

# Etude numérique du verrouillage de quelques méthodes d'éléments finis pour les coques

Dominique Chapelle

► **To cite this version:**

Dominique Chapelle. Etude numérique du verrouillage de quelques méthodes d'éléments finis pour les coques. [Rapport de recherche] RR-2740, INRIA. 1995. <inria-00073953>

**HAL Id: inria-00073953**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073953>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Etude numérique du verrouillage de quelques  
méthodes d'éléments finis pour les coques*

Dominique Chapelle

**N° 2740**

Décembre 1995

PROGRAMME 6



*Rapport  
de recherche*





## **Etude numérique du verrouillage de quelques méthodes d'éléments finis pour les coques**

Dominique Chapelle

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Modulef and L.C.P.C., UMR 113 LCPC/CNRS - 2, allée Kepler,  
77420 Champs-sur-Marne, e.mail: chapelle@inrets.fr

Rapport de recherche n° 2740 — Décembre 1995 — 13 pages

**Résumé :** Le verrouillage numérique est un phénomène susceptible d'affecter toutes les méthodes d'éléments finis de coques minces et les arguments utilisés dans la littérature pour garantir que telle ou telle méthode n'en souffre pas sont rarement convaincants. On propose ici une méthodologie simple pour détecter numériquement le verrouillage et on l'utilise pour tester quelques éléments issus des codes CESAR-LCPC et MODULEF qui s'avèrent tous sujets à ce problème, quoiqu'à des degrés divers de gravité.

*(Abstract: pto)*

## **A numerical assesment of the locking phenomenon for several shell finite element methods**

**Abstract:** Judging from the computational engineering litterature, extensive efforts are directed towards designing and testing shell finite element methods intended to avoid numerical locking. From our point of view, however, the tests and arguments involved to guarantee this locking-free behaviour are seldom convincing. We propose a simple numerical procedure to detect locking, and we apply this procedure to test several elements in the CESAR-LCPC and MODULEF codes. All of them appear to be subject to locking, although some are much more seriously affected than others.

---

# 1 Introduction

Quantité d'éléments finis de coques sont proposés sur le marché des codes de calcul scientifique, et ils sont naturellement plus nombreux encore dans la littérature spécialisée. Parmi ces éléments, beaucoup sont présentés comme échappant au phénomène du verrouillage numérique, qui constitue une difficulté sérieuse pour toutes les formulations de structures minces [1, 6, 7]. Or les arguments avancés pour garantir cette propriété, reposant généralement sur des tests numériques effectués sur des cas-tests ("benchmarks"), semblent de façon générale peu convaincants, ce pour différentes raisons que l'on peut classer en trois catégories.

1. Cas-tests inappropriés. Pour parler de verrouillage il faut au préalable donner un sens à ce terme. La signification communément admise semble être l'incapacité des champs de déplacements discrétisés à représenter une classe particulière de déplacements que la formulation tend à favoriser. Pour les coques, cette classe se compose des déplacements pour lesquels la normale à la surface moyenne reste normale (hypothèse de Kirchhoff-Love), et la métrique de la surface moyenne elle-même reste inchangée (déplacements inextensionnels). Or l'existence de déplacements inextensionnels, propriété purement géométrique, n'a lieu que dans des conditions bien précises portant sur la géométrie de la surface moyenne et les conditions aux limites imposées, conditions très rarement remplies par les cas-tests utilisés dans la littérature. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, il n'y a pas d'autre déplacement inextensionnel que le déplacement nul, et on ne peut pas alors véritablement parler de verrouillage.
2. Absence de référence précise. Il existe une multitude de modèles de coques différents, dont on peut raisonnablement penser qu'ils doivent fournir des solutions différentes pour une sollicitation donnée. Pour chacun d'entre eux, on peut envisager une approximation de type Galerkin au moyen d'éléments finis. Or il n'est pas rare de ne voir décrire que l'élément fini utilisé, le modèle sous-jacent étant passé sous silence (hormis les constantes d'élasticité du matériau)! Plus sérieuse est la difficulté que représentent les méthodes numériques pour lesquelles il n'y a pas de modèle continu explicite car la coque est directement "modélisée" à partir d'un solide tridimensionnel par

des éléments finis. C'est notamment le cas de la famille des "general shell elements", très utilisée dans la pratique (voir par exemple [2]).

