température en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)

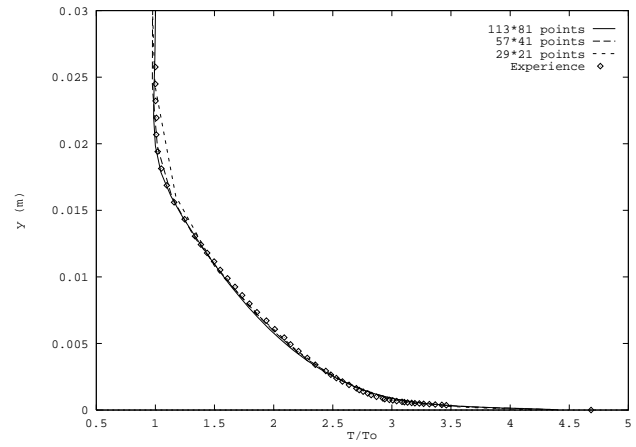


Figure 40 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de la température en  $x = 1.384$  (modèle de Chen-Patel)

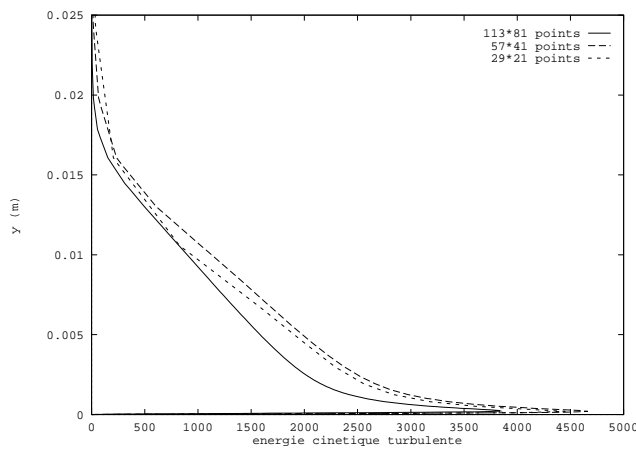


Figure 41 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de l'énergie cinétique turbulente en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)

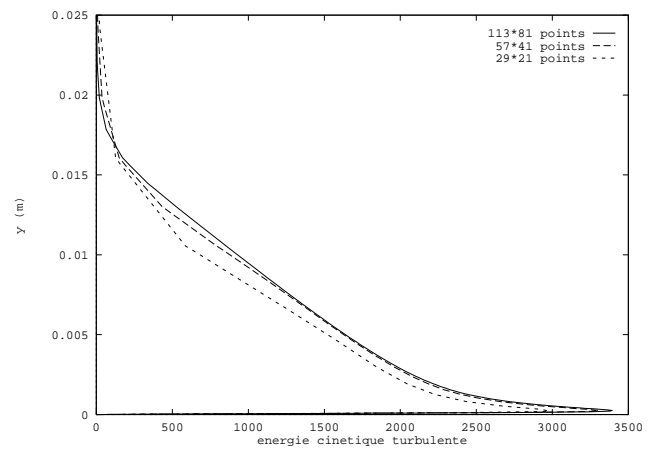


Figure 42 – *Plaque de Mabe*: section sur trois maillages emboîtés de l'énergie cinétique turbulente en  $x = 1.384$  (modèle de Chen-Patel)

### 5.3 Comparaisons des modèles

Dans un premier temps, on a comparé les quatre modèles aux résultats expérimentaux (voir figures de 44 à 67 et figure 43). Il en ressort que le modèle de Chen-Patel reste le meilleur, que les modèles de Lam-Bremhorst et Speziale-Abid-Anderson sont aussi assez bons, et que le modèle de Nagano-Tagawa est un peu moins bon. Le modèle bicouche sera par la suite comparé aux différents modèles utilisés lors du Workshop ETMA 95 [9] [10] [26].

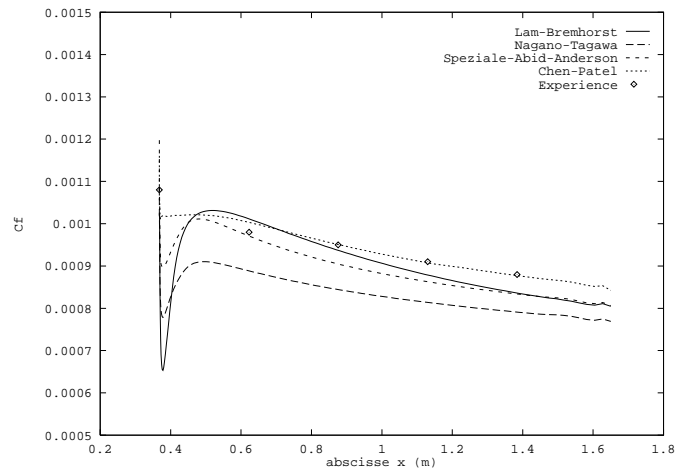


Figure 43 – Plaque de Mabey : comparaison des différents modèles pour le coefficient de frottement

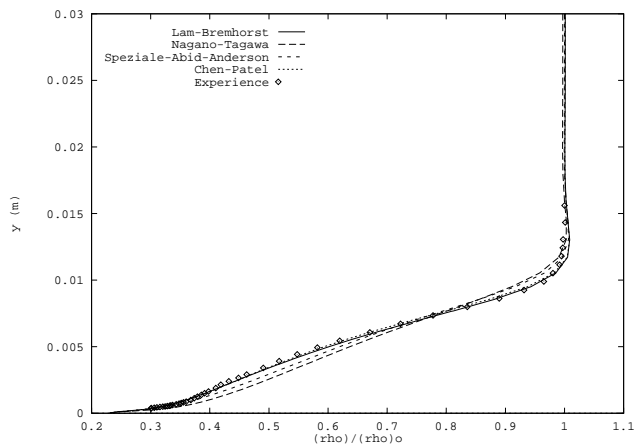


Figure 44 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la masse volumique adimensionnée en  $x = 0.623$*

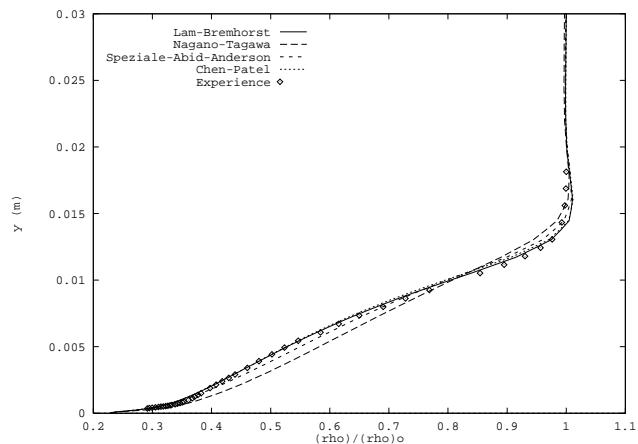


Figure 45 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la masse volumique adimensionnée en  $x = 0.876$*

