

# Approximations décentrées à faible dissipation pour des problèmes hyperboliques

Christophe Debiez

► **To cite this version:**

Christophe Debiez. Approximations décentrées à faible dissipation pour des problèmes hyperboliques. RR-2811, INRIA. 1996. <inria-00073881>

**HAL Id: inria-00073881**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073881>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Approximations décentrées à faible dissipation pour des  
problèmes hyperboliques*

Christophe Debiez

**N° 2811**

Février 1996

PROGRAMME 6



*Rapport  
de recherche*



# Approximations décentrées à faible dissipation pour des problèmes hyperboliques

Christophe Debiez

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Sinus

Rapport de recherche n ° 2811 — Février 1996 — 45 pages

**Résumé :** Les schémas volumes finis décentrés sont souvent encore trop dissipatifs pour envisager des calculs complexes. En particulier, un des inconvénients de l'approche MUSCL est le niveau élevé de sa viscosité numérique qui provient notamment du mécanisme de décentrage à l'ordre 2. On présente dans ce rapport une version de MUSCL en triangles à très faible viscosité numérique. Le principe est de n'introduire que des viscosités du sixième ordre dans la reconstruction. Des comparaisons des différentes versions du nouveau schéma sont faites en stationnaire et instationnaire sur des cas tests 2D.

**Mots-clé :** schéma MUSCL, faible dissipation, ordre élevé, instationnaire

# Upwind approximations with weak dissipation for hyperbolic problems

**Abstract:** Most upwind finite volume schemes show too much dissipation to calculate complex flow simulation. Particularly, one of the disadvantage of MUSCL method is the high level of numerical viscosity especially due to the second order upwinding. We present in this report a triangle version of MUSCL scheme with weak dissipation. The strategy is to introduce only sixth order dissipation terms in the reconstruction. Some comparisons with different versions of the new scheme are made on steady and unsteady 2D tests cases.

**Key-words:** MUSCL scheme, weak dissipation, high order , unsteady flow

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Etude Monodimensionnelle</b>	<b>4</b>
2.1	Discrétisation spatiale . . . . .	4
2.2	Discrétisation temporelle explicite . . . . .	5
2.3	Schémas à faible dissipation . . . . .	5
2.3.1	Construction d'un schéma volume fini décentré à dissipation quatrième nulle . . . . .	5
2.3.2	Une méthode mixte éléments finis/volumes finis . . . . .	7
2.3.3	Etude de stabilité . . . . .	9
2.4	Discrétisation temporelle implicite . . . . .	15
2.5	Résultats numériques en explicite . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Extension au cas bidimensionnel</b>	<b>21</b>
3.1	Approximation des équations d'Euler . . . . .	21
3.2	Approximation d'ordre élevé . . . . .	22
3.2.1	Interpolations . . . . .	22
3.2.2	Schémas à matrice de masse . . . . .	24
3.3	Equations équivalentes des schémas sur l'équation d'advection 2D . . . . .	25
3.4	Expériences numériques . . . . .	31
3.4.1	Problèmes d'advection . . . . .	31
3.4.2	Calcul d'un écoulement 2D stationnaire . . . . .	39
3.4.3	Calcul d'un écoulement 2D instationnaire . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>
	<b>Références</b>	<b>44</b>

## 1 Introduction

Les méthodes de décentrage modernes (schémas de Godunov, schémas TVD/ENO) permettent de stabiliser de nombreux schémas collocalisés en maillage structuré ou non. Dans le cas de maillages triangulaires (tétraèdres en 3D) avec noeuds aux sommets, un certain nombre de schémas intéressants ont été développés depuis 10 ans ([SPFD87],[Bar94]) qui ont montré une bonne précision en maillage non structuré. Il semble d'après [Mer94] qu'en maillages irréguliers non étirés, l'erreur d'approximation " $U_h - U$ " est d'ordre 2, ce qui est difficile à garantir pour des formulations volumes finis centrés par élément.

Cependant, l'erreur numérique reste grande et dominée par la dissipation ajoutée. Elle devient peu tolérable pour certains calculs instationnaires.

Le point de vue de ce travail est de chercher des termes de stabilisation dégradant le moins possible la précision. A cet effet, nous choisissons de prolonger la démarche qui a conduit des schémas monotones d'ordre un aux schémas décentrés d'ordre deux.

Mais seule la réduction des termes de dissipation est envisagée. Les schémas resteront d'ordre deux en général, mais avec des résultats qui seront de bien meilleure qualité sur les maillages utilisés en pratique. Pour fixer les idées, nous souhaitons obtenir sur ces maillages des résultats en stationnaire pour lesquels l'erreur totale ne soit pas beaucoup plus grande que l'erreur d'interpolation  $|\Pi_h U - U|$  entre la solution exacte et sa représentation sur le maillage.

Nous cherchons donc des schémas précis à l'ordre deux, mais meilleurs que les schémas classiques; cependant notre démarche consistera en la recherche de schémas plus précis en maillage cartésien. La recherche de schémas d'ordre deux plus précis occupe l'essentiel des activités en approximation dans ce domaine; citons notamment les travaux sur les méthodes de Moindre Carré/Petrov-Galerkin [HM86] et sur des schémas vraiment multidimensionnels ceux de [PDS<sup>+</sup>93]. En maillage cartésien, les équations équivalentes permettent d'identifier les principales composantes de l'erreur (dissipation, dispersion) en multidimensionnel (cf par exemple [Car95], [DLC95]).

Dans notre étude, nous commençons par considérer le cas 1D; nous construisons à partir du  $\beta$  schéma classique, une classe de schémas moins dissipatifs en ajoutant une correction quatrième au flux de façon à faire disparaître les termes de dissipation à l'ordre 4. Une analyse complète des différents schémas est présentée pour l'équation d'advection avec notamment une étude de stabilité. Nous nous intéressons aussi à l'influence

de la matrice de masse pour la réduction du niveau de dispersion. Quelques expériences numériques, en particulier l'advection d'une fonction régulière permettent de comparer les différents schémas et de mettre en évidence le gain de précision obtenu. Ensuite, nous présentons une extension de la méthode au cas bi-dimensionnel et les différentes techniques possibles pour la construction d'une correction efficace basée sur l'analyse des équations équivalentes des schémas pour l'équation d'advection. Nous illustrons cette étude sur un ensemble de cas tests stationnaires et instationnaires : advection rotationnelle d'une fonction discontinue et régulière, translation et rotation d'un cône. Enfin, nous appliquons ces schémas à la résolution numérique d'écoulements externes 2D stationnaires et instationnaires autour de profils d'ailes.

## 2 Etude Monodimensionnelle

Dans cette partie, on construit des schémas numériques d'ordre élevé pour l'équation scalaire suivante :

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1)$$

On s'intéressera au cas particulier où  $f(u) = cu$  ( $c > 0$ ).

### 2.1 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est basée sur la méthode des volumes finis centrée sur les sommets. On note  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  les noeuds du maillage. En chaque point du maillage, on a :  $u_j \approx u(x_j)$  et on définit une cellule  $C_j$  comme l'intervalle  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  où  $x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$ . Soit  $U = \{u_j\}$  le vecteur inconnu dont les composantes sont les approximations de la fonction  $u(x)$  en chaque noeud  $j$  du maillage, confondu avec le centre de gravité de la cellule dans le cas  $\Delta x = x_i - x_{i-1} = Constante$ . On construit alors le vecteur  $\Psi(U)$  en fonction de l'approximation spatiale de  $(f(u))_x$ , ce que l'on peut écrire :

$$\Psi_j(U) = \frac{1}{\Delta x} (\Phi_{j+\frac{1}{2}} - \Phi_{j-\frac{1}{2}}) \quad (2)$$

$\Phi$  étant une fonction de flux numérique donnée telle que :

$$\Phi_{j-\frac{1}{2}} = \Phi(u_{j-\frac{1}{2}-}, u_{j-\frac{1}{2}+}) \text{ et } \Phi_{j+\frac{1}{2}} = \Phi(u_{j+\frac{1}{2}-}, u_{j+\frac{1}{2}+}) \quad (3)$$

où  $u_{j\pm\frac{1}{2}\pm}$  désignent les valeurs de  $u$  aux frontières du volume de contrôle  $C_j$ . On impose à  $\Phi$  d'être *consistante* avec le flux  $f(u)$ , c'est à dire que :

$$\Phi(u, u) = f(u) \quad \forall u. \quad (4)$$

Le schéma (2) est dit *décentré au sens de Harten, Lax et Van Leer* [HLVL83] si la fonction de flux numérique  $\Phi$  vérifie :

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v) - d(u, v)) \quad (5)$$

avec  $d(u, v) = |f'(\frac{u+v}{2})| (v - u) + o(|u - v|)$ .

On remarque que l'expression de  $\Phi$  est constituée d'un terme centré et du terme  $d(u, v)$  qui contient la viscosité numérique interne du schéma. Pour contrôler cette viscosité, on introduit un paramètre  $\delta$  devant le terme  $d(u, v)$ . La fonction de flux  $\Phi^\delta$  s'écrit :

$$\Phi^\delta(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v) - \delta d(u, v)). \quad (6)$$

Dans le cas linéaire où  $f(u) = cu$  ( $c > 0$ ), la définition de  $d(u, v)$  donne :

$$d(u, v) = c(v - u) \quad (7)$$

et la fonction de flux numérique est réduite à :

$$\Phi^\delta(u, v) = \frac{cu + cv}{2} - \frac{\delta}{2}c(v - u) \quad (8)$$

$$\Phi^\delta(u, v) = \frac{c}{2} [(1 + \delta)u + (1 - \delta)v]. \quad (9)$$

Pour  $\delta=1$ , on a bien sûr :  $\Phi^1(u, v) = \Phi(u, v) = \Phi^1(u, v) = cu = f(u)$ .

