



# Modélisation géométrique de mécanismes de suspension automobile

Jean-Pierre Merlet

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Merlet. Modélisation géométrique de mécanismes de suspension automobile. RR-2817, INRIA. 1996. <inria-00073875>

**HAL Id: inria-00073875**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073875>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Modélisation géométrique de mécanismes de  
suspension automobile*

Jean-Pierre MERLET

**N° 2817**

Mars 1996

PROGRAMME 4



*Rapport  
de recherche*





# Modélisation géométrique de mécanismes de suspension automobile

Jean-Pierre MERLET

Programme 4 — Robotique, image et vision  
Projet Prisme

Rapport de recherche n° 2817 — Mars 1996 — 56 pages

**Résumé :** Les mécanismes utilisés pour les suspensions automobiles sont en général des mécanismes en chaînes fermées à un degré de liberté. La modélisation géométrique consiste à déterminer la posture du corps terminal du mécanisme en fonction de la valeur d'un des paramètres du système, appelé le paramètre fixe. De part la nature des mécanismes employés ce problème n'a pas une solution unique alors qu'usuellement on utilise pour le résoudre une procédure numérique de type Newton-Raphson avec estimée initiale, sans qu'il y ait garantie sur l'obtention d'un résultat et qui ne fournira de toute façon qu'une seule solution. Nous considérons différents mécanismes qui ont été proposés comme suspension soit avant, soit arrière, et nous proposons pour chacun d'entre eux un algorithme permettant de calculer toutes les solutions. Dans certains cas on pourra même établir un majorant du nombre maximal de solutions réelles.

**Mots-clé :** McPherson, suspension, modèle géométrique

*(Abstract: pto)*

# Kinematics of automotive suspension mechanisms

**Abstract:** We address the problem of the kinematics analysis of some classical suspension mechanisms of vehicle. All these mechanisms are closed loop one-degree-of-freedom mechanism which admit more than one solution for a given value of the free degree of freedom. We consider various mechanisms which have been proposed as suspension, either for the front wheel or the rear wheel, and we present algorithms for computing exactly all the possible postures without relying on the classical Newton iterative scheme which leads, in the best case, to only one solution. In some cases we are able to establish a bound on the maximum number of real solutions to this problem.

**Key-words:** McPherson strut, suspension mechanisms, kinematics modeling

# 1 Introduction

## 1.1 Modèle géométrique et méthodes de résolution

Les mécanismes de suspension automobile sont des mécanismes en chaînes fermées à un degré de liberté dont le modèle géométrique est parfois difficile à établir. Ce modèle consiste à déterminer la posture du corps terminal du mécanisme (celui sur lequel est fixée la roue) en fonction de la valeur d'un degré de liberté (par exemple la hauteur du centre de la roue par rapport au sol) appelé *le paramètre fixe*. Il est utilisé en particulier pour la simulation du comportement de la voiture (simulateur de conduite), en général sous une forme tabulée avec comme entrée le paramètre fixe, les tables étant calculées hors-ligne.

La méthode habituelle de résolution de ce problème repose sur un schéma numérique du type Newton-Raphson, qui suppose la connaissance d'une estimée de la solution. Pour une valeur donnée du paramètre fixe on utilise l'estimée initiale pour calculer une solution. Pour construire la table on modifie par petit incrément la valeur du paramètre fixe et l'on se sert de la solution trouvée précédemment comme estimée initiale. Cette méthode pose toutefois certains problèmes:

- l'estimée initiale doit être relativement proche d'une solution
- la méthode ne fournit qu'une solution
- si le mécanisme admet plusieurs solutions la solution trouvée à la première itération se trouve sur une branche donnée du modèle géométrique. Or la méthode de Newton ne garantit pas que l'on trouve la solution la plus proche de l'estimée initiale. Il peut donc arriver qu'aux itérations suivantes on saute sur une autre branche, ce qui conduit à un résultat incorrect.
- si deux branches se croisent, ce qui correspond à une singularité, on n'a pas de contrôle sur la branche suivie.

C'est pourquoi nous proposerons des algorithmes permettant de calculer l'ensemble des solutions. Ces algorithmes reposeront sur la manipulation des équations décrivant la géométrie du système pour obtenir finalement une équation

algébrique en une seule inconnue qui permettra de calculer l'ensemble des solutions et dont les coefficients dépendront de la valeur du paramètre fixe.

Cette approche présente certains avantages par rapport aux méthodes itératives: elle permet par exemple de déterminer l'ensemble des branches ce qui garantit l'exactitude du calcul. De plus nous pourrons souvent calculer de manière analytique les coefficients du polynôme (qui dépendent à la fois du paramètre fixe et de certains paramètres géométriques des mécanismes) et ainsi déterminer plus facilement l'influence de la géométrie du mécanisme sur les trajectoires suivies. Nos méthodes nécessiteront en général un temps de calcul plus important que la méthode de Newton. Mais dans la plupart des cas le modèle géométrique est utilisé en simulation sous une forme tabulée, le temps de calcul n'est donc pas un obstacle.

## 1.2 Etat de l'art

Une analyse systématique a permis à Raghavan [17] d'établir les différents types de mécanisme à un degré de liberté utilisables pour une suspension automobile. Il a restreint son étude aux mécanismes ne comportant que des articulations de type rotoïde (R), prismatique (P), cylindrique (C), joint de Cardan (K) et rotule (S). Rappelons que l'articulation cylindrique permet une translation selon un axe fixe ainsi qu'une rotation autour de cet axe. Il a exclu aussi les segments comportant deux articulations rotules à chacune des extrémités (la rotation autour de l'axe du segment est possible mais n'a pas d'influence sur le mécanisme: on peut remplacer une des rotules par un joint de Cardan). Il distingue ensuite les mécanismes selon le nombre de chaînes indépendantes qui relie la roue au châssis et impose que chaque chaîne ne compte qu'un segment. Les résultats peuvent être résumés de la manière suivante:

- il existe 224 mécanismes différents à 3 chaînes
- il existe 160 mécanismes différents à 4 chaînes
- il existe 56 mécanismes différents à 5 chaînes

Pour définir ces mécanismes on utilise la convention suivante: chaque chaîne du mécanisme est décrite par 2 lettres correspondant aux articulations de la chaîne avec dans l'ordre articulation attachée au châssis puis articulation attachée au

corps terminal, support de la roue. Le mécanisme est alors décrit par une succession de paires de lettres, correspondant à chacune de ses chaînes. Si un type de chaîne est répété dans le mécanisme on utilise un chiffre devant la description de la chaîne, ce qui indique le nombre de chaîne de ce type dans le mécanisme. Ainsi le mécanisme 5 –  $SK$  est constitué de 5 chaînes identiques constituées d'une rotule liée au châssis, d'un segment lié à cette rotule puis d'un joint de Cardan attaché d'un côté au segment et de l'autre au corps terminal.

Nous n'étudierons pas ici l'ensemble des mécanismes possibles: on se restreindra au mécanismes effectivement employés ainsi qu'à certains autres qui nous ont semblé caractéristiques. Les méthodes de résolution exposées seront cependant applicables à la plupart des autres cas.

### 1.3 Remarques préliminaires

**Remarque 1:** Il faut noter que le choix du paramètre fixe est arbitraire dans la mesure où si l'on dispose d'une table donnant la posture de la roue en fonction d'un paramètre il sera toujours possible de construire une autre table où le paramètre d'entrée sera différent. Nous ferons un usage permanent de cette possibilité, afin de choisir comme paramètre fixe celui qui permettra d'établir le plus facilement possible l'ensemble des solutions du modèle géométrique.

**Remarque 2:** Lors du développement des équations du modèle géométrique on verra apparaître comme inconnues des angles qui interviennent dans les équations via leur sinus et cosinus. Il est souvent préférable de se ramener à des équations algébriques plus faciles à manier. Pour cela on utilise un changement de variable classique. Pour un angle  $\theta$  définissons  $T$  comme:

$$T = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1)$$

On a alors:

$$\sin(\theta) = \frac{2T}{1+T^2} \quad \cos(\theta) = \frac{1-T^2}{1+T^2} \quad (2)$$

**Remarque 3:** L'orientation de l'organe terminal est représentable par trois angles. Classiquement on utilise les angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  mais dans le milieu automobile on utilise aussi la représentation donnée par le "caster angle"  $\epsilon$ , la



"kingpin inclination"  $\delta$  (d'où l'on peut dériver le carrossage ("camber angle")  $\gamma$  et le pincement ("toe angle")  $\psi$ ) et le "roll angle"  $\alpha$  (figure 1).

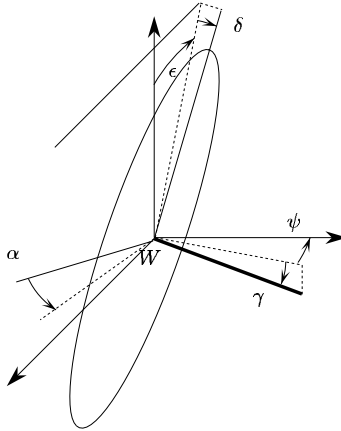


FIG. 1 - Les angles permettant de représenter l'orientation du corps support de la roue.

**Remarque 4:** Dans certaines suspensions seront utilisées des chaînes de type  $CS$  ou  $CK$ , constituées d'une articulation cylindrique, permettant la rotation et la translation selon une axe de vecteur unitaire  $\mathbf{v}$ , et d'une articulation de type rotule ou joint de Cardan (figure 2). Si  $\rho$  est la longueur du segment de l'articulation cylindrique et  $A$  un point quelconque sur l'axe de l'articulation l'équation de contrainte qu'impose ce type de chaîne s'écrit:

$$\|\mathbf{AB}\|^2 - (\mathbf{AB} \cdot \mathbf{v})^2 = \rho^2 \quad (3)$$

## 2 Mécanismes à 3 chaînes

### 2.1 La suspension $RS - SK - SP$

Ce type de suspension est plus connu sous le nom de suspension McPherson. E.S. MacPherson a breveté un système de suspension, élaboré lorsqu'il étudiait

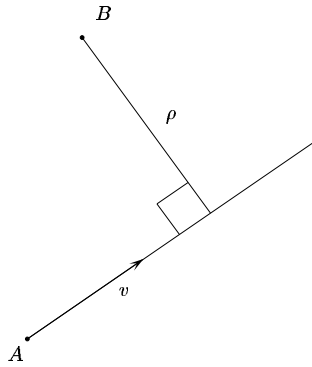


FIG. 2 - Notation pour l'articulation cylindrique.

un voiture de petite taille pour General Motors, qui est maintenant d'usage courant (figure 3). C'est la suspension avant la plus répandue dans le monde parmi tous les constructeurs [17]: 80% des modèles de petites dimensions en sont équipés. Cette suspension a fait l'objet de nombreuses publications: modèle géométrique [2, 18, 19], cinétique [3], dynamique [10], synthèse [11, 20].

### 2.1.1 Résolution du modèle géométrique

On remarque tout de suite que le triangle de cette suspension peut être remplacé par un segment unique tournant autour d'un axe, ce qui permet de représenter symboliquement cette suspension selon le schéma de la figure 4. Pour le modèle géométrique on peut définir comme paramètre fixe la longueur  $l_2$  et chercher à déterminer la posture de la roue ou de manière équivalente les coordonnées des points  $B_1, B_4$ . On remarque que  $B_1$  se trouve à l'intersection de la sphère centrée en  $A_2$ , de rayon  $l_2$  et du cercle centré en  $A_1$  de rayon  $l_1$ : il existe donc deux solutions pour  $B_1$ . De même le point  $B_4$  se trouve à l'intersection de la sphère centrée en  $A_3$ , de rayon  $l_5$  et du cercle centré en  $M_4$  (qui est connu après avoir calculé la position de  $B_1$ ) de rayon  $l_6$ : il existe donc deux solutions pour  $B_4$ . Le modèle géométrique de ce mécanisme admet donc 4 solutions, facilement calculables. Cependant il est à noter que

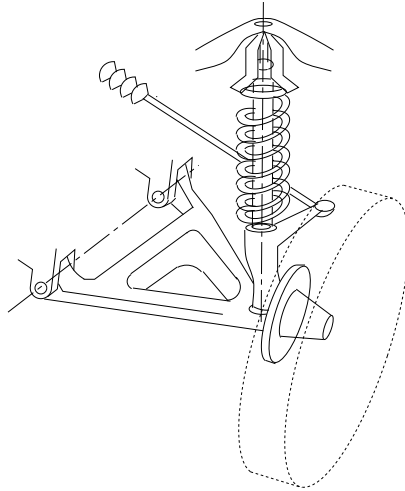


FIG. 3 - *La suspension MacPherson*

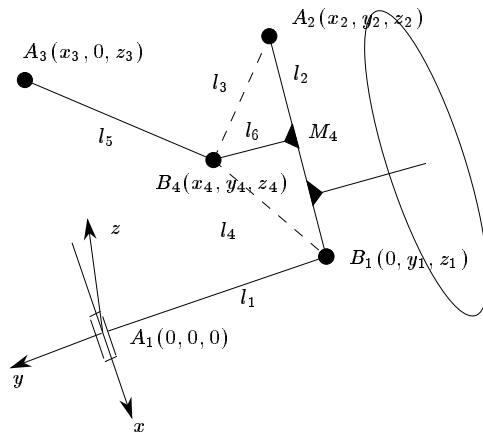


FIG. 4 - *Notation pour la suspension MacPherson, un ● représente une rotule.*

des procédures numériques du type Newton-Raphson sont encore largement utilisées pour résoudre ce modèle géométrique [19].

