

Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie II: Applications

Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, Bijan Mohammadi, Eric Saltel

▶ **To cite this version:**

Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, Bijan Mohammadi, et al.. Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie II: Applications. [Rapport de recherche] RR-2760, INRIA. 1995. inria-00073932

HAL Id: inria-00073932
https://inria.hal.science/inria-00073932

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie II: Applications

Houman Borouchaki - Paul Louis George
Frédéric Hecht - Patrick Laug - Bijan Mohammadi
Eric Saltel

N° 2760
Décembre 1995

PROGRAMME 6



Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)



Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie II: Applications.

Houman BOROUCHAKI, Paul Louis GEORGE, Frédéric HECHT*, Patrick LAUG, Bijan MOHAMMADI** et Eric SALTEL

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2760 — 19 décembre 1995 — 41 pages

Résumé : Ce papier présente quelques résultats obtenus par une méthode de maillage de type Delaunay dans le cas où cette dernière est gouvernée par une carte de métriques (isotropes ou anisotropes) donnée. Le présent papier constitue la partie II de l'étude, la partie I décrivant les aspects algorithmiques de la méthode de maillage. Des exemples académiques sont donnés puis on montre quelques applications en mécanique des fluides.

Mots-clé : Triangulation de Delaunay, maillage anisotrope, maillage adaptatif, estimation a posteriori.

(Abstract: pto)

*. E-mail: Frederic.Hecht@inria.fr
**. E-mail: Bijan.Mohamadi@inria.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Delaunay Mesh generation governed by metrics specifications. Part 2: Applications.

Abstract: This paper gives some application examples resulting from a governed Delaunay type mesh generation method. Isotropic and anisotropic cases are considered, these specifications being given via a metric map. The paper illustrates part II of a study whose algorithmical aspects are describing in a report refered to as part I. Academic examples as well as examples in C.F.D. are discussed.

Key-words: Delaunay triangulation, anisotropic mesh generation, mesh adaption, a posterori estimation.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Rappel **4**

3 Exemples académiques **5**
3.1 Cas isotrope 7
3.1.1 Exemple 1 7
3.1.2 Exemple 2 11
3.2 Cas anisotrope 16
3.2.1 Exemple 3 16
3.2.2 Exemple 4 21

4 Applications en mécanique des fluides **27**
4.1 Scramjet en régime supersonique 28
4.2 Ecoulement transonique visqueux autour d'un Naca-0012 29
4.3 Ecoulement supersonique visqueux autour d'un Cylindre 29

5 Rapides conclusions **41**

1 Introduction

Nous avons proposé dans [2] une méthode de maillage gouvernée par une carte de métriques. Cette méthode est une extension de la méthode classique de Delaunay au cas où une spécification (traduite par cette carte) est donnée qui doit être suivie par le mailleur de manière à ce que le maillage créé soit "optimal" vis-à-vis d'elle. L'algorithme correspondant a été implanté en langage C et en Fortran 90 par H. Borouchaki (pour la partie maillage du domaine) et P. Laug (pour la partie maillage de la frontière). Le choix de ces langages a permis une manipulation aisée des structures de données.

Pour valider la méthode, dans un premier temps une maquette d'expérimentation est mise en place où les exemples considérés sont de nature académique (section 3), puis la méthode est appliquée à quelques problèmes classiques de mécanique des fluides (section 4). Avant de montrer et de discuter les exemples, nous donnons (section 2) une rapide description de la méthode de maillage dont le détail est donné en [2].

2 Rappel

La méthode de Delaunay classique (i.e. dans un espace euclidien) est étendue au cas où le maillage construit doit être "idéal" vis-à-vis d'une carte de spécifications isotropes ou anisotropes. On montre alors qu'il "suffit" de se plaçer dans un espace riemannien et de généraliser dans ce cadre les différents algorithmes mis en jeu dans le processus de maillage.

Deux points importants ont ainsi été étendus au cas riemannien. Le processus incrémental d'insertion d'un point dans un maillage, ou noyau de Delaunay, et la façon dont les points internes sont construits à l'intérieur du domaine. Ces deux processus étant liés à des calculs de distance, on a montré comment remplacer cette notion par celle de longueur dans l'espace riemannien associé à la carte de métriques donnés.

Le cas où plusieurs métriques sont spécifiées en chaque point nous a amené à définir la notion d'intersection de métriques et à pouvoir appliquer la méthode de maillage de façon à construire un maillage adapté non plus à une métrique mais à un ensemble de métriques (adaptation multicritère).

3 Exemples académiques

Dans cette section, on montre quelques exemples académiques de maillage obtenu. La spécification est donnée sous la forme d'une fonction analytique définie dans R^2. Le processus de création du maillage est itératif. Un maillage classique du domaine est construit (par la méthode classique) aux sommets duquel on calcule la valeur de la fonction donnée. Ce champ discret constitue alors la spécification servant à gouverner le mailleur afin de construire un premier maillage adapté. La finesse plus ou moins grande du maillage initial tout comme la variation plus ou moins rapide de la fonction de spécification font que celle ci est plus ou moins bien captée. Par suite, le premier maillage adapté n'est, en général, pas adapté dans tout le domaine mais uniquement au voisinage des points du maillage précédent. Il est donc nécessaire de boucler sur le processus en affinant la carte de spécifications, le couple (maillage, carte) formant l'*espace de contrôle* de l'itération suivante. Comme on le verra, après quelques itérations, le résultat est stable et la fonction initiale est vérifiée de manière globale (au sens où toutes les longueurs d'arêtes sont égales à un dans l'espace de contrôle et qu'une nouvelle itération ne modifierait pas le résultat, ce qui signifie que la méthode ne pourra pas faire mieux).

On considère quatres exemples et pour chacun d'eux, un ou plusieurs champs *continus* de métriques. Dans les deux premiers, le champ est isotrope tandis que dans les deux derniers il est anisotrope. Pour chaque exemple une boucle (d'adaptation) a été effectuée. A chaque itération, la carte de métriques spécifiée est déduite du champ continu initialement considéré.

Chaque exemple est accompagé d'un tableau indiquant pour chaque itération ni,

- le nombre np de points,
- le nombre nt de triangles,
- le temps cpu t de la génération du maillage (en secondes sur une HP735/99Mhz) et
- la qualité la pire Γ des éléments (entre 0 et 1).

Ce tableau montre aussi les valeurs h_{min} et h_{max} représentant pour tous les points, les tailles minimale et maximale souhaitées indépendamment de la

direction et en plus dans le cas anisotrope, les valeurs r_{min} et r_{max} représentant pour tous les points le minimum et le maximum de la quantité h_2/h_1, où h_1 (resp. h_2) est la taille minimale (resp. maximale) souhaitée parmi toutes les directions.

Pour chaque exemple, on montre les maillages correspondants à certaines itérations de la boucle d'adaptation. Nous avons jugés utile de montrer pour chacune de ces itérations deux diagrammes indiquant la convergence de la boucle d'adaptation. Soit T_i le maillage généré à l'itération i et gouverné par l'espace de contrôle (T_{i-1}, H_i), où H_i est la carte de métriques spécifiée aux sommets de T_{i-1}. Le premier (resp. deuxième) diagramme, noté $D1$ (resp $D2$) sur les figures, indique le nombre d'arêtes du maillage T_{i-1} (resp. T_i) ayant une longueur donnée dans l'espace de contrôle (T_{i-1}, H_i). Le premier diagramme indique si le maillage T_{i-1} est parfait ou non dans l'espace de contrôle (T_{i-1}, H_i) et constitue le test d'arrêt de la boucle d'adaptation. Le deuxième diagramme indique si le maillage T_i est parfait ou non dans l'espace de contrôle (T_{i-1}, H_i) et permet ainsi de montrer les capacités de la méthode de génération de maillage proposée.

Pour ces diagrammes, l'échelle de longueur considérée est uniforme par rapport à la qualité d'une arête du maillage. Si $f = [P, Q]$ est une arête du maillage T_i ou T_{i-1}, la qualité $q(f)$ de f dans l'espace de contrôle (T_{i-1}, H_i) est définie par

$$q(f) = \begin{cases} l(P,Q) & \text{si } l(P,Q) \geq 1 \\ \dfrac{1}{l(P,Q)} & \text{si } l(P,Q) < 1 \,. \end{cases}$$

Remarque. La graduation de l'axe des x pour les diagrammes doit être lue de la façon suivante:

- mesure symétrique par rapport à l'abscisse 100,
- variation uniforme des longueurs de 0 à 1 dans l'intervalle $[0, 100]$,
- variation uniforme de l'inverse des longueurs de 1 à ∞ dans l'intervalle $[100, 200]$.

3.1 Cas isotrope

Deux exemples isotropes sont donnés.

3.1.1 Exemple 1

Le premier exemple, correspond au cas où un seul champ de métriques est spécifié dans le domaine. Ce dernier est un rectangle de dimension 7×9. La carte est définie, sur le rectangle, par la fonction

$$h(x,y) = \begin{cases} 1. - 0.95\,\frac{y}{2} & \text{si } y \leq 2 \\ 0.05 \times 20^{\frac{y-2.}{2.5}} & \text{si } 2 < y \leq 4.5 \\ 0.2^{\frac{y-4.5}{2.5}} & \text{si } 4.5 < y \leq 7 \\ 0.2 + 0.8\left(\frac{y-7}{2}\right)^4 & \text{si } 7 < y \leq 9\,. \end{cases}$$

Pour cet exemple trois itérations ont été effectuées dans la boucle d'adaptation, la figure 1 montre le maillage initial (itération 0) et les itérés 1, 2 et 3. On peut suivre l'évolution des diagrammes $D1$ et $D2$ sur les figures 2 à 5 en observant que, d'une itération à l'autre, les diagrammes se rapprochent et en particulier que le résultat est atteint dès l'itération 2 comme on peut le vérifier tant sur la figure 2 où les deux maillages du bas sont (presque) identiques que sur les diagrammes de la figure 4. Le tableau 1 indiquant les valeurs associées aux différents maillages confirme ce résultat.

ni	np	nt	t	Γ	h_{min}	h_{max}
0	106	206	0.05	0.83	1.	1.
1	1754	3502	0.85	0.64	0.05	1.
2	2218	4430	1.30	0.70	0.05	1.
3	2227	4448	1.30	0.70	0.05	1.

Tableau 1 : *Statistiques pour l'exemple 1.*

La valeur obtenue pour Γ est liée au fait que la taille varie fortement sur un intervalle court.