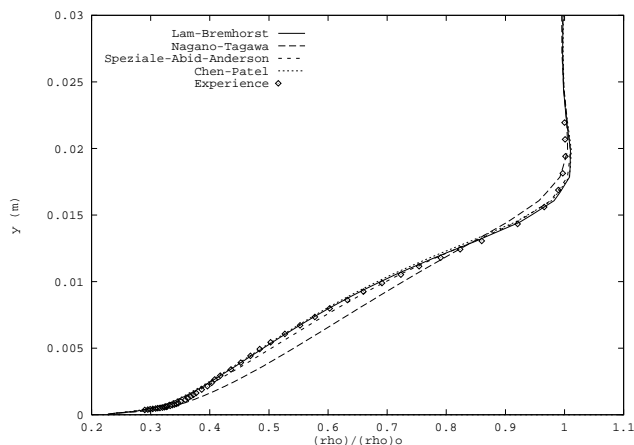


Figure 46 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la masse volumique adimensionnée en  $x = 1.130$*

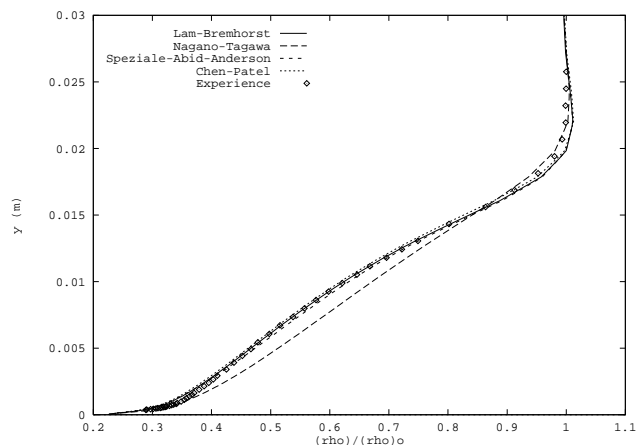


Figure 47 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la masse volumique adimensionnée en  $x = 1.384$*

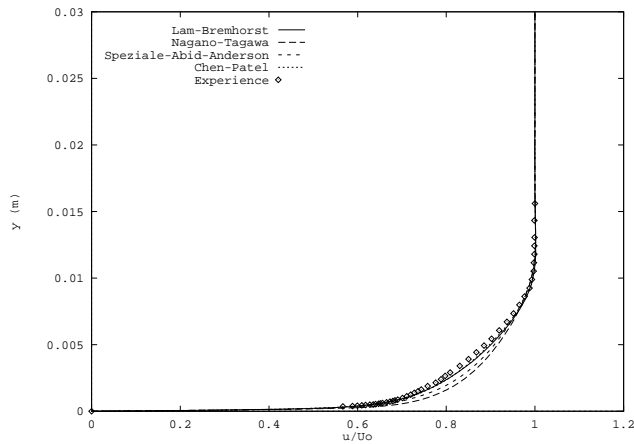


Figure 48 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la vitesse horizontale adimensionnée en  $x = 0.623$*

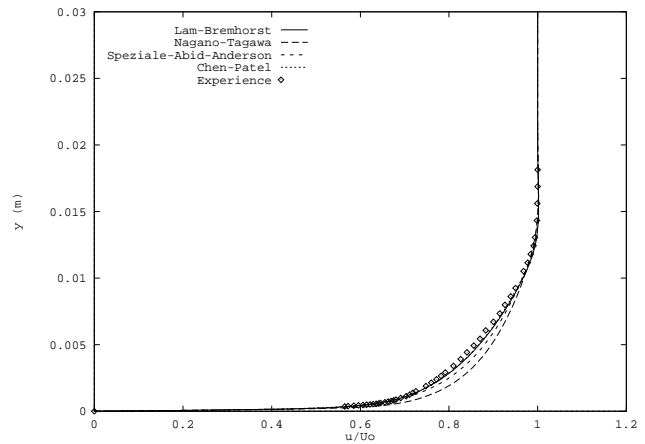


Figure 49 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la vitesse horizontale adimensionnée en  $x = 0.876$*

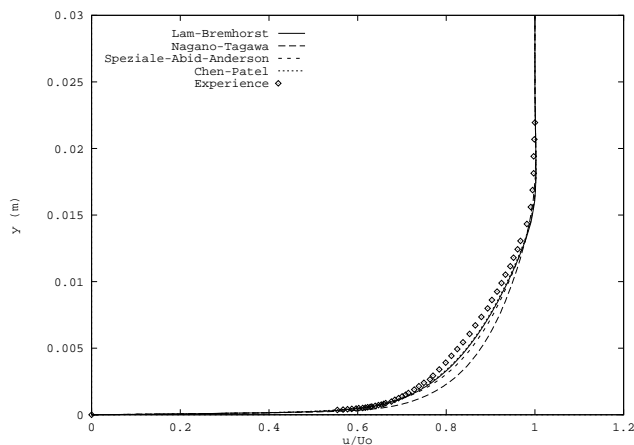


Figure 50 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la vitesse horizontale adimensionnée en  $x = 1.130$*

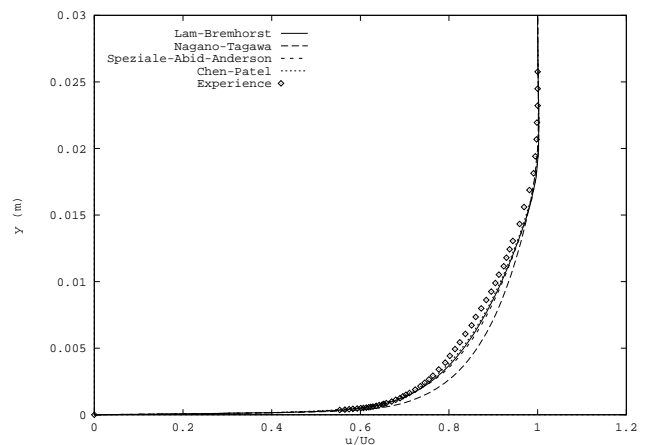


Figure 51 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la vitesse horizontale adimensionnée en  $x = 1.384$*

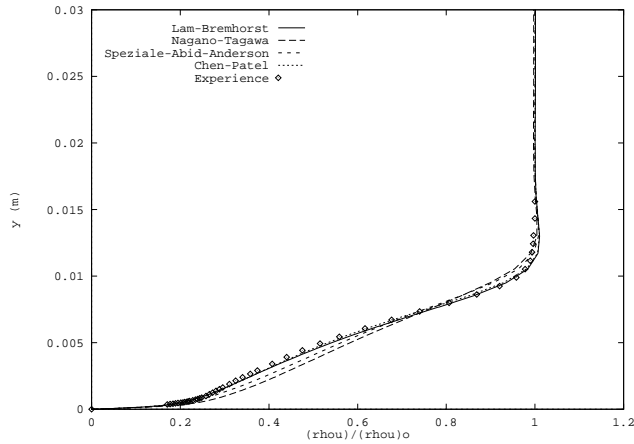


Figure 52 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la quantité de mouvement adimensionnée en  $x = 0.623$*