3. Problème de méthodologie. Le verrouillage se traduit en pratique par une *dégradation* de la qualité de l'approximation lorsque l'épaisseur de la structure diminue. C'est donc un phénomène *relatif* que l'on ne peut mettre en évidence qu'en comparant des comportements numériques pour différentes valeurs de l'épaisseur. La totalité des études dont nous avons eu connaissance ne considèrent jamais qu'une seule épaisseur pour un cas-test donné, même lorsque les cas-tests eux-même sont multipliés à l'envi [3].

Partant de cette analyse, cette étude propose une méthodologie simple de détection numérique du verrouillage qui ne présente aucune des déficiences identifiées ci-dessus. Ses caractéristiques sont les suivantes.

1. On considère un cas où on peut effectivement donner un sens au verrouillage, et donc on s'assure que les mouvements inextensionnels sont bien possibles. On sait que c'est le cas pratiquement exclusif des surfaces cylindriques fixées le long de génératrices uniquement et des surfaces hyperboliques fixées sur une partie de leur frontière seulement [9].
2. On souhaite pouvoir tester n'importe quelle méthode d'approximation, même s'il n'y a pas de modèle continu explicite qui lui correspond. Par ailleurs, dans le cas où un modèle explicite existe, il n'est pas possible en général d'obtenir une solution analytique. Par conséquent on ne pourra pas disposer d'une référence absolue pour déterminer l'erreur d'approximation. Notre procédure consiste à employer sur un même cas-test plusieurs maillages de raffinement croissant, et d'utiliser comme "référence" la solution numérique obtenue pour le maillage le plus fin. On se concentre ainsi sur le comportement de convergence de la méthode vers une limite donnée, et non sur la valeur de la limite elle-même.
3. Pour analyser l'influence de l'épaisseur sur le comportement de convergence, on effectuera les calculs sur le même cas-test pour plusieurs valeurs significativement différentes de ce paramètre.

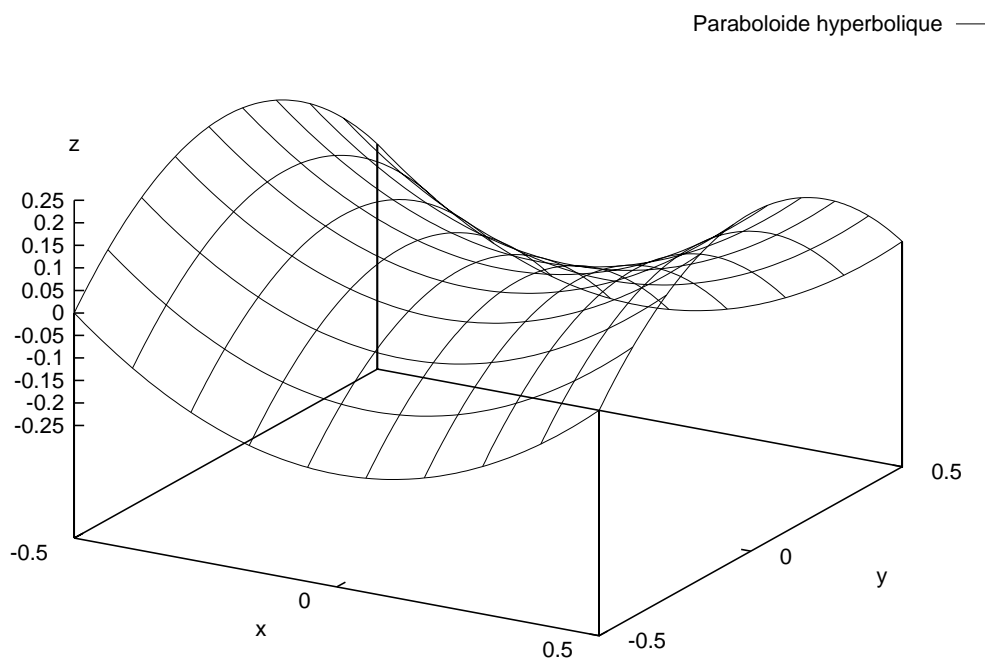


FIG. 1 - *Surface moyenne de la coque*

## 2 Tests numériques

### 2.1 Méthodologie détaillée

Notre cas-test est celui d'une coque dont la surface moyenne est une portion de paraboloïde hyperbolique d'équation

$$z = x^2 - y^2 \quad (x, y) \in [-0.5, 0.5]^2$$

et dont la géométrie est visualisée sur la figure 1.