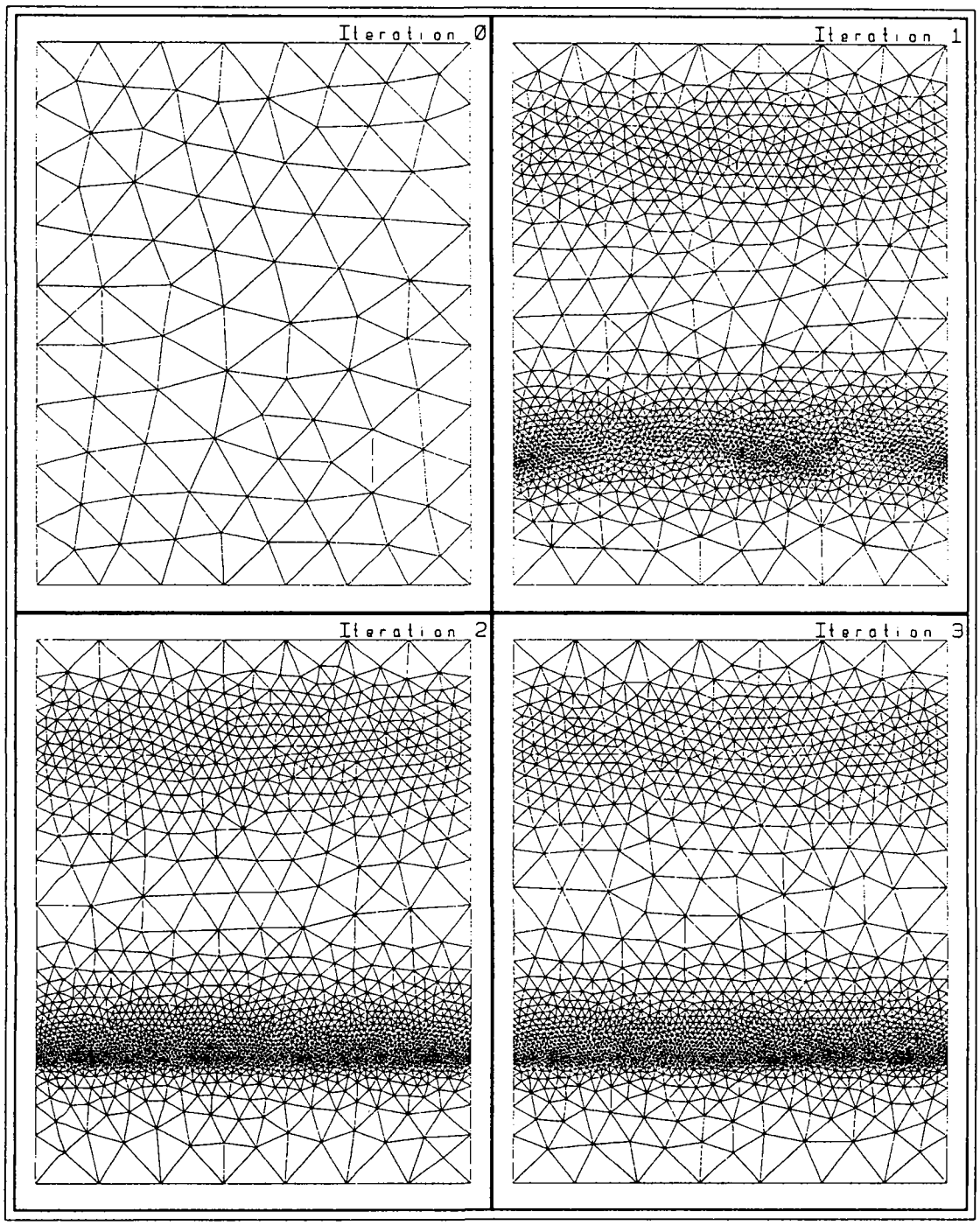


FIG. 1 - *Exemple 1 (isotrope).*

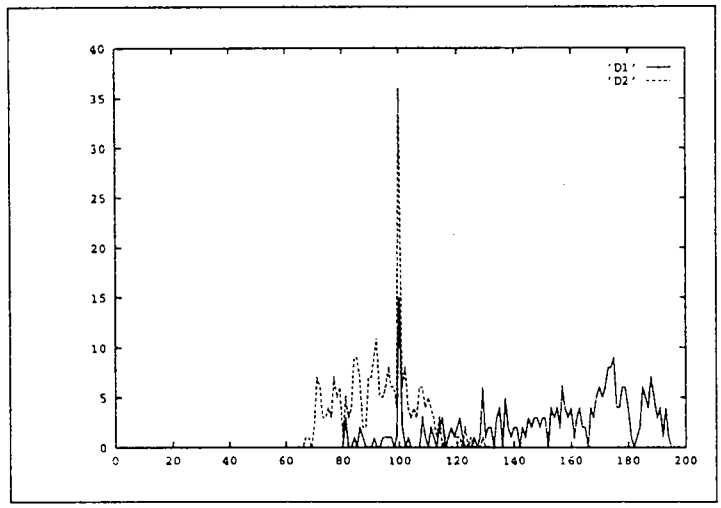


FIG. 2 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 1 (itération 0).*

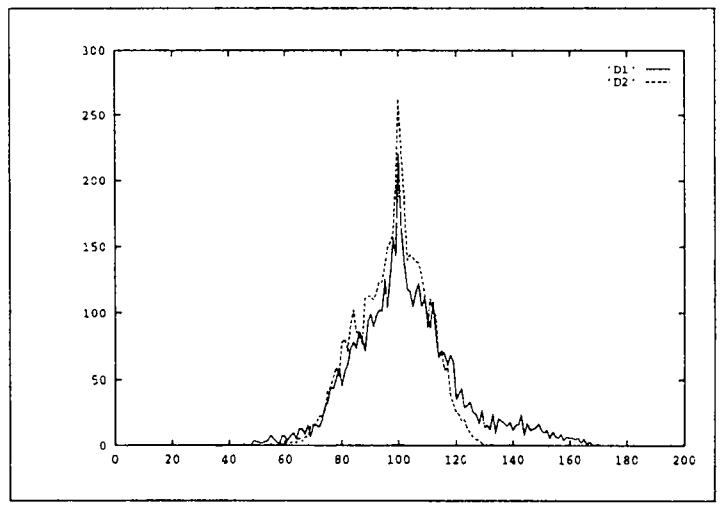


FIG. 3 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 1 (itération 1).*

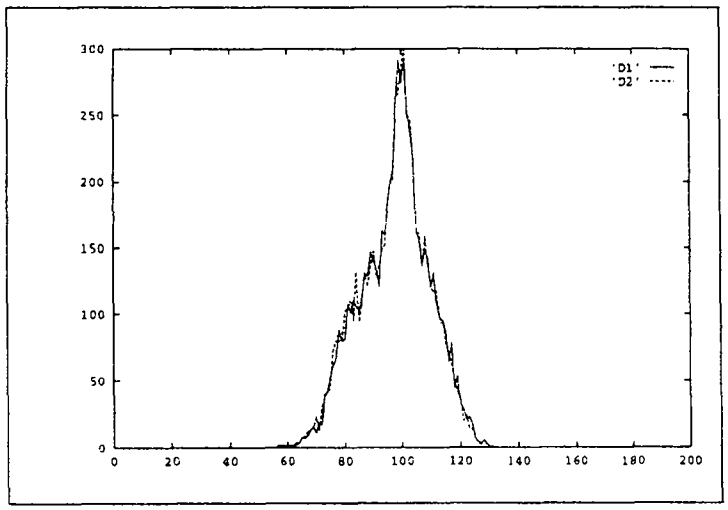


FIG. 4 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 1 (itération 2).*

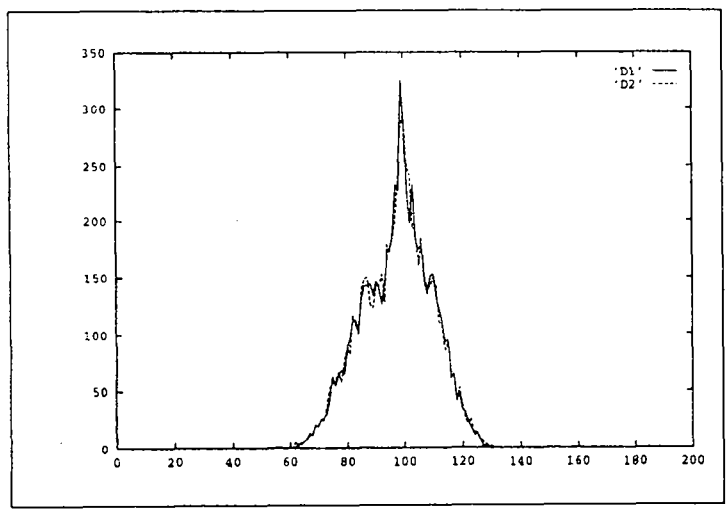


FIG. 5 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 1 (itération 3).*

3.1.2 Exemple 2

Le second exemple, correspond au cas où deux champs de métriques sont spécifiés dans le domaine. Ce dernier est un cercle centré à l'origine de rayon 5. Les cartes sont définies, sur le cercle, par les deux fonctions h_1 et h_2 dépendant de r et θ, les coordonnées polaires.

$$h_1(r,\theta) = 0.8\,|r - 0.2\,\theta| + 0.02\,,$$

$$h_2(r,\theta) = 0.8\,|r + 0.2\,\theta| + 0.05\,.$$

Le résultat attendu est d'avoir des éléments fins sur les deux courbes

$$r = 0.2\,\theta \quad \text{et} \quad r = -0.2\,\theta$$

avec une variation linéaire de tailles entre les courbes. Le problème comporte donc le cas où deux métriques s'intersectent.

Pour cet exemple cinq itérations ont été effectuées dans la boucle d'adaptation, la figure 6 montre le maillage initial (itération 0) et les itérés 1, 3 et 5, la figure 7 reprend cette dernière itération. On peut suivre l'évolution des diagrammes $D1$ et $D2$ sur les figures 8 à 11. Le résultat convergé est obtenu à l'itération 5. Le tableau 2 indique les valeurs associées aux différents maillages.

ni	np	nt	t	Γ	h_{min}	h_{max}
0	168	330	0.08	0.72	0.8	0.8
1	6497	12988	3.30	0.68	0.02	0.5
3	10715	21424	8.60	0.50	0.02	0.5
5	11430	22854	9.80	0.56	0.02	0.5

Tableau 2 : *Statistiques pour l'exemple 2.*

La variation de tailles est de l'ordre de 25.