Il en résulte :

$$\Psi_j^\delta(U) = \frac{c}{2\Delta x} ((1 + \delta)u_{j+\frac{1}{2}-} + (1 - \delta)u_{j+\frac{1}{2}+} - (1 + \delta)u_{j-\frac{1}{2}-} - (1 - \delta)u_{j-\frac{1}{2}+}). \quad (10)$$

## 2.2 Discrétisation temporelle explicite

La discrétisation de l'équation (1) aboutit au système d'équations différentielles ordinaires :

$$U_t + \Psi(U) = 0 \quad (11)$$

qu'on peut résoudre avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre  $N = 6$  à stockage minimal [Jam85]. Il s'agit d'un schéma d'ordre 6 en temps (dans le cas linéaire) défini par :

$$\begin{cases} U^{(0)} &= U^n \\ U^{(k)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-k} \Psi(U^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N \\ U^{n+1} &= U^{(6)}. \end{cases} \quad (12)$$

Dans le cas linéaire où  $f(u) = cu$ ,  $\Psi$  s'exprime linéairement en fonction de  $U$ ; on introduit un opérateur linéaire  $\lambda$  tel que :  $\Psi(U) = -\lambda U$ . On en déduit :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \left( \lambda + \frac{\Delta t}{2} \lambda^2 + \frac{\Delta t^2}{6} \lambda^3 + \frac{\Delta t^3}{24} \lambda^4 + \frac{\Delta t^4}{120} \lambda^5 + \frac{\Delta t^5}{720} \lambda^6 \right) U^n. \quad (13)$$

## 2.3 Schémas à faible dissipation

On se propose de construire des opérateurs d'approximation du flux  $(f(u))_x$  d'ordre élevé et très peu dissipatifs. En particulier, on a cherché à faire disparaître au moins les termes de dissipation jusqu'à l'ordre 4.

### 2.3.1 Construction d'un schéma volume fini décentré à dissipation quatrième nulle

La méthode de décentrage à l'ordre deux choisie est la méthode MUSCL de Van Leer [HLVL83]; on introduit des interpolations des valeurs  $u_{j \pm \frac{1}{2} \pm}$  de  $u(x)$  aux bornes du volume de contrôle  $C_j$ . les valeurs  $u_{j \pm \frac{1}{2} \pm}$  sont construites à partir de développements de Taylor au premier et troisième ordre de  $u(x)$  :

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2}-} &= u_j + \frac{1}{2} \Delta u_{j+\frac{1}{2}-} \\ u_{j+\frac{1}{2}+} &= u_{j+1} - \frac{1}{2} \Delta u_{j+\frac{1}{2}+} \\ u_{j-\frac{1}{2}-} &= u_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta u_{j-\frac{1}{2}-} \\ u_{j-\frac{1}{2}+} &= u_j - \frac{1}{2} \Delta u_{j-\frac{1}{2}+} \end{aligned} \quad (14)$$

où les  $\Delta u_{j \pm \frac{1}{2} \pm}$  représentent des approximations de la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

$$\begin{aligned} \Delta u_{j+\frac{1}{2}-} &= (1 - \beta)(u_{j+1} - u_j) + \beta(u_j - u_{j-1}) \\ &\quad + \xi^c(-u_{j-1} + 3u_j - 3u_{j+1} + u_{j+2}) \\ &\quad + \xi^d(-u_{j-2} + 3u_{j-1} - 3u_j + u_{j+1}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{j+\frac{1}{2}+} &= (1 - \beta)(u_{j+1} - u_j) + \beta(u_{j+2} - u_{j+1}) \\ &\quad + \xi^c(-u_{j-1} + 3u_j - 3u_{j+1} + u_{j+2}) \\ &\quad + \xi^d(-u_j + 3u_{j+1} - 3u_{j+2} + u_{j+3}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{j-\frac{1}{2}-} &= (1 - \beta)(u_j - u_{j-1}) + \beta(u_{j-1} - u_{j-2}) \\ &\quad + \xi^c(-u_{j-2} + 3u_{j-1} - 3u_j + u_{j+1}) \\ &\quad + \xi^d(-u_{j-3} + 3u_{j-2} - 3u_{j-1} + u_j) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{j-\frac{1}{2}+} &= (1 - \beta)(u_j - u_{j-1}) + \beta(u_{j+1} - u_j) \\ &\quad + \xi^c(-u_{j-2} + 3u_{j-1} - 3u_j + u_{j+1}) \\ &\quad + \xi^d(-u_{j-1} + 3u_j - 3u_{j+1} + u_{j+2}) \end{aligned} \quad (18)$$



où  $\beta$ ,  $\xi^c$  et  $\xi^d$  sont des paramètres de décentration. On obtient par exemple un schéma centré pour  $\beta$ ,  $\xi^c$  et  $\xi^d$  égaux à 0 et totalement décentrées pour  $\beta$  égal à 1,  $\xi^c$  et  $\xi^d$  étant nuls. Si on reporte toutes ces expressions dans le calcul du flux (10), on a :

$$\Psi_j^\delta(U) = \frac{c}{4\Delta x} \left\{ \begin{array}{ll} (1 + \delta)\xi^d & u_{j-3} \\ [(1 + \delta)\beta + 2\delta\xi^c - 4\delta\xi^d - 4\xi^d] & u_{j-2} \\ [-2(\beta + 2\delta\beta + 1) - 8\delta\xi^c + 5\xi^d + 7\delta\xi^d] & u_{j-1} \\ [6\delta\beta + 12\delta\xi^c - 8\delta\xi^d] & u_j \\ [2(\beta - 2\delta\beta + 1) - 8\delta\xi^c - 5\xi^d + 7\delta\xi^d] & u_{j+1} \\ [-(1 - \delta)\beta + 2\delta\xi^c - 4\delta\xi^d + 4\xi^d] & u_{j+2} \\ -(1 - \delta)\xi^d & u_{j+3} \end{array} \right\}. \quad (19)$$

En faisant maintenant des développements de Taylor de la fonction  $u$  autour de  $x_j$ , on a :

$$\begin{aligned} \Psi^\delta(u) &= c \left( \frac{\partial u}{\partial x} + C_3 \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + C_4 \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + C_5 \frac{\Delta x^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + C_6 \frac{\Delta x^5}{24} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^6) \\ &= -\lambda u \end{aligned} \quad (20)$$

où les coefficients  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  et  $C_6$  sont égaux à :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 = 1 - 3\beta \\ C_4 = \delta(\beta + 2\xi^c + 2\xi^d) \\ C_5 = 1 - 15\beta - 60\xi^d \\ C_6 = \delta(\beta + 2\xi^c + 8\xi^d). \end{array} \right. \quad (21)$$

L'opérateur linéaire  $\lambda$  vaut :

$$\lambda = -c \left( \frac{\partial}{\partial x} + C_3 \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + C_4 \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + C_5 \frac{\Delta x^4}{120} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + C_6 \frac{\Delta x^5}{24} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^6) \quad (22)$$

En conséquence, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_3 \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + C_4 \frac{\Delta x^3}{2} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \left( \frac{C_5}{10} + \frac{C_3^2}{6} \right) \frac{\Delta x^4}{6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^5) \\ \lambda^3 = -c^3 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} + C_3 \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + C_4 \frac{3\Delta x^3}{4} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^4) \\ \lambda^4 = c^4 \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + C_3 \frac{2\Delta x^2}{3} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^3) \\ \lambda^5 = -c^5 \left( \frac{\partial^5}{\partial x^5} \right) + O(\Delta x^2) \\ \lambda^6 = c^6 \left( \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^2). \end{array} \right. \quad (23)$$

L'expression de  $\lambda$  détermine l'approximation spatiale du flux convectif  $(f(u))_x$ . En faisant un développement de Taylor de  $u^{n+1}$  dans le membre de gauche de l'expression (13), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial t^5} + \frac{\Delta t^5}{720} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + O(\Delta t^6) = \\ -c \left( \frac{\partial u}{\partial x} + C_3 \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + C_4 \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + C_5 \frac{\Delta x^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + C_6 \frac{\Delta x^5}{24} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^6) \\ + c^2 \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_3 \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + C_4 \frac{\Delta x^3}{2} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \left( \frac{C_5}{10} + \frac{C_3^2}{6} \right) \frac{\Delta x^4}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^5) \right) \\ - c^3 \frac{\Delta t^2}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + C_3 \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + C_4 \frac{3\Delta x^3}{4} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^4) \right) \\ + c^4 \frac{\Delta t^3}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + C_3 \frac{2\Delta x^2}{3} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^3) \right) \\ - c^5 \frac{\Delta t^4}{120} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O(\Delta x^2) \right) \\ + c^6 \frac{\Delta t^5}{720} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^2) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

schéma	$\delta$	$\beta$	$\xi^c$	$\xi^d$	ordre
1	1	1/3	0	0	3
2	1	1/3	- 1/6	0	4
3	1	1/3	0	- 1/6	4
4	1	1/3	- 1/10	- 1/15	5
5	0	1/3	0	0	4
6	0	1/3	- 1/10	- 1/15	6

TAB. 1 – *Ordre des schémas en 1D*

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = & \\
& - c C_3 \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
& + \left( - c C_4 \frac{\Delta x^3}{4} + c^2 C_3 \frac{\Delta t \Delta x^2}{6} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
& + \left( - c C_5 \frac{\Delta x^4}{120} + c^2 C_4 \frac{\Delta t \Delta x^3}{4} - c^3 C_3 \frac{\Delta t^2 \Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \\
& + \left( - c C_6 \frac{\Delta x^5}{24} + c^2 \left( \frac{C_5}{10} + \frac{C_3^2}{6} \right) \frac{\Delta t \Delta x^4}{12} - c^3 C_4 \frac{\Delta t^2 \Delta x^3}{8} + c^4 C_3 \frac{\Delta t^3 \Delta x^2}{36} \right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{25}$$

Le schéma construit est donc dans le cas général du second ordre, mais pour certaines valeurs des paramètres  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\xi^c$  et  $\xi^d$  on a un ordre plus élevé (Tab. 1) :

- Pour  $\beta = \frac{1}{3}$ , le coefficient  $C_3$  est nul et le schéma est alors précis à l'ordre 3. Si en plus  $\delta = 0$ , alors on a aussi  $C_4 = 0$  et le schéma est d'ordre 4. On remarque que pour  $\delta = 0$ , le coefficient  $C_6$  est également nul. On peut en fait montrer que si on prend  $\delta$  nul, tous les coefficients devant les dérivées paires sont nuls ; le schéma n'a donc plus de terme de dissipation.
- Pour  $\beta = \frac{1}{3}$ , si en plus  $\xi^c + \xi^d = -\frac{1}{6}$  alors  $C_4 = 0$ ; le schéma est d'ordre 4 avec une erreur de dispersion égale à  $-c(1 - 15\beta - 60\xi^d) \frac{\Delta x^4}{120}$ . En particulier, on a :

Si  $\xi^c = -\frac{1}{6}$  et  $\xi^d = 0$ , alors le schéma a un terme de dispersion égal à  $c \frac{\Delta x^4}{30}$  et n'a plus de terme de dissipation jusqu'à l'ordre 6, ce qui rend le schéma instable et peu utilisable.