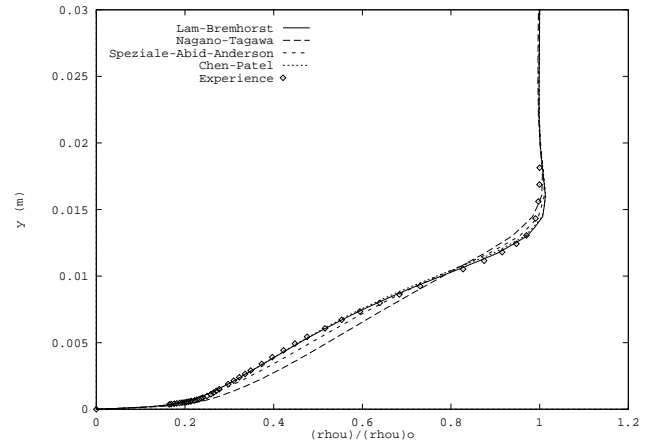


Figure 53 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la quantité de mouvement adimensionnée en  $x = 0.876$*

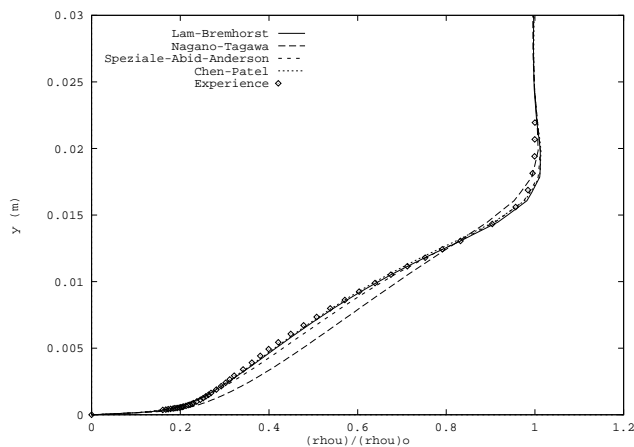


Figure 54 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la quantité de mouvement adimensionnée en  $x = 1.130$*

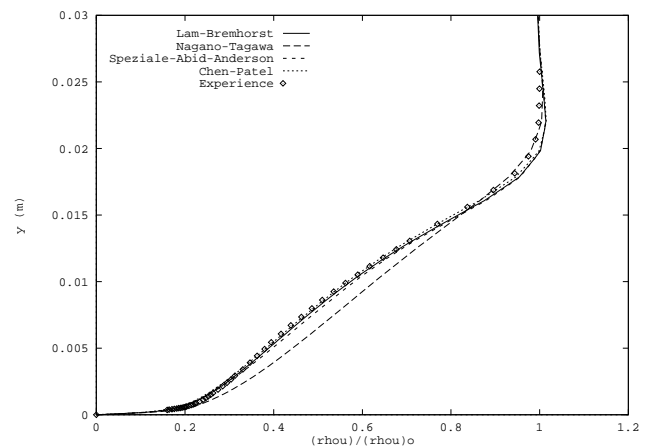


Figure 55 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la quantité de mouvement adimensionnée en  $x = 1.384$*



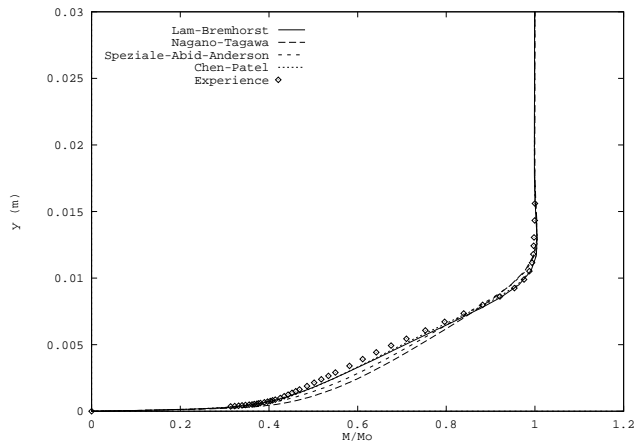


Figure 56 – *Plaque de Mabe*: comparaison des différents modèles pour le Mach adimensionnée en  $x = 0.623$

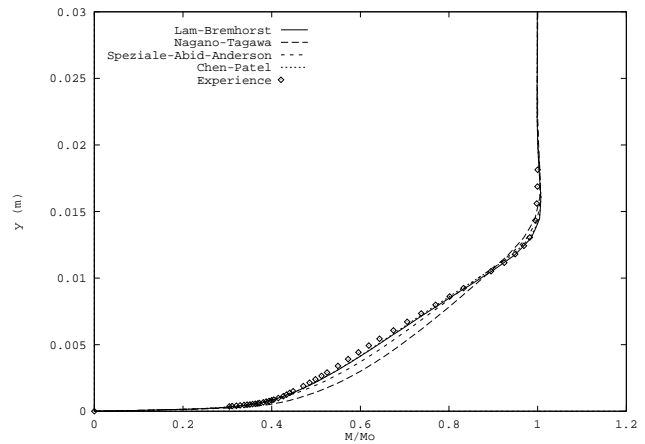


Figure 57 – *Plaque de Mabe*: comparaison des différents modèles pour le Mach adimensionnée en  $x = 0.876$

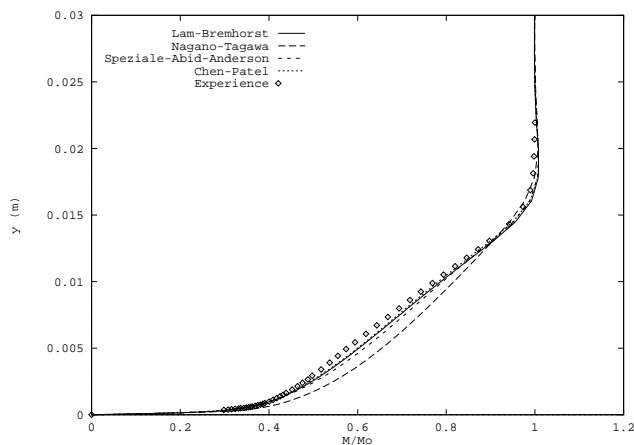


Figure 58 – *Plaque de Mabe*: comparaison des différents modèles pour le Mach adimensionnée en  $x = 1.130$