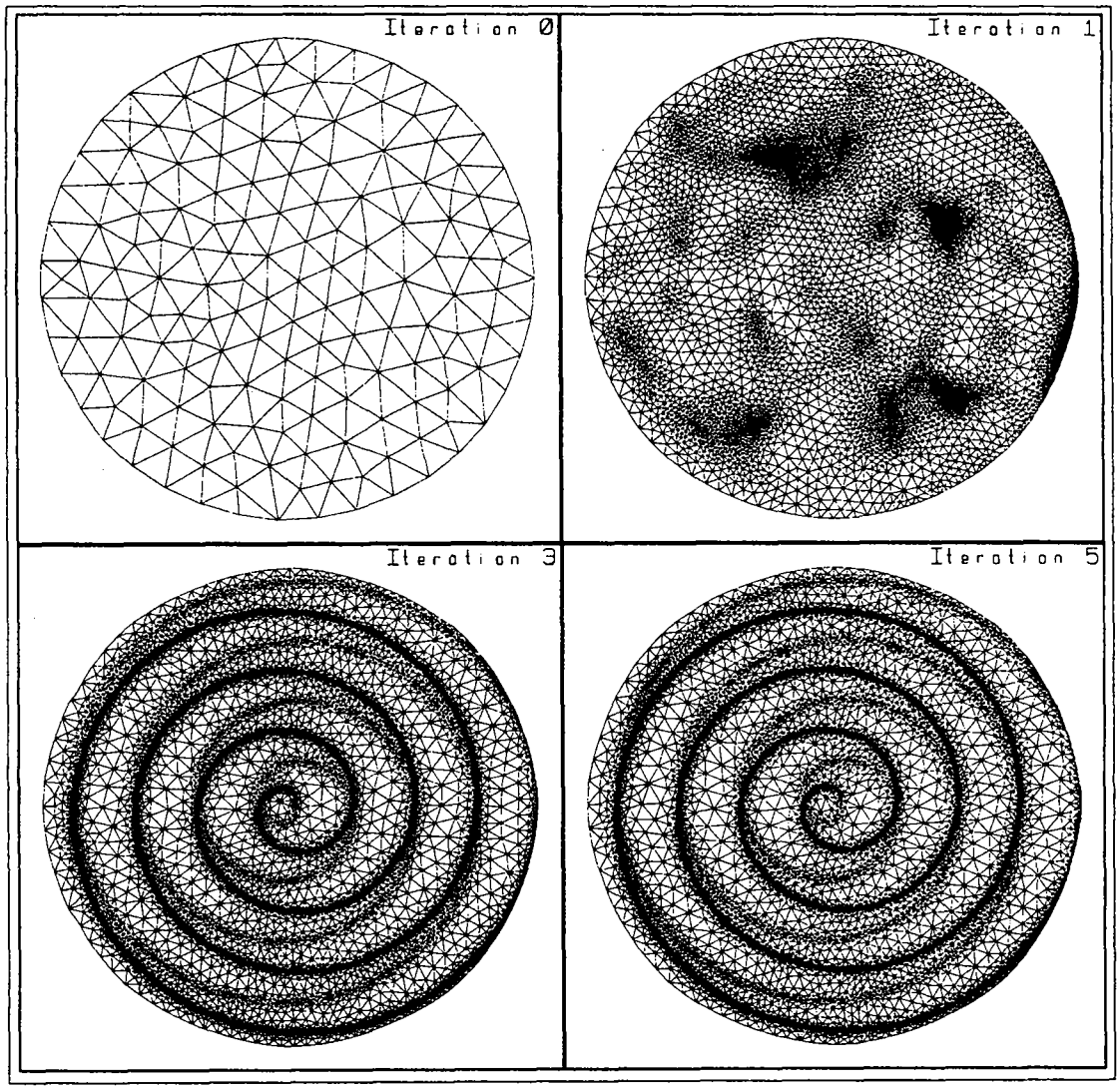


FIG. 6 - *Exemple 2 (isotrope).*

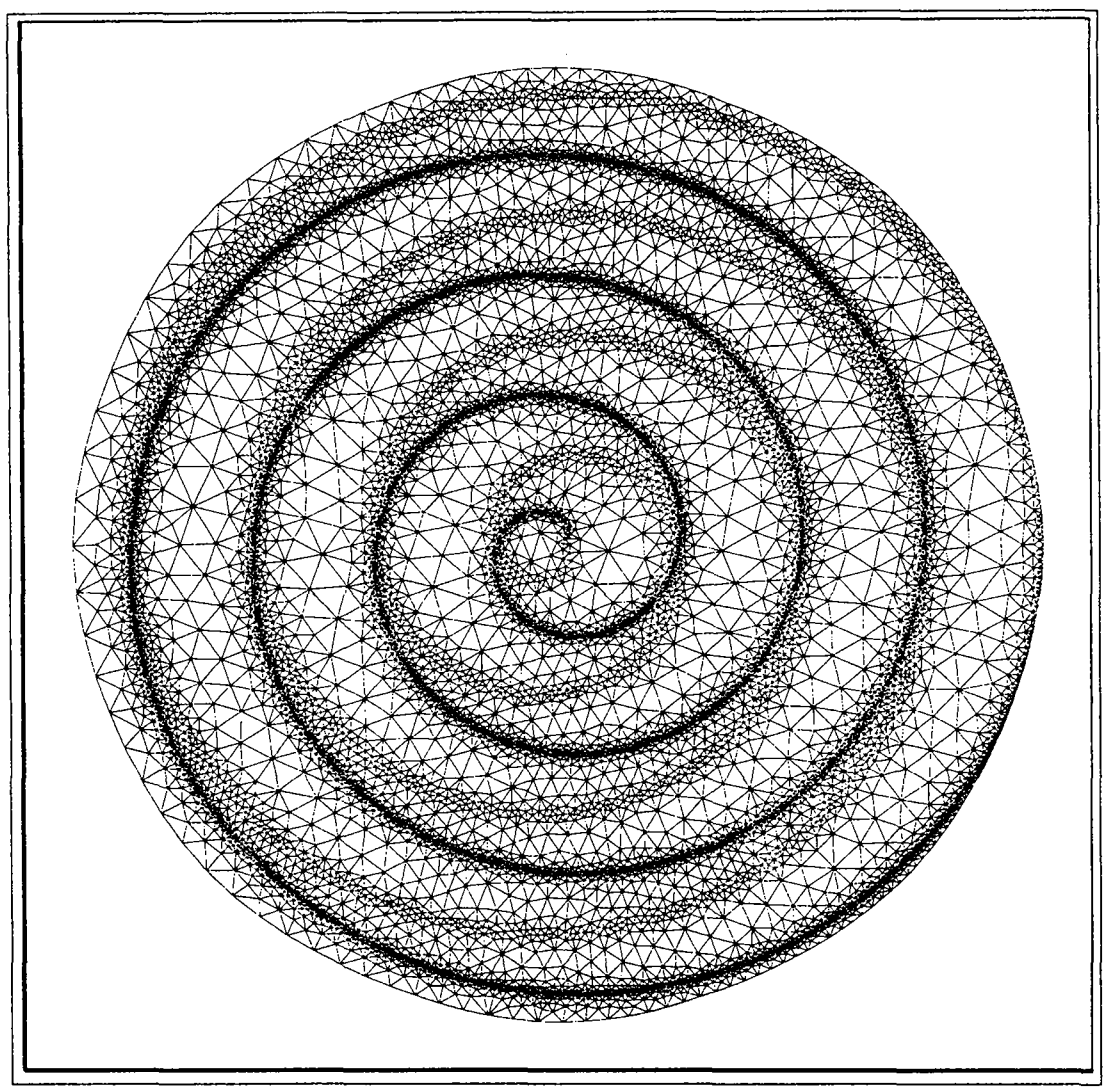


FIG. 7 - *Exemple 2 (itération 5).*

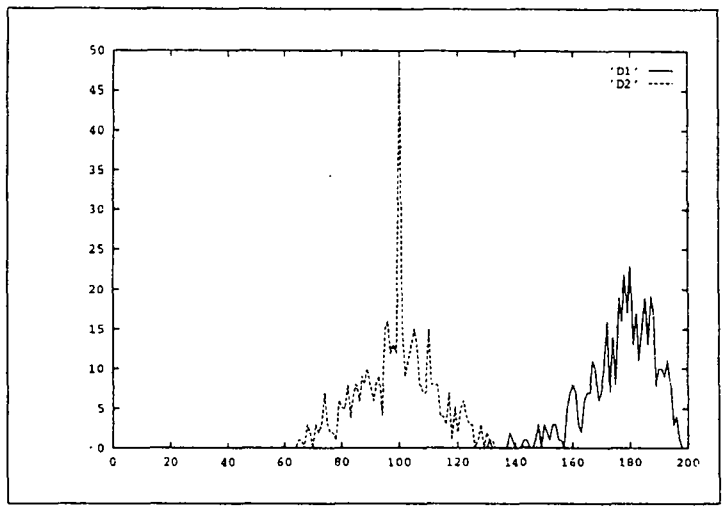


FIG. 8 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 2 (itération 0).*

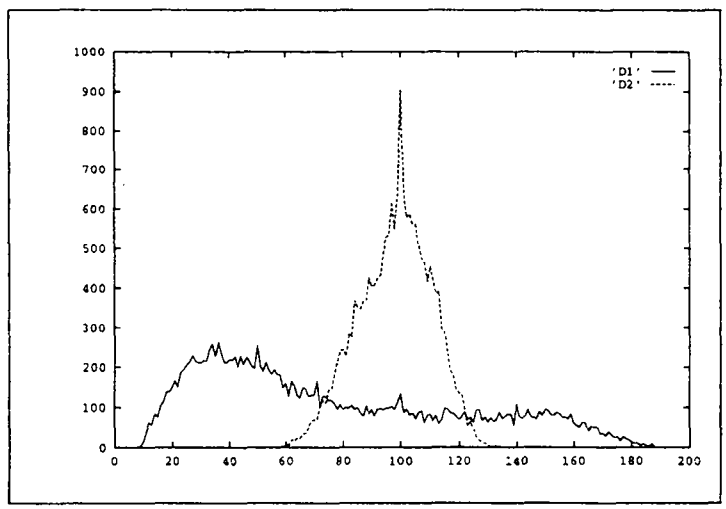


FIG. 9 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 2 (itération 1).*

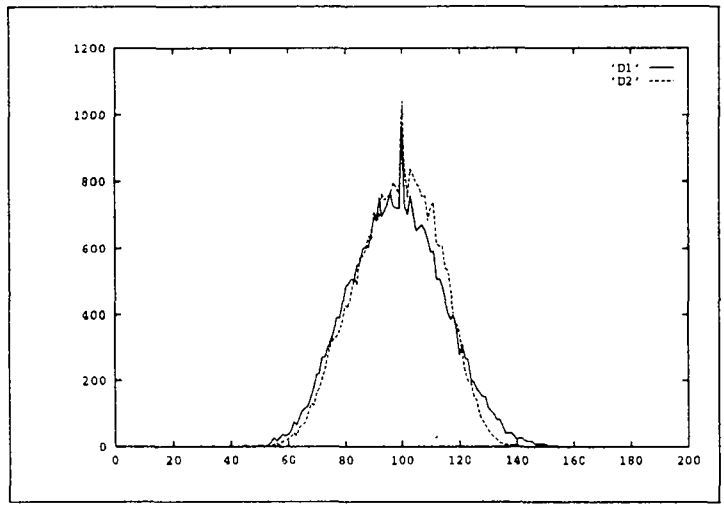


FIG. 10 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 2 (itération 3).*

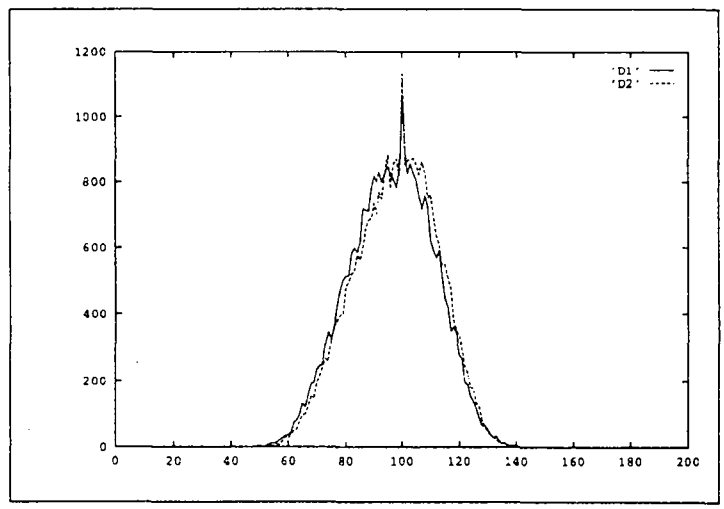


FIG. 11 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 2 (itération 5).*

3.2 Cas anisotrope

Deux exemples sont donnés dans le cas anisotrope.

3.2.1 Exemple 3

Le troisième exemple correspond au cas où un seul champ de métriques anisotrope est spécifié dans le domaine. Ce dernier est un rectangle de dimension 7×9. La carte est définie, sur ce rectangle, par des matrices diagonales d'ordre 2

$$\mathcal{M}(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y) & 0 \\ 0 & h_2(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$h_1(x,y) = \begin{cases} 1. - 0.95\,\dfrac{x}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ 0.05 \times 20^{\frac{x-2.}{1.5}} & \text{si } 2 < x \leq 3.5 \\ 0.2^{\frac{x-3.5}{1.5}} & \text{si } 3.5 < x \leq 5 \\ 0.2 + 0.8\left(\dfrac{x-5}{2}\right)^4 & \text{si } 5 < x \leq 7\,. \end{cases}$$

$$h_2(x,y) = \begin{cases} 1. - 0.95\,\dfrac{y}{2} & \text{si } y \leq 2 \\ 0.05 \times 20^{\frac{y-2.}{2.5}} & \text{si } 2 < y \leq 4.5 \\ 0.2^{\frac{y-4.5}{2.5}} & \text{si } 4.5 < y \leq 7 \\ 0.2 + 0.8\left(\dfrac{y-7}{2}\right)^4 & \text{si } 7 < y \leq 9\,. \end{cases}$$

Ces données traduisent le fait que l'on veut obtenir dans la direction des abscisses une taille qui correspond (via une projection) à la discrétisation observée sur le coté bas du rectangle et dans la direction des ordonnées la taille observée sur le coté gauche du rectangle. On vérifiera, sur le maillage de l'itération 3, la bonne adéquation entre cette spécification et tant la forme que la taille des éléments. L'ordre de l'étirement est au maximum de 20.

Pour cet exemple trois itérations ont été effectuées dans la boucle d'adaptation, la figure 12 montre le maillage initial (itération 0) et les itérés 1, 2 et

3. On peut suivre l'évolution des diagrammes $D1$ et $D2$ sur les figures 13 à 16. Le tableau 3 indique les valeurs associées aux différents maillages.

ni	np	nt	t	Γ	h_{min}	h_{max}	r_{min}	r_{max}
0	52	98	0.04	0.80	1.5	1.5	-	-
1	815	1624	0.5	0.45	0.02	0.5	1.	9.7
2	1328	2650	1.0	0.44	0.02	0.5	1.	19.5
3	1298	2590	1.0	0.43	0.02	0.5	1.	19.5