Si  $\xi^c = 0$  et  $\xi^d = -\frac{1}{6}$ , alors le schéma a un terme de dispersion égal à  $-c \frac{\Delta x^4}{20}$  et une dissipation sixième égale à  $c \frac{\Delta x^5}{24}$ .

- Les coefficients  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  sont simultanément nuls pour  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $\xi^c = -\frac{1}{10}$  et  $\xi^d = -\frac{1}{15}$  indépendamment de la valeur de  $\delta$ , ce qui rend le schéma d'ordre 5. Le schéma est alors dissipatif à l'ordre 6 avec une erreur égale à  $c \frac{\Delta x^5}{60}$ . Si  $\delta = 0$ , le schéma est alors d'ordre 6.

La partie suivante est consacrée à l'analyse d'une classe de schémas mixtes qui combinent la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

### 2.3.2 Une méthode mixte éléments finis/volumes finis

La méthode des éléments finis est introduite par l'utilisation d'une matrice de masse  $M$  des éléments finis P1 dans la résolution de  $U_t + \Psi(U) = 0$ . On conserve la méthode des volumes finis pour l'approximation des flux convectifs. On considère le système suivant :

$$M U_t + \Psi(U) = 0. \tag{26}$$

On résout ce système différentiel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre  $N = 6$  :

$$\begin{cases} U^{(0)} &= U^n \\ M U^{(k)} &= M U^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-k} \Psi(U^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N \\ U^{n+1} &= U^{(6)}. \end{cases} \quad (27)$$

On a donc à résoudre un système linéaire à chaque pas de Runge-Kutta :

$$M F(U^{(k)}) = \Psi(U^{(k)}). \quad (28)$$

Dans le cas linéaire, on peut écrire :  $\Psi = -AU$ . On en déduit :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = (N + \frac{\Delta t}{2} N^2 + \frac{\Delta t^2}{6} N^3 + \frac{\Delta t^3}{24} N^4 + \frac{\Delta t^4}{120} N^5 + \frac{\Delta t^5}{720} N^6) U^n \quad (29)$$

où  $N = M^{-1}A$ . La matrice  $M$  est la matrice de masse consistante des éléments finis  $P1$ . En 1D, elle s'écrit :

$$(M U)_j = \frac{U_{j-1} + 4U_j + U_{j+1}}{6} = U_j + \frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{6}. \quad (30)$$

On s'intéresse aux modifications apportées par la matrice de masse  $M$  à l'équation équivalente, en particulier aux termes d'erreur d'ordre supérieur ou égal à 4. Pour cela, on associe à la matrice de masse  $M$  l'opérateur suivant :

$$\delta_M = I + \frac{1}{6} \left\{ \Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^6}{360} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right\} + O(\Delta x^8) \quad (31)$$

$I$  désigne l'opérateur identité. On cherche à identifier l'opérateur  $\delta_N = \delta_{M^{-1}A}$  qu'on écrit :

$$\delta_N = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \Delta x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_3 \Delta x^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + a_4 \Delta x^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_5 \Delta x^4 \frac{\partial^5}{\partial x^5} + a_6 \Delta x^5 \frac{\partial^6}{\partial x^6} + O(\Delta x^6)$$

sachant qu'on a :  $\delta_A = \delta_M \delta_{M^{-1}} \delta_A = \delta_M \delta_N$ . Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{cases} a_1 &= -c \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= c \frac{(1 - C_3)}{6} \\ a_4 &= -c \frac{C_4}{4} \\ a_5 &= c \frac{(-5 - 3C_5 + 10C_3)}{360} \\ a_6 &= c \frac{(C_4 - C_6)}{24}. \end{cases} \quad (32)$$

Finalement, on obtient l'expression suivante pour l'opérateur linéaire  $\lambda$  avec matrice de masse :

$$\lambda = -c \left( \frac{\partial}{\partial x} + C_3^M \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + C_4^M \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + C_5^M \frac{\Delta x^4}{360} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + C_6^M \frac{\Delta x^5}{4} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^6) \quad (33)$$

où les coefficients  $C_i^M$  sont égaux à :

$$\begin{cases} C_3^M &= -\beta \\ C_4^M &= \delta (\beta + 2\xi^c + 2\xi^d) \\ C_5^M &= -(2 + 15\beta + 180\xi^d) \\ C_6^M &= \delta \xi^d. \end{cases} \quad (34)$$

Le schéma avec matrice de masse apporte les variations suivantes (Tab. 2) :

- Pour  $\beta = 0$ , le coefficient  $C_3^M$  est nul et le schéma est alors précis à l'ordre 3. Si en plus  $\delta = 0$ , alors on a aussi  $C_4^M = 0$  et le schéma est d'ordre 4.
- Si  $\xi^c = -\xi^d$  avec  $\beta = 0$  alors le coefficient  $C_4^M = 0$ ; le schéma est précis à l'ordre 4 et le terme de dispersion cinquième est égal à  $c(1 + 90\xi^d) \frac{\Delta x^4}{180}$ .

schéma	$\delta$	$\beta$	$\xi^c$	$\xi^d$	ordre
1	1	0	Indéterminé	Indéterminé	3
2	0	0	Indéterminé	Indéterminé	4
3	1	0	$-\xi^d$	Indéterminé	4
4	1	0	1/90	- 1/90	5
5	0	0	1/90	- 1/90	6

TAB. 2 – *Ordre des schémas en 1D avec matrice de masse*

- on a  $C_5^M = 0$  pour  $\xi^d = -\frac{1}{90}$ . Si  $\beta = 0$  et  $\xi^c = -\xi^d = \frac{1}{90}$ , alors le schéma n'a plus de terme de dissipation et de dispersion jusqu'à l'ordre 5; il est donc précis à l'ordre 5 avec une erreur de dissipation égale à  $c \frac{\Delta x^5}{360}$ . Si en plus  $\delta = 0$  alors le schéma est d'ordre 6.

### Schémas à matrice de masse modifiée

On a vu les effets de la matrice de masse sur l'erreur de dissipation à l'ordre 4. Il est possible aussi d'enlever la dissipation à l'ordre 6. Pour cela, on doit remplacer la matrice de masse  $M$  dans (26) par la matrice  $P$  définie par :

$$P = (1 - \omega) D + \omega M \quad (35)$$

où l'on a noté :  $D = \text{diag}(d_{ii})$  avec  $d_{ii} = \sum_j m_{ij}$ . On associe à la matrice  $P$  l'opérateur :

$$\delta_P = I + \frac{\omega}{6} \left\{ \Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^6}{360} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right\} + O(\Delta x^8) \quad (36)$$

Comme dans l'étude du schéma avec matrice de masse, on cherche à identifier l'opérateur  $\delta_N = \delta_{P^{-1}A}$  tel que  $\delta_A = \delta_P \delta_N$ . L'opérateur  $\lambda$  pour le schéma avec matrice de masse modifiée est égal à :

$$\lambda = -c \left( \frac{\partial}{\partial x} + C_3^P \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + C_4^P \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + C_5^P \frac{\Delta x^4}{360} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + C_6^P \frac{\Delta x^5}{24} \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) + O(\Delta x^6) \quad (37)$$

où les coefficients  $C_i^P$  sont égaux à :

$$\begin{cases} C_3^P &= 1 - \omega - 3\beta \\ C_4^P &= \delta(\beta + 2\xi^c + 2\xi^d) \\ C_5^P &= 3 - 45\beta - 180\xi^d - 15\theta + 10\theta^2 + 30\omega\beta \\ C_6^P &= \delta[(\beta + 2\xi^c)(1 - \omega) + 2\xi^d(4 - \omega)]. \end{cases} \quad (38)$$

Le schéma construit permet d'obtenir un schéma précis à l'ordre 6. En effet, les coefficients  $C_3^P$ ,  $C_4^P$ ,  $C_5^P$  et  $C_6^P$  sont simultanément nuls pour les valeurs des paramètres suivantes :  $\delta = 1, \omega = 0, \beta = 1/3, \xi^c = -1/10$  et  $\xi^d = -1/15$ . L'erreur principale de troncature est alors une dispersion à l'ordre 7.