On impose des déplacements nuls sur le bord correspondant à  $\{x = -0.5\}$ . Des déplacements inextensionnels non-triviaux peuvent alors se développer (voir [9])



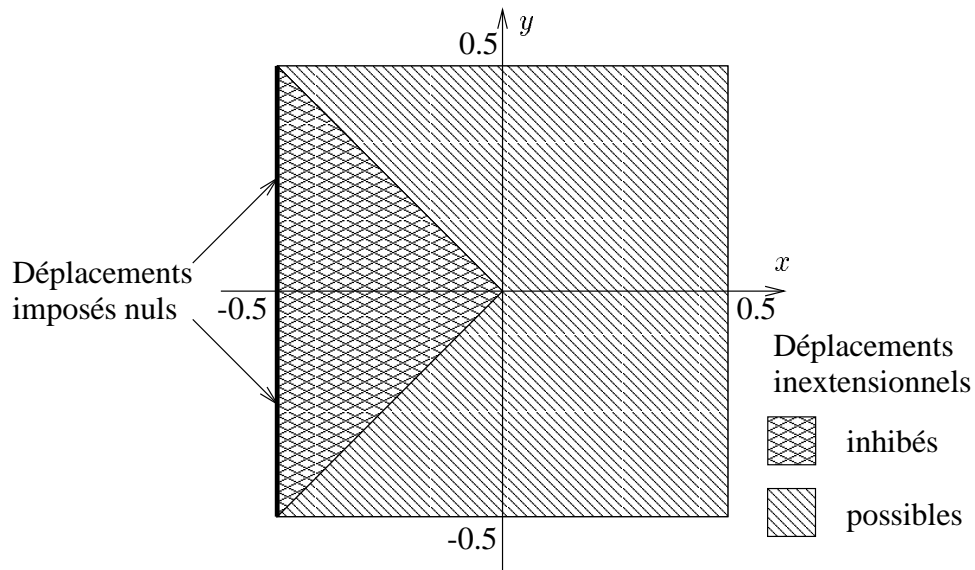


FIG. 2 - Localisation des déplacements inextensionnels

hors de la région définie par  $\{|y| \leq -x\}$ , représentée sur la figure 2. La coque est soumise à un chargement de type charge surfacique constante orientée selon l'axe  $(Oz)$ . Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3, et le module d'Young importe peu puisque seules les grandeurs relatives nous intéressent.

Pour une méthode d'approximation donnée, on définit plusieurs maillages qui dépendent des éléments finis utilisés et du mailler disponible correspondant. Notons que, pour des raisons de symétrie évidentes, on ne maillera que la moitié  $\{y > 0\}$  du domaine. Pour chacun de ces maillages, on calcule la solution numérique pour les épaisseurs  $e = 0.05, 0.01, 0.002$ , voire plus fines encore dans les cas où ces premiers résultats s'avèrent insuffisamment concluants. Considérant alors la série de résultats à épaisseur donnée, on utilise la solution du maillage le plus fin pour calculer une erreur *relative* pour les maillages plus grossiers sur une grandeur jugée représentative, en l'occurrence le déplacement selon  $(Oz)$  du point  $(x = 0.5, y = 0)$ . On trace enfin les courbes donnant, pour les différentes épaisseurs, l'erreur relative

	Q8				
$N$	10	20	40	60	80
$n$	1086	3966	15126	33486	59046

	DKT				Argyris-Ganev			
$N$	8	16	32	64	8	16	32	64
$n$	441	1581	5973	23205	1080	3876	14652	56940

TAB. 1 - Correspondance entre pas du maillage et degrés de liberté

calculée en fonction du pas caractéristique du maillage, et la comparaison de ces courbes permet en pratique la détection du verrouillage.