Tableau 3 : *Statistiques pour l'exemple 3.*

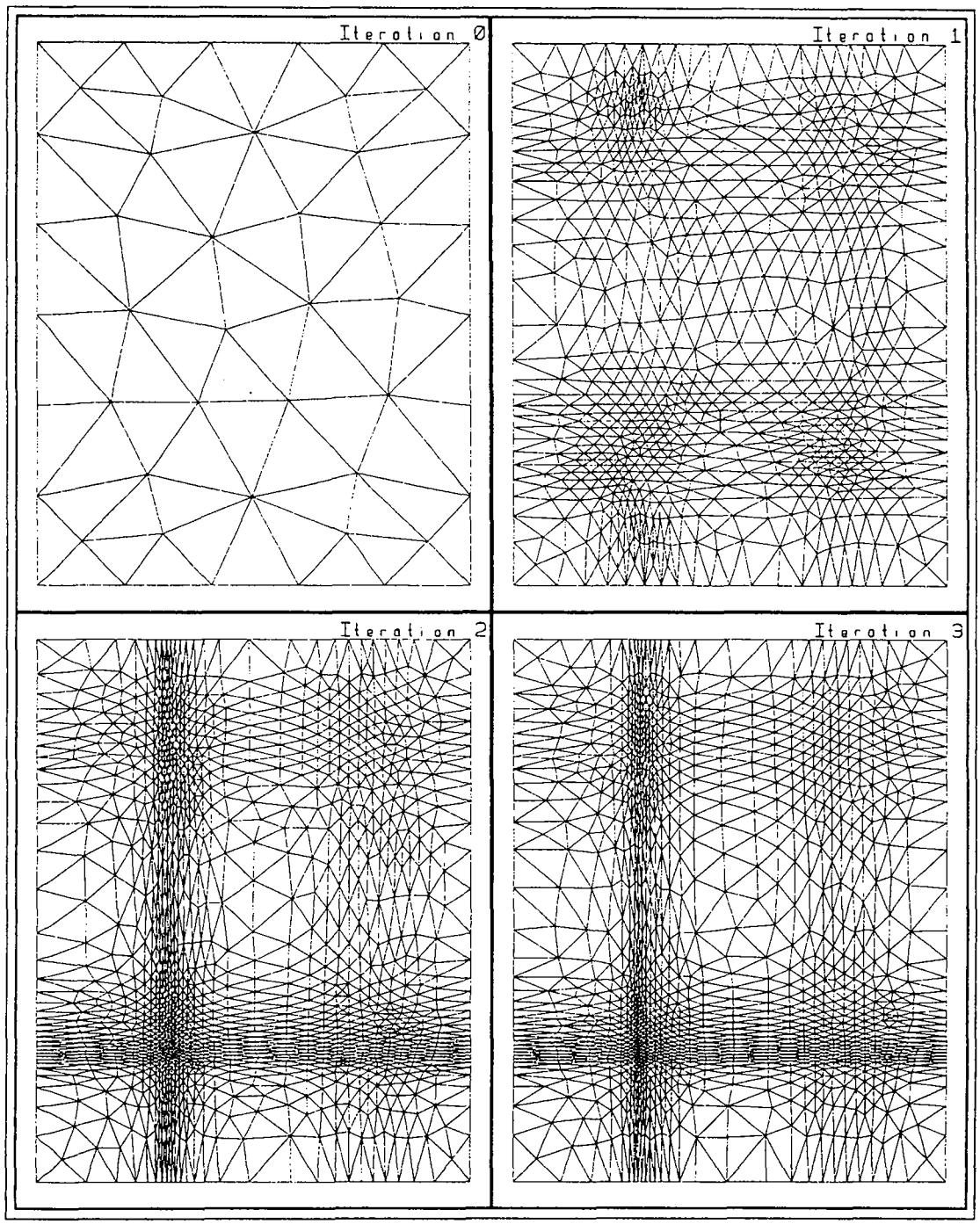


FIG. 12 - *Exemple 3 (anisotrope).*

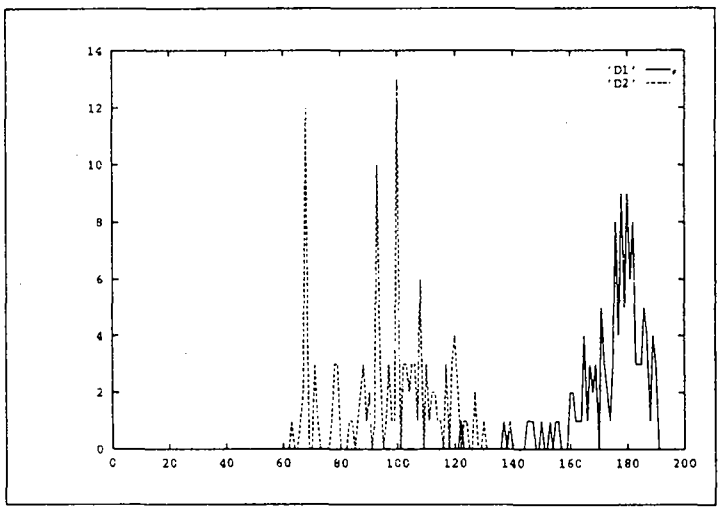


FIG. 13 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 3 (itération 0).*

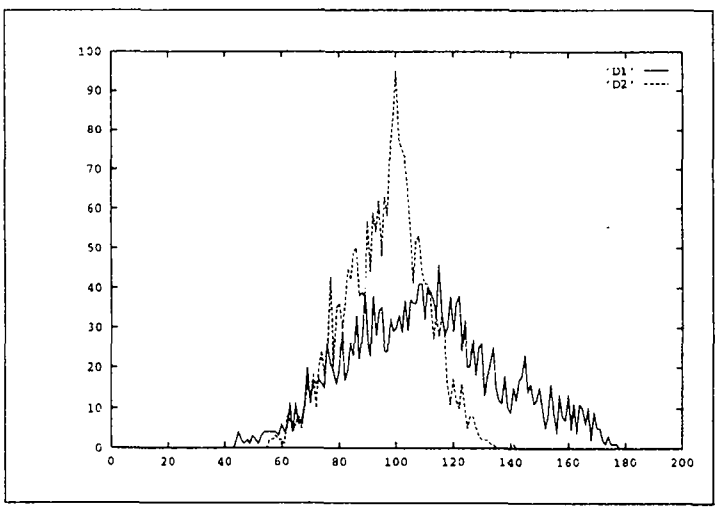


FIG. 14 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 3 (itération 1).*

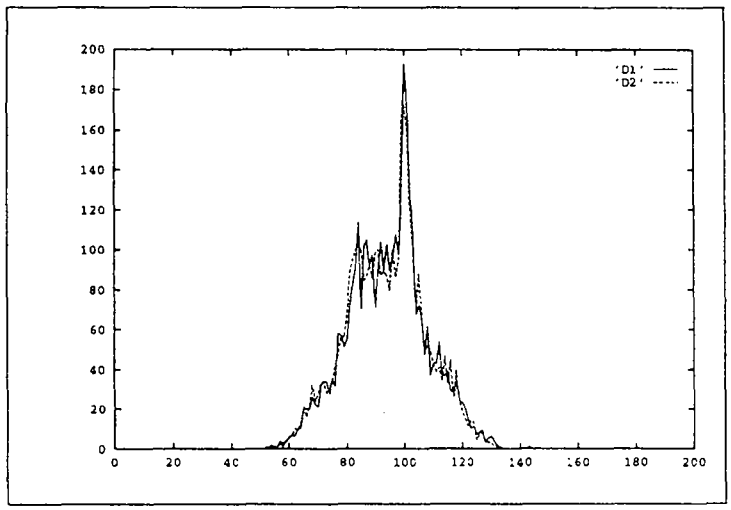


FIG. 15 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 3 (itération 2).*

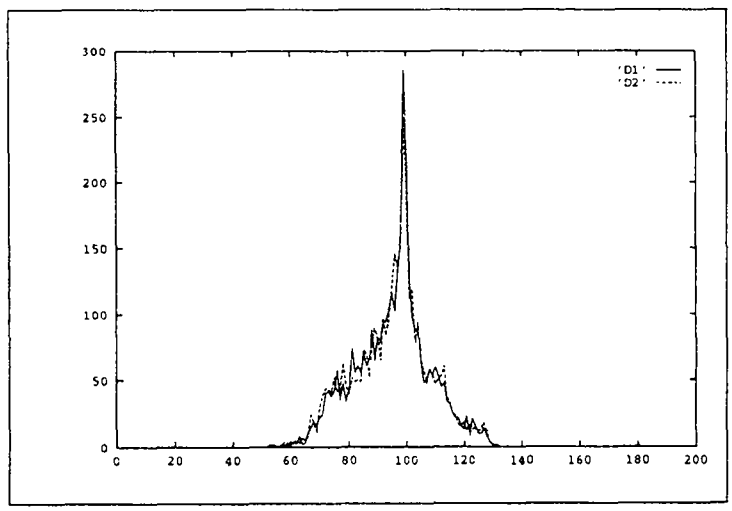


FIG. 16 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 3 (itération 3).*

3.2.2 Exemple 4

Le quatrième exemple correspond au cas où deux champs de métriques sont donnés dans le domaine, ce dernier est un carré centré à l'origine de coté 8. Le but visé est d'obtenir des éléments étirés le long de la tangente aux courbes algébriques d'équations $x^3 - y^2 + 2 - 3\,\lambda x = 0$ où λ est le paramètre. Le paramètre λ est calculé en chaque point du domaine où il est défini. A partir de λ, la première métrique au point (x, y) est donnée par h_1, h_2, les tailles, et θ l'angle d'anisotropie via les équations suivantes

$$h_1(x,y) = \begin{cases} \min\big(0.2\,(\lambda-1)^3 + 0.005, 1.\big) & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \min\big(0.2\,(1-\lambda)^2 + 0.01, 1.\big) & \text{si } \lambda < 1\,, \end{cases}$$

$$h_2(x,y) = \begin{cases} \min\big(0.2\,(\lambda-1)^3 + 0.2, 1.\big) & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \min\big(0.2\,(1-\lambda)^2 + 0.2, 1.\big) & \text{si } \lambda < 1\,, \end{cases}$$

$$\theta = \arctan \frac{-2.y}{3(x^2 - \lambda)}\,.$$

La seconde carte de métriques est isotrope et donnée par l'équation $h(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + 0.01$, ce qui donne une taille de l'ordre de 0.01 au voisinage du point $(1, 0)$ et une variation quadratique par ailleurs. Le point ci-dessus est visible sur la figure 19 partie basse à droite.

Sept itérations ont été effectuées dans la boucle d'adaptation. La figure 17 montre le maillage initial (itération 0) et les itérés 1, 3 et 7. Deux agrandissements sont montrés, figure 18 pour le maillage en totalité et figure 19 pour quatre vues partielles. On peut suivre l'évolution des diagrammes $D1$ et $D2$ sur les figures 20 à 23. Le tableau 4 indique les valeurs associées aux différents maillages.

ni	np	nt	t	Γ	h_{min}	h_{max}	r_{min}	r_{max}
0	110	214	0.1	0.86	1.	1.	-	-
1	3786	7566	1.62	0.32	0.005	1.	1.	36.
3	9284	18562	10.75	0.12	0.005	1.	1.	40.
7	9346	18686	11.6	0.18	0.005	1.	1.	40.