### 2.3.3 Etude de stabilité

L'étude de stabilité est réalisée grâce à l'analyse de von Neumann. On injecte dans l'expression (19) un mode de Fourier :  $\hat{u}_j^n = \bar{u}_k e^{ij\theta_k}$  où  $\theta_k$  est le paramètre de fréquence. Il vient,

$$(\hat{\Psi}^\delta)_j^n = \frac{c}{2\Delta x} \{ R_3 \cos(3\theta) + R_2 \cos(2\theta) + R_1 \cos(\theta) + R_0 \\ + i [ I_3 \sin(3\theta) + I_2 \sin(2\theta) + I_1 \sin(\theta) ] \} \hat{u}_j^n \quad (39)$$

avec

$$\begin{cases} R_3 &= \delta \xi^d \\ R_2 &= \delta(\beta + 2\xi^c - 4\xi^d) \\ R_1 &= \delta(-4\beta - 8\xi^c + 7\xi^d) \\ R_0 &= \delta(3\beta + 6\xi^c - 4\xi^d) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_3 &= -\xi^d \\ I_2 &= -\beta + 4\xi^d \\ I_1 &= 2\beta + 2 - 5\xi^d. \end{cases} \quad (40)$$

Puisque  $(\hat{\Psi}^\delta)_j^n = -\lambda_\theta \hat{u}_j^n$ , on a :

$$\lambda_\theta = -\frac{c}{2\Delta x} \{ R_3 \cos(3\theta) + R_2 \cos(2\theta) + R_1 \cos(\theta) + R_0 \\ + i [ I_3 \sin(3\theta) + I_2 \sin(2\theta) + I_1 \sin(\theta) ] \}. \quad (41)$$

Le facteur d'amplification est alors donné par :

$$G_\theta = g(z_\theta), \quad z_\theta = \lambda_\theta \Delta t \quad (42)$$

où  $g$  est le polynôme caractéristique de la méthode de Runge Kutta 6 :

$$g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720}. \quad (43)$$

On introduit le nombre de Courant :  $\nu = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$ . Finalement, on peut écrire :

$$\begin{cases} z_\theta &= -\frac{\nu}{2} (z_\theta^R + i z_\theta^I) \\ z_\theta^R &= R_3 \cos(3\theta) + R_2 \cos(2\theta) + R_1 \cos(\theta) + R_0 \\ z_\theta^I &= I_3 \sin(3\theta) + I_2 \sin(2\theta) + I_1 \sin(\theta). \end{cases} \quad (44)$$

### Schémas à matrice de masse

On considère l'intégration en temps du système  $MU_t = AU$  où  $A$  représente la matrice d'approximation spatiale et  $M$  la matrice de masse des éléments finis  $P1$ . En portant un mode de Fourier dans l'expression ci-dessus, on peut écrire :

$$m_\theta \frac{d\hat{u}_j^n}{dt} = \lambda_\theta \hat{u}_j^n. \quad (45)$$

Le facteur d'amplification se met alors sous la forme :  $G_\theta = G_\theta(z_\theta^M)$  avec  $z_\theta^M = \frac{z_\theta}{m_\theta}$ ,  $z_\theta$  étant donné par (44).

On rappelle que la matrice des éléments finis  $P1$  est une matrice tridiagonale égale à  $M = Tridiag(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6})$  et on obtient donc :

$$m_\theta = \frac{1}{3} (2 + \cos(\theta)). \quad (46)$$

Finalement, à partir de (44), on obtient :

$$\begin{cases} z_\theta^M &= -\frac{3\nu}{2(2+\cos(\theta))} (z_\theta^R + i z_\theta^I) \\ z_\theta^R &= R_3 \cos(3\theta) + R_2 \cos(2\theta) + R_1 \cos(\theta) + R_0 \\ z_\theta^I &= I_3 \sin(3\theta) + I_2 \sin(2\theta) + I_1 \sin(\theta). \end{cases} \quad (47)$$

### Schémas à matrice de masse modifiée

Dans le cas du schéma avec matrice de masse modifiée ( $P = (1 - \omega)D + \omega M$ ), on a :  $G_\theta = G_\theta(z_\theta^P)$  et  $z_\theta^P = \frac{z_\theta}{p_\theta}$  avec

$$p_\theta = \frac{3 + \omega (\cos(\theta) - 1)}{3}. \quad (48)$$

On en déduit :

$$z_\theta^P = -\frac{3\nu}{6 + 2\omega (\cos(\theta) - 1)} (z_\theta^R + i z_\theta^I). \quad (49)$$

On remarque que pour  $\omega = 0$  (schéma d'ordre 6),  $p_\theta = 1$ ; l'étude de stabilité de ce schéma est identique à celle du schéma 4 sans matrice de masse.

Les figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 illustrent l'étude de stabilité. On visualise d'abord pour différentes valeurs des paramètres la courbe de stabilité du schéma avec et sans matrice de masse (Figures 1 et 2) représentée par la fonction :

$$g(\nu) = \max_{\theta \in [0, \pi]} |G_\theta| \quad (50)$$

On détermine ainsi la stabilité limite,  $\nu_{max}$  qui est le nombre de Courant maximum pour lequel le critère de stabilité est vérifié :

$$g(\nu) \leq 1 \quad (51)$$

Cas	$\delta$	$\beta$	$\xi^c$	$\xi^d$	$\nu_{\max}$	ordre
1	1	1/3	0	0	<b>2.310</b>	3
2	1	1/3	- 1/6	0	<b>0.263</b>	4
3	1	1/3	0	- 1/6	<b>1.332</b>	4
4	1	1/3	- 1/10	- 1/15	<b>1.867</b>	5
5	0	1/3	0	0	<b>0.263</b>	4
6	0	1/3	0	- 1/15	<b>0.228</b>	6

TAB. 3 – Schémas sans matrice de masse

Cas	$\delta$	$\beta$	$\xi^c$	$\xi^d$	$\nu_{\max}$	ordre
1	1	0	0	0	<b>0.303</b>	4
2	0	0	0	0	<b>0.303</b>	4
3	1	0	1/90	- 1/90	<b>1.431</b>	5
4	0	0	1/90	- 1/90	<b>0.188</b>	6

TAB. 4 – Schémas avec matrice de masse

On a comparé les  $\nu_{max}$  pour plusieurs valeurs des paramètres du schéma; on a obtenu les résultats suivants (voir Tab. 3 et Tab. 4): Les valeurs des  $\nu_{max}$  obtenues montrent que les valeurs des paramètres utilisés dans les cas 1, 3 et 4 donnent un schéma sans matrice de masse plus efficace et robuste. Si on utilise le schéma avec matrice de masse, seul le schéma 3 permet de prendre des pas de temps pas trop petits. Ensuite sur la Figure 3, on montre le domaine de stabilité de la méthode de Runge Kutta 6, c'est à dire le lieu des nombres  $z$  tels que  $|G(z)| \leq 1$ . Enfin pour chacun des cas 1, 3 et 4 du schéma sans matrice de masse et cas 1 et 3 du schéma avec matrice de masse, on s'est intéressé au comportement du facteur d'amplification en fonction de la fréquence  $\theta$  pour les valeurs  $\nu = 1$  et  $\nu = \nu_{max}$  valeur maximale du nombre de Courant pour laquelle le schéma est stable et on représente aussi le spectre d'approximation associé à l'opérateur de discrétisation spatiale (Figures 4, 5, 6, 7 et 8).

Finalement, les versions intéressantes du nouveau schéma sont obtenues pour  $\delta = 1$ ,  $\beta = 1/3$ ,  $\xi^c = 0$ ,  $\xi^d = -1/6$  et  $\delta = 1$ ,  $\beta = 1/3$ ,  $\xi^c = -1/10$ ,  $\xi^d = -1/15$ ; si on rajoute la matrice de masse, il faut choisir  $\delta = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\xi^c = 1/90$ ,  $\xi^d = -1/90$ .