En dehors de l'approche géométrique on peut aussi calculer algébriquement les solutions. Pour cela l'examen du mécanisme permet d'écrire les équations de contraintes:

$$y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0 \quad (4)$$

$$x_2^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_2^2 = 0 \quad (5)$$

$$x_4^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)^2 - l_4^2 = 0 \quad (6)$$

$$(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 - l_3^2 = 0 \quad (7)$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 - l_5^2 = 0 \quad (8)$$

On remarque que (4)-(5) et (6)-(7)-(4) sont linéaires en  $y_1, z_1$ . et que (7)-(8) est linéaire en  $z_4$ . Après résolution il reste deux équations obtenues en développant (4) et (7). L'équation (4) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & a_{01} + a_{02} y_4 + a_{03} y_4^2 + (a_{04} + a_{05} y_4 + a_{07} y_4^2) l_2^2 + (a_{06} + a_{08} y_4^2 + a_{09} y_4) l_2^4 + \\ & (a_{11} + a_{12} y_4 + a_{13} l_2^2 + a_{14} y_4 l_2^2 + a_{15} l_2^4 + a_{16} y_4 l_2^4) x_4 + \\ & (a_{21} + a_{22} l_2^2 + a_{23} l_2^4) x_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

alors que l'équation (7) s'écrit:

$$b_{01} + b_{02} y_4 + b_{03} y_4^2 + (b_{11} + b_{12} y_4) x_4 + b_{21} x_4^2 = 0 \quad (10)$$

les coefficients  $a_{ij}, b_{kl}$  ne dépendant que de la géométrie du mécanisme. En prenant le résultant de ces deux équations on obtient une équation du quatrième degré en  $y_4$  de la forme :

$$\begin{aligned} & f_{01} + f_{02} l_2^2 + f_{03} l_2^4 + f_{04} l_2^8 + f_{05} l_2^6 + \\ & (f_{11} + f_{12} l_2^2 + f_{13} l_2^4 + f_{14} l_2^8 + f_{15} l_2^6) y_4 + \\ & (f_{21} + f_{22} l_2^2 + f_{23} l_2^4 + f_{24} l_2^8 + f_{25} l_2^6) y_4^2 + \\ & (f_{31} + f_{32} l_2^2 + f_{33} l_2^4 + f_{34} l_2^8 + f_{35} l_2^6) y_4^3 + \\ & (f_{41} + f_{42} l_2^2 + f_{43} l_2^4 + f_{44} l_2^8 + f_{45} l_2^6) y_4^4 = 0 \end{aligned}$$

Après résolution de cette équation pour une valeur donnée du paramètre fixe on obtient donc jusqu'à 4 valeurs pour  $y_4$ , et en remontant par substitution on obtient alors jusqu'à 4 valeurs du quintuplet  $(x_4, y_4, z_4, y_1, z_1)$ . Cette équation permet donc la résolution du modèle géométrique de la suspension MacPherson et de tracer ses courbes de réponses, c'est-à-dire l'évolution des degrés de liberté du système en fonction des valeurs du paramètre fixe.

A titre d'exemple nous avons pris les valeurs numériques suivantes:

$$A_3 = (-4, 0, 4) \quad A_2 = (0, 10, 8)$$

$$l_1 = 5 \quad l_3 = 8 \quad l_4 = 4 \quad l_5 = 8$$

Les figures 5,6,7 présentent les solutions en  $x_4, y_4, z_4$  en fonction de  $l_2$  pour ce mécanisme. On peut voir que le schéma de Newton pourrait effectivement

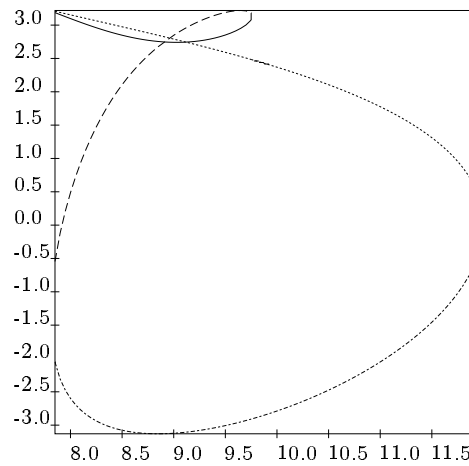


FIG. 5 - *Solution en  $x_4$  en fonction de  $l_2$ .*

avoir des problèmes de convergence pour  $l_2$  voisin de 9.

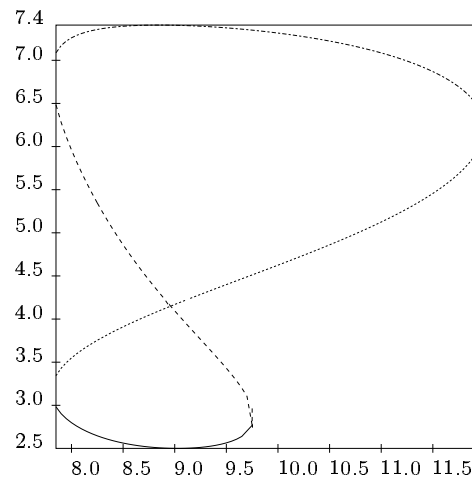


FIG. 6 - *Solution en  $y_4$  en fonction de  $l_2$ .*

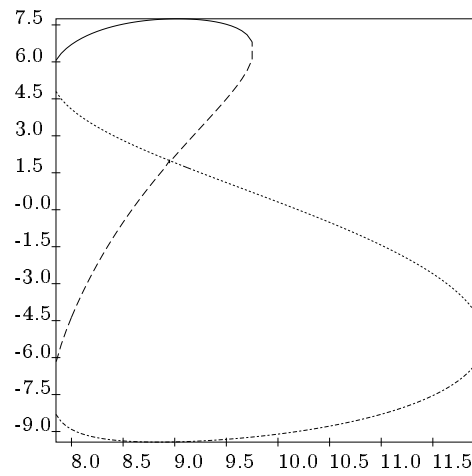


FIG. 7 - *Solution en  $z_4$  en fonction de  $l_2$ .*

## 2.2 Le mécanisme $2RS - SK$

### 2.2.1 Principe

Ce mécanisme est connu sous le nom de SLA (*Short-long arm*) (figure 8) et a été utilisé pour la Jaguar XJ6 (1988), différents modèles de Honda et la Mercedes 380 SE (1984). Une modélisation cinétique du SLA a été présentée par Ellis [3]. Sa symbolisation mécanique est présentée en figure 9. Il est à noter

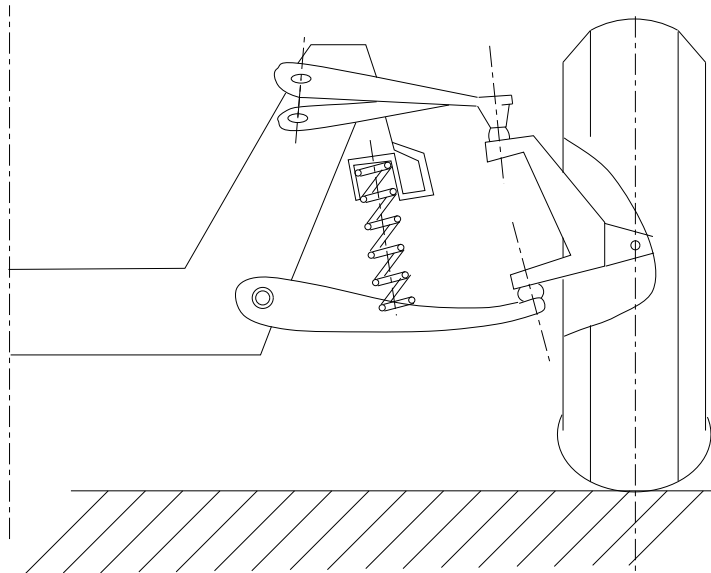


FIG. 8 - *Le mécanisme SLA*

qu'il existe une version plane du SLA obtenue en supprimant la barre  $A_3B_3$  et en plaçant  $A_2$  dans le plan  $A_1, y - z$ . Cette version a été utilisée comme suspension arrière pour la Toyota Supra (1988). Dans ce cas le mécanisme de suspension se réduit à un mécanisme à 4 barres plan. Après avoir choisi le paramètre fixe (par exemple la hauteur de la roue) résoudre le modèle géométrique revient à trouver l'intersection de la trajectoire du coupleur du mécanisme à 4 barres avec le plan défini par le paramètre. On sait que la courbe du coupleur

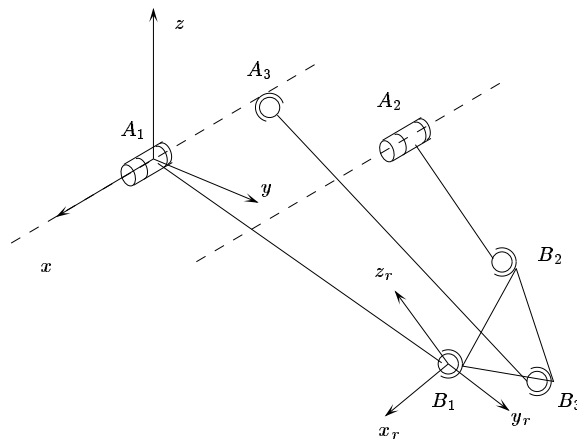


FIG. 9 - Notation pour le SLA

est une courbe de degré 6, il y aura donc au plus 6 solutions, qui sont aisées à calculer car on connaît l'équation de la courbe du coupleur [8].

Dans le cas général la figure 8 présente le SLA avec les axes des articulations rotoïdes parallèles: il est aussi possible de construire un *SLA général* où les axes sont en position quelconque.

### 2.2.2 Nombre maximal de solution

Pour déterminer le nombre maximal de solution on coupe le mécanisme en  $B_3$ . On obtient alors deux mécanismes distincts: le mécanisme sphérique  $A_3B_3$  et le mécanisme  $A_1B_1B_3B_2A_2$ . Ce dernier mécanisme est bien connu sous le nom de *RSSR*. Il a été prouvé que lors du déplacement de ce mécanisme le point  $B_3$  se trouve, dans le cas général, sur une surface algébrique de degré 16 [8].

Cependant nous avons affaire ici à un cas particulier car les axes des articulations rotoïdes en  $A_1, A_2$  sont parallèles. Dans ce cas particulier le degré de la surface se réduit à 12 (voir par exemple [13]). Les solutions du modèle géométrique seront obtenues lorsque les points  $B_3$  du mécanisme sphérique et du *RSSR* coïncident. On doit donc calculer l'intersection d'une sphère et de



la surface de degré 12, ce qui conduit à priori à un maximum de 24 points d'intersection. Mais la circularité de la courbe du  $RSSR$  étant de 6 nous avons parmi les 24 points d'intersection les deux points circulaires imaginaires avec une multiplicité de 6, soit 12 points d'intersection complexes. Il y a donc un maximum de 12 solutions réelles. Le même raisonnement pour le SLA général conduira à un maximum de 16 solutions.

### 2.2.3 Résolution du modèle géométrique

On définit tout d'abord un repère de référence  $(A_1, x, y, z)$ , tel que  $x$  correspond au vecteur unitaire de l'axe de l'articulation rotoïde, et un repère mobile  $B_1, (x_r, y_r, z_r)$ . Les longueurs des segments seront notées  $\rho_i$ . La géométrie du corps terminal peut être définie par les vecteurs  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}$  (un indice  $r$  définit un vecteur dont les composantes sont exprimées dans le repère mobile).

La position du corps terminal est définie par les coordonnées du point  $B_1$   $(0, y, z)$  dans le repère de référence. On a:

$$\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 = y^2 + z^2 = \rho_1^2 \quad (11)$$

et:

$$\|\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\|^2 = \rho_3^2 \quad (12)$$

Le vecteur  $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3$  peut s'écrire:

$$\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{3_r} \quad (13)$$

où  $R$  est la matrice de rotation permettant d'exprimer les composantes d'un vecteur dans le repère de référence à partir de ces composantes dans le repère mobile. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \rho_3^2 = & \|\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{3_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ & + 2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{3_r}) + 2\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{3_r}) \end{aligned} \quad (14)$$

Les inconnues  $y, z$  apparaissent dans cette équation sous la forme de la somme de leurs carrés dans le terme  $\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2$  et linéairement dans tous les autres termes.

En conséquence si l'on soustrait l'équation (11) à (14) on obtiendra une équation linéaire dans les deux inconnues  $y, z$ .

Pour le segment 2 on a les équations de contrainte:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (15)$$

$$\|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\|^2 = \rho_2^2 \quad (16)$$

Si l'on soustrait l'équation (11) à (16) on obtiendra une équation linéaire dans les deux inconnues  $y, z$ . Combinée à la précédente équation linéaire on obtient un système, qui, résolu, nous permet d'obtenir les inconnues  $y, z$  en fonction des paramètres d'orientation de la roue. En substituant leurs valeurs dans les équations (11),(15) on obtient deux équations où les inconnues sont les trois angles définissant l'orientation de la roue. Un de ces angles est choisi comme paramètre fixe et les sinus et cosinus des deux inconnues restantes sont transformés par un changement de variable similaire à celui présenté en (1,2). On obtient alors deux équations algébriques dont on calcule le résultant pour obtenir un polynôme mono-variable. La résolution numérique de ce polynôme nous permettra d'obtenir l'ensemble des solutions du modèle géométrique.

Il existe cependant une autre possibilité de modélisation conduisant à une formulation plus simple. Le paramètre fixe est choisi comme étant la coordonnée de  $B_3$  selon l'axe  $x$ . Pour une valeur fixe de ce paramètre les points  $B_1, B_2, B_3$  se déplace sur des cercles dans des plans parallèles. Le mécanisme est donc équivalent à celui proposé en figure 10. La modélisation géométrique de ce mécanisme a été étudiée dans [13]: on y montre que dans ce cas le polynôme de degré 12 conduisant aux solutions se factorise en deux polynômes de degré 6.

## 3 Mécanismes à 4 chaînes

### 3.1 Mécanismes $3SK - RS, 3KS - SR$

Le mécanisme  $3SK - RS$  a été utilisé comme suspension arrière pour la Nissan 300ZX (figure 11). En raison de la symétrie la résolution du  $3SK - RS$  permettra de calculer le modèle géométrique du  $3KS - SR$  en permutant le rôle du châssis et du corps support de la roue.