## 2.2 Résultats numériques

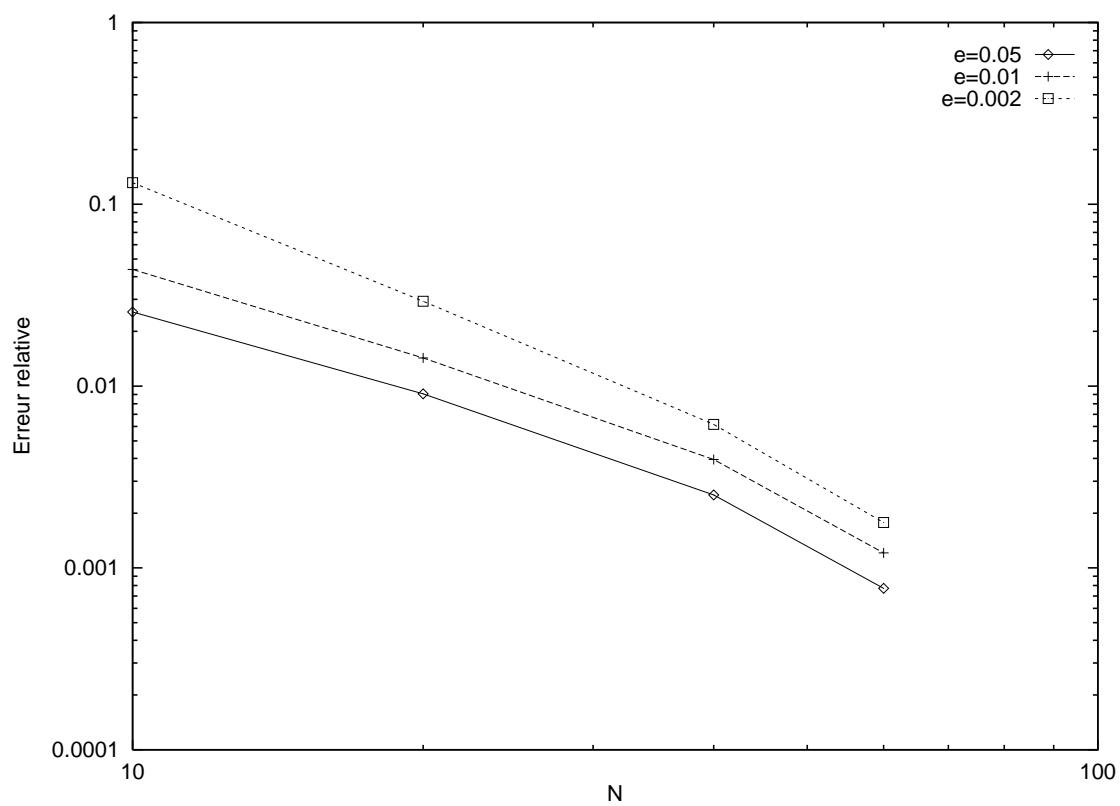
### 2.2.1 Élément Q8 de CESAR/LCPC

Cet élément appartient à la famille évoquée plus haut des “general shell elements”. C’est un quadrilatère à 8 noeuds avec 6 degrés de liberté par noeuds (3 déplacements, 3 rotations). Les maillages utilisés sont composés de carrés tous identiques (en projection dans le plan  $(xOy)$ ), correspondant à un découpage d’un côté du domaine en parties égales en nombre  $N = 10, 20, 40, 60, 80$ . Le tableau 1 donne le nombre de degrés de liberté pour le demi-maillage en fonction de  $N$ .

Les courbes de convergence sont représentées en échelle logarithmique sur la figure 3. Une dégradation de la convergence y apparaît nettement lorsque l’épaisseur diminue, et notamment entre les épaisseurs 0.01 et 0.002 où l’erreur relative est multipliée par un facteur proche de 3 pour  $N = 10$ . Cette dégradation met clairement en évidence le phénomène du verrouillage.

### 2.2.2 Élément DKT de MODULEF

Cet élément correspond à une approximation non-conforme du modèle de coque de Koiter [8]. La démonstration de la convergence de cette méthode est faite dans [5], mais la question de la sensibilité de cette convergence vis-à-vis de l’épaisseur