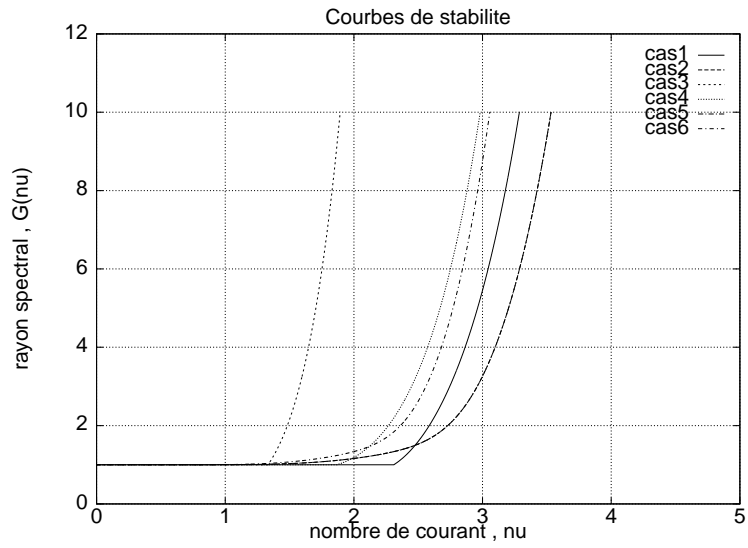


FIG. 1 – Courbes de stabilité du schéma sans matrice de masse

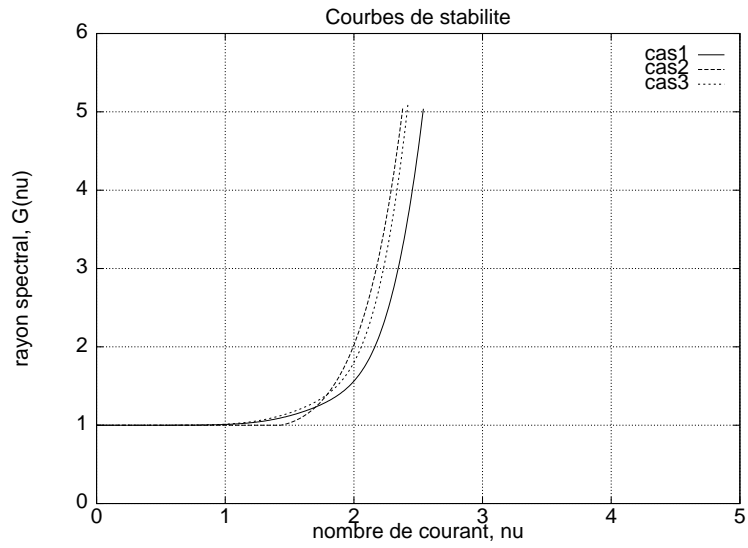


FIG. 2 – Courbes de stabilité du schéma avec matrice de masse

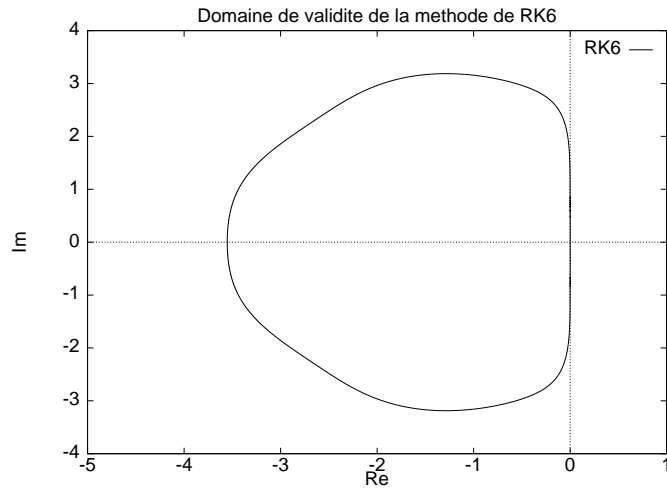


FIG. 3 – Domaine de stabilité de la méthode de Runge-Kutta 6

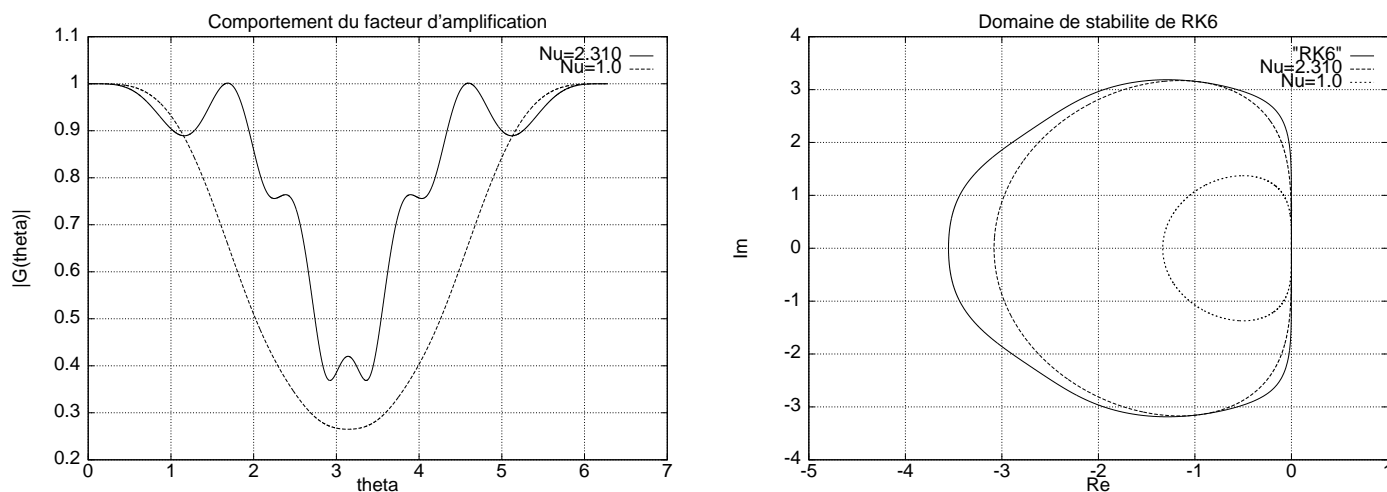


FIG. 4 – Cas 1: schéma d'ordre (3) sans matrice de masse avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=0$

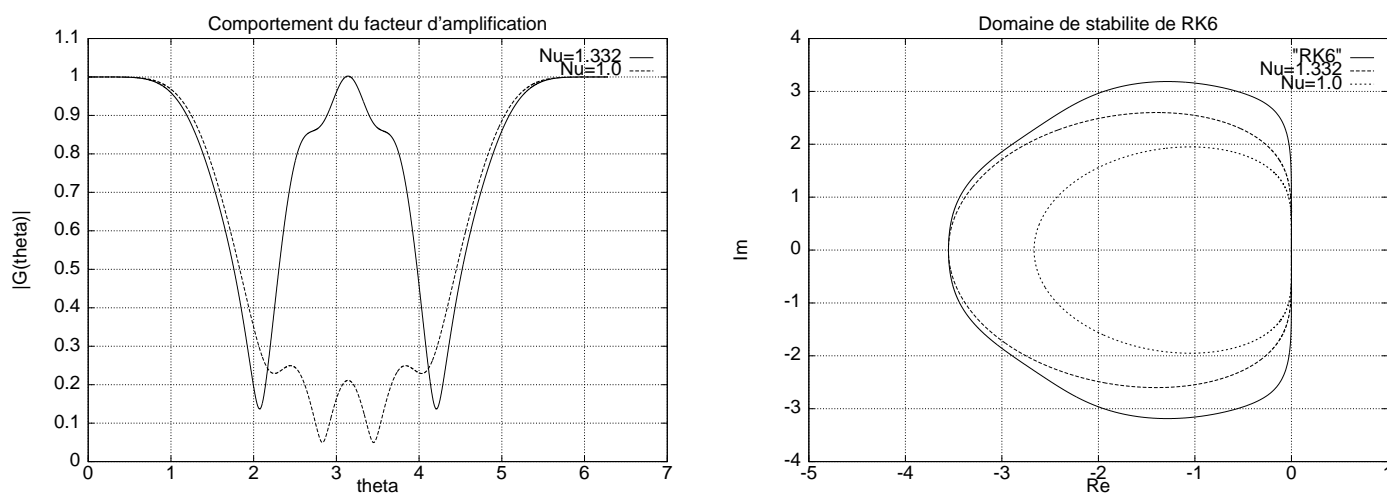


FIG. 5 – Cas 3: schéma d'ordre (4) sans matrice de masse avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=-1/6$

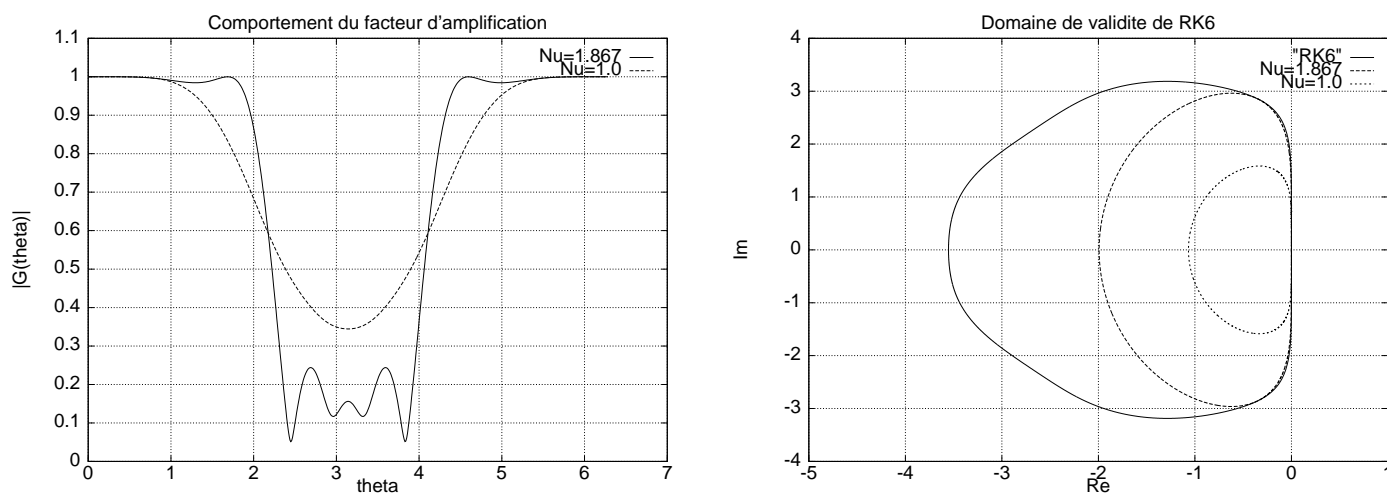


FIG. 6 – Cas 3: schéma d'ordre (5) sans matrice de masse avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=-1/10$  et  $\xi^d=-1/15$



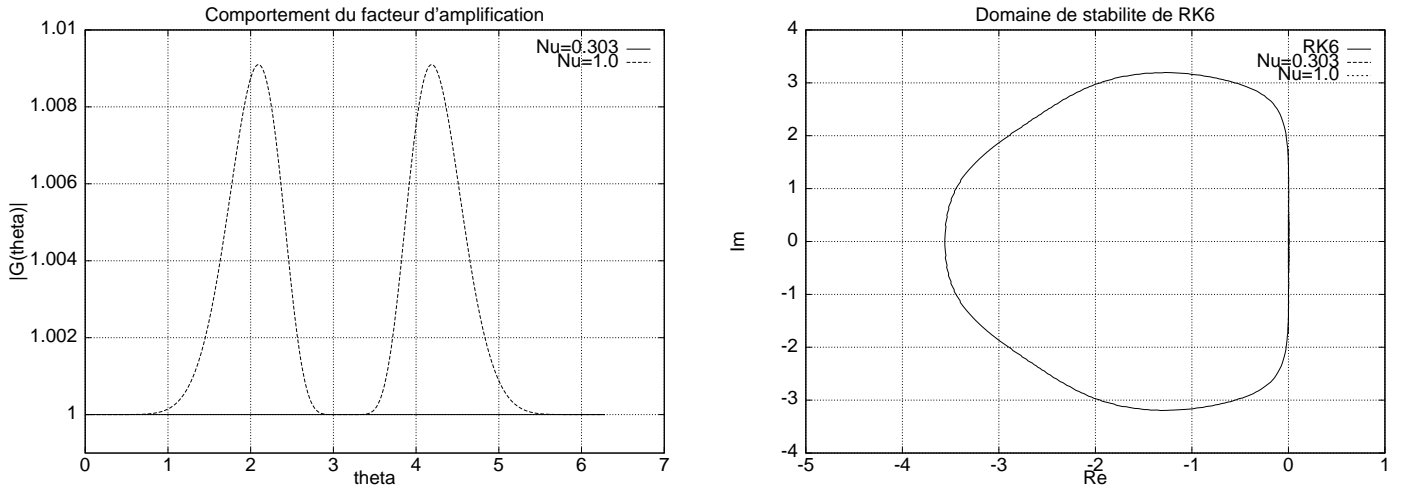


FIG. 7 – Cas 1: schéma d'ordre (4) avec matrice de masse avec  $\delta=1$ ,  $\beta=0$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=0$