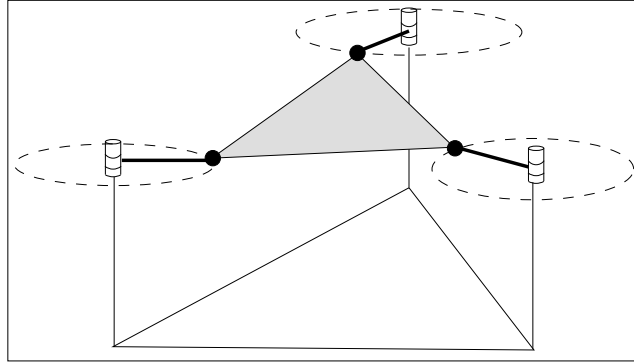


FIG. 10 - *Par un choix approprié du paramètre fixe on peut ramener le SLA à ce mécanisme.*

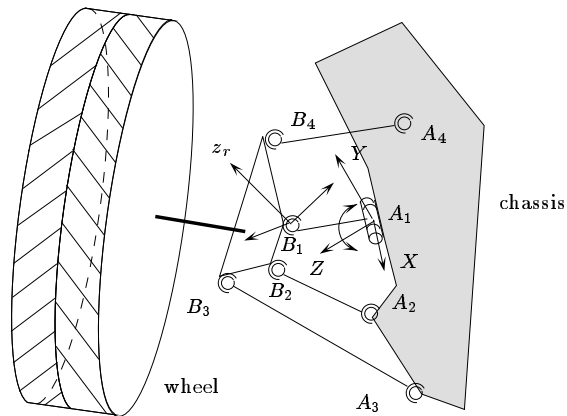


FIG. 11 - *La suspension 3SK - RS.*

### 3.1.1 Résolution du modèle géométrique, première méthode

On définit tout d'abord un repère de référence  $(A_1, X, Y, Z)$  tel que  $X$  correspond au vecteur unitaire de l'axe de l'articulation rotoïde et un repère mobile  $B_1, (x_r, y_r, z_r)$ . Les longueurs des segments seront notées  $\rho_i$ . La géométrie du corps terminal peut être définie par les vecteurs  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}$  (un indice  $r$  définit un vecteur dont les composantes sont exprimées dans le repère mobile).

La position du corps terminal est définie par les coordonnées du point  $B_1(0, y, z)$  dans le repère de référence. On a alors:

$$\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 = y^2 + z^2 = \rho_1^2 \quad (17)$$

et de manière générale:  $\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2$ . Le vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$  peut s'écrire:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r} \quad (18)$$

où  $R$  est la matrice de rotation permettant d'exprimer les composantes d'un vecteur dans le repère de référence à partir de ces composantes dans le repère mobile. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & \|\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ & + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) + 2\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) \end{aligned} \quad (19)$$

Les inconnues  $y, z$  apparaissent dans ces équations sous la forme de la somme de leurs carrés dans le terme  $\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2$  et linéairement dans tous les autres termes.

En conséquence si l'on soustrait l'équation (17) à deux des équations (19) on obtiendra un système linéaire de deux équations dans les deux inconnues  $y, z$ .

Après résolution on substitue le résultat dans l'équation (17) et dans la dernière équation (19) pour obtenir deux équations dans les trois variables  $\epsilon, \delta, \alpha$ . Un de ces angles est choisi comme paramètre fixe et les sinus et cosinus des deux inconnues restantes sont transformés par un changement de variable similaire à celui présenté en (1,2). On obtient alors deux équations algébriques dont on calcule le résultant pour obtenir un polynôme mono-variable. La résolution numérique de ce polynôme nous permettra d'obtenir l'ensemble des solutions du modèle géométrique.

### 3.1.2 Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode

Dans cette deuxième méthode on choisit comme paramètre fixe l'angle  $\beta$  de rotation de l'articulation rotoïde en  $A_1$ , ce qui fixe la position de  $B_1$ . On définit un repère fixe  $R_r = A_1, (\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r)$  où  $\mathbf{x}_r$  correspond au vecteur unitaire de l'axe de l'articulation rotoïde en  $A_1$ . Dans ce repère le point  $B_1$  a comme coordonnées  $(0, \rho_1 \cos \beta, \rho_1 \sin \beta)$ , Les points  $A_3, A_4$  sont de coordonnées connues dans le repère  $R_r$ .

Le point  $B_2$  se trouve alors sur un cercle dont le centre  $U_2$  se trouve sur la ligne passant par  $B_1, A_2$  (figure 12). On définit un repère de référence  $R_{B_1} = B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , avec  $\mathbf{x}$  défini comme le vecteur unitaire  $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_2/d_{B_1A_2}$ , où  $d_{B_1A_2}$  est la distance de  $B_1$  à  $A_2$  (qui s'exprime comme fonction de  $\beta$ ) et  $\mathbf{y}$  un vecteur arbitraire choisi perpendiculaire à  $\mathbf{x}$ . Si  $l_{12}$  est la distance de  $B_1$  à  $B_2$  et  $\rho_2$  la longueur du segment  $A_2B_2$  on a:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{U}_2 = \frac{l_{12}^2 + d_{B_1A_2}^2 - \rho_2^2}{2d_{B_1A_2}}\mathbf{x} = x_2\mathbf{x}$$

et le rayon  $r$  du cercle vaut:

$$r = \sqrt{l_{12}^2 - x_2^2}$$

Le vecteur  $U_2B_2$  peut s'exprimer en fonction d'un angle de rotation  $\theta$  par:

$$\mathbf{U}_2\mathbf{B}_2 = r \cos \theta \mathbf{y} + r \sin \theta \mathbf{z}$$

Pour une valeur fixée de  $\theta$  la plate-forme peut tourner autour de la droite passant par  $B_1, B_2$ . On définit un nouveau repère  $B_1, (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$  avec:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \left( \frac{x_2}{l_{12}}, \frac{r \cos \theta}{l_{12}}, \frac{r \sin \theta}{l_{12}} \right) \\ \mathbf{y}_1 &= (0, -\sin \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}_1 \end{aligned}$$

Les points  $B_3, B_4$  se trouvent alors sur des cercles de centre  $U_3, U_4$  situés sur la ligne passant par  $B_1, B_2$  et de rayon  $r_3, r_4$ . On a:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{U}_3 = l_3\mathbf{x}_1$$

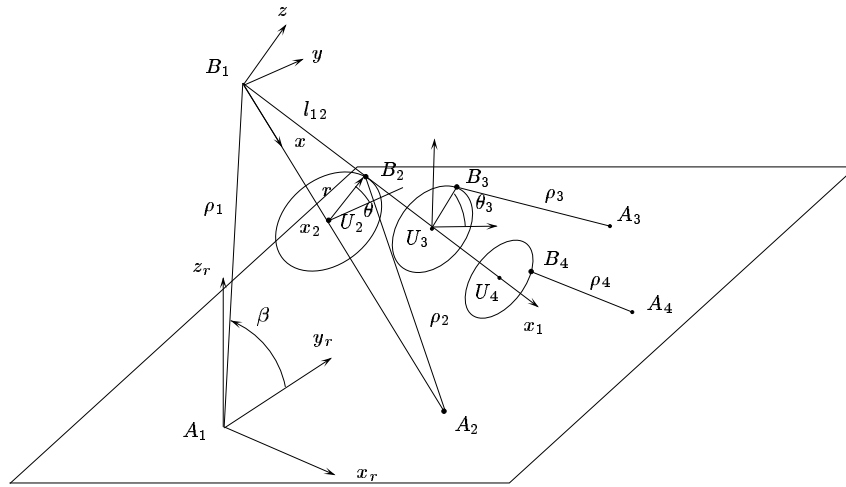


FIG. 12 - Notation pour l'étude du modèle géométrique d'une suspension 3SK-RS.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1 \mathbf{U}_4 &= l_4 \mathbf{x}_1 \\
 \mathbf{U}_3 \mathbf{B}_3 &= r_3 \cos(\theta_3) \mathbf{y}_1 + r_3 \sin \theta_3 \mathbf{z}_1 \\
 \mathbf{U}_4 \mathbf{B}_4 &= r_4 \cos(\theta_3 + \alpha_4) \mathbf{y}_1 + r_4 \sin(\theta_3 + \alpha_4) \mathbf{z}_1
 \end{aligned}$$

où  $\alpha_4$  est l'angle constant entre le plan passant par  $B_1, B_2, B_3$  et la ligne  $U_4 B_4$ . Avec les relations précédentes il est facile d'exprimer les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_4$  dans le repère  $R_{B_1}$ . Ces vecteurs sont fonctions des trois paramètres  $\beta, \theta, \theta_3$ .

Par une simple transformation de repère on peut exprimer les vecteurs  $\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_4$  dans le repère  $R_{B_1}$ . Ces vecteurs sont en effet connus dans le repère  $R_r$ . Il suffit alors de leur appliquer une rotation pour les exprimer dans le repère  $R_{B_1}$ , la matrice de rotation  $R$  étant:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{x a_2}{d_{B_1 A_2}} & \frac{\rho_1 \sin \beta}{d} & \frac{x a_2 (y a_2 - \rho_1 \cos \beta)}{d d_{B_1 A_2}} \\ \frac{y a_2 - \rho_1 \cos \beta}{d_{B_1 A_2}} & 0 & \frac{\rho_1^2 \sin^2 \beta - x a_2^2}{d d_{B_1 A_2}} \\ \frac{-\rho_1 \sin \beta}{d_{B_1 A_2}} & \frac{x a_2}{d} & \frac{\rho_1^2 \sin \beta \cos \beta - y a_2 \rho_1 \sin \beta}{d d_{B_1 A_2}} \end{pmatrix}$$

en posant:

$$d = \sqrt{xa_2^2 + \rho_1^2 \sin^2 \beta}$$

On exprime alors que les longueurs des segments 3, 4 sont constantes par les équations de contraintes:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3\|^2 &= \rho_3^2 \\ \|\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4\|^2 &= \rho_4^2 \end{aligned}$$

Ces deux équations sont des équations en sinus, cosinus des angles  $\theta, \theta_3$  que l'on rend algébrique par un changement de variable du type (1),(2) en posant  $T_1 = \tan(\theta/2), T_2 = \tan(\theta_3/2)$ . On obtient alors deux équations algébriques  $S_1, S_2$  avec:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i,j=0}^{i=4,j=2} a_{ij} T_1^i T_2^j = 0 \\ S_2 &= \sum_{i,j=0}^{i=4,j=2} b_{ij} T_1^i T_2^j = 0 \end{aligned}$$

où les  $a_{ij}, b_{ij}$  sont des coefficients qui dépendent des paramètres géométriques et de  $\beta$ . Le résultant de ces deux équations est une équation algébrique en  $T_1$  seul, de degré 16. Un majorant du nombre de solution est donc 16.

### 3.1.3 Exemple

On choisit les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0, 0) & A_2 &= (0, -20, 0) & A_3 &= (10, -20, 0) \\ A_4 &= (10, 7, 0) & A_5 &= (5, -12, 0) \end{aligned}$$

$$B_1 = (0, 0, 0) \quad B_2 = (0, -6, 0) \quad B_3 = (2, -6, 0) \quad B_4 = (2, 0, 0) \quad B_5 = (1, -2, 0)$$

avec les longueurs des segments suivantes:

$$R_1 = 20 \quad R_2 = 23.93 \quad R_3 = 25.06 \quad R_4 = 21.65 \quad R_5 = 22.56$$

Nous avons choisi d'utiliser les angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  pour spécifier l'orientation de la roue, le paramètre fixe étant  $\phi$ . Dans cet exemple le polynôme mono-variable peut être réduit à un polynôme de degré 24 en  $\tan(\psi/2)$ , dont on obtient les coefficients en fonction de  $\phi$ .

### 3.2 Mécanismes $3SK - PS$ , $3KS - SP$

Il est possible de remplacer la chaîne  $RS$  du mécanisme précédent par une chaîne  $PS$  (figure 13). En raison de la symétrie la résolution du  $3SK - PS$

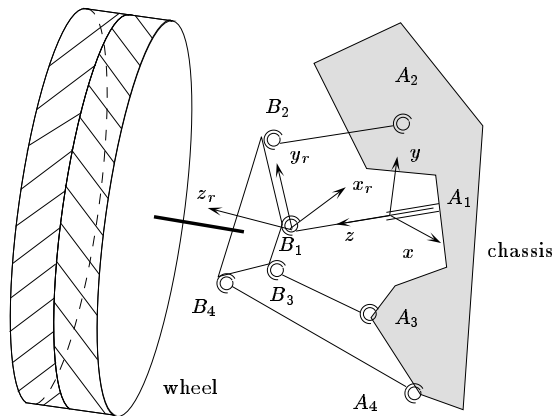


FIG. 13 - La suspension  $3SK - PS$

permettra de calculer le modèle géométrique du  $3KS - SP$  en permutant le rôle du chassis et du corps support de la roue.

#### 3.2.1 Résolution du modèle géométrique, première méthode

On peut représenter le problème en introduisant les inconnues  $z$  (position de  $B_1$  selon l'axe de l'articulation prismatique et 3 angles définissant l'orientation de l'organe terminal. On peut alors écrire trois équations pour les trois chaînes  $SK$  qui indiquent que la longueur  $\rho_i$  des segments est fixe. Ces équations contiennent toutes le terme  $z^2$ . En choisissant arbitrairement deux de ces



équations et en les soustrayant on obtient une équation linéaire en  $z$ . Après report du résultat il reste deux équations ne contenant plus comme inconnues que les angles de rotation. On choisit l'un de ces angles comme paramètre fixe (par exemple l'angle d'Euler  $\theta$ ) et l'on transforme les deux équations en équations algébriques en utilisant le changement de variable (2). On obtient ainsi deux équations algébriques en  $T_1 = \tan(\psi/2)$ ,  $T_2 = \tan(\phi/2)$ . Le résultant de ces deux équations permet d'éliminer la variable  $T_1$  et d'obtenir une équation dans la seule variable  $T_2$ , dont les coefficients dépendent de la valeur du paramètre fixe. Cette équation permet d'obtenir l'ensemble des solutions du modèle géométrique.