Tableau 4 : *Statistiques pour l'exemple 4.*

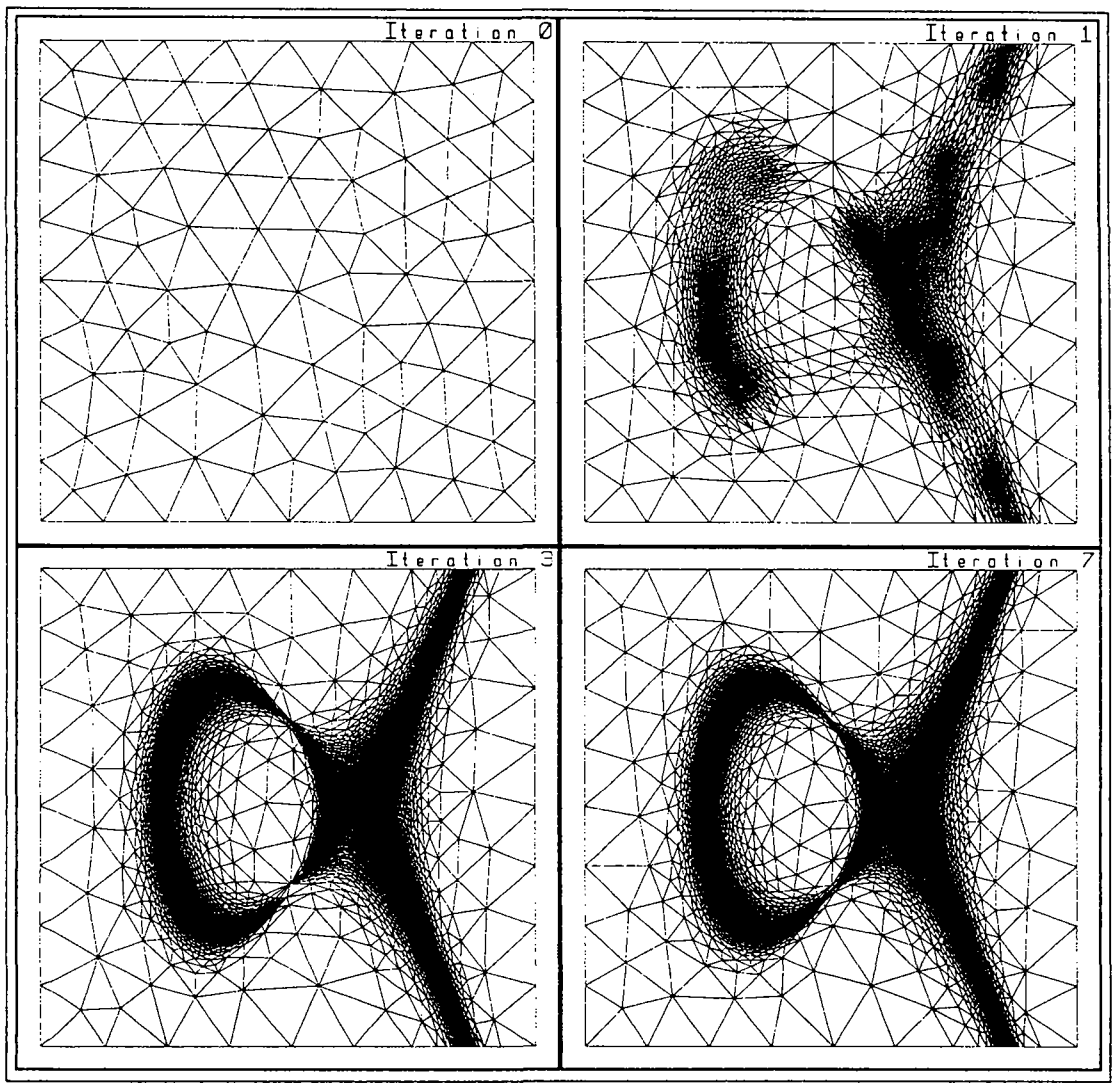


FIG. 17 - *Exemple 4 (anisotrope).*

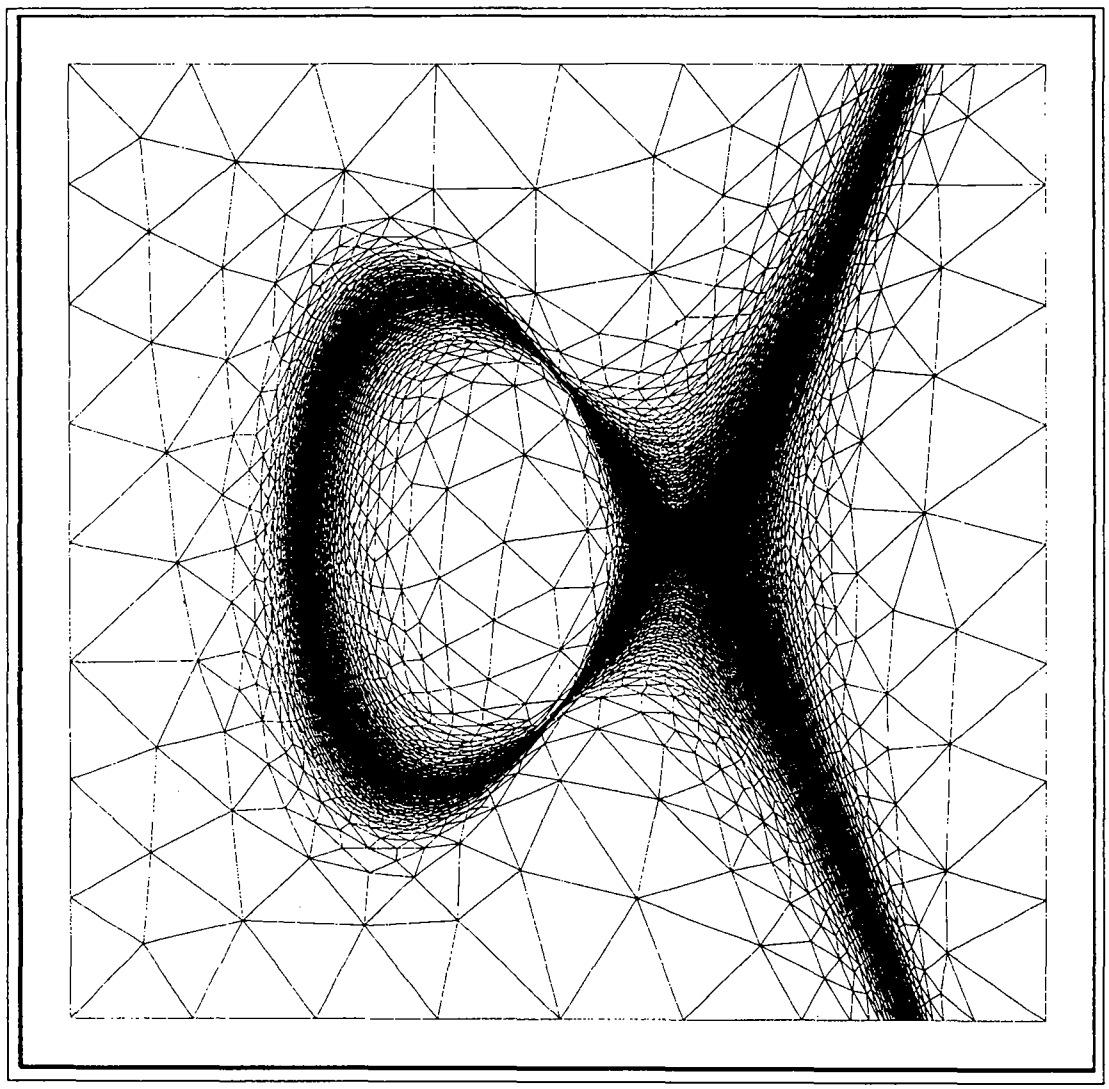


FIG. 18 - *Exemple 4 (itération 7).*

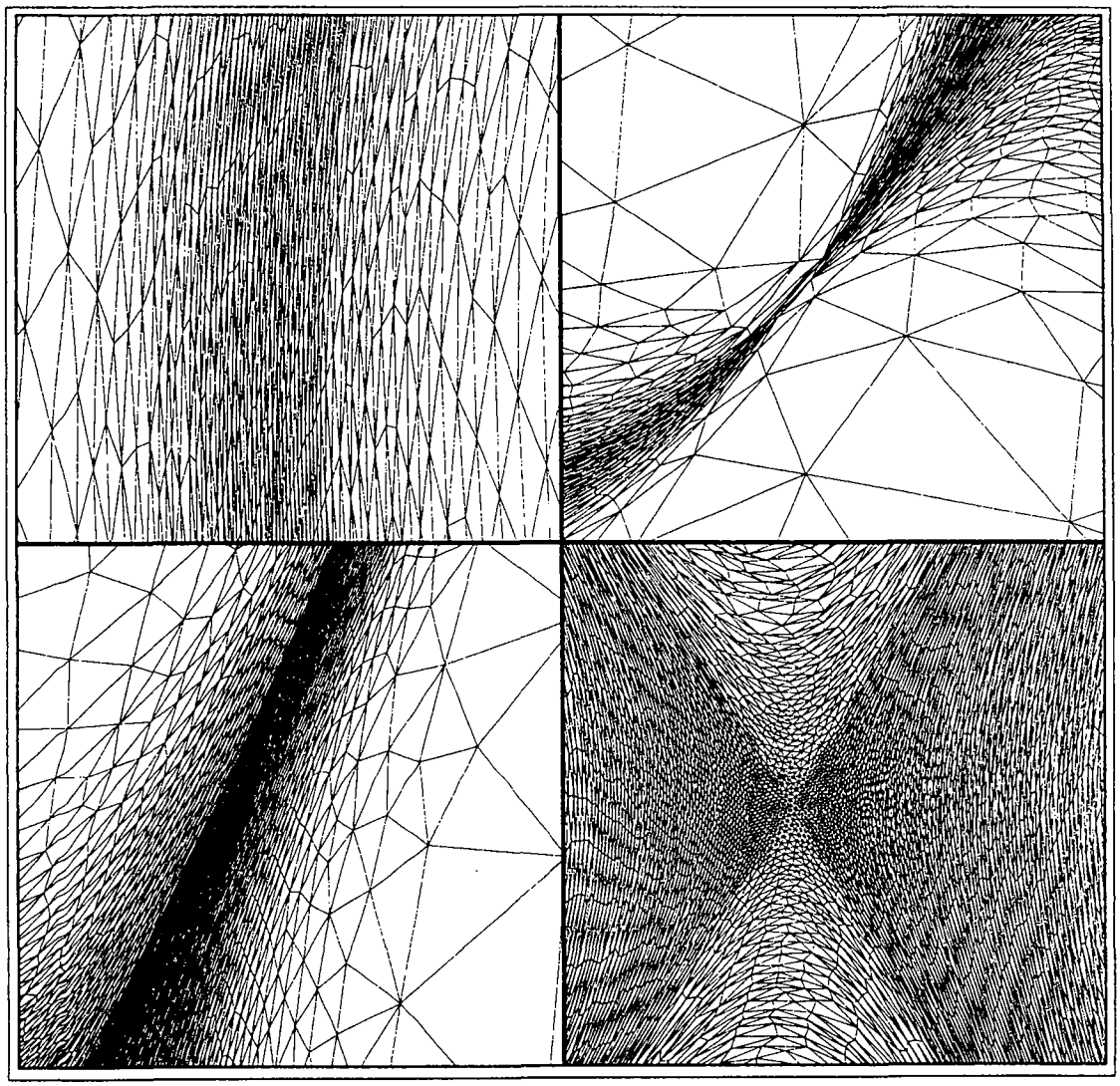


FIG. 19 - *Exemple 4 (itération 7), agrandissement.*

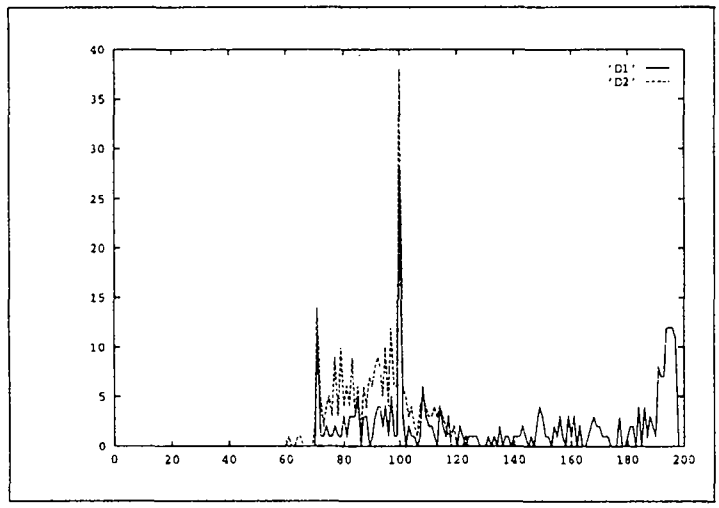


FIG. 20 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 4 (itération 0).*

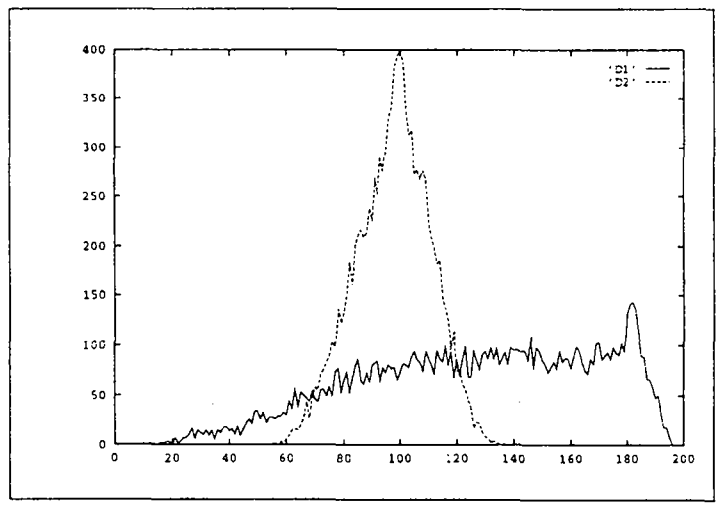


FIG. 21 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 4 (itération 1).*

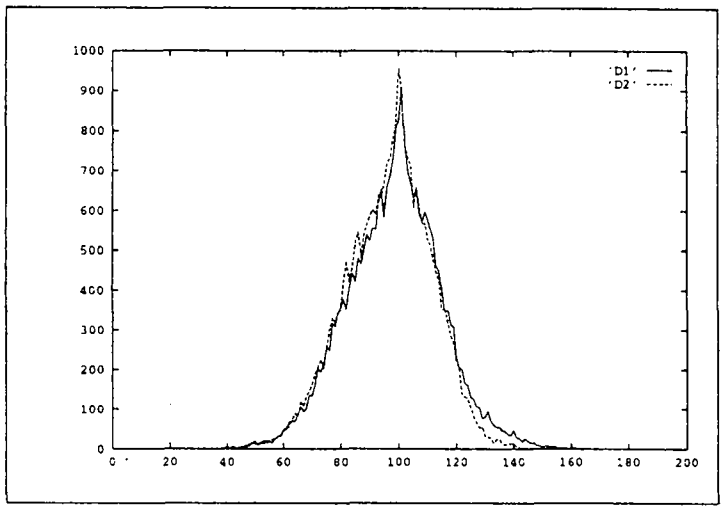


FIG. 22 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 4 (itération 3).*

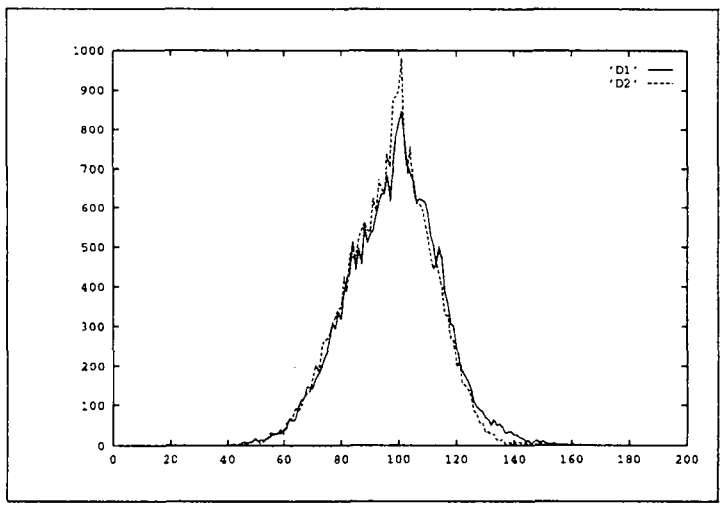


FIG. 23 - *Diagrammes D1 et D2, exemple 4 (itération 7).*

4 Applications en mécanique des fluides

Dans cette section, nous traitons un ensemble de configurations complexes d'écoulements compressibles Euler et Navier-Stokes. Les régimes considérés sont le transonique et le supersonique.

Le solveur Navier-Stokes NSC2KE a été utilisé. Cet outil est décrit dans [3]. NSC2KE est en accés public (ftp anonymous sur piranha.inria.fr sous pub/). Ce solveur utilise une technique de volumes finis Galerkin avec les variables aux noeuds ce qui permet un traitement facile des termes visqueux comme en éléments finis. Un schéma de Runge-Kutta à 4 pas a été utilisé pour l'intégration en temps.

La carte de métriques représente l'intersection des métriques des variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho v, \rho(C_v T + \frac{|u|^2}{2}))$ où ρ est la densité, (u, v) le vecteur vitesse et T la température. Plus précisemment, pour chacune des variables conservatives $(\psi_i, i = 1, .., 4)$ nous définissons le tenseur métrique $\mathcal{M}_i(2,2)$ par l'algorithme suivant

1. Normalisation de ψ_i entre $[0, 1]$ (pour éviter les problèmes de dimension).
2. Calcul de la métrique de ψ_i, proportionnelle au hessien de ψ_i, de façon faible pour chaque noeud is

$$\mathcal{M}_i(j, l) = \frac{1}{(3L^2 C_{is})} \int \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_{is}}{\partial x_l}$$

   où w_{is} est la fonction de base éléments finis P^1 au noeud is et C_{is} est l'aire de la cellule duale autour du noeud is. L définit la longueur des arêtes dans la métrique $\mathcal{M}_i$. Ainsi, toutes les arêtes sont de longueur L pour la métrique.
3. Correction du hessien aux noeuds frontières dans la direction normale en utilisant un moyennage sur les noeuds internes.
4. Limitation des valeurs propres par $\lambda_{min} = 1/h^2_{max}$ et $\lambda_{max} = 1/h^2_{min}$ où h_{min} et h_{max} sont les tailles extrêmes d'arêtes que l'on souhaite avoir dans le maillage généré.
5. Intersection de la métrique $\mathcal{M}_i$ avec $\mathcal{M}_k$ pour $k \neq i$ d'après l'algorithme décrit dans [2].

4.1 Scramjet en régime supersonique

Le premier cas concerne un calcul Euler dans un scramjet à Mach 3. La géometrie est symétrique mais le calcul a été effectué sur le domaine global pour voir si une solution symétrique pouvait être obtenue malgré l'utilisation d'un maillage quelconque. La paroi supérieure est définie par 6 points (dimensions en mètres)

$$(0.0, 3.5), \quad (0.4, 3.5), \quad (4.9, 2.9), \quad (12.6, 2.12), \quad (14.25, 1.92) \quad \text{et} \quad (16.9, 1.7).$$

L'obstacle supérieur est defini par 5 points

$$(4.9, 1.4), \quad (12.6, 1.4), \quad (14.25, 1.2), \quad (9.4, 0.5) \quad \text{et} \quad (8.9, 0.5).$$

L'axe de symétrie est définie par le segment joignant les points

$$(0.0, 0.0) \quad \text{et} \quad (16.9, 0.0).$$

Six adaptations ont été effectuées séparées par 400 iterations du solveur Navier-Stokes. La solution est symétrique malgré un maillage quelconque. On voit que le solveur accepte bien de grandes distorsions dans le maillage sans produire d'oscillations. Les coefficients d'adaptations sont les suivants

$$h_{min} = 5.10^{-3}, \quad h_{max} = 2., \quad L = 10^{-3}.$$

Compte tenu de la complexité de la configuration, effectuer un calcul similaire avec un maillage structuré, conduirait à prendre environ 10^7 points en utilisant une méthode offrant la même précision avec une discrétisation régulière du domaine avec des mailles de taille h_{min}. Dans notre cas, le maillage le plus fin comporte 30000 points (soit un facteur 300). De plus l'adaptation de maillage accélère le calcul par son effet multi-grille sans remontée, ainsi uniquement 2400 iterations explicites ont suffit pour converger sur cette configuration. De plus, comme nous utilisons une stratégie de pas de temps local, nous sommes avantagé par un maillage adapté, tandis que sur un maillage régulier nous perdons cet effet.

Les figures 24 et 25 montrent respectivement les maillages et les contours iso-densité aux itérations 0 (initial), 2 et 6 (final). Le maillage de départ comporte environ 4000 points, à l'étape 2 environ 23000 points et finalement environ 30000 points. Le nombre de points reste pratiquement constant entre les

étapes 4, 5 et 6. A l'itération 6, l'étirement maximal est de l'ordre de 120 et le temps cpu pour la construction du maillage est de l'ordre de 30 secondes sur une HP735/99Mhz (ceci représentant moins de 10% du temps de calcul total).