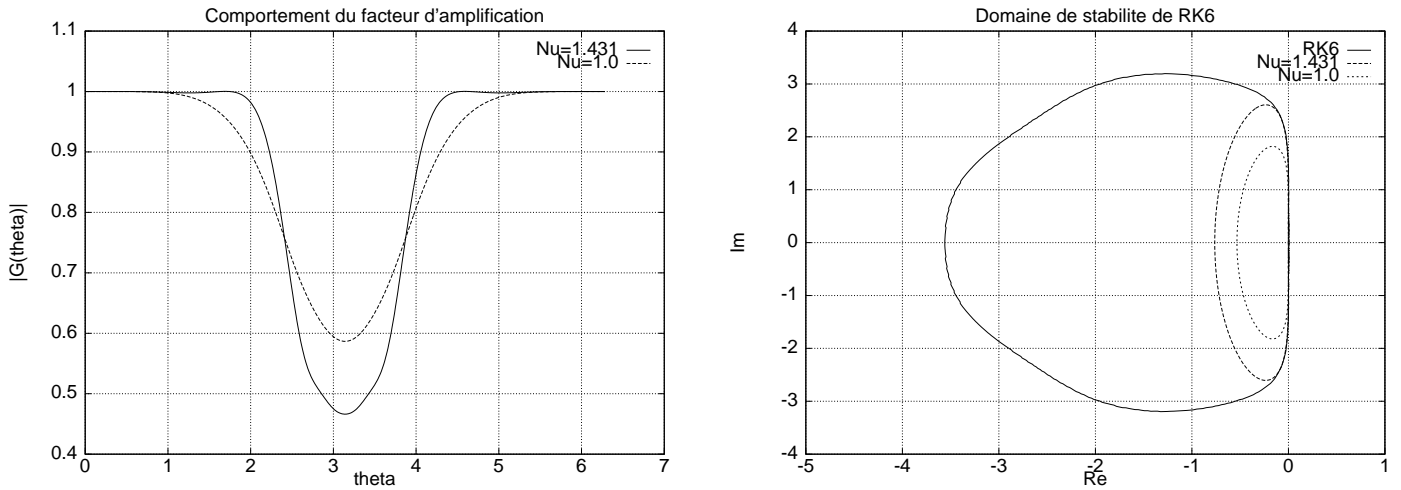


FIG. 8 – Cas 3: schéma d'ordre (5) avec matrice de masse avec  $\delta=1$ ,  $\beta=0$ ,  $\xi^c=1/90$  et  $\xi^d=-1/90$

Cas	$\beta$	$\xi^c$	$\xi^d$	$f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$	$f_{max}$
1	0	0	0	$(1/2) \sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$	1
2	1	0	0	$(1/2) \sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$	1
3	1/2	0	0	$(1/2) \sqrt{1 - \cos(\theta)^2}$	1/2
4	1/3	0	0	$(1/6) \sqrt{-8 \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\theta) + 10}$	0.5303
5	1/3	-1/6	0	$(1/6) \sqrt{2 \cos(\theta)^3 - 2 \cos(\theta)^2 - 20 \cos(\theta) + 20}$	1
6	1/3	0	-1/6	$(1/6) \sqrt{6 \cos(\theta)^3 - 14 \cos(\theta)^2 - 8 \cos(\theta) + 16}$	0.6878
7	1/3	-1/10	-1/15	$(1/30) \sqrt{-24 \cos(\theta)^4 + 186 \cos(\theta)^3 - 314 \cos(\theta)^2 - 284 \cos(\theta) + 436}$	0.7368

TAB. 5 – *Discrétisation implicite : étude des fonctions  $f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$  donnant le taux de convergence vers le stationnaire à grands pas de temps*

## 2.4 Discrétisation temporelle implicite

On se propose de faire une analyse de la convergence des schémas construits en implicite. Pour cela, comme précédemment, on utilise l'analyse de Fourier. Les calculs sont réalisés sur l'équation d'advection scalaire linéaire. On peut écrire le schéma implicite sous la forme d'un  $\delta$ -schéma :

$$T^n \delta U^{n+1} = \Delta t^n \Psi(U^n) \quad (52)$$

où l'on note  $\delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$  et  $T^n$  la matrice implicite.

Dans le cas du schéma de Steger-Warming (schéma implicite d'ordre 1),  $T^n$  est la matrice tridiagonale suivante ( $c > 0$ ) :

$$T^n = \text{Tridiag}(-\nu, 1 + \nu, 0) \quad (53)$$

Par l'analyse de Fourier, on obtient :

$$t_\theta = 1 + \nu(1 - \cos(\theta)) + i\nu \sin(\theta) \quad (54)$$

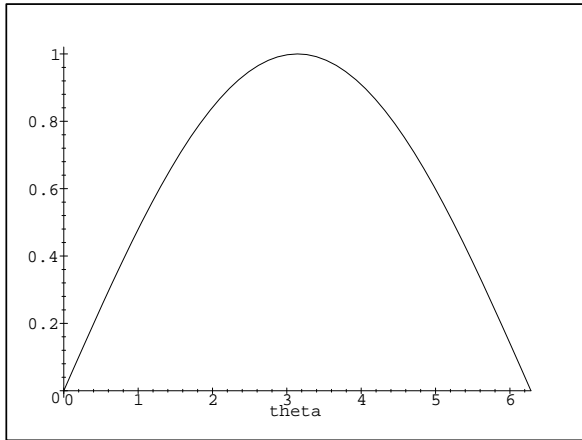
Le facteur d'amplification est alors égal à :

$$G(\Delta t) = \frac{t_\theta + z_\theta}{t_\theta} \quad (55)$$

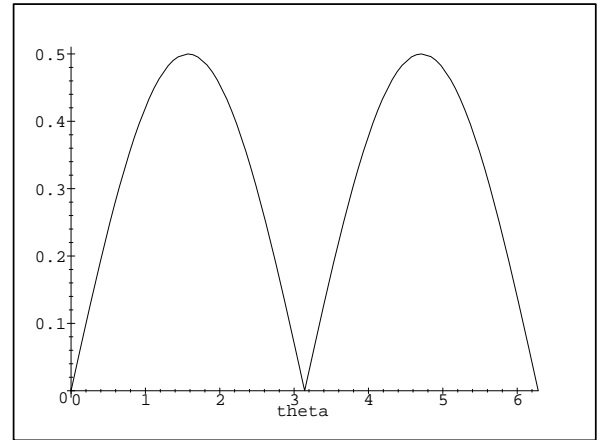
### Etude sur les grands pas de temps

On s'intéresse en particulier au comportement du facteur d'amplification lorsqu'on fait tendre le pas de temps  $\Delta t$  vers  $+\infty$  de façon à savoir si les schémas construits sont préconditionnables à l'ordre 1 avec des facteurs de convergence satisfaisants.

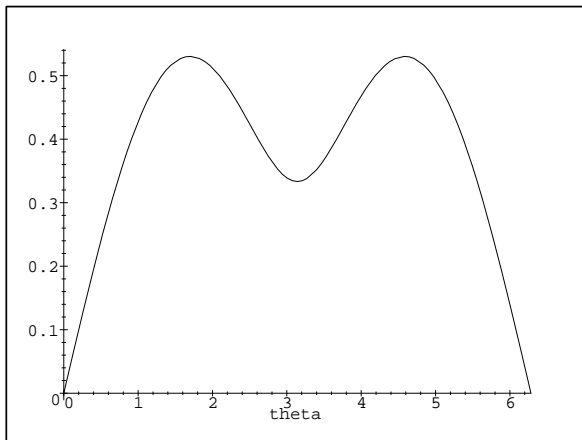
On note  $\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} G(\Delta t) = f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$  et on cherche pour les différents schémas les modes de Fourier qui maximisent les fonctions  $f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$ . Les résultats sont rassemblés dans le tableau (5); sur la Figure 9, on représente les courbes  $f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$ . Les résultats obtenus Figure 10 montrent que les schémas sont inconditionnellement stables. On remarque que  $\beta = 1/2$  est la valeur optimale qui minimise la fonction  $f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$ . Parmi les nouveaux schémas construits, seul le cas 5 ( $\beta = 1/3, \xi^c = -(1/6)$  et  $\xi^d = 0$ ) ne permet pas l'utilisation optimale de grands pas de temps. Pour les cas 6 et 7, la valeur de  $\max_\theta \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} G(\Delta t) \right|$  est égale respectivement à 0.6878 et 0.7368.



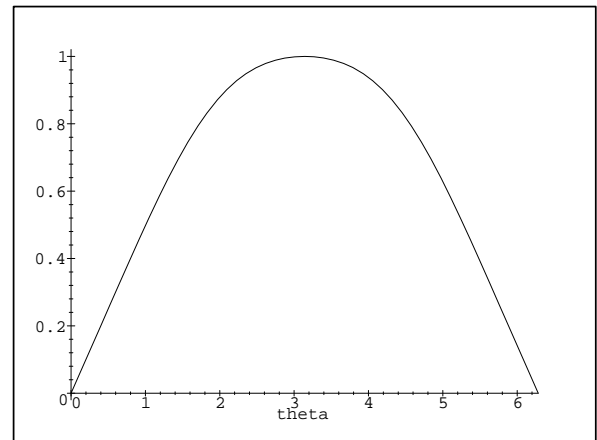
$$\beta \in \{0, 1\}, \xi^c = 0 \text{ et } \xi^d = 0$$



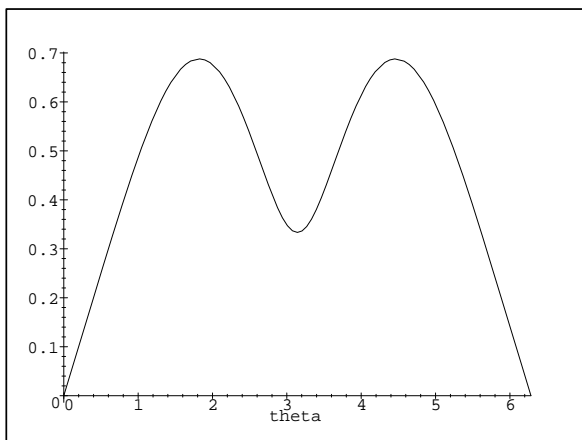
$$\beta = 1/2, \xi^c = 0 \text{ et } \xi^d = 0$$