FIG. 3 - *Elément Q8. Courbes de convergence*

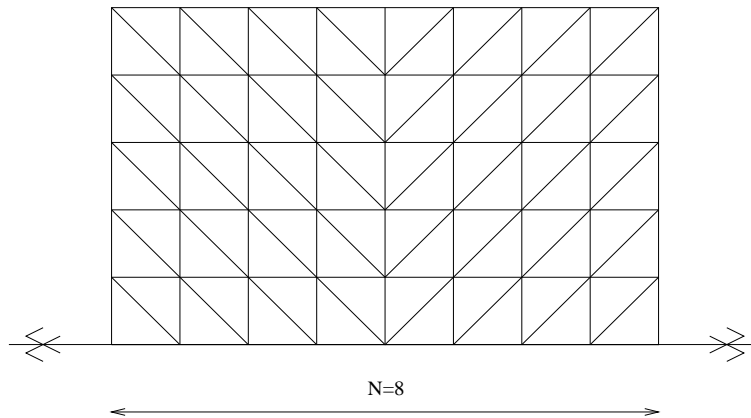


FIG. 4 - *Maillage-type employé pour les éléments MODULEF*

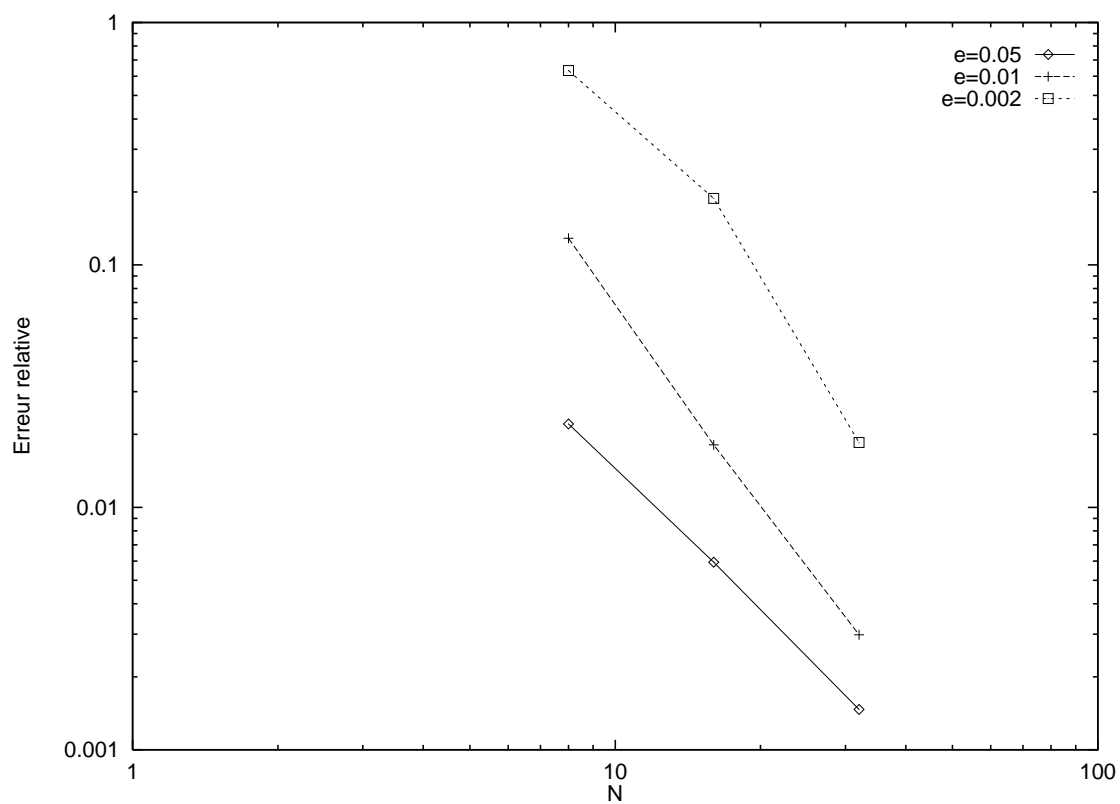
n'y est pas étudiée. Il s'agit d'un élément triangulaire avec 5 degrés de liberté aux sommets, et 2 aux milieux des côtés. Le maillage-type utilisé est représenté sur la figure 4 et la correspondance avec le nombre total de degrés de liberté est réalisée dans le tableau 1.

Sur les courbes de la figure 5, on observe une brutale dégradation de la convergence avec la diminution de l'épaisseur. Pour  $N = 8$ , l'erreur est multipliée par un facteur proche de 5 lorsque l'épaisseur passe de 0.05 à 0.01, et aussi de 0.01 à 0.002. Le verrouillage numérique est donc particulièrement fort ici.

### 2.2.3 Élément Argyris/Ganev de MODULEF

Il s'agit cette fois d'une approximation conforme du modèle de Koiter où les déplacements tangentiels sont approximés par des polynômes de degré 4 (élément de Ganev), alors que le déplacement transverse est approximé par des polynômes de degré 5 avec raccords  $\mathcal{C}^1$  (élément d'Argyris) [4]. La convergence à épaisseur fixée ne fait donc ici aucun doute. Ces éléments sont triangulaires avec 12 degrés de liberté aux sommets et 5 aux milieux des côtés. Les maillages utilisés sont les mêmes que pour les éléments DKT et le nombre total de degrés de liberté est donné par le tableau 1.