### 3.2.2 Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode

Dans cette méthode on choisit comme paramètre fixe la hauteur  $Z$  de l'articulation prismatique par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de l'articulation prismatique en  $A_1$ , contenant le point  $A_2$  (figure 14). Pour une valeur

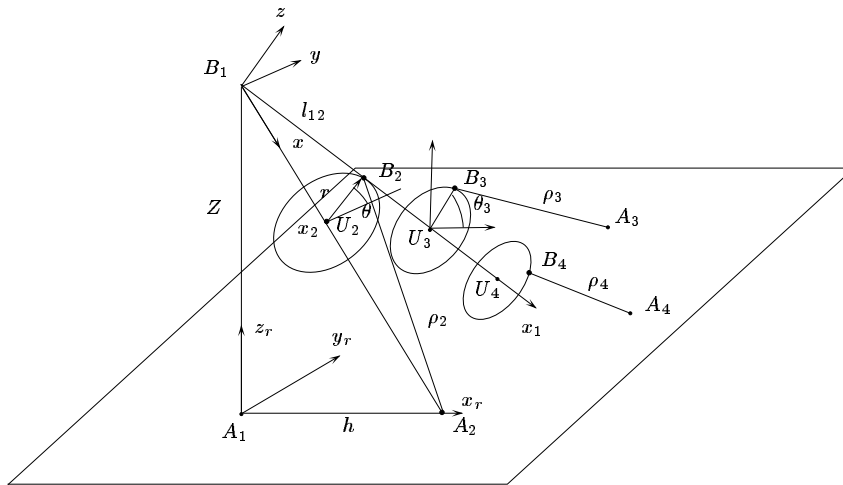


FIG. 14 - Notation pour l'étude du modèle géométrique d'une suspension 3SK-PS.

donnée de  $Z$  la position du point  $B_1$  est alors fixée. Pour une position fixée du

point  $B_1$  le point  $B_2$  se trouve sur un cercle dont le centre  $U_2$  se trouve sur la ligne passant par  $B_1, A_2$ . Si  $l_{12}$  est la distance de  $B_1$  à  $B_2$  et  $\rho_2$  la longueur du segment  $A_2B_2$  on a:

$$\mathbf{B}_1\mathbf{U}_2 = \frac{l_{12}^2 + d_{B_1A_2}^2 - \rho_2^2}{2d_{B_1A_2}}\mathbf{x} = x_2\mathbf{x}$$

et le rayon  $r$  du cercle vaut:

$$r = \sqrt{l_{12}^2 - x_2^2}$$

De plus  $d_{B_1A_2}$  peut s'exprimer en fonction de  $Z$  par:

$$d_{B_1A_2}^2 = Z^2 + h^2$$

où  $h$  est la distance de  $A_1$  à  $A_2$ . Le vecteur  $\mathbf{U}_2\mathbf{B}_2$  peut s'exprimer en fonction d'un angle de rotation  $\theta$  par:

$$\mathbf{U}_2\mathbf{B}_2 = r \cos \theta \mathbf{y} + r \sin \theta \mathbf{z}$$

Pour une position fixée de  $B_2$  le seul mouvement possible de l'organe terminal est une rotation autour de l'axe passant par  $B_1, B_2$ . On définit un nouveau repère  $R_{B_1} = B_1, (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$  avec:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \left( \frac{x_2}{l_{12}}, \frac{r \cos \theta}{l_{12}}, \frac{r \sin \theta}{l_{12}} \right) \\ \mathbf{y}_1 &= (0, -\sin \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}_1 \end{aligned}$$

Les points  $B_3, B_4$  se trouvent alors sur des cercles de centre  $U_3, U_4$  et de rayon  $r_3, r_4$  situés sur la ligne passant par  $B_1, B_2$ . On a:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1\mathbf{U}_3 &= l_3\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{U}_4 &= l_4\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{U}_3\mathbf{B}_3 &= r_3 \cos(\theta_3)\mathbf{y}_1 + r_3 \sin \theta_3\mathbf{z}_1 \\ \mathbf{U}_4\mathbf{B}_4 &= r_4 \cos(\theta_3 + \alpha_4)\mathbf{y}_1 + r_4 \sin(\theta_3 + \alpha_4)\mathbf{z}_1 \end{aligned}$$

où  $\alpha_4$  est l'angle entre le plan passant par  $B_1, B_2, B_3$  et la ligne  $U_4B_4$ . Les points  $A_3, A_4$  sont de coordonnées connues dans le repère  $R_r$ . Leurs coordonnées dans le repère  $R_{B_1}$  sont alors obtenues par une translation de vecteur  $Zz_r$  puis par une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $y$  avec:

$$\cos \alpha = \frac{h}{d_{B_1A_2}} \quad \sin \alpha = \frac{-Z}{d_{B_1A_2}}$$

On peut donc calculer les vecteurs  $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4$  dans le repère  $R_{B_1}$ . Comme pour le mécanisme  $3SK - RS$  on écrit les équations qui indiquent que les normes de ces vecteurs valent  $\rho_3, \rho_4$ , ce qui conduit à deux équations algébriques en  $T_1, T_2$ . Leur résultant donnera un polynôme de degré 16. Le majorant du nombre de solution est donc là aussi 16.

### 3.2.3 Exemple

On choisit les valeurs numériques suivantes:

$$A_1 = (0, 0, 0) \quad A_2 = (0, 2, 0) \quad A_3 = (2, 3, 0) \quad A_4 = (-3, -2, 1)$$

$$B_1 = (0, 0, 0) \quad B_2 = (0, 1, 0) \quad B_3 = (3, 4, 0) \quad B_4 = (-1, -3, -1)$$

avec les longueurs des segments suivantes:

$$R_2 = 10 \quad R_3 = 12 \quad R_4 = 10$$

Nous avons choisi d'utiliser les angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  pour spécifier l'orientation de la roue, le paramètre fixe étant  $\theta$ . Dans cet exemple le polynôme mono-variable est obtenu en éliminant  $T_1 = \tan(\psi/2)$  et peut être réduit à un polynôme de degré 20 en  $\tan(\phi/2)$ , dont on obtient les coefficients en fonction de  $\theta$ . On obtient alors les solutions en  $\psi, \phi$  en fonction de  $\theta$  présentées en figure 15,16.

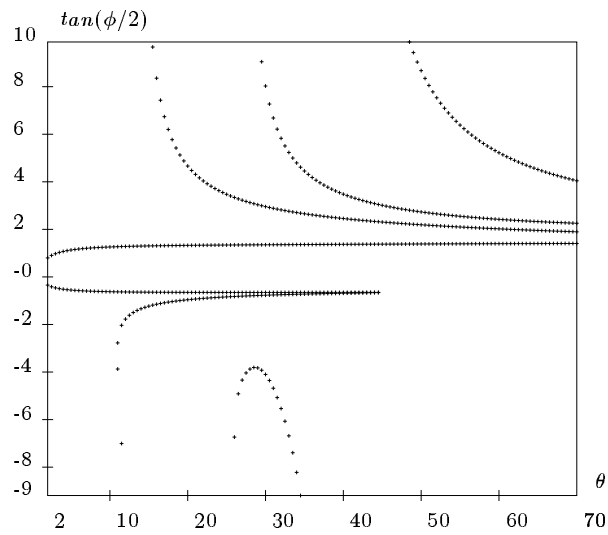


FIG. 15 - Solution pour  $\phi$  en fonction de  $\theta$  pour un mécanisme 3SK - PS.

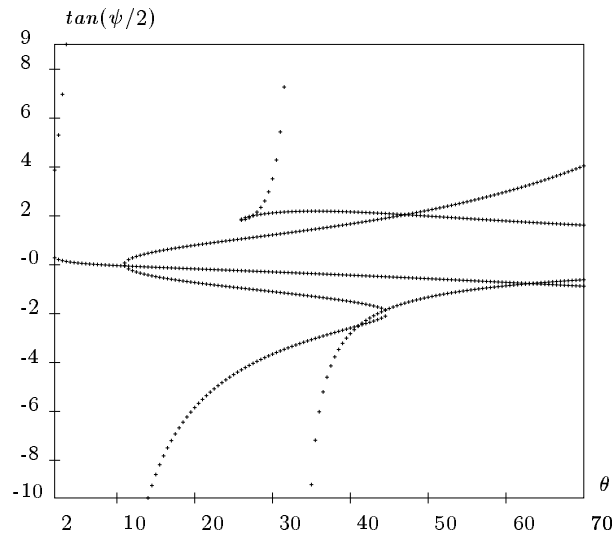


FIG. 16 - Solution pour  $\psi$  en fonction de  $\theta$  pour un mécanisme 3SK - PS.

### 3.3 Mécanisme $2SK - RS - CS$

#### 3.3.1 Principe

Ce mécanisme décrit en figure 17 fait partie de la classification de Raghavan.

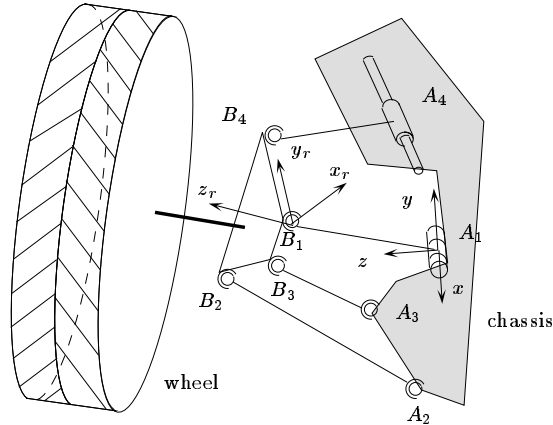


FIG. 17 - *Le mécanisme  $2SK - RS - CS$ .*

#### 3.3.2 Résolution du modèle géométrique, première méthode

Le repère de référence est placé avec l'origine en  $A_1$ , l'axe  $x$  étant l'axe de l'articulation rotoïde. On représente la position du corps terminal par les coordonnées  $(0, y, z)$  du point  $B_1$  et par trois angles représentatifs de son orientation. La contrainte pour l'articulation rotoïde en  $A_1$  s'écrit:

$$\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 = y^2 + z^2 = \rho_1^2 \quad (20)$$

Les contraintes sur les segments 2, 3 de type  $SK$  s'écrivent:

$$\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2 \quad (21)$$

On a:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}$$

On conséquence les équations de contraintes (21) s'écrivent:

$$\rho_i^2 = \|\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1\|^2 + 2\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1 + R\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}) + \|\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1 \cdot R\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}$$

On remarque que ces équation sont de degré 2 en  $y, z$  avec  $y^2 + z^2$  comme terme dans ce degré.

L'équation de contrainte pour l'articulation cylindrique du segment 4 s'écrit:

$$\|\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4\|^2 - (\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{v}_4)^2 = \rho_4^2 \quad (22)$$

En soustrayant l'équation (20) aux deux équations (21) on obtient un système linéaire en  $y, z$ . On résout ce système et l'on reporte le résultat dans les équations (20) et (22). On obtient alors deux équations dans les trois paramètres de rotation. En utilisant le changement de variable (1),(2) on obtient deux équations algébriques. Le résultant de ces deux équations donne une équation dans deux variables d'orientation. En choisissant comme paramètre fixe l'un de ces angles on a donc un polynôme mono-variable qui permet de trouver toutes les solutions du modèle géométrique.

### 3.3.3 Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode

Cette deuxième méthode est directement inspirée de la deuxième méthode utilisée pour la suspension  $3SK-RS$ . On choisit comme paramètre fixe l'angle  $\beta$  définissant la rotation du point  $B_1$  autour de l'articulation rotoïde. Le point  $B_2$  se trouve sur un cercle paramétré par un angle  $\theta$ . Pour une position fixée de  $B_2$  la plate-forme tourne autour de la droite passant par  $B_1, B_2$ , rotation qui est paramétrée par un angle  $\theta_3$ . On peut alors exprimer les vecteurs  $\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3, \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4$  en fonction de  $\beta, \theta, \theta_3$ . On écrit ensuite les contraintes sur ces vecteurs:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3\|^2 &= \rho_3^2 \\ \|\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4\|^2 - (\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{v}_4)^2 &= \rho_4^2 \end{aligned}$$

Après le changement de variable  $T_2 = \tan(\theta/2)$ ,  $T_1 = \tan(\theta_3/2)$  ces deux équations peuvent s'écrire sous la forme:

$$S_1 = \sum_{i,j=0}^{i=4,j=2} a_{ij} T_1^i T_2^j = 0$$

$$S_2 = \sum_{i,j=0}^{i,j=4} b_{ij} T_1^i T_2^j = 0$$

où les  $a_{ij}, b_{ij}$  sont des coefficients qui dépendent des paramètres géométriques et de  $\beta$ . Après élimination de  $T_2$  en prenant le résultant de ces deux équations on obtient un polynôme mono-variable en  $T_1$  de degré 24. Un majorant du nombre de solution est donc 24.

### 3.4 Mécanisme 2SK – PS – CS

#### 3.4.1 Principe

Ce mécanisme décrit en figure 18 fait partie de la classification de Raghavan.

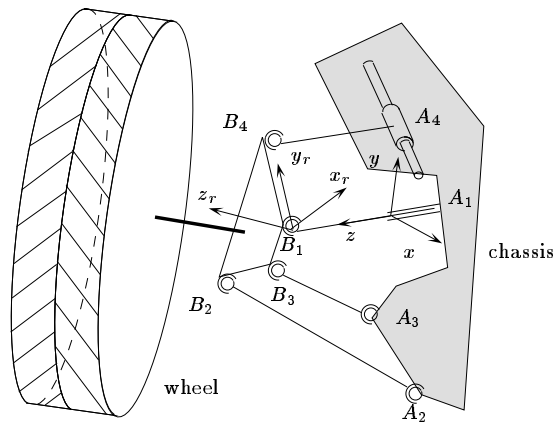


FIG. 18 - *Le mécanisme 2SK – PS – CS.*

#### 3.4.2 Résolution du modèle géométrique, première méthode

Le repère de référence est placé avec l'origine en  $A_1$ , l'axe  $z$  étant l'axe de l'articulation prismatique. On représente la position du corps terminal par

les coordonnées  $(0, 0, z)$  du point  $B_1$  et par trois angles représentatif de son orientation. La contrainte pour l'articulation rotoïde en  $A_1$  s'écrit:

Les contraintes sur les segments 2, 3 de type  $SK$  s'écrivent:

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2 \quad (23)$$

On a:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + R \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}$$

On conséquence les équations de contraintes (23) s'écrivent:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & \|\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1\|^2 + 2\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1 + R \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}) + \\ & \|\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_i \mathbf{A}_1 \cdot R \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_{i_r} \end{aligned}$$

On remarque que ces équation sont de degré 2 en  $z$  avec  $z^2$  comme terme dans ce degré.