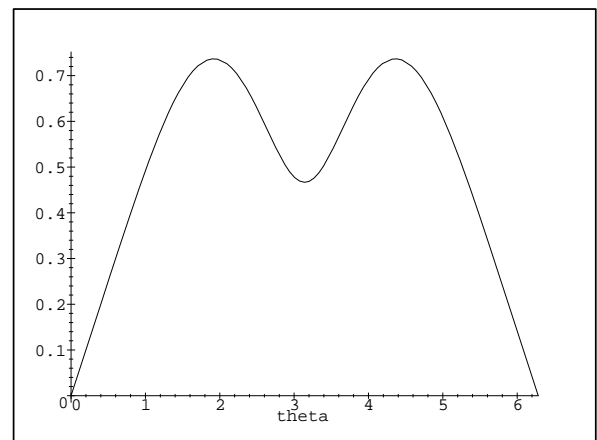
$$\beta = 1/3, \xi^c = 0 \text{ et } \xi^d = 0$$



$$\beta = 1/3, \xi^c = -(1/6) \text{ et } \xi^d = 0$$



$$\beta = 1/3, \xi^c = 0 \text{ et } \xi^d = -(1/6)$$



$$\beta = 1/3, \xi^c = -(1/10) \text{ et } \xi^d = -(1/15)$$

FIG. 9 – Représentation des fonctions  $f_\theta(\beta, \xi^c, \xi^d)$  pour les différents schémas en implicite

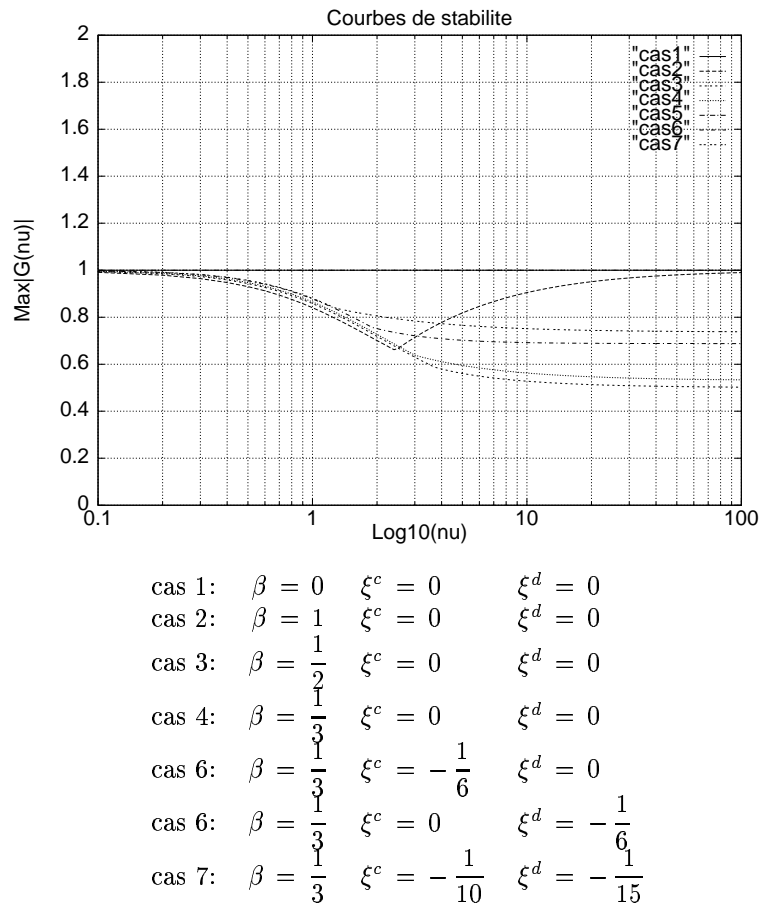


FIG. 10 – Analyse de stabilité des schémas en implicite

## 2.5 Résultats numériques en explicite

Pour illustrer les propriétés du schéma explicite, on résout numériquement le problème (1). Plusieurs solutions initiales ont été testées :

1. problème d'advection d'une vague sinusoïdale :

$$\begin{cases} x \in [0, 1] , t \in [0, T] \\ u_0(x) = u(x, t = 0) = \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (56)$$

2. problème d'advection d'une fonction discontinue :

$$\begin{cases} x \in [0, 1] , t \in [0, T] \\ u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - \frac{1}{2}| \leq 0.2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (57)$$

Les solutions exactes  $u_{exact}$  de ces problèmes sont obtenues par propagation à la vitesse  $c$  de la condition initiale :

$$u_{exact}(x, t) = u_0(x - ct) \quad (58)$$

On compare sur les figures (11),(12) et (13) les solutions exactes et approchées pour chacun des schémas sans matrice de masse 1,3 et 4 à l'instant  $T = 1$  ; on calcule aussi la valeur en norme  $L^2$  de l'erreur :

$$E_{l2} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=N} (u_j^n - u_{exact}(j\Delta x, n\Delta t))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

L'intervalle  $[0..1]$  a été discrétisé en 100 sous-intervalles ( $\Delta x = 0.01$ ). D'autre part, on a imposé  $c=1$ . et on a choisi le nombre de CFL égal à 1. On s'est enfin intéressé au comportement de l'erreur en fonction du pas de discrétisation spatiale. Sur les figures (14), (15) et (16), on représente pour chacun des problèmes, advection d'une fonction sinusoïdale et advection d'une fonction discontinue la distribution de l'erreur  $E_{l2}$ , calculée à l'instant  $T = 1$  s en fonction du nombre d'intervalles  $N$  utilisés pour la discrétisation du segment  $[0..1]$ . Dans le cas du problème de l'advection de la fonction sinusoïdale, qui est une fonction régulière, les résultats montrent que les différentes valeurs des paramètres du schéma utilisés dans les cas 1, 3 et 4 conduisent bien à l'obtention d'un schéma précis respectivement à l'ordre 2.99, 4 et 4.98. Pour une fonction discontinue, la précision observée est bien sûr limitée à l'ordre 1.

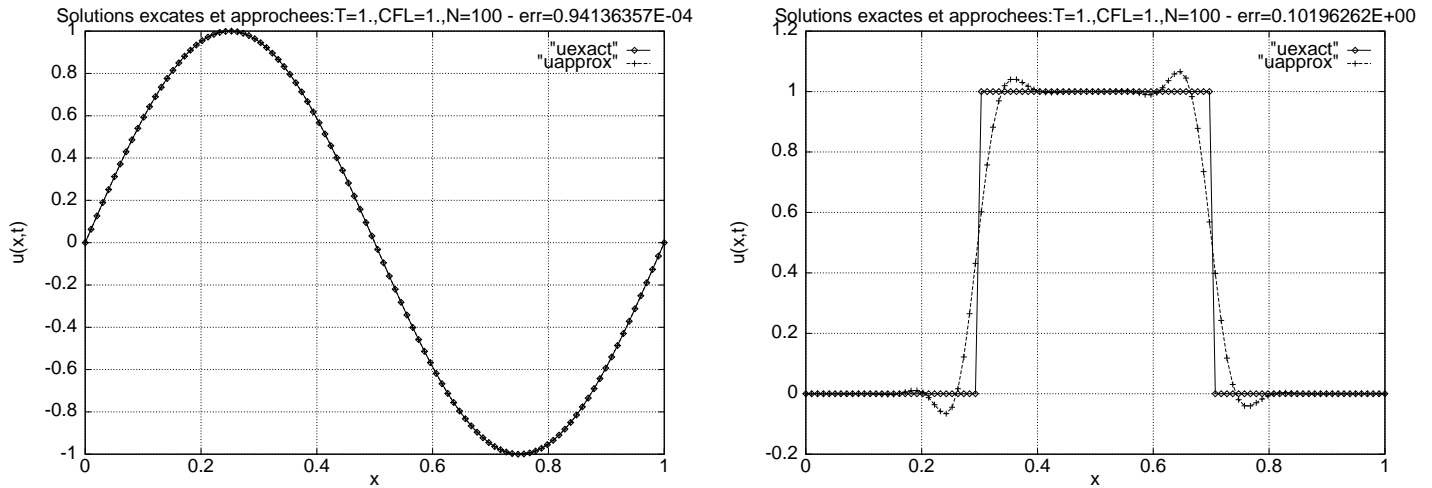


FIG. 11 – Cas 1: schéma sans matrice de masse d'ordre (3) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=0$

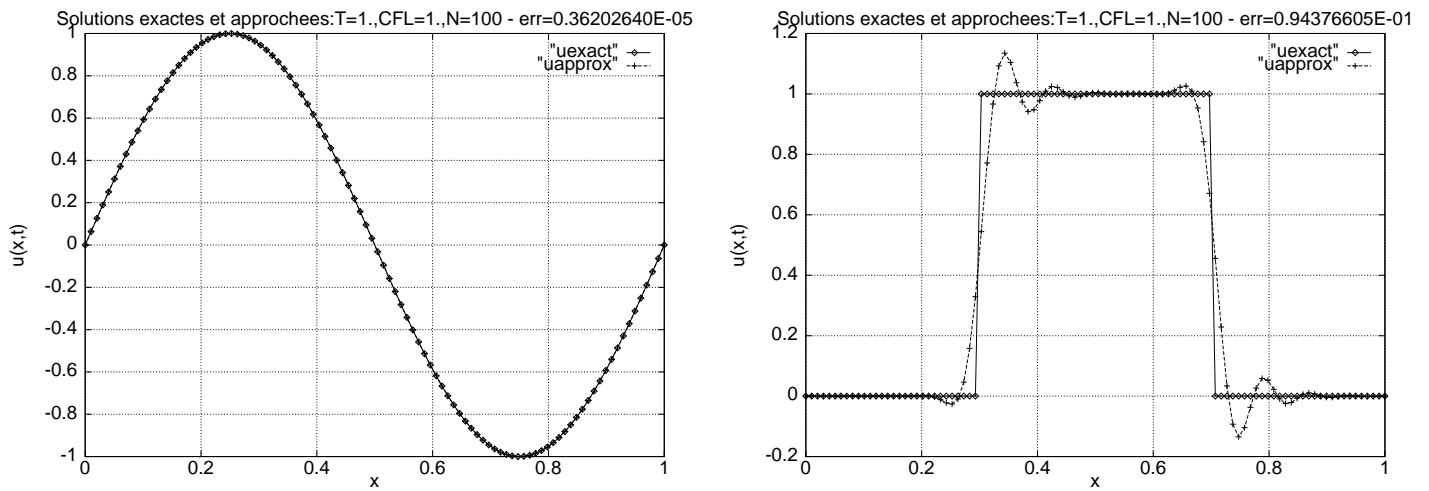


FIG. 12 – Cas 3: schéma sans matrice de masse d'ordre (4) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=-1/6$