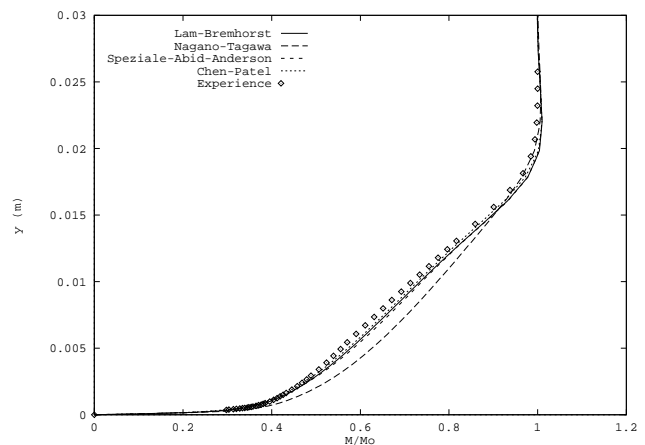


Figure 59 – *Plaque de Mabe*: comparaison des différents modèles pour le Mach adimensionnée en  $x = 1.384$

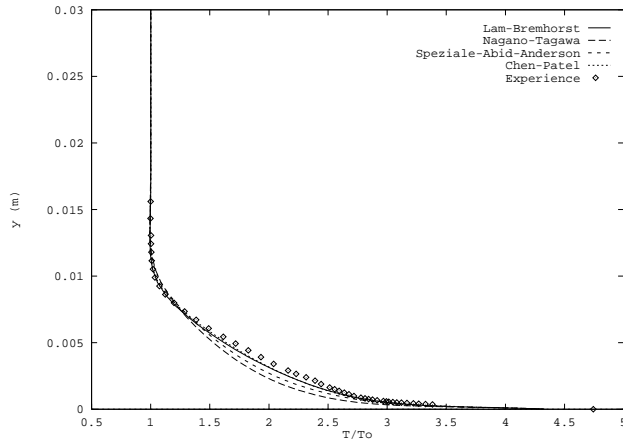


Figure 60 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température adimensionnée en  $x = 0.623$*

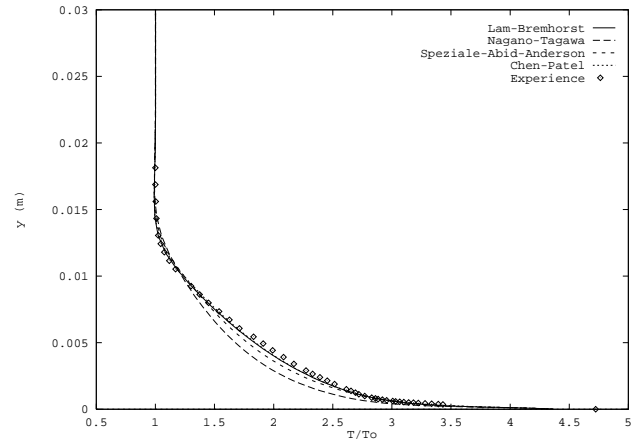


Figure 61 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température adimensionnée en  $x = 0.876$*

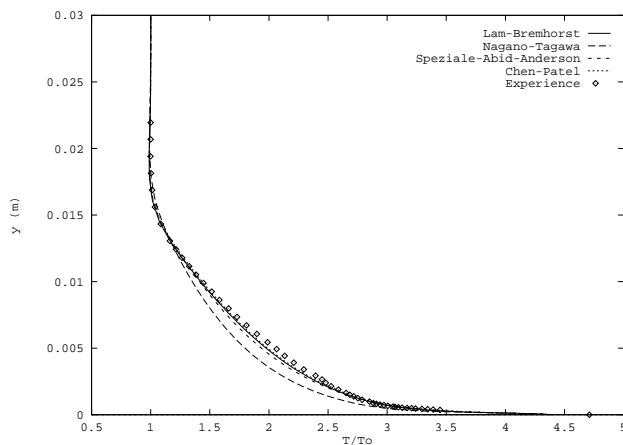


Figure 62 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température adimensionnée en  $x = 1.130$*

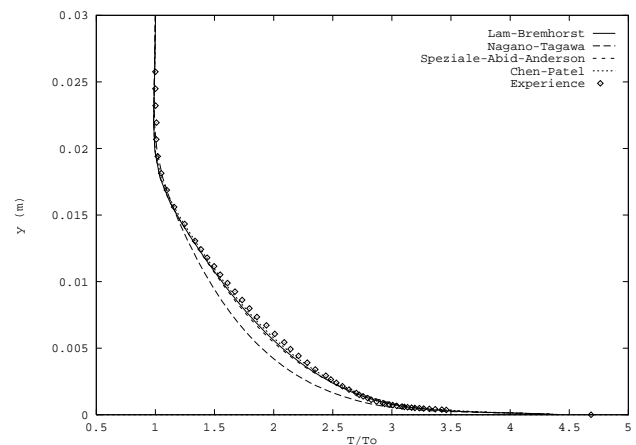


Figure 63 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température adimensionnée en  $x = 1.384$*

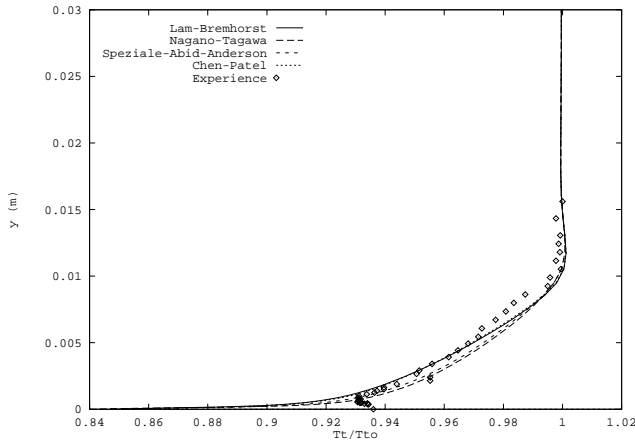


Figure 64 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température totale adimensionnée en  $x = 0.623$*

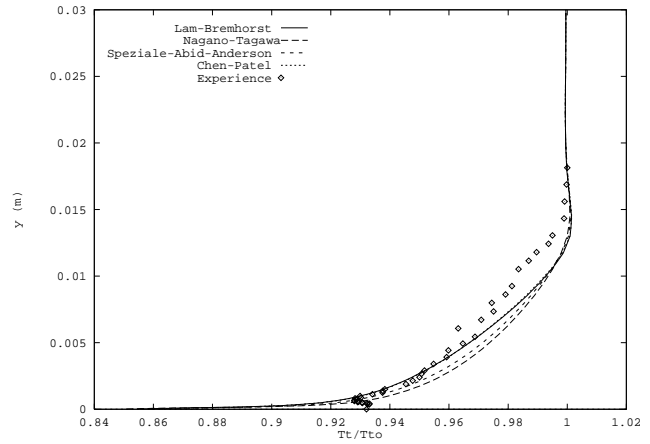


Figure 65 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température totale adimensionnée en  $x = 0.876$*