4.2 Ecoulement transonique visqueux autour d'un Naca-0012

Le second cas concerne un calcul visqueux autour d'un profil d'aile à Mach 0.95 et Reynolds 5000. Une configuration de queue de poisson est obtenue avec une instationarité due à l'intéraction du choc droit et du sillage. On voit que l'intersection des métriques des variables permet la capture de phénomèmes de nature différente comme les chocs, couches limites et sillages. Les coefficients d'adaptations sont les suivants

$$h_{min} = 5.10^{-3}, \quad h_{max} = 1., \quad L = 3.10^{-3}.$$

La boucle adaptative est de longueur six. Sur les trois premières étapes, 500 iterations du solveur Navier-Stokes ont été effectuées. Dans cette configuration, la zone instationnaire est localisée dans le sillage. Nous avons donc obtenu d'abord une bonne description de la structure de l'écoulement avant de capturer l'instationarité. Sur les trois dernières étapes 3000 iterations ont été appliquées pour développer le caractère instationnaire.

Les figures 26 et 27 montrent les maillages et iso-densité aux étapes 0 (initial), 2, 4, 6 (finale). La figure 28 remontre le maillage de l'étape finale tandis que la figure 29 montre les lignes d'iso-densité correspondantes. Le maillage à l'itération 0 comprend 2282 points, à l'itération 2, il y a 7697 points, à l'itération 4, on a 17850 points puis enfin 18003 points. Ce dernier maillage demande 20 secondes, son étirement maximal est de l'ordre de 50.

4.3 Ecoulement supersonique visqueux autour d'un Cylindre

Le dernier cas concerne un calcul supersonique autour d'un cylindre de diamètre 1 à Mach 2 et Reynolds 5000 placé dans un canal de longueur 30 et de largeur 10 avec des conditions de glissement sur les parois latérales. C'est un