L'équation de contrainte pour l'articulation cylindrique du segment 4 s'écrit:

$$\|\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4\|^2 - (\mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{v}_4)^2 = \rho_4^2 \quad (24)$$

En soustrayant les deux équations (23) on obtient une équation linéaire en  $z$ . On résout cette équation et l'on reporte le résultat dans l'une des équations (23) et dans (22). On obtient alors deux équations dans les trois paramètres de rotation. En utilisant le changement de variable (1),(2) on obtient deux équations algébriques. Le résultant de ces deux équations donne une équation dans deux variables d'orientation. En choisissant comme paramètre fixe l'un de ces angles on a donc un polynôme mono-variable qui permet de trouver toutes les solutions du modèle géométrique.

### 3.4.3 Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode

Cette deuxième méthode est directement inspirée de la deuxième méthode utilisée pour la suspension  $3SK - PS$ . On choisit comme paramètre fixe la hauteur  $Z$  entre  $A_1, B_1$ . Le point  $B_2$  se trouve sur un cercle paramétré par un angle  $\theta$ . Pour une position fixée de  $B_2$  la plate-forme tourne autour de la droite passant par  $B_1, B_2$ , rotation qui est paramétrée par un angle  $\theta_3$ . On peut alors



exprimer les vecteurs  $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4$  en fonction de  $Z, \theta, \theta_3$ . On écrit ensuite les contraintes sur ces vecteurs:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\|^2 &= \rho_3^2 \\ \|\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4\|^2 - (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{v}_4)^2 &= \rho_4^2 \end{aligned}$$

Après le changement de variable  $T_2 = \tan(\theta/2)$ ,  $T_1 = \tan(\theta_3/2)$  ces deux équations peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{i=4,j=2 \\ i,j=0}} a_{ij} T_1^i T_2^j = 0 \\ S_2 &= \sum_{\substack{i,j=4 \\ i,j=0}} b_{ij} T_1^i T_2^j = 0 \end{aligned}$$

où les  $a_{ij}, b_{ij}$  sont des coefficients qui dépendent des paramètres géométriques et de  $Z$ . Après élimination de  $T_2$  en prenant le résultant de ces deux équations on obtient un polynôme mono-variable en  $T_1$  de degré 24. Un majorant du nombre de solution est donc 24.

### 3.5 Mécanisme 2CS – PS – SK

#### 3.5.1 Principe

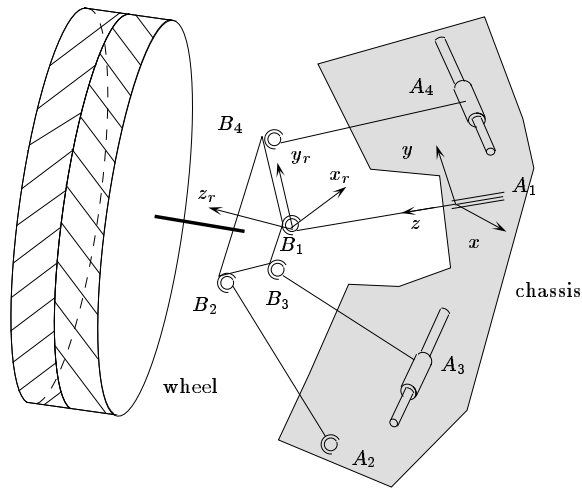
Ce mécanisme décrit en figure 19 fait partie de la classification de Raghavan.

#### 3.5.2 Résolution du modèle géométrique, première méthode

Le repère de référence est placé avec l'origine en  $A_1$ , l'axe  $z$  étant l'axe de l'articulation prismatique. On représente la position du corps terminal par les coordonnées  $(0, 0, z)$  du point  $B_1$  et par trois angles représentatif de son orientation. La contrainte pour l'articulation rotoïde en  $A_1$  s'écrit:

La contrainte sur le segment 2 de type  $SK$  s'écrit:

$$\|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\|^2 = \rho_2^2 \quad (25)$$

FIG. 19 - *Le mécanisme 2CS – PS – SK.*

Cette équation est de degré 2 en  $z$ , ce terme apparaissant sous la forme  $z^2$ .

Les équations de contrainte pour les articulations cylindriques des segments 3, 4 s'écrivent:

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|^2 - (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2 = \rho_i^2 \quad (26)$$

Ces équations sont de degré 2 dans l'inconnue  $z$ , le terme  $z^2$  ayant  $1 - v_{i_z}^2$  comme coefficient. En soustrayant à une équation (26) l'équation (25) multipliée par  $1 - v_{i_z}^2$  on obtient une équation linéaire en  $z$ . On résout cette équation et l'on reporte le résultat dans la deuxième équation (25) et dans (26). On obtient alors deux équations dans les trois paramètres de rotation. En utilisant le changement de variable (1),(2) on obtient deux équations algébriques. Le résultant de ces deux équations donne une équation dans deux variables d'orientation. En choisissant comme paramètre fixe l'un de ces angles on a donc un polynôme mono-variable qui permet de trouver toutes les solutions du modèle géométrique. Il est cependant à noter que l'établissement de ce polynôme est difficile: il sera souvent nécessaire de choisir une valeur du paramètre fixe puis de calculer le résultant des deux équations (qui sont maintenant en deux va-

riables) pour obtenir le polynôme conduisant à toutes les solutions pour la valeur donnée du paramètre fixe.

### 3.5.3 Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode

Cette deuxième méthode est directement inspirée de la deuxième méthode utilisée pour résoudre la suspension  $3SK - PS$ . On définit tout d'abord un plan de référence qui est le plan perpendiculaire à l'axe de l'articulation prismatique qui contient le point  $A_2$ . Dans cette méthode on choisit comme paramètre fixe la hauteur  $Z$  entre les points  $A_1$  et  $B_1$  (figure 20). Pour une position fixée du

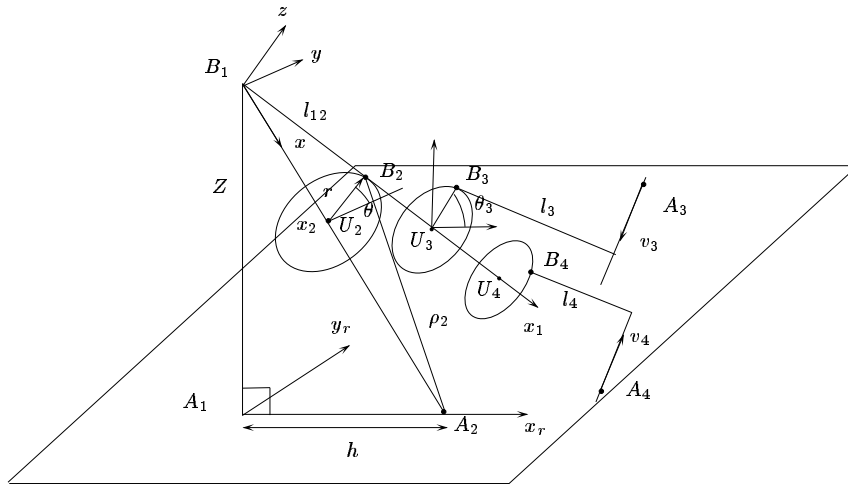


FIG. 20 - Notation pour l'étude du modèle géométrique d'une suspension  $2CS-PS-SK$ .

point  $B_1$  le point  $B_2$  se trouve sur un cercle dont le centre  $U_2$  se trouve sur la ligne passant par  $B_1, A_2$ . la position de  $B_2$  est défini par l'angle de rotation  $\theta$ . Pour une position fixée de  $B_2$  la plate-forme décrit une rotation autour de l'axe passant par  $B_1, B_2$ , paramétrée par un angle  $\theta_3$ . On peut alors exprimer les vecteurs  $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4$  en fonction de  $Z, \theta, \theta_3$ , puis écrire que ces vecteurs doivent satisfaire aux contraintes d'une articulation cylindrique:

$$\|\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\|^2 - (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{v}_3)^2 = \rho_3^2$$

$$\|\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4\|^2 - (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \cdot \mathbf{v}_4)^2 = \rho_4^2$$

Ces deux équations sont des équations en sinus, cosinus des angles  $\theta, \theta_3$  que l'on rend algébrique par un changement de variable du type (1),(2) en posant  $T_1 = \tan(\theta/2), T_2 = \tan(\theta_3/2)$ . On obtient alors deux équations algébriques  $S_1, S_2$  avec:

$$S_1 = \sum_{i,j=0}^{i,j=4} a_{ij} T_1^i T_2^j = 0$$

$$S_2 = \sum_{i,j=0}^{i,j=4} b_{ij} T_1^i T_2^j = 0$$

où les  $a_{ij}, b_{ij}$  sont des coefficients qui dépendent des paramètres géométriques et de  $Z$ . Le résultant de ces deux équations est une équation algébrique en  $T_1$  seul, de degré 32. Un majorant du nombre de solution est donc 32.

## 3.6 Mécanisme $2CS - RS - SK$

### 3.6.1 Principe

Ce mécanisme décrit en figure 21 fait partie de la classification de Raghavan.

### 3.6.2 Résolution du modèle géométrique

La résolution est dans le principe identique à celle du  $2CS - PS - SK$ : pour une position fixée de  $B_1$  on retrouve deux équations en  $\theta, \theta_3$ . Les différences sont que les coefficients des équations vont maintenant dépendre de  $\beta$ , l'angle qui décrit la rotation de  $B_1$  autour de l'articulation rotoïde en  $A_1$  (figure 22). Si  $\rho_1$  est la longueur du segment  $A_1B_1$  et  $(xa_2, ya_2, 0)$  sont les coordonnées de  $A_2$  dans le repère  $A_1, (\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r)$  on aura:

$$d_{B_1A_2} = \sqrt{xa_2^2 + ya_2^2 - 2xa_2\rho_1 \cos \beta + \rho_1^2}$$

De plus la matrice de rotation  $R$  permettant d'exprimer les coordonnées des

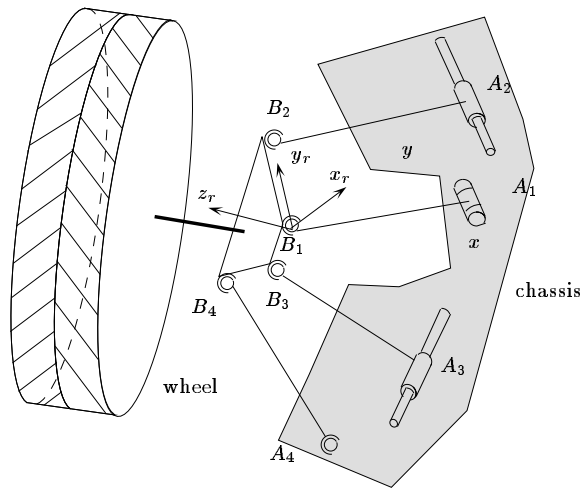


FIG. 21 - *Le mécanisme 2CS – RS – SK.*

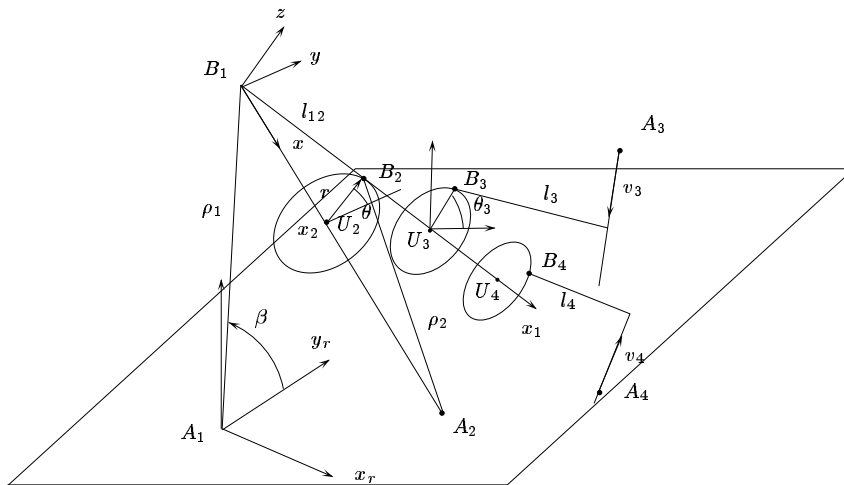


FIG. 22 - *Notation pour l'étude du modèle géométrique d'une suspension 2CS-RS-SK.*

points  $A_3, A_4$  dans le repère  $B_1, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  sera modifiée. On aura:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{xa_2}{d_{B_1 A_2}} & \frac{\rho_1 \sin \beta}{d} & \frac{xa_2(ya_2 - \rho_1 \cos \beta)}{d d_{B_1 A_2}} \\ \frac{ya_2 - \rho_1 \cos \beta}{d_{B_1 A_2}} & 0 & \frac{\rho_1^2 \sin^2 \beta - xa_2^2}{d d_{B_1 A_2}} \\ \frac{-\rho_1 \sin \beta}{d_{B_1 A_2}} & \frac{xa_2}{d} & \frac{\rho_1^2 \sin \beta \cos \beta - ya_2 \rho_1 \sin \beta}{d d_{B_1 A_2}} \end{pmatrix}$$

en posant:

$$d = \sqrt{xa_2^2 + \rho_1^2 \sin^2 \beta}$$

Un majorant du nombre de solution est donc 32.

## 4 Mécanisme à 5 chaînes

### 4.1 Mécanisme 4SK – CS

Ce mécanisme est présenté en figure 23.