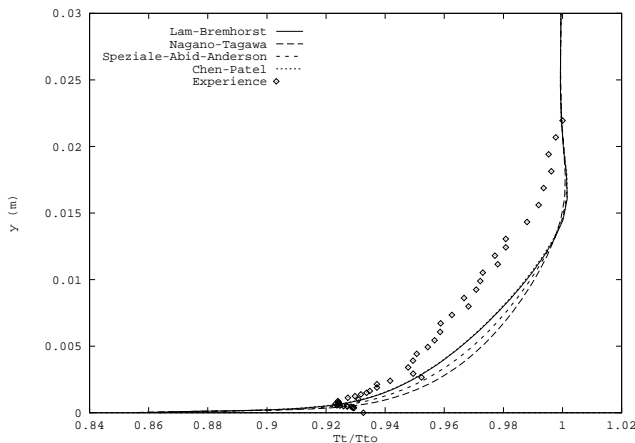


Figure 66 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température totale adimensionnée en  $x = 1.130$*

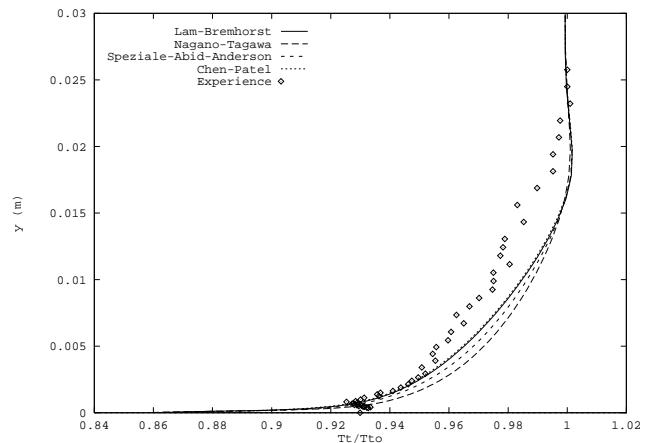


Figure 67 – *Plaque de Mabey: comparaison des différents modèles pour la température totale adimensionnée en  $x = 1.384$*

## 5.4 Comparaison avec le Workshop ETMA

On compare ici le modèle bicouche avec les différents modèles utilisés lors du Workshop ETMA 95. Dans les figures 68 à 71, on utilisera les abbréviations suivantes :

- VUB: Vrije Universiteit Brussel (Ch. Hirsch et E. Shang)
- STANFORD: Université de Stanford (T. Hughes, K. Jansen et G. Hauke)
- ECL: Ecole Centrale de Lyon (I. Yudiana et Buffat)
- SINUS: INRIA Sophia-Antipolis (J. Francescatto)

Pour des raisons de calendrier, ne sont considérés que les résultats du Workshop; pour des calculs plus récents, on se référera à I. Yudiana (thèse en préparation) et à D. Guezengar (thèse en préparation).

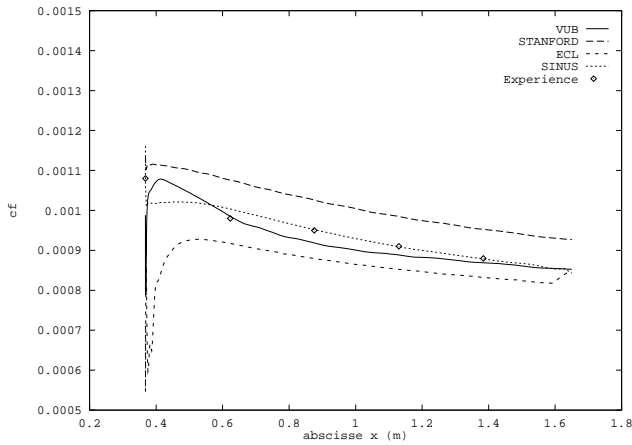


Figure 68 – *Plaque de Mabey: comparaison des résultats numériques obtenus avec le modèle bicouche et ceux du Workshop ETMA pour le coefficient de frottement en  $x = 1.384$*

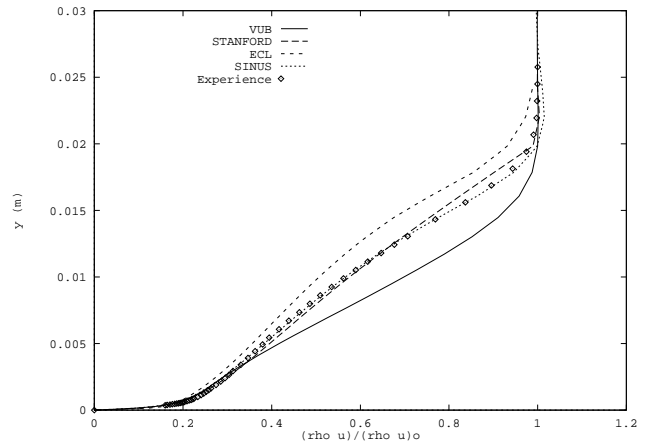


Figure 69 – *Plaque de Mabey: comparaison des résultats numériques obtenus avec le modèle bicouche et ceux du Workshop ETMA pour la quantité de mouvement adimensionnée en  $x = 1.384$*

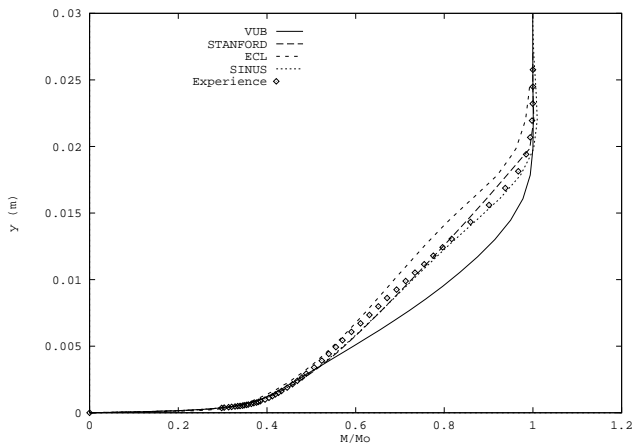


Figure 70 – *Plaque de Mabey: comparaison des résultats numériques obtenus avec le modèle bicouche et ceux du Workshop ETMA pour la Mach adimensionnée en  $x = 1.384$*

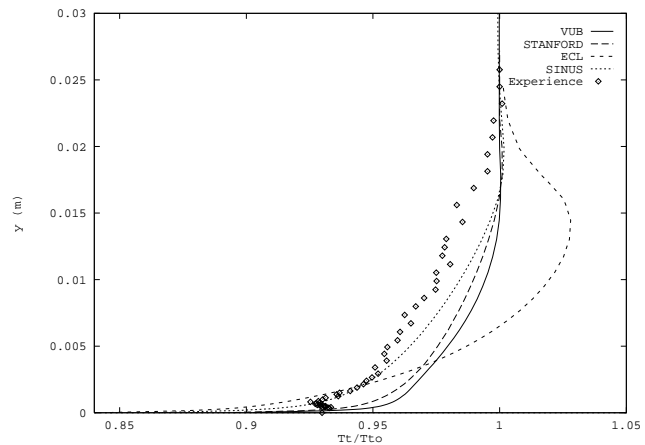


Figure 71 – *Plaque de Mabey: comparaison des résultats numériques obtenus avec le modèle bicouche et ceux du Workshop ETMA pour la température totale adimensionnée en  $x = 1.384$*

## 5.5 Analyse de l'écoulement

En dehors de la comparaison des résultats numériques avec l'expérience, il est possible d'analyser l'écoulement.