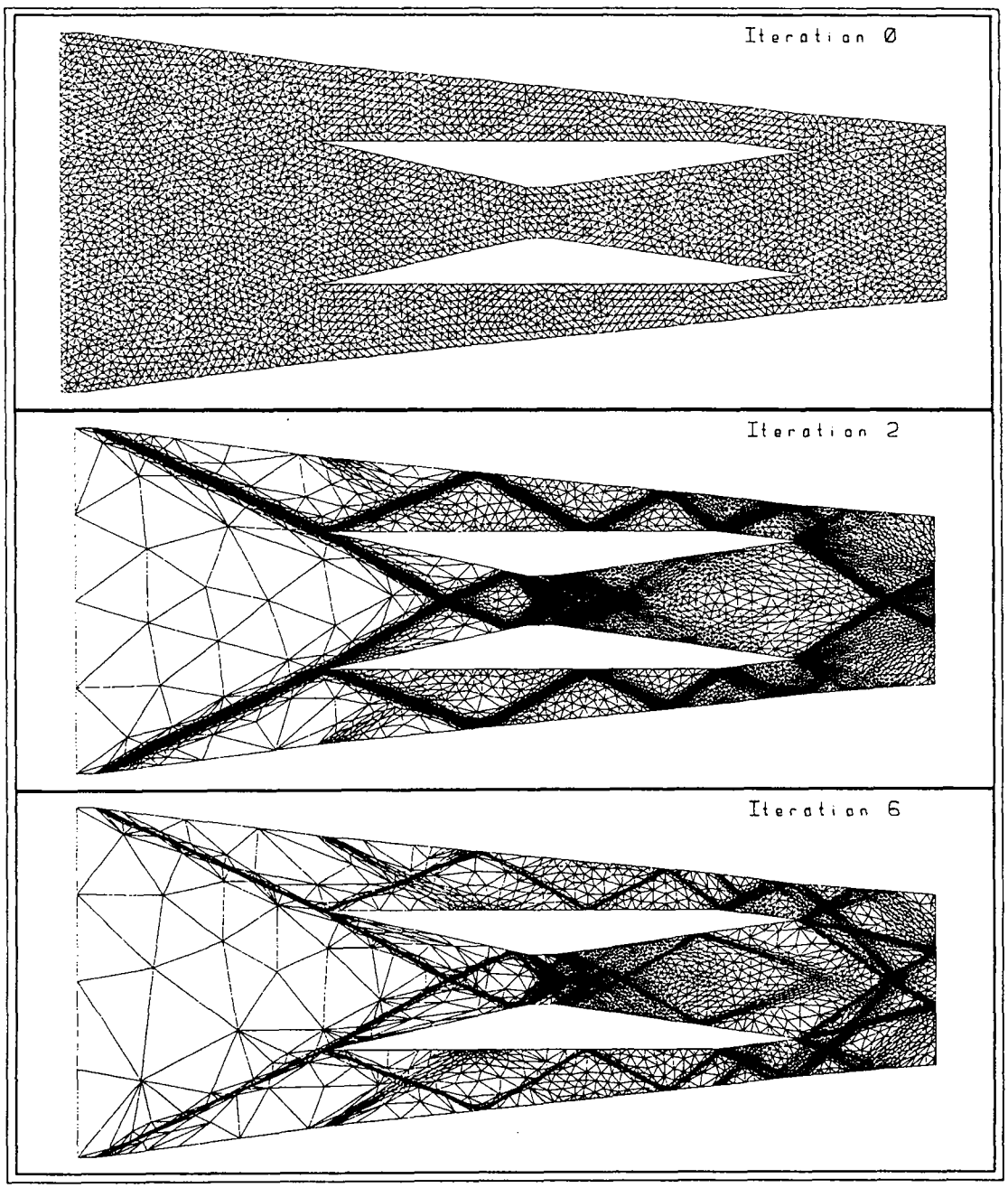


FIG. 24 - *Scramjet, maillages.*

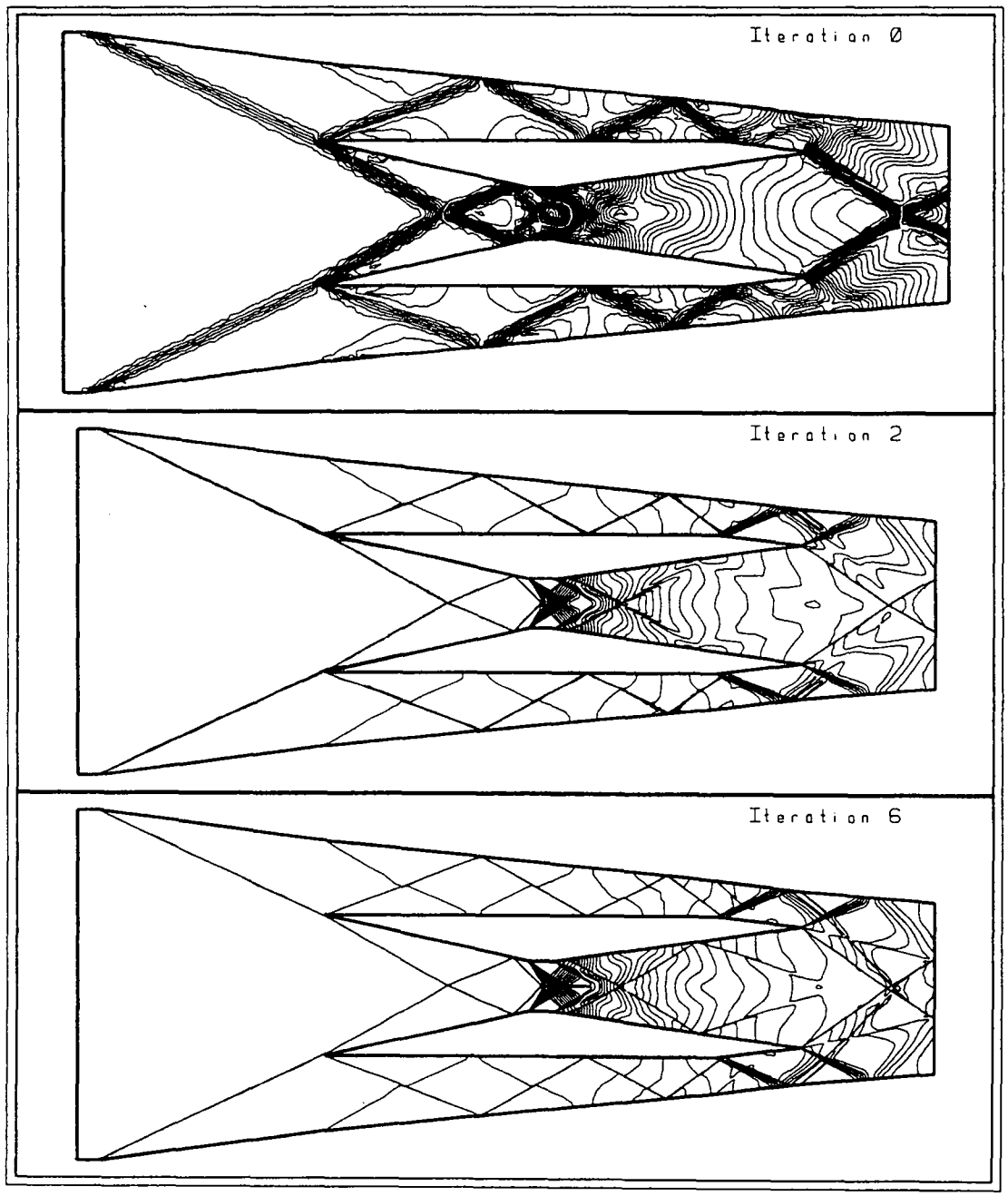


FIG. 25 - *Scramjet, contour iso-densité.*

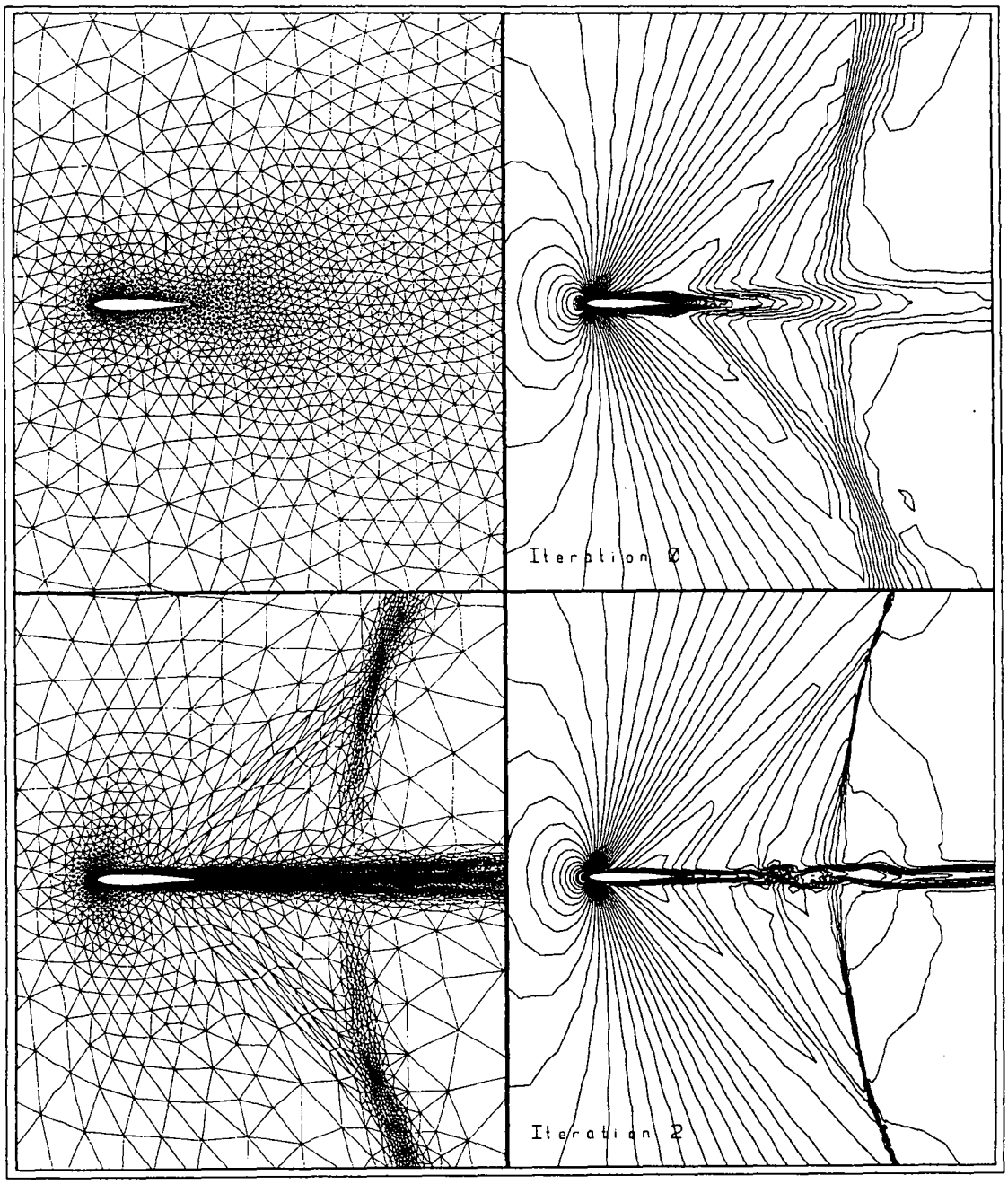


FIG. 26 - *Fish Tail, maillages et contour iso-densité.*

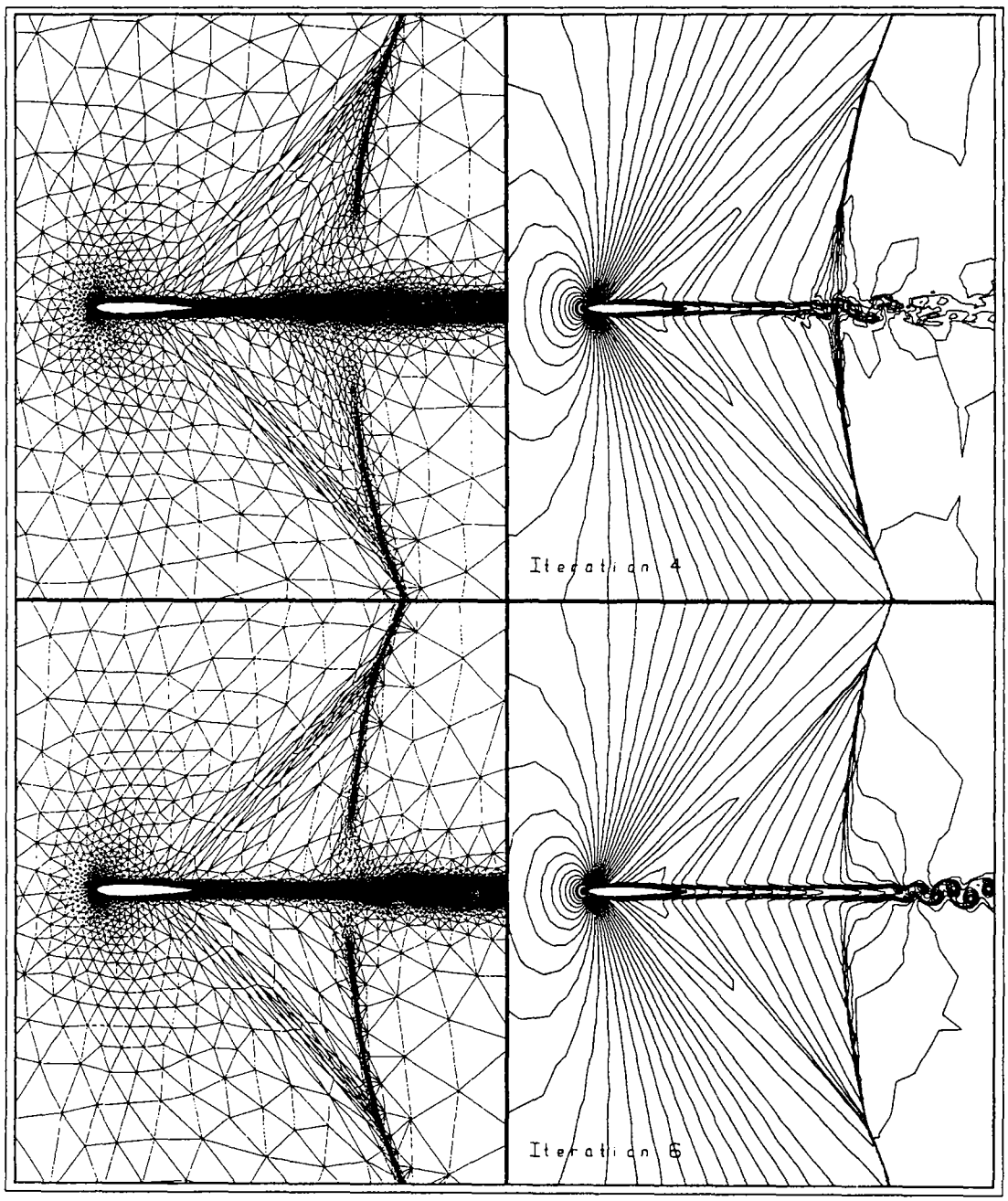


FIG. 27 - *Fish Tail, maillages et contour iso-densité (suite).*

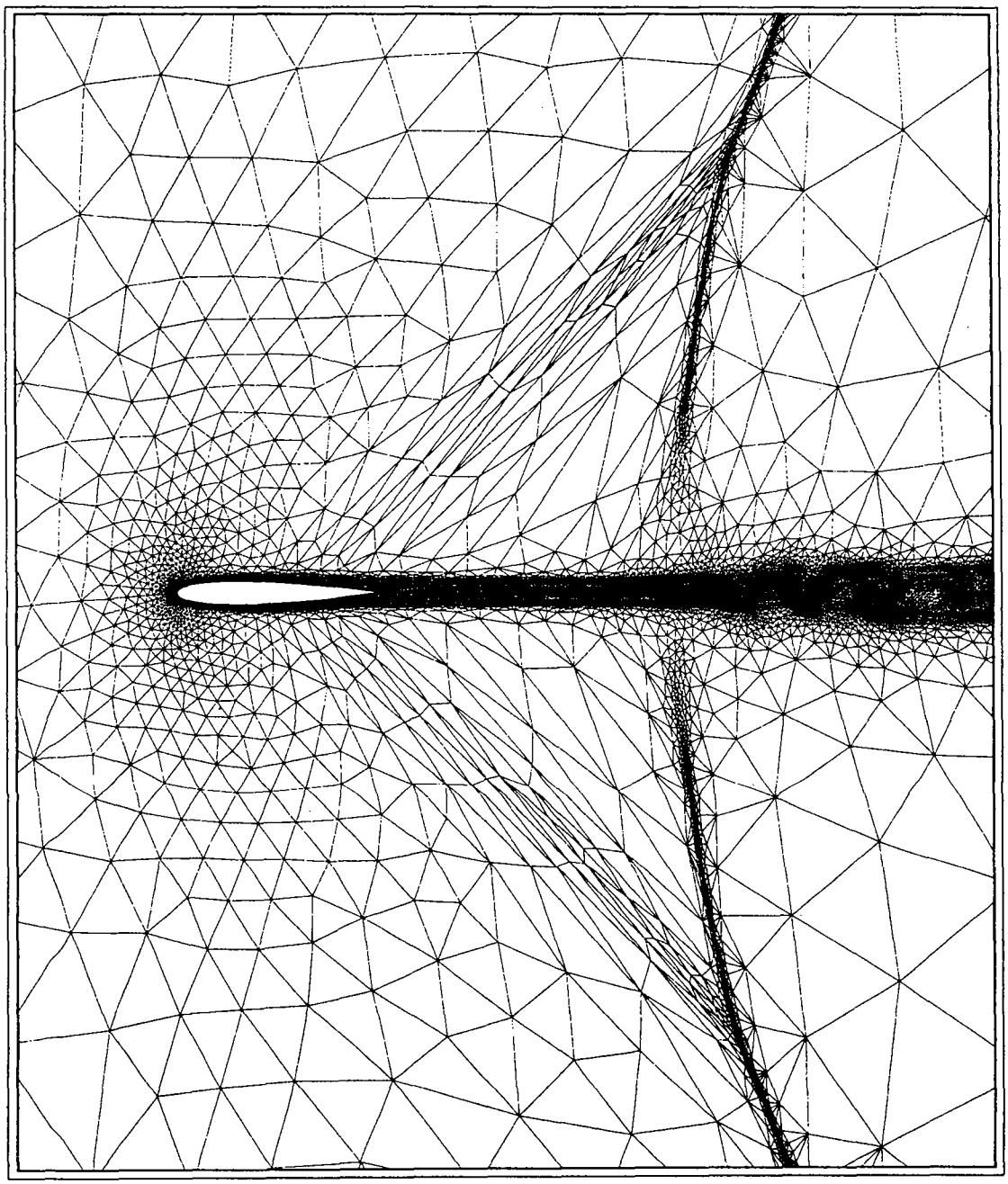


FIG. 28 - *Fish Tail, maillage, itération 6.*

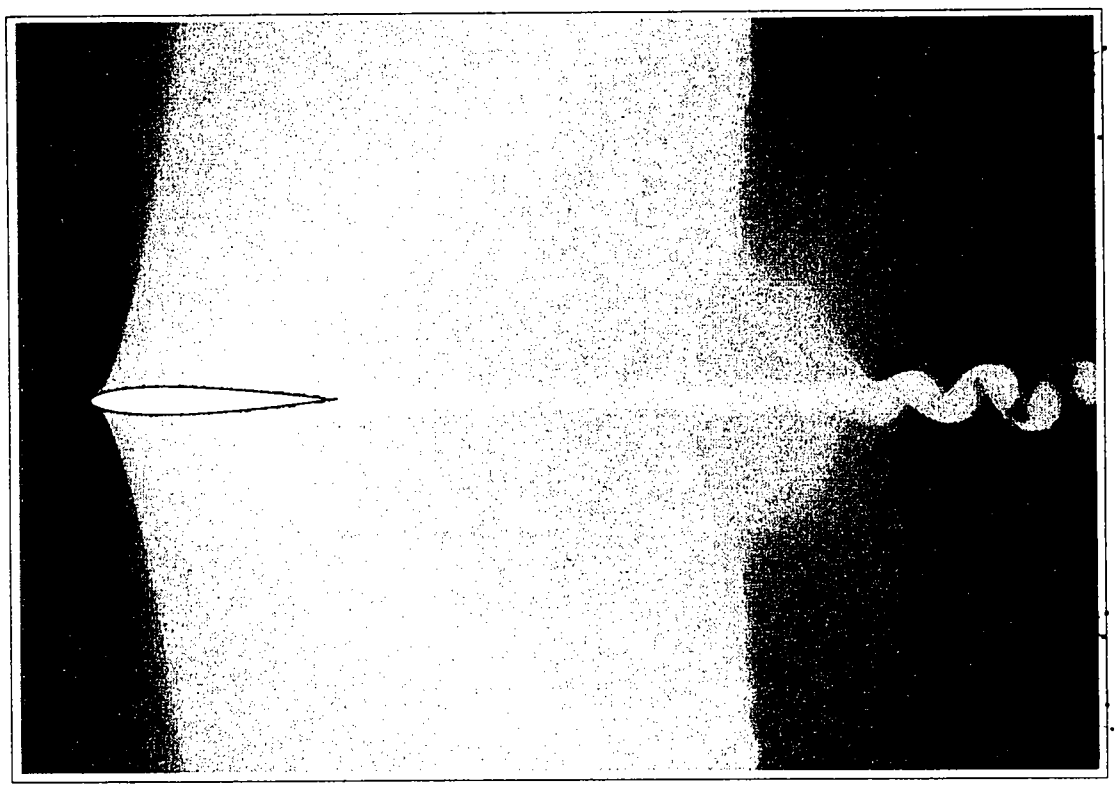


FIG. 29 - *Fish Tail, contour iso-densité, itération 6.*

cas très difficile car instationnaire en ce qui concerne le sillage et les positions des chocs. Le but est de montrer la capacité à suivre les fronts de chocs car au contraire du cas précédent l'instationnarité n'est pas limitée à une région de l'espace.

Les coefficients d'adaptations ont été les suivants

$$h_{min} = 5.10^{-3}, \quad h_{max} = 2., \quad L = 3.10^{-3}.$$

Là encore, la complexité de la configuration impliquerait pour un maillage structuré d'avoir des mailles de coté h_{min} pour une résolution identique. Ceci entrainerait un nombre de points de l'ordre de 6×10^7 (i.e. $30 \times 10/(5 \times 10^{-3})^2$). Dans notre cas, le nombre de points reste stable autour de 50 000 points.

La boucle d'adaptation comprend 110 itérations. A chaque étape 500 itérations du solveur Navier-Stokes ont été effectuées.

Les figures 30 à 33 montrent les maillages et lignes iso-densité après 60 puis 110 adaptations. On voit que les positions des chocs ont complétement changé d'une configuration à l'autre et que l'adaptation suit le mouvement. Malheureusement, la complexité de ces configurations rend leur calcul sur un maillage régulier impossible et par la même occasion toute comparaison est impossible. Ici encore, l'intersection des métriques permet de capturer choc, couche limite, sillage et discontinuité de contact. Le maillage à l'itération 60 comprend 50883 points alors qu'à l'itération 110, il a 54460 points, le temps nécessaire à la construction est de 74 secondes et l'étirement maximal est de l'ordre de 170.