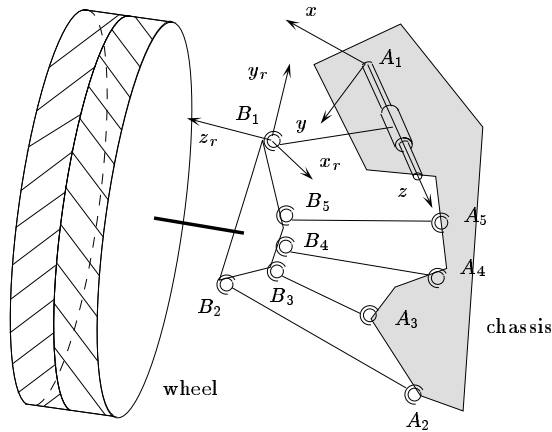


FIG. 23 - La suspension arrière 4SK – CS

#### 4.1.1 Résolution du modèle géométrique

On définit tout d'abord un nouveau repère de référence  $R_r = A_1, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et un repère mobile  $B_1, (x_r, y_r, z_r)$ . Les longueurs des segments seront notées  $\rho_i$ . La géométrie du corps terminal peut être définie par les vecteurs  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}$  (un indice  $r$  définit un vecteur dont les composantes sont exprimées dans le repère mobile).

La position du corps terminal est définie par les coordonnées du point  $B_1$   $(x, y, z)$  dans le repère de référence. On a:

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2 \quad (27)$$

et de manière générale:  $\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2$ . Le vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$  peut s'écrire:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r} \quad (28)$$

où  $R$  est la matrice de rotation permettant d'exprimer les composantes d'un vecteur dans le repère de référence à partir de ces composantes dans le repère mobile. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & \|\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ & + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) + 2\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) \end{aligned} \quad (29)$$

Les inconnues  $x, y, z$  apparaissent dans ces équations sous la forme de la somme de leurs carrés dans le terme  $\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2$  et linéairement dans tous les autres termes. En conséquence si l'on soustrait une des équations (29) aux trois autres équations (29) on obtiendra un système linéaire de trois équations dans les trois inconnues  $x, y, z$ .

Après résolution on substitue le résultat dans l'équation (27) et dans une des équations (29) pour obtenir deux équations dans les trois variables  $\epsilon, \delta, \alpha$ . Un de ces angles est choisi comme paramètre fixe et les sinus et cosinus des deux inconnues restantes sont transformés par un changement de variable similaire à celui présenté en (1,2). On obtient alors deux équations algébriques dont on calcule le résultant pour obtenir un polynôme mono-variable. La résolution numérique de ce polynôme nous permettra d'obtenir l'ensemble des solutions du modèle géométrique. Il ne nous a cependant pas été possible d'établir ce résultant pour une valeur symbolique du paramètre fixe: on est donc obligé de calculer le résultant à chaque étape.

## 4.2 Mécanisme 5KS simplifié

Une version simplifiée d'un mécanisme 5KS de suspension arrière [2],[17] est présenté en figure 24. Il est constitué d'un corps (le triangle  $EHF$ ), support de la roue et de 5 segments qui le connecte au châssis. Chacun des segments est relié au châssis par une rotule.

Définissons tout d'abord un repère de référence  $O(X, Y, Z)$ . La posture de la roue peut être définie par les coordonnées du centre de la roue  $W(x_w, y_w, z_w)$  et par trois paramètres définissant son orientation.

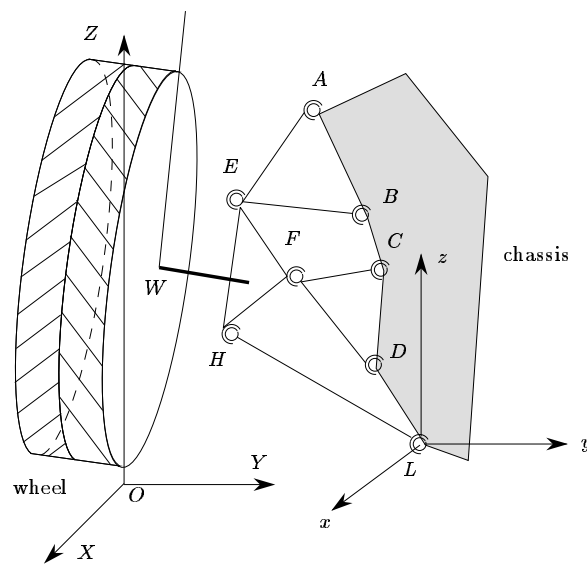


FIG. 24 - La suspension arrière 5 – KS simplifiée et ses paramètres géométriques

Pour résoudre le modèle géométrique notons que si la posture de la roue est connue alors la position des points  $E, H, F$  l'est aussi. Les coordonnées de ces points sont des fonctions de  $x_w, y_w, z_w, \delta, \epsilon, \alpha$ . Comme les positions des points  $A, B, C, D, L$  sont fixées dans le repère de référence il est alors possible de calculer les cinq longueurs  $\rho_i$  des segments. On obtient ainsi un système de



5 équations

$$\mathbf{F}(x_w, y_w, z_w, \delta, \epsilon, \alpha) = \rho^2 \quad (30)$$

En fixant l'un des paramètres (par exemple  $z_w$ ) on obtient alors un système de 5 équations dans les 5 inconnues  $x_w, y_w, \delta, \epsilon, \alpha$ . La résolution de ce système a intéressé beaucoup de chercheurs [7], [12],[4]. Ils ont remarqué que le système (30) est non linéaire et ont proposé une résolution numérique reposant sur le schéma itératif de Newton dans lequel on fournit une estimée de la solution. Mais nous allons montrer que le modèle géométrique admet plusieurs solutions alors que la méthode de Newton n'en fournit qu'une (dans le meilleur des cas).

#### 4.2.1 Nombre maximal de solutions

Considérons le mécanisme qui joint la roue au chassis (figure 25). Dans ce mécanisme les côtés du triangle  $AEB$  ont une longueur fixée et par conséquent le point  $E$  se trouve sur un cercle dont le centre  $P_1$  se trouve sur la ligne passant par  $A, B$  et dont le rayon peut être calculé à partir des longueurs des côtés du triangle. On peut donc remplacer ce triangle par un segment unique  $P_1E$  relié au chassis par une articulation rotoïde. Pour les mêmes raisons le triangle  $CFD$  peut être remplacé par un segment  $P_2F$ . Les solutions du modèle géométrique

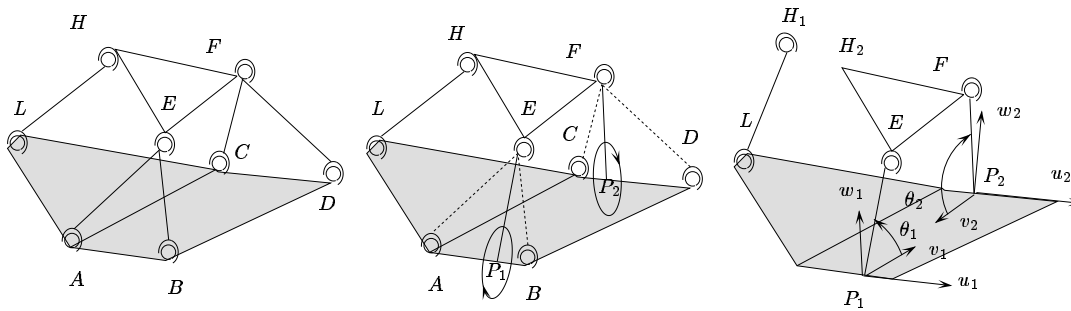


FIG. 25 - La suspension arrière 5-KS simplifiée et son mécanisme équivalent.

du mécanisme ainsi obtenu seront les mêmes que celles du mécanisme original,

on parlera donc d'un *mécanisme équivalent*. Ce mécanisme équivalent a été étudié dans un autre cadre et son modèle géométrique est connu [1],[16],[5].

Nous allons maintenant couper le mécanisme au point  $H$ . On obtient alors deux mécanismes: le segment  $LH_1$  attaché par une rotule au point  $L$  et le mécanisme  $P_1EH_2FP_2$ . En raison de la mobilité de chacun de ces mécanismes les points  $H_i$  vont décrire des surfaces et une solution du modèle géométrique sera obtenue lorsque les points  $H_1, H_2$  coïncideront.  $H_1$  se trouve sur une sphère alors que le mécanisme  $P_1EH_2FP_2$  est bien connu sous le nom de *RSSR*. Il a été prouvé que  $H_2$  se trouve sur une surface algébrique de degré 16 [8],[9]. En utilisant le théorème de Bezout on peut donc déjà affirmer que l'intersection de ces deux surfaces a un degré au plus 32 (16x2). Si l'on fixe la valeur d'un paramètre on cherche alors l'intersection de cette courbe avec un plan et il existera au plus 32 solutions. En fait cette analyse peut être raffinée car il est possible de prouver que parmi ces 32 points il en existe 16 qui sont complexes et se trouve sur l'ombilic; en conséquence il existe au plus 16 solutions réelles et ce nombre peut être atteint [14].

#### 4.2.2 Résolution du modèle géométrique

On définit tout d'abord un nouveau repère de référence  $(L, X, Y, Z)$  et l'on définit la posture du triangle par les coordonnées de ses trois sommets  $H(x, y, z)$ ,  $E(x_e, y_e, z_e)$ ,  $F(x_f, y_f, z_f)$ . On note  $l_{lh}, l_{1e}, l_{2f}$  les longueurs des trois segments du mécanisme équivalent. On a:

$$\|\mathbf{LH}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = l_{lh}^2 \quad (31)$$

Avec les notations de la figure on peut écrire:

$$\mathbf{LE} = \mathbf{LP}_1 + l_{1e}(\cos(\theta_1)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta_1)\mathbf{w}_1) \quad (32)$$

$$\mathbf{LF} = \mathbf{LP}_2 + l_{2f}(\cos(\theta_2)\mathbf{v}_2 + \sin(\theta_2)\mathbf{w}_2) \quad (33)$$

où  $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$  sont des vecteurs constants et  $\theta_i$  est l'angle des segments du RSSR avec la base. Les longueurs des côtés du triangle seront notées  $r_{hf}, r_{fe}, r_{eh}$ . On a alors:

$$\|\mathbf{LF} - \mathbf{LH}\|^2 = r_{hf}^2 \quad (34)$$

$$\|\mathbf{LE} - \mathbf{LF}\|^2 = r_{fe}^2 \quad (35)$$

$$\|\mathbf{LE} - \mathbf{LH}\|^2 = r_{eh}^2 \quad (36)$$

Pour une valeur fixée d'un paramètre (par exemple  $z$ ) ces trois équations et l'équation (31) forment un système de 4 équations dans les inconnues  $x, y, \theta_1, \theta_2$ . On développe les équations (34),(36):

$$\|\mathbf{LF} - \mathbf{LH}\|^2 = \|\mathbf{LF}\|^2 + \|\mathbf{LH}\|^2 - 2\mathbf{LF} \cdot \mathbf{LH} = r_{hf}^2 \quad (37)$$

$$\|\mathbf{LE} - \mathbf{LH}\|^2 = \|\mathbf{LE}\|^2 + \|\mathbf{LH}\|^2 - 2\mathbf{LE} \cdot \mathbf{LH} = r_{eh}^2 \quad (38)$$

On soustrait ensuite (31) à ces deux équations pour obtenir:

$$\|\mathbf{LF}\|^2 - 2\mathbf{LF} \cdot \mathbf{LH} = r_{hf}^2 - l_{lh}^2 \quad (39)$$

$$\|\mathbf{LE}\|^2 - 2\mathbf{LE} \cdot \mathbf{LH} = r_{eh}^2 - l_{lh}^2 \quad (40)$$

Ces équations sont linéaires dans les inconnues  $x, y$ . On résout ce système linéaire et l'on reporte le résultant dans les équations (31),(35), ce qui amène à un système de deux équations dans les inconnues  $\theta_1, \theta_2$ . Ces inconnues apparaissent via leur sinus et cosinus et l'on utilise le changement de variable 1,(2) en posant  $T_1, T_2$  comme:

$$T_1 = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad T_2 = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (41)$$

Avec cette transformation les équations (39),(40) deviennent deux équations algébriques en  $T_1, T_2$ , de degré 4. Le résultant de ces deux équations donne un polynôme de degré 16 en  $T_1$ . La substitution inverse permet alors d'obtenir une et une seule valeur du triplet  $T_2, x, y$  pour chaque valeur de  $T_1$ . On obtient donc bien un maximum de 16 solutions.

### 4.2.3 Exemple

Dans cette exemple on adopte les valeurs numériques suivantes:

$$L = (0, 0, 0) \quad A = (7, 15, 0) \quad B = (7, -9, 0) \quad C = (-7, 15, 0) \quad D = (-7, -9, 0)$$

et

$$l_{lh} = 4 \quad r_{hf} = r_{eh} = 5 \quad r_{ef} = 8$$

Les longueurs des 4 segments de la suspension sont fixées à 13 et l'on recherche les postures pour lesquelles  $z = 1$ . Le polynôme de degré 16 donne alors 4

solutions réelles:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1.037018262 \\ 3.731567109 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} -3.3051272 \\ 3. \\ 3.368666699 \end{pmatrix} \quad F_1 = \begin{pmatrix} 4.627920511 \\ 3. \\ 4.401504164 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} -2.7838753 \\ 2.692589452 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} -3.8425854 \\ 3. \\ -3.8769490 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 2.192602819 \\ 3. \\ 1.374384353 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 2.783875372 \\ 2.692589450 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} -2.1926028 \\ 3. \\ 1.374384341 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 3.842585492 \\ 3. \\ -3.876949 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} -1.0370182 \\ 3.731567109 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} -4.6279205 \\ 3. \\ 4.401504165 \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 3.305127245 \\ 3. \\ 3.368666699 \end{pmatrix}$$

Ces quatre solutions définissent les postures présentées en figure 26. En faisant