Dans un premier temps, on regardera le comportement de la vitesse horizontale  $u$  par rapport à la loi logarithmique.

Ensuite, on vérifiera si l'équilibre entre la production et la dissipation est maintenue dans toute la couche limite.

### 5.5.1 Loi logarithmique

Il existe en fluide compressible une région située immédiatement au-dessus de la couche laminaire, dans laquelle la vitesse dépend essentiellement des conditions à la paroi, c'est-à-dire du frottement. On y applique encore une loi de paroi dans laquelle la vitesse horizontale  $u$  et la distance normale à la paroi  $y$  sont rapportées à des quantités liées au frottement.

En incompressible interviennent les variables  $u/u_f$  et  $(u_f y)/\nu$ ,  $u_f$  étant la vitesse de frottement.

En compressible il est nécessaire, puisque  $\rho$  et  $\nu$  varient, de préciser la définition de  $u/u_f$  et  $(u_f y)/\nu$ . En général, on choisit ces variables au niveau de la paroi. La loi de paroi en fluide compressible est ainsi une relation qui s'écrit :

$$\frac{u}{u_f} = f\left(\frac{u_f y}{\nu_p}\right), \quad \text{avec } u_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}.$$

En incompressible la loi de paroi est une courbe universelle de la forme :

$$\frac{u}{u_f} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_f y}{\nu}\right) + C$$

où la constante de Von Karman est  $\kappa = 0.4$  et  $C = 5.1$ .

En compressible cette loi s'écarte de la courbe de l'incompressible lorsque le nombre de Mach devient important (Mach supérieur à 3 environ). L'introduction de la transformé de Van Driest (1951) [24] permet de prendre en compte la variation de la masse volumique et de corriger cet écart. La transformé de Van Driest ( $V$ ) susceptible d'approcher la loi de paroi incompressible est :

$$V = \int_0^u \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} du.$$

L'expression analytique de  $V$  dans le cas de paroi adiabatique s'exprime sous la forme suivante :

$$V = \sqrt{E} \arcsin \frac{u}{D}$$

où  $E = \frac{2C_p T_p}{Pr_t}$  et  $D = \sqrt{E}$  avec  $C_p = 718$ .

Le graphe dont l'ordonnée est la vitesses de Van Driest adimensionnée par la vitesse de frottement et l'abscisse le logarithme de la distance adimensionnée  $y^+$  est représenté dans la figure 72.

Finalement, on constate que cette transformation de  $u$  permet de préserver la loi logarithmique classique. De plus, on remarque un très bon accord calcul-expérience avec un bonne localisation des différentes zones de la couche limite.

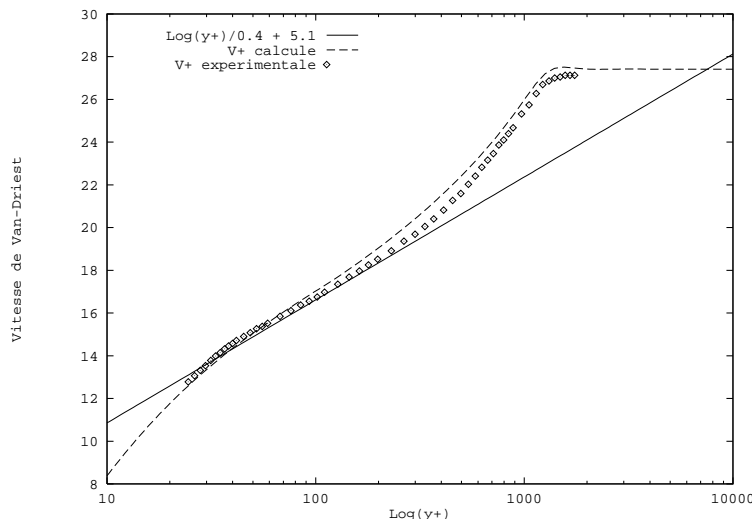


Figure 72 – *Plaque de Mabey*: profil de la vitesse adimensionnée de Van Driest  $V^+ = V/u_f$  en  $x = 1.384$  pour le modèle de Chen-Patel

### 5.5.2 Equilibre production-dissipation

On présente dans ce paragraphe l'effet de la couche limite compressible sur la position d'équilibre entre les termes de dissipation et les termes de production. Les figures 75, 76 et 77 ont été obtenues à partir du modèle de Lam-Bremhorst. On observe dans les figures 75 et 76 une conservation de l'équilibre sur 95 % de la couche limite. En revanche, on constate très près de la paroi ( $y/\delta < 0.05$ ) un faible déséquilibre. En conclusion, l'égalité entre les termes de production et les termes de dissipation est conservé, sauf dans la sous-couche visqueuse où la production est supérieure à la dissipation (voir figure 77).

On remarque dans les figures 76 et 77 un pic de ces termes en  $y \simeq 0.0001$ . Ceci provient du mauvais raccordement entre le Reynolds turbulent local  $R_t$  défini pour  $y^+ < 10$  (voir l'expression 3) et le Reynolds turbulent local  $R_t$  standard. Les figures 73 et 74 représentent le profil de  $R_t$  en  $x = 1.384$ . On constate effectivement un raccordement brutal de  $R_t$  en  $y = 0.0001$ .

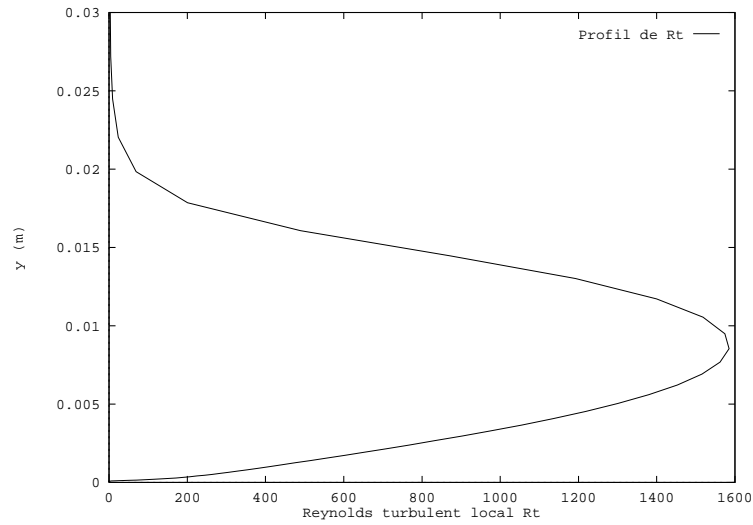


Figure 73 – *Plaque de Mabey: courbe du Reynolds turbulent local  $R_t$  pour la section en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)*