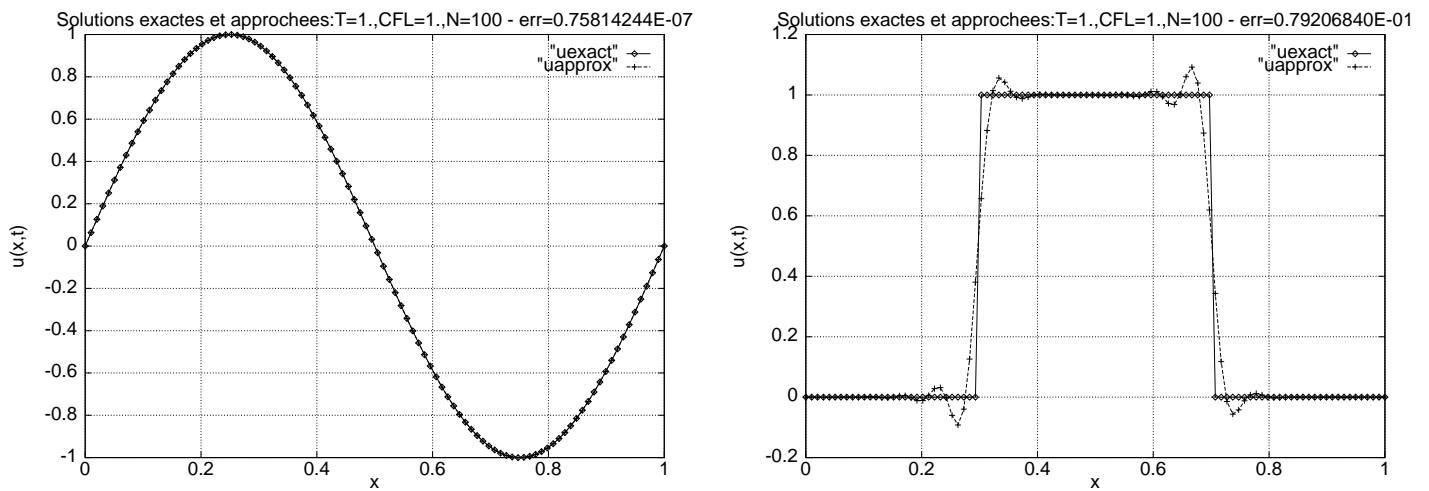


FIG. 13 – Cas 4: schéma sans matrice de masse d'ordre (5) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=-1/10$  et  $\xi^d=-1/15$   
 Comparaison entre solutions exactes et approchées du problème de l'advection d'une vague sinusoïdale et d'une fonction discontinue pour différentes valeurs des paramètres du schéma sans matrice de masse

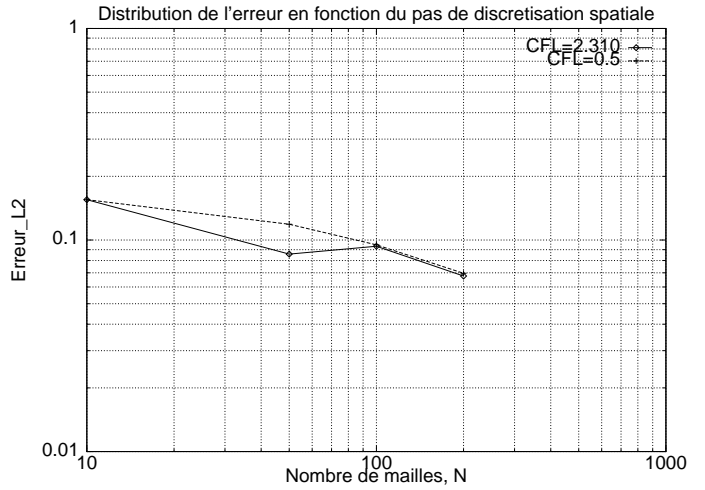
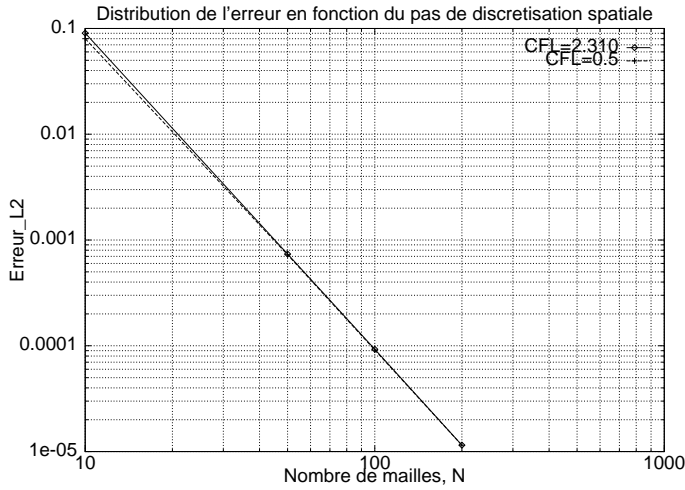


FIG. 14 – Cas 1: schéma sans matrice de masse d'ordre (3) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=0$

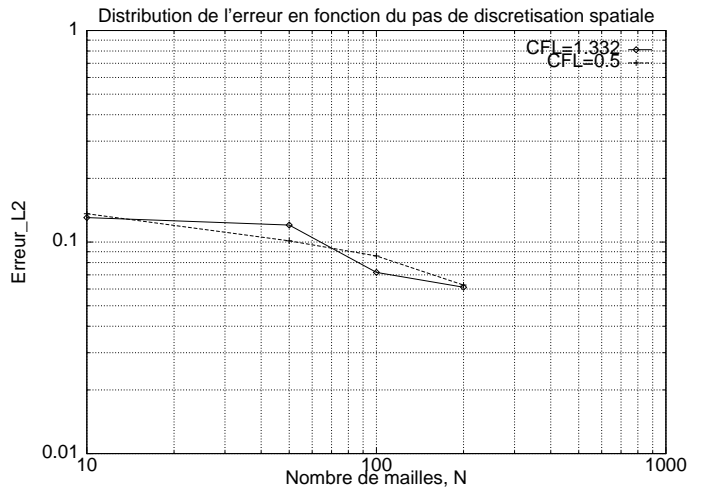
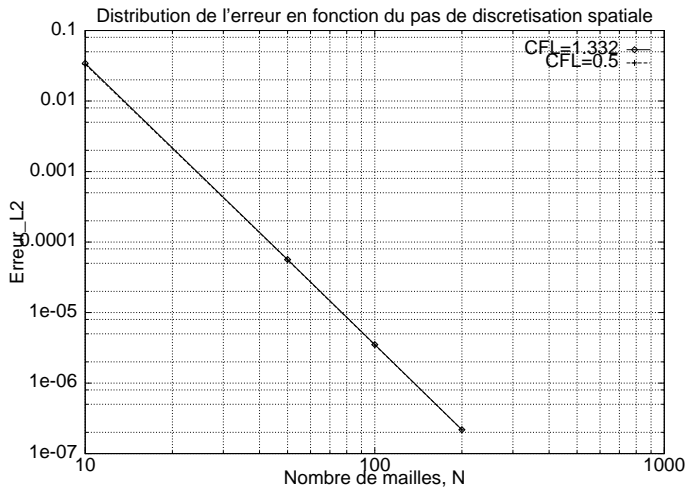


FIG. 15 – Cas 3: schéma sans matrice de masse d'ordre (4) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=0$  et  $\xi^d=-1/6$

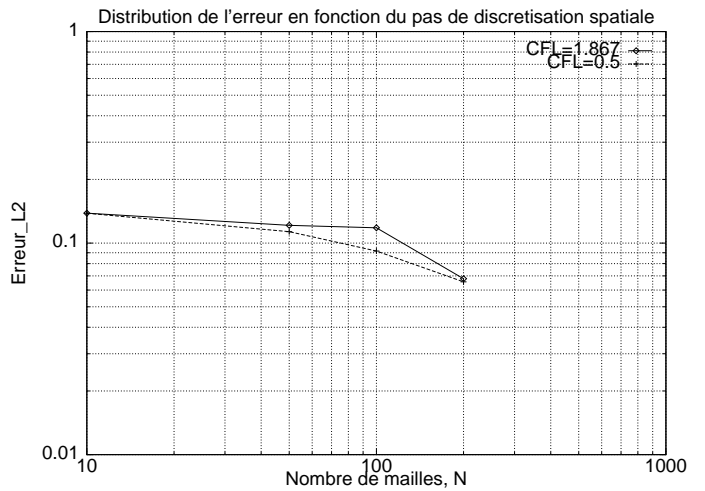
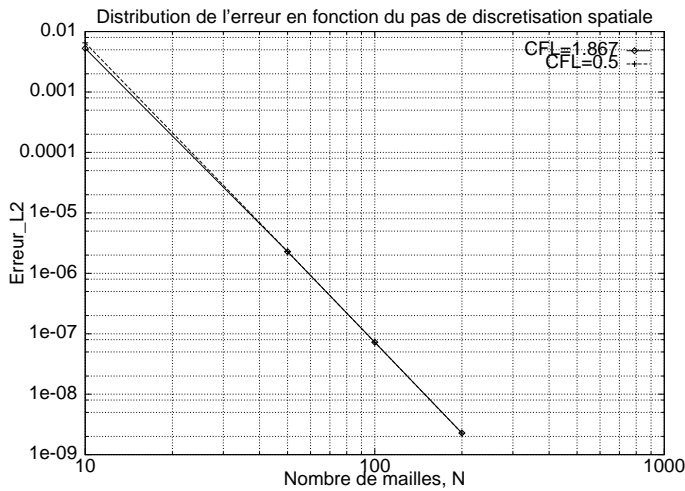


FIG. 16 – Cas 4: schéma sans matrice de masse d'ordre (5) avec  $\delta=1$ ,  $\beta=1/3$ ,  $\xi^c=-1/10$  et  $\xi^d=-1/15$   
 Distribution de l'erreur  $E_{l_2}$ , calculée à  $T = 1$  s en fonction du nombre de mailles  $N$  pour deux valeurs du CFL ( $0.5, \nu_{max}$ ) pour le problème de l'advection d'une fonction sinusoïdale et d'une fonction discontinue