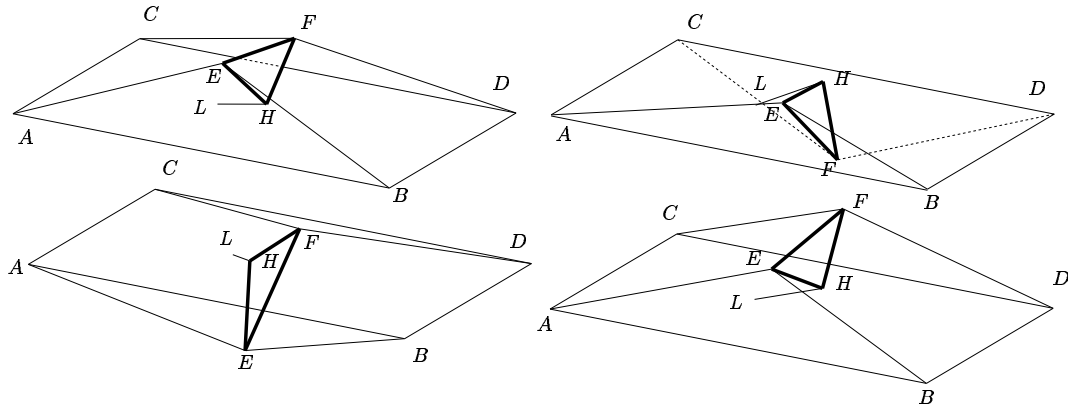


FIG. 26 - Un exemple de résolution du modèle géométrique d'une suspension 5 - KS simplifiée avec 4 solutions.

varier la valeur de  $z$  entre 0.1 et 3.6 par incrément de 0.1 (figure 27) nous

avons remarqué qu'il y avait 4 solutions pour  $z$  entre 0.1 et 1.1. A ce point deux branches du modèle géométrique vont se confondre et il n'y aura plus que deux solutions de 1.2 à 3.6. Ce type d'analyse permet de prédire certains

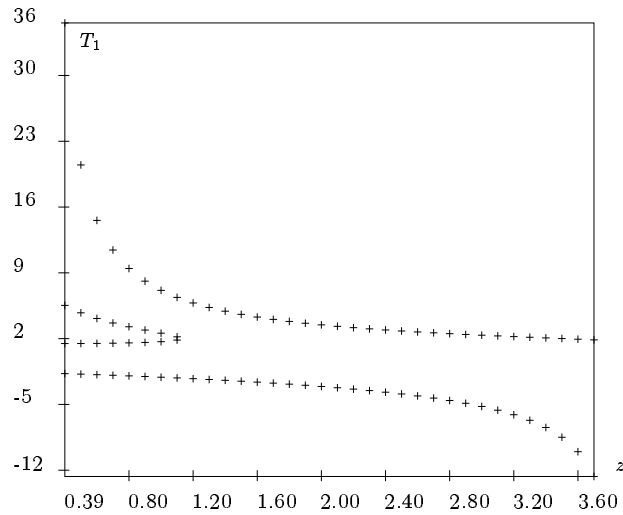


FIG. 27 - Solutions du polynôme mono-variable en fonction de  $z$ .

résultats intéressants. Ainsi le polynôme peut s'écrire:

$$P = \sum_{i=0}^{i=16} a_i T_1^i$$

En utilisant le théorème de Descartes nous savons que le nombre de racines réelles positives est égal au nombre de changement de signe de la séquence  $a_i a_{i+1}$ ,  $i \in [0, 15]$  ou inférieur à ce nombre d'un nombre pair. Après examen de cette séquence sur notre exemple on peut affirmer qu'il y aura un nombre impair de racines *positives* pour  $z$  dans l'intervalle  $[0.27, 3.91]$  et un nombre pair pour  $z$  entre 0 et 0.27.

### 4.3 Mécanisme 5KS général

Une forme plus générale d'un mécanisme de suspension arrière est présentée en figure 28. Les centres des rotules sont maintenant tous distincts. C'est ce type de suspension qui est utilisé dans certaine voiture haut de gamme comme par exemple dans la Mercedes 190E depuis 1984. Les caractéristiques dynamiques de cette suspension ont été étudiées par Hiller [6].

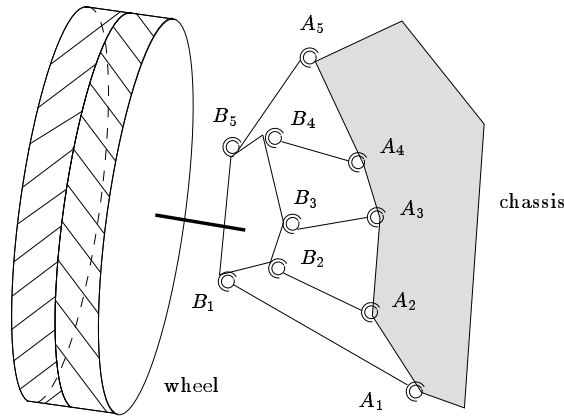


FIG. 28 - Mécanisme 5KS général.

#### 4.3.1 Nombre maximal de solutions

Pour calculer le nombre maximal de solutions nous utilisons un résultat de Mourrain qui établit que le point d'attache de la roue se trouve sur une courbe algébrique de degré 40 [15]. Si l'on fixe la valeur d'un des paramètres on recherche alors l'intersection d'un plan avec cette courbe et il existera donc au plus 40 solutions. Il n'a pas été toutefois possible d'établir si ce nombre peut être effectivement atteint.

#### 4.3.2 Résolution du modèle géométrique

On définit tout d'abord un repère de référence  $(A_1, X, Y, Z)$  et un repère mobile  $B_1, (x_r, y_r, z_r)$ . Les longueurs des segments seront notées  $\rho_i$ . La géomé-

trie du corps terminal peut être définie par les vecteurs  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}$  (un indice  $r$  définit un vecteur dont les composantes sont exprimées dans le repère mobile).

La position du corps terminal est définie par les coordonnées du point  $B_1$  ( $x, y, z$ ) dans le repère de référence. On a alors:

$$\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho_1^2 \quad (42)$$

et de manière générale:  $\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2$ . Le vecteur  $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$  peut s'écrire:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r} \quad (43)$$

où  $R$  est la matrice de rotation permettant d'exprimer les composantes d'un vecteur dans le repère de référence à partir de ces composantes dans le repère mobile. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & \|\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1\|^2 + \|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2 + \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}\|^2 + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \\ & + 2\mathbf{A}_i\mathbf{A}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) + 2\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \cdot (R\mathbf{B}_1\mathbf{B}_{i_r}) \end{aligned} \quad (44)$$

Les inconnues  $x, y, z$  apparaissent dans ces équations sous la forme de somme de leurs carrés dans le terme  $\|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\|^2$  et linéairement dans tous les autres termes. En conséquence si l'on soustrait l'équation (42) à trois des équations (44) on obtiendra un système linéaire de trois équations dans les trois inconnues  $x, y, z$ .

Après résolution on substitue le résultat dans l'équation (42) et dans l'équation (44) pour obtenir deux équations dans les trois variables  $\epsilon, \delta, \alpha$ . Un de ces angles est choisi comme paramètre fixe et les sinus et cosinus des deux inconnues restantes sont transformés par un changement de variable similaire à celui présenté en (1,2). On obtient alors deux équations algébriques dont on calcule le résultant pour obtenir un polynôme mono-variable. La résolution numérique de ce polynôme nous permettra d'obtenir l'ensemble des solutions du modèle géométrique. Il ne nous a cependant pas été possible d'établir ce résultant pour une valeur symbolique du paramètre fixe: on est donc obligé de calculer le résultant à chaque étape.

### 4.3.3 Exemple

On choisit les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0, 0) & A_2 &= (0, -20, 0) & A_3 &= (10, -20, 0) \\ A_4 &= (10, 0, 0) & A_5 &= (5, -12, 0) \end{aligned}$$

$$B_1 = (0, 0, 0) \quad B_2 = (0, -6, 0) \quad B_3 = (2, -6, 0) \quad B_4 = (2, 0, 0) \quad B_5 = (1, -2, 0)$$

avec les longueurs des segments suivantes:

$$R_1 = 20 \quad R_2 = 23.93 \quad R_3 = 25.06 \quad R_4 = 21.65 \quad R_5 = 22.56$$

Nous avons choisi d'utiliser les angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  pour spécifier l'orientation de la roue, le paramètre fixe étant  $\phi$ . Dans cet exemple le polynôme mono-variable peut être réduit à un polynôme de degré 16 en  $\tan(\theta/2)$  n'ayant que des puissances paires (si  $\theta_1$  est solution alors  $-\theta_1$  est aussi solution). On n'a donc à résoudre en fait qu'un polynôme de degré 8. Pour  $\phi = 10^\circ$  on obtient 8 solutions qui sont présentées en figures 29,30. Les solutions du modèle géométrique en

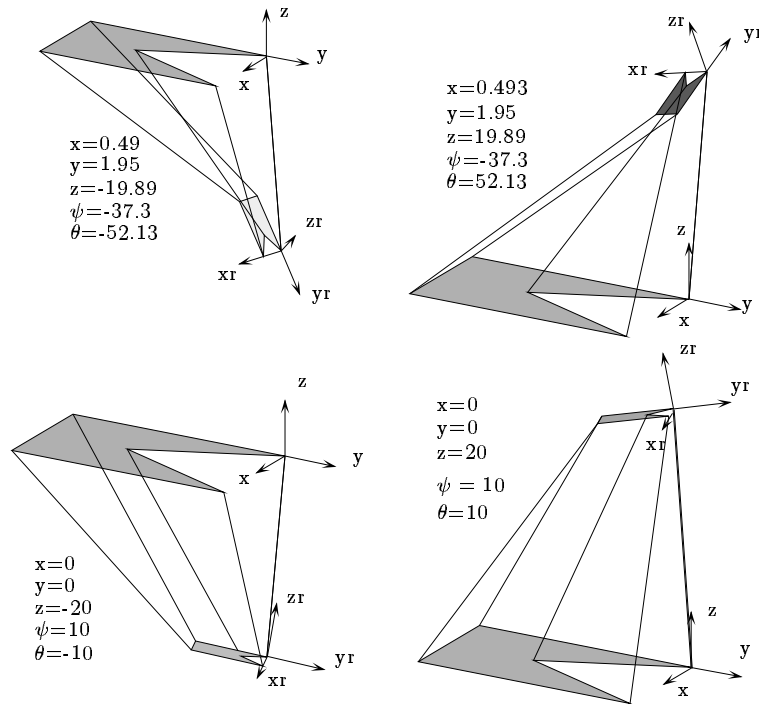


FIG. 29 - Les quatre premières solutions du modèle géométrique de l'exemple de suspension 5 – KS général.



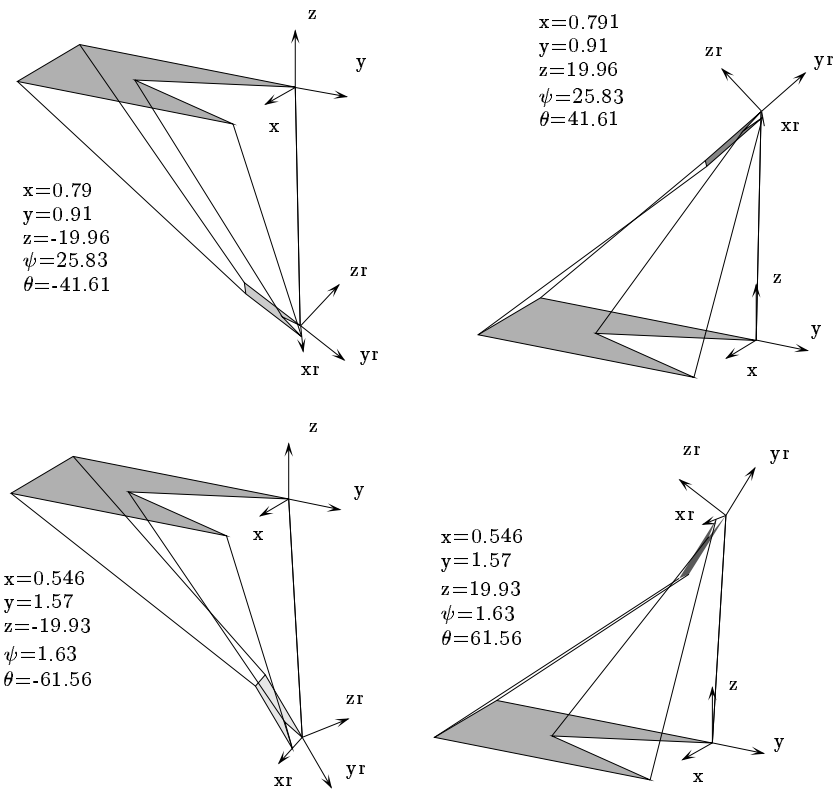


FIG. 30 - Les quatre dernières solutions du modèle géométrique de l'exemple de suspension 5 – KS générale.

fonction de  $\phi$  sont présentées dans les figures 31,32,33,34,35. On peut voir que certaines branches sont effectivement très proches ce qui constituerait un problème si l'on utilisait la méthode de Newton. Dans tous les cas on obtient 4 ou 8 solutions. Dans le cas de cet exemple on peut montrer que quelles que

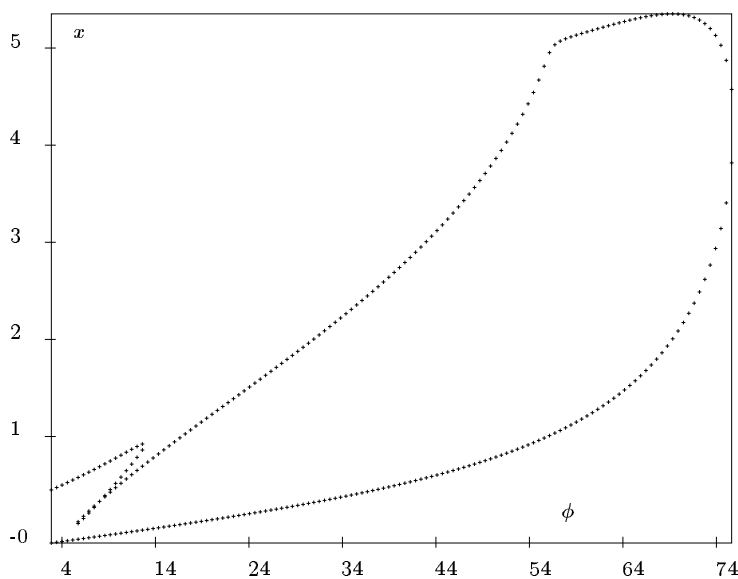


FIG. 31 -  $x$  comme fonction de  $\phi$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

soient les longueurs des segments on obtiendrait un polynôme mono-variable de degré 16 dont on peut calculer sous forme analytique les coefficients en fonction des longueurs des segments et du paramètre fixe. On peut donc comparer très rapidement des géométries différentes.