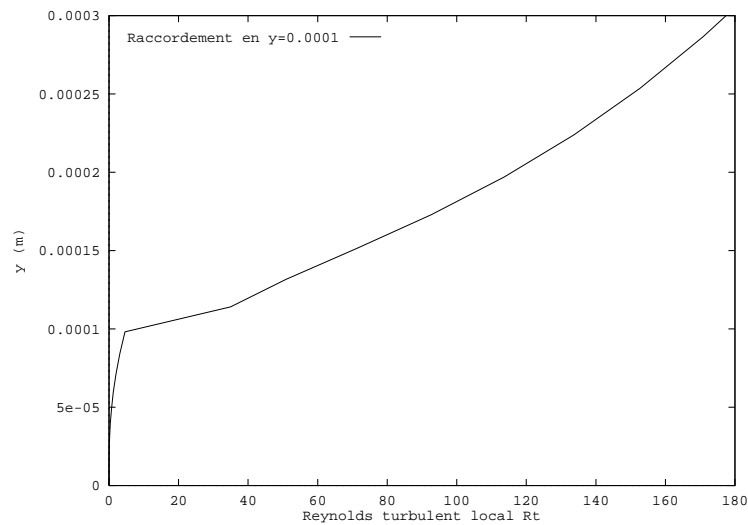


Figure 74 – *Plaque de Mabey: raccordement du Reynolds turbulent local  $R_t$  en  $y = 0.0001$  ( $y^+ \simeq 10$ ) pour la section en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)*



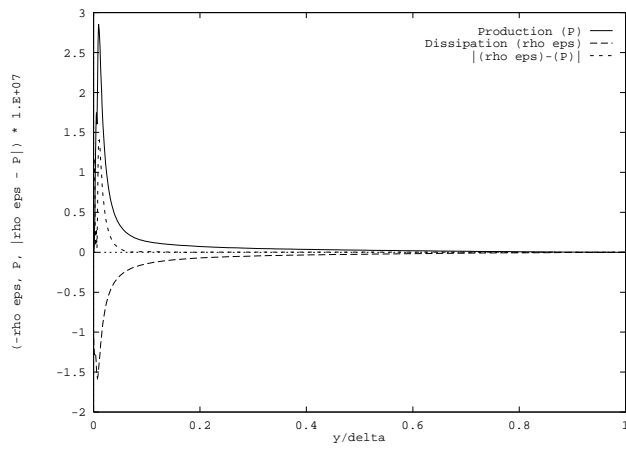


Figure 75 – *Plaque de Mabey: courbe de la production turbulente et de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour la section en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)*

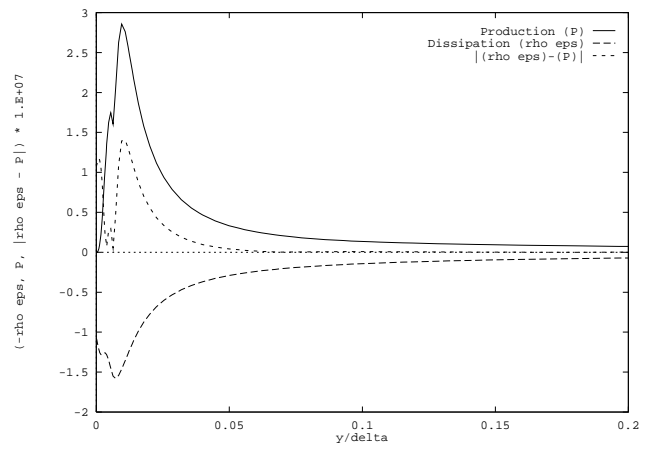


Figure 76 – *Plaque de Mabey: courbe de la production turbulente et de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente (zoom) pour la section en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)*

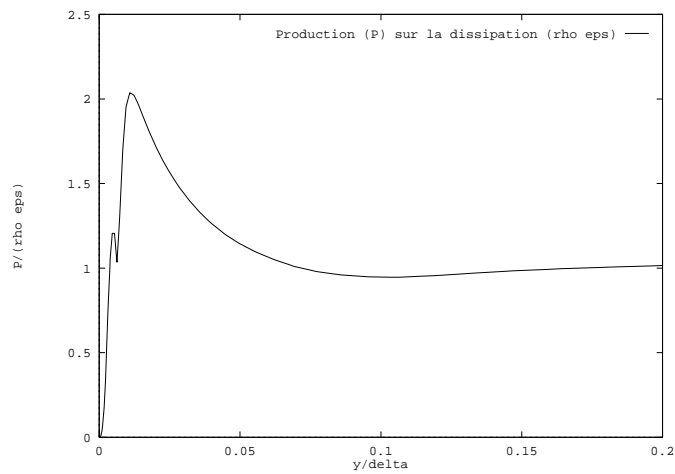


Figure 77 – *Plaque de Mabey: courbe du rapport de la production turbulente et de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour la section en  $x = 1.384$  (modèle de Lam-Bremhorst)*

## 6 Conclusion

Dans ce rapport, on s'est intéressé à la simulation numérique d'une couche limite supersonique sur une plaque plane. Cet écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes moyennées et par deux équations de fermeture  $k - \varepsilon$  établis pour résoudre l'écoulement où le nombre de Reynolds turbulent local est grand.

Cette étude a permis de valider plusieurs modèles pour résoudre l'ensemble des équations même au endroit où le nombre de Reynolds turbulent local est faible.

On a testé deux types de modélisation :

- La modélisation plus classique fait intervenir diverses fonctions dont le but est de contrôler le terme source pour le taux de dissipation turbulent et de corriger la viscosité turbulente dans les régions où le nombre de Reynolds turbulent local est faible. Trois modèles à bas Reynolds ont été testés :
  - **Modèle de Lam-Bremhorst (1981) [14]**
  - **Modèle de Nagano-Tagawa (1990) [16]**
  - **Modèle de Speziale-Abid-Anderson (1990) [22]**

Ces modèles établis pour traiter des écoulements faiblement compressibles ont été légèrement modifiés afin de prendre en compte la forte variation de la masse volumique. Il ont donnés un bon accord entre les valeurs numériques et les valeurs expérimentales. Le modèle de Lam-Bremhorst présente un meilleur comportement. En effet, la prise en compte dans la viscosité turbulente d'un rapport massique faisant intervenir la masse volumique à la paroi a permis d'améliorer ces résultats dans la zone pleinement turbulente (voir figures 1 et 2).