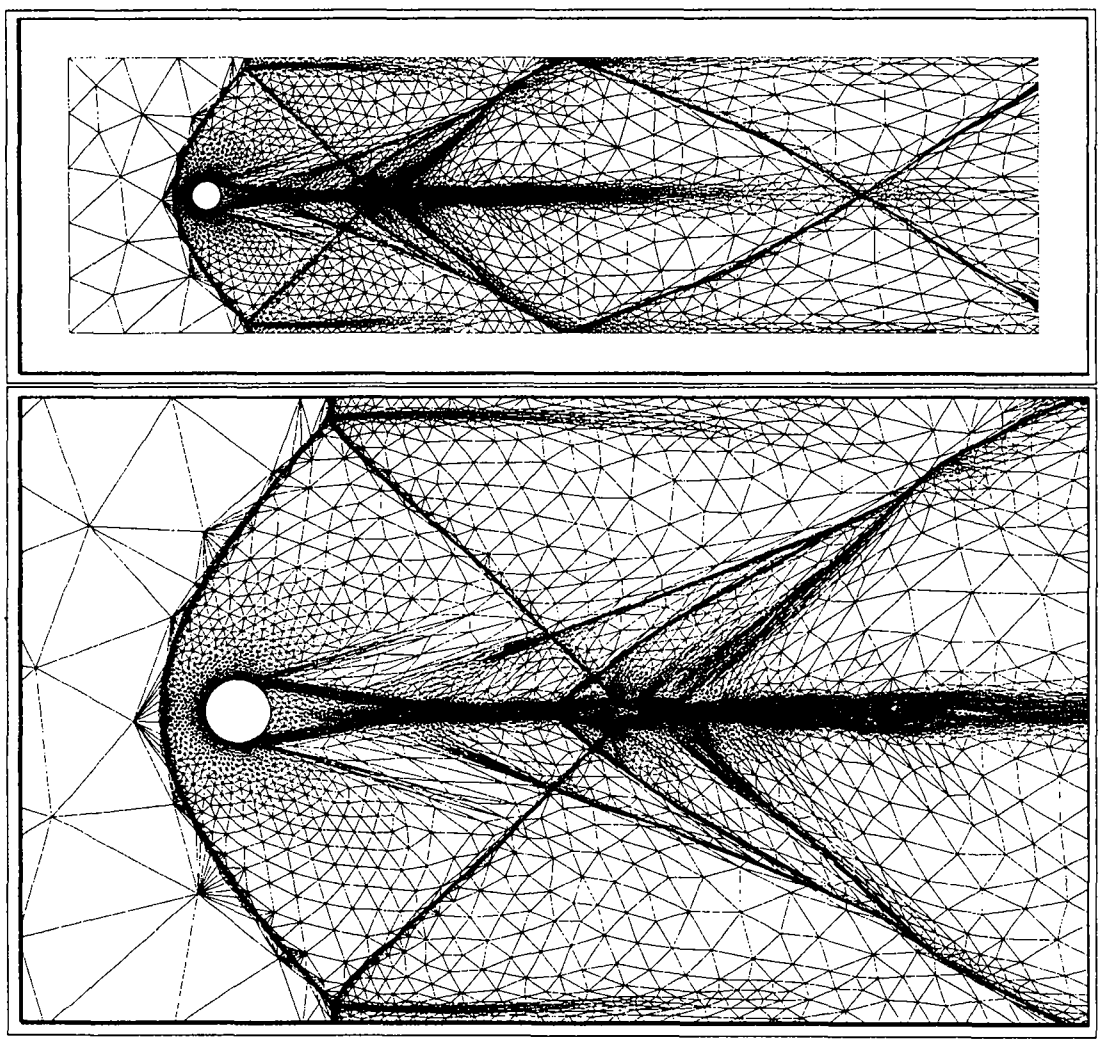


FIG. 30 - *Cylindre, maillage et agrandissement, itération 60.*

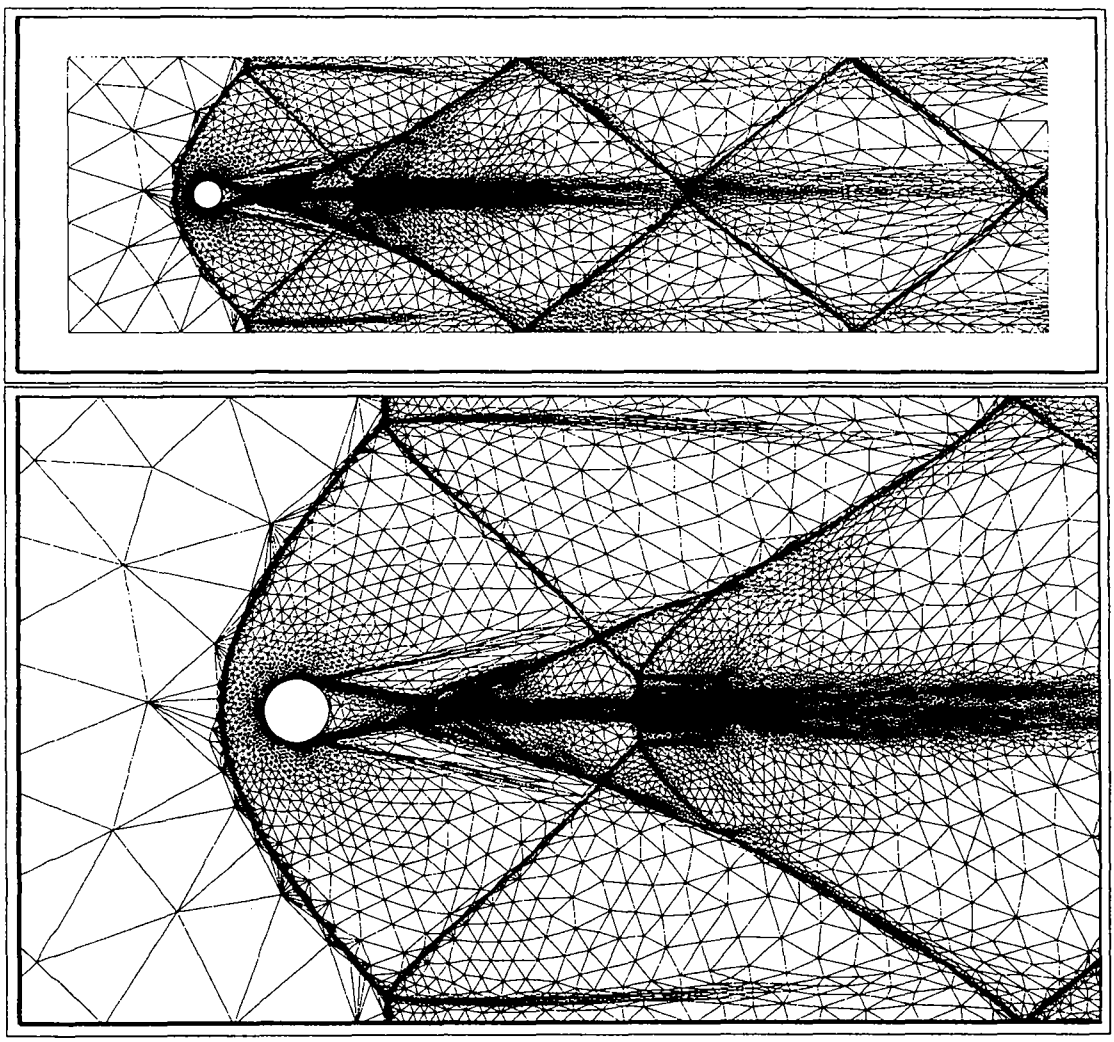


FIG. 31 - *Cylindre, maillage et agrandissement, itération 110.*

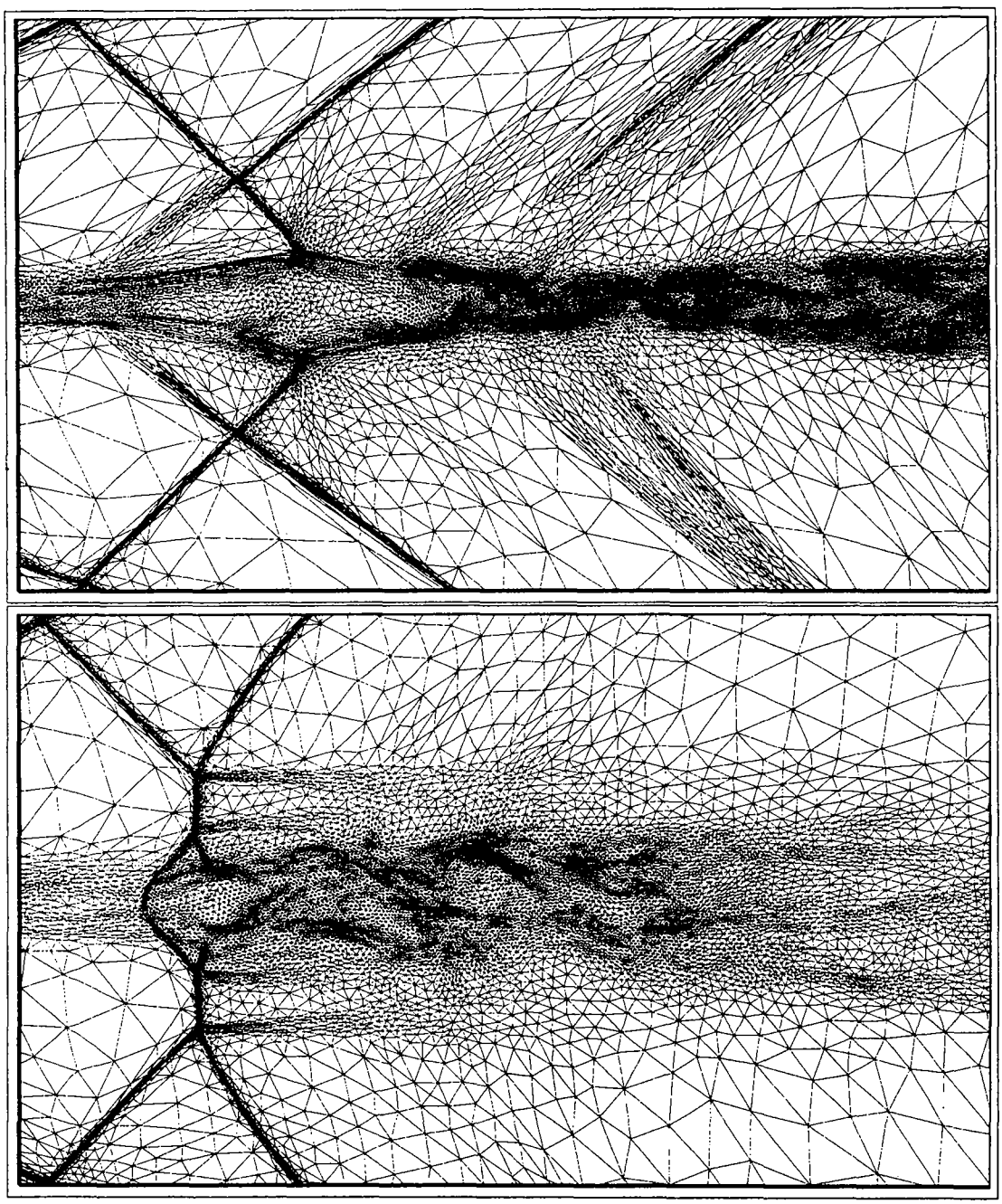


FIG. 32 - *Cylindre, maillage agrandissement, itérations 60 et 110.*

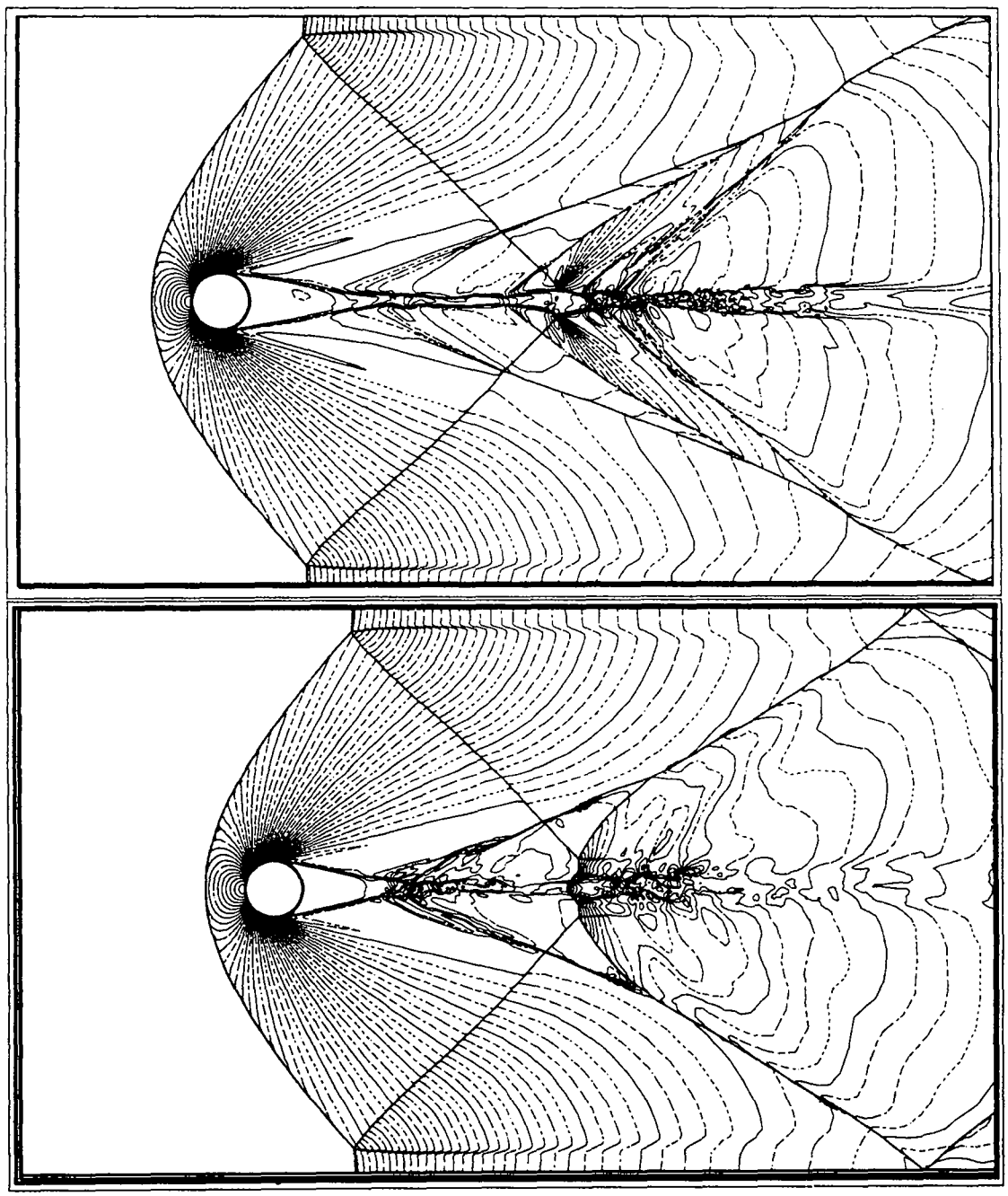


FIG. 33 - *Cylindre, contour iso-densité, itérations 60 et 110.*

5 Rapides conclusions

L'algorithme a été testé sur des données diverses dans R^2 incluant celles montrées dans ce rapport. Ces quelques exemples montrent l'efficacité de la méthode proposée. Ainsi, le cas bidimensionnel semble résolu de manière assez satisfaisante. A priori, il n'y a pas de difficulté particulière pour étendre la méthode de maillage au cas tridimensionnel, hormis le temps nécessaire pour développer les codes correspondans et sa validation par des tests académiques dans un premier temps puis par des tests sur des cas concrèts.

Le programme correspondant à la méthode de maillage proposée est disponible gratuitement (contacter les auteurs).

Références

[1] H. BOROUCHAKI, P. LAUG, Le mailleur bidimensionnel BL2D: manuel d'utilisation et documentation, *Rapport Technique INRIA*, n° 185, 1995.

[2] H. BOROUCHAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG ET E. SALTEL, Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes, *Rapport de recherche INRIA*, n° 2741, 1995.

[3] B. MOHAMMADI, Fluid Dynamics Computation with NSC2KE – an User-Guide, Release 1.0, *Rapport technique INRIA*, n° 164, 1994.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