On a pu trouver des géométries avec un total de 20 solutions par exemple pour  $R_5 = 20$  (figure 36).

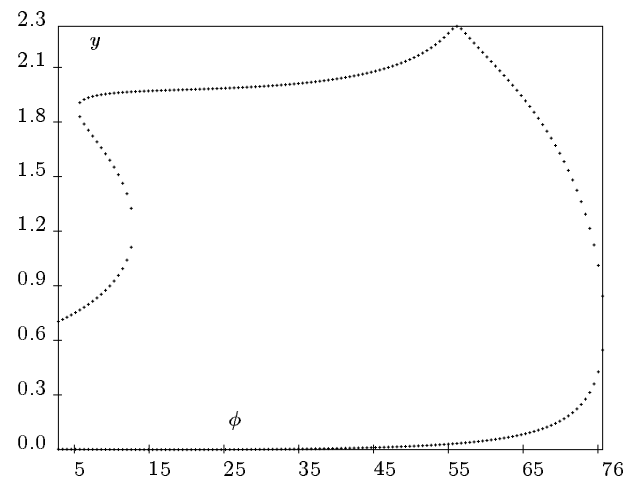


FIG. 32 -  $y$  comme fonction de  $\phi$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

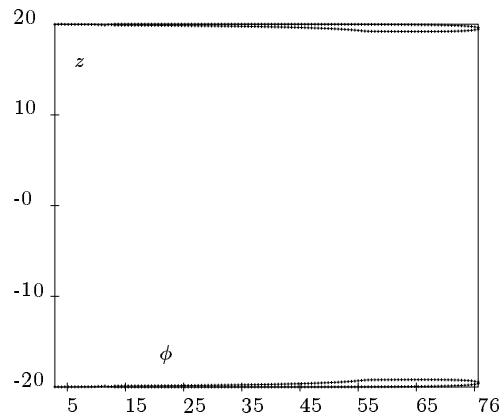


FIG. 33 -  $z$  comme fonction de  $\phi$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

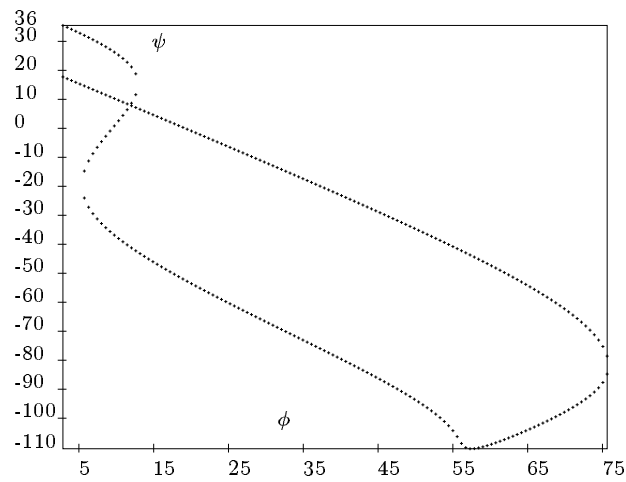


FIG. 34 -  $\psi$  comme fonction de  $\phi$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

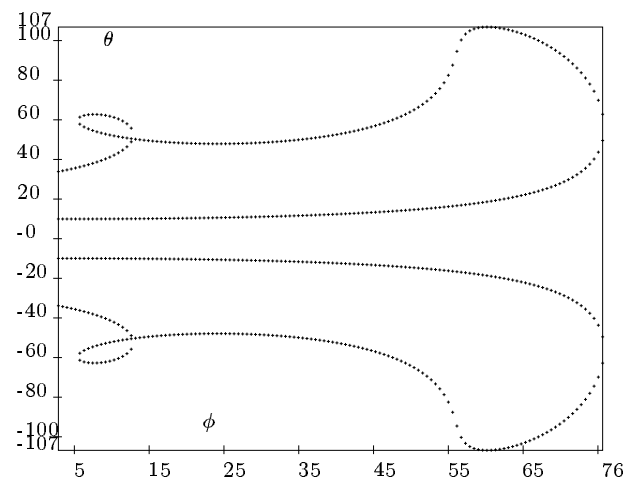


FIG. 35 -  $\theta$  comme fonction de  $\phi$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

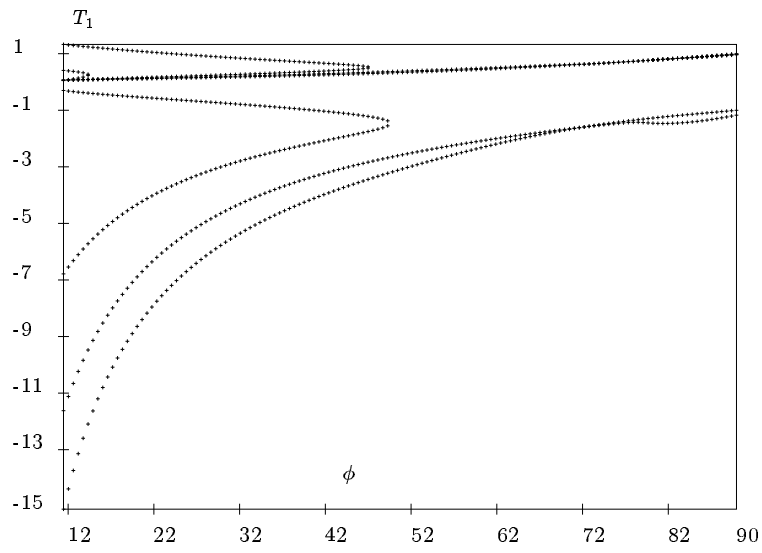


FIG. 36 - Solutions du polynôme mono-variable en fonction de  $\phi$  pour  $R_5 = 20$  pour l'exemple de suspension 5 – KS générale.

#### 4.4 Le 5-barres Nissan

Ce mécanisme a été utilisé comme suspension avant pour la Nissan 300ZX (figure 37). Il est un peu à part car il ne rentre pas dans la classification de Raghavan dans la mesure où l'une des chaînes a deux segments. Il est

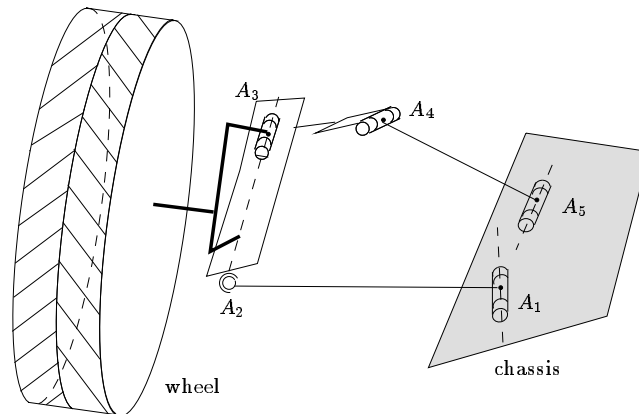


FIG. 37 - La suspension de la Nissan 300ZX

intéressant car paradoxal: si l'on applique la formule de Grübler on trouve que sa mobilité est de 1. En fait l'intersection de l'axe de l'articulation rotoïde en  $A_3$  avec le centre de la rotule en  $A_2$  fait que la mobilité est de 2. On peut tourner autour de l'axe  $A_2A_3$  (ce qui permet le guidage de la roue) et en même temps la roue peut pivoter autour de l'axe  $A_1A_5$ . La modélisation géométrique de ce type de mécanisme ne présente pas de difficultés. Le point  $A_2$  appartenant au mécanisme  $A_5A_4A_2$  décrit un tore, alors que considéré comme appartenant au mécanisme  $A_1A_2$  il décrit un cercle. Les solutions se trouvent à l'intersection du tore et du cercle, il existe donc 4 solutions au plus.

## 5 Conclusion

L'analyse présentée dans les sections précédentes a permis de montrer que le modèle géométrique de différents mécanismes de suspension automobile pou-

vaît être résolu exactement sans faire appel à des méthodes purement numériques. Les polynômes mono-variable obtenus sont de degré suffisamment faible pour que leur résolution numérique ne présente pas de problème.

Il faut noter que les mécanismes les plus difficiles à résoudre sont ceux qui incluent des articulations de type cylindrique dans les chaînes: ainsi nous avons buté sur la résolution des mécanismes de type  $3CS - 2SK$  et  $4CS - SK$ . Fort heureusement ce type d'articulation n'est pas, à notre connaissance, employée dans la pratique car les efforts de flexion sur l'axe de ce type d'articulation sont importants, ce qui va à l'encontre du principe qui régit l'emploi des chaînes fermées dans les mécanismes de suspension, à savoir favoriser les structures où les contraintes sur les segments sont plutôt du type traction-compression.

Les méthodes proposées dans ce rapport constituent un premier pas pour l'obtention d'algorithmes systématique de synthèse.

## Références

- [1] Charentus S. and Renaud M. Calcul du modèle géométrique direct de la plate-forme de Stewart. Research Report 89260, LAAS, Toulouse, France, July 1989.
- [2] Cronin D.L. MacPherson strut kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 16:631–644, 1981.
- [3] Ellis J.R. Suspension derivatives of a kinematic suspension model. *Int. J. of Vehicle Design*, pages 419–431, 1989.
- [4] Garnier C., Mourrain B., and Rideau P. Symbolic and numeric computation for the real-time simulation of a car behavior. In J.-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 123–132. Kluwer, 1995.
- [5] Griffis M. and Duffy J. A forward displacement analysis of a class of Stewart platform. *J. of Robotic Systems*, 6(6):703–720, 1989.
- [6] Hiller M. and Frik S. Five-link suspension. In *Vehicle System Dynamics*, pages 254–262, 1993.

- 
- [7] Hiller M. and Woernle C. Elasto-kinematical analysis of a five-point wheel suspension. *Revue de la SIA, Paris*, pages 77–80, 1985.
  - [8] Hunt K.H. *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, 1978.
  - [9] Hunt K.H. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105:705–712, March 1983.
  - [10] Jonsson M. Simulation of dynamical behaviour of a front wheel suspension. *Vehicle System Dynamics*, 20(5):269–281, 1991.
  - [11] Kang H.Y. and Suh C.H. Synthesis and analysis of spherical-cylindrical (SC) link in the McPherson strut suspension mechanism. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(2):599–606, June 1994.
  - [12] Knapczyk J. and Dzierzek S. Elasto analysis of the five rod suspension considering joint elasticities. In *9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 2824–2828, Milan, August 30- September 2, 1995.
  - [13] Lazard D. and Merlet J-P. The (true) Stewart platform has 12 configurations. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2160–2165, San Diego, May, 8-13, 1994.
  - [14] Merlet J-P. Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 11(2):150–162, April 1992.
  - [15] Mourrain B. Enumeration problems in Geometry, Robotics and Vision. In *MEGA*, Santander, April, 5-9, 1994.
  - [16] Nanua P. and Waldron K.J. Direct kinematic solution of a Stewart platform. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 6(4):438–444, August 1991.
  - [17] Raghavan M. An atlas of linkages for independent suspensions, 1991. SAE Paper n° 911925.



- [18] Sander H. Berechnung des Achskinematik eines Fahrzeugs mit Drehtensoren. *Automobil-Industrie*, 3:363–369, September 1981.
- [19] Suh C.H. Modeling the McPherson suspension. *Computers in Mechanical Engineering*, pages 52–56, September 1967.
- [20] Visa I. Kinematic synthesis of steering linkages employed in McPherson suspension type automobiles. In *6th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 373–376, New-Dehli, December, 15-20, 1983.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Modèle géométrique et méthodes de résolution . . . . .	3
1.2	Etat de l'art . . . . .	4
1.3	Remarques préliminaires . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mécanismes à 3 chaînes</b>	<b>6</b>
2.1	La suspension $RS - SK - SP$ . . . . .	6
2.1.1	Résolution du modèle géométrique . . . . .	7
2.2	Le mécanisme $2RS - SK$ . . . . .	12
2.2.1	Principe . . . . .	12
2.2.2	Nombre maximal de solution . . . . .	13
2.2.3	Résolution du modèle géométrique . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Mécanismes à 4 chaînes</b>	<b>15</b>
3.1	Mécanismes $3SK - RS, 3KS - SR$ . . . . .	15
3.1.1	Résolution du modèle géométrique, première méthode . .	17
3.1.2	Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode .	18
3.1.3	Exemple . . . . .	20
3.2	Mécanismes $3SK - PS, 3KS - SP$ . . . . .	21
3.2.1	Résolution du modèle géométrique, première méthode . .	21
3.2.2	Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode .	22
3.2.3	Exemple . . . . .	24
3.3	Mécanisme $2SK - RS - CS$ . . . . .	26
3.3.1	Principe . . . . .	26
3.3.2	Résolution du modèle géométrique, première méthode . .	26
3.3.3	Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode .	27
3.4	Mécanisme $2SK - PS - CS$ . . . . .	28
3.4.1	Principe . . . . .	28
3.4.2	Résolution du modèle géométrique, première méthode . .	28
3.4.3	Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode .	29
3.5	Mécanisme $2CS - PS - SK$ . . . . .	30
3.5.1	Principe . . . . .	30
3.5.2	Résolution du modèle géométrique, première méthode . .	30
3.5.3	Résolution du modèle géométrique, deuxième méthode .	32

3.6	Mécanisme $2CS - RS - SK$ . . . . .	33
3.6.1	Principe . . . . .	33
3.6.2	Résolution du modèle géométrique . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Mécanisme à 5 chaînes</b>	<b>35</b>
4.1	Mécanisme $4SK - CS$ . . . . .	35
4.1.1	Résolution du modèle géométrique . . . . .	36
4.2	Mécanisme $5KS$ simplifié . . . . .	37
4.2.1	Nombre maximal de solutions . . . . .	38
4.2.2	Résolution du modèle géométrique . . . . .	39
4.2.3	Exemple . . . . .	40
4.3	Mécanisme $5KS$ général . . . . .	43
4.3.1	Nombre maximal de solutions . . . . .	43
4.3.2	Résolution du modèle géométrique . . . . .	43
4.3.3	Exemple . . . . .	44
4.4	Le 5-barres Nissan . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399