- L' autre modélisation appelée **bicouche** consiste à séparer l'écoulement en deux zones distincts. La résolution du modèle  $k - \varepsilon$  s'effectue dans la première zone déterminée par le nombre de Reynolds turbulent local ( $R_y > 200$ ). Dans la zone restante, la viscosité turbulente et le taux de dissipation turbulent sont déterminés par l'énergie cinétique turbulente et deux longueurs de mélange. Ce modèle, introduit par **Chen-Patel en 1988 [5]** est amélioré dans ce rapport, possède de nombreux avantages. Le premier réside dans sa conception simple. La comparaison des résultats numériques de ce modèle avec les trois modèles à bas Reynolds précédant a montré sa forte capacité à prédire un tel écoulement. Un autre avantage est la faible dépendance de la solution par rapport au nombre de point du maillage dans la couche limite (voir figures 31, 36, 38, 40, 42), ce qui permet d'utiliser un maillage seulement faiblement étiré.

Cependant, ces modèles possèdent en général une forte raideur numérique. On s'est donc intéressé à ce problème. L'utilisation dans la sous-couche visqueuse d'une approximation des quantités  $R_y$  et  $R_t$  pour la construction des fonctions de contrôle  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_\mu$  permet de mieux préserver la positivité des variables de fermeture dans cette zone. Ainsi, pour tout

les modèles confondus, on obtient une bonne et même vitesse de convergence (voir figures 27 et 28) avec à chaque itération en temps la possibilité d'utiliser de grand pas de temps ( $CFL = 10 + 10 * it$ , avec  $it$  l'itération en temps).

Finalement, l'étude de ces modèles sur la couche limite compressible de Mabey a permis d'établir un modèle qui présente les meilleures qualités physiques et économiques. C'est le modèle de Chen-Patel. Cependant un problème va se poser dans la détermination de la distance normale à la paroi pour des écoulements à géométrie plus complexe.

Par la suite, on utilisera ce modèle pour résoudre le système numérique à partir d'une méthode multigrille utilisant un algorithme de construction de maillage grossier par semi-déraffinement [8]. Cet algorithme a déjà été testé sur l'équation de Poisson et validé sur les équations de Navier-Stokes. On cherchera à valider ce modèle pour un écoulement externe par exemple un profil d'aile d'avion RAE2822.

## 7 Remerciements

Je remercie tout particulièrement Alain Dervieux pour son encadrement et pour les discussions enrichissantes que j'ai eu avec lui. Ainsi que Hervé Guillard pour m'avoir aidé dans l'analyse de mes résultats numériques. Je remercie Marianna Braza, Catherine Le Ribault, Dominique Guezengar, Bijan Mohammadi et Michel Ravachol pour leurs précieux conseils. Je remercie également Erbing Shang pour m'avoir communiqué la base de données du Workshop ETMA 95 de ce cas test. Sans oublier mon ami Bruno Koobus pour m'avoir permis de continuer et d'approfondir son étude.

## Références

- [1] B. Aupoix and B. Desmet, “Etude de modèles de turbulence en écoulement hypersonique”, *Rapport DERAT No 48, 5005-40*
- [2] G. Carré, “Résolution d’écoulement turbulents compressibles stationnaires par méthodes multigrilles”, *Thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, Novembre 1995*
- [3] G. Carré, “An Implicit Multigrid Method by Agglomeration Applied to Turbulent Flows”, *submitted to Computers and Fluids*
- [4] D.R. Chapman and G.D. Kuhn, “Navier-Stokes computations of viscous sublayer flow and the limiting behaviour of turbulence near a wall”, *AIAA 7th Computational Fluid Dynamics Conf. Cincinnati, OH, AIAA, New-York, 1985*
- [5] H.C. Chen and V.C. Patel, “Near-Wall Turbulence Models for Complex Flows Including Separation”, *AIAA J., Vol. 26, 641-648, 1988*
- [6] G. Comte-Bellot “Contribution à l’étude de la turbulence de conduite”, *Thèse de Docteur ès Sciences, Université de Grenoble, 1963*
- [7] P.J. Finley and H.H. Fernholz “A critical compilation of compressible turbulent boundary layer data”, *AGARDograph, (223), 1977*
- [8] J. Francescatto “Résolution de l’équation de Poisson sur des maillages étirés par une méthode multigrille”, *Rapport INRIA, No 2712, Novembre 1995*
- [9] Ch. Hirsch and Erbing Shang, “Synthesis on Test Case TC3 of ETMA Workshop”, *Proceeding of ETMA Workshop (to be published by Vieweg), 1995*
- [10] T.J.R. Hughes, K. Jansen and G. Hauke, “Applications of the Finite Element Method to the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations”, *Proceeding of ETMA Workshop (to be published by Vieweg), 1995*
- [11] B. Koobus, M-H Lallemand and A. Dervieux “Unstructured Volume-Agglomeration MG : Solution of the Poisson Equation”, *Rapport INRIA, No 1946, Juin 1993*
- [12] B. Koobus “Algorithmes multigrilles et algorithmes implicites pour les écoulements compressibles turbulents”, *Thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 1994*
- [13] B. Koobus “An implicit method for turbulent boundary layers simulation”, *Rapport INRIA, No 2450, Décembre 1994*
- [14] C.G.K. Lam and K. Bremhorst, “A modified form of the  $k - \varepsilon$  model for predicting wall turbulence”, *Journal of Fluids Engineering, Vol. 103, 456-460, 1981*

- 
- [15] B.E. Launder and D.B. Spalding, “The Numerical Computation of Turbulent Flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.3, pp. 269-289, 1974
- [16] Y. Nagano and M.Tagawa, “An improved  $k - \varepsilon$  model for boundary layer flows”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol.112, 33-39, March 1990
- [17] A. Nakayama and H. Koyama “A wall law for turbulent boundary layers in adverse pressure gradients”, *AIAA Journal*, vol. 22, no 10, 1984
- [18] G.L. Mellor, “The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall”, *J. Fluid Mech*, vol. 24, Part 2, 1966
- [19] B. Mohammadi and J. SAIAC “Turbulent Compressible Axisymmetric Flows Computation with the  $k - \varepsilon$  Model”, *Rapport INRIA*, No 1764, Octobre 1992
- [20] C. Patel, W. Rodi and G. Schewerer, “Turbulence models for near-wall and low-Reynolds-number flows: a review”, *AIAA J.*,23,1308-1319, 1985
- [21] W. Rodi, “A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stresses”, *Mechanics of Fluid*, *ZAMM* 56, 1976
- [22] C.G. Speziale, R. Abid and E.C. Anderson, “A critical evaluation of two-equations models for near wall turbulence”, *Icase Report No 90-46*, *NASA CR 182068*, June 1990
- [23] J. Steger and R.F. Warming “Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods” , *J. Comp. Phys.*, 40, (2), pp. 263-293, 1981
- [24] E.R. Van Driest, “Turbulent boundary layer in compressible fluids”, *J. Aeronaut. Sci.* 18(3), pp. 145-160, 1951
- [25] M. Wolfshtein “The Velocity and Temperature distribution in One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 12, March 1969, pp. 301-318
- [26] I. Yudiana and M. Buffa, “Simulations of compressible turbulent boundary Layer using a Low Reynolds Model”, *Proceeding of ETMA Workshop (to be published by Vieweg)*, 1995



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399