La figure 6 fait apparaître une dégradation de la convergence beaucoup plus limitée qu'avec les autres éléments. Pour  $N = 8$ , l'erreur n'est multipliée que par

FIG. 5 - *Elément DKT. Courbes de convergence*

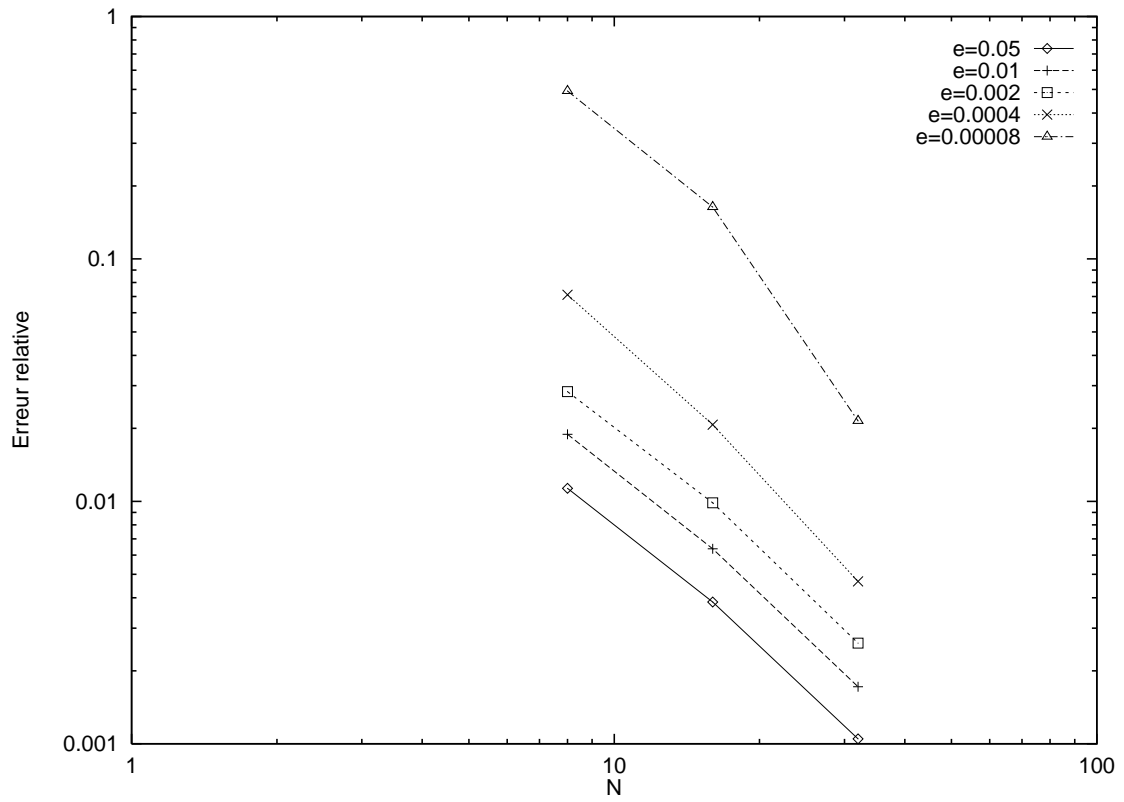


FIG. 6 - *Elément Argiris/Ganev. Courbes de convergence*

$e$	Q8			DKT			Argyris-Ganev		
	$N$	$n$	$T \times 10^{-6}$	$N$	$n$	$T \times 10^{-6}$	$N$	$n$	$T \times 10^{-6}$
0.05	20	3966	128	14	1230	7	10	1617	30
0.01	26	6558	359	22	2898	42	12	2262	59
0.002	34	11022	1030	40*	9225	446	16	3876	181

\*: valeur extrapolée

TAB. 2 - Effort nécessaire pour atteindre la précision de 1%

2.5 lorsque l'on passe de 0.05 à 0.002 pour l'épaisseur. Le phénomène s'amplifie pour des épaisseurs moindres, ce qui montre bien que le verrouillage numérique affecte également cet élément. Cependant, il reste très limité pour des épaisseurs variant dans un intervalle physiquement raisonnable (jusqu'à 2 pour 1000).

### 2.3 Comparaison entre les différents éléments

A partir des courbes de convergence données plus haut, on peut pour chaque méthode déterminer par interpolation le pas de maillage requis pour atteindre une précision donnée, et en déduire le nombre de degrés de liberté correspondants. On se fixera ici le seuil de 1% d'erreur relative. Dans le tableau 2, on fait figurer pour chacune des méthodes, et pour des valeurs de l'épaisseur de 0.05, 0.01 et 0.002, le pas de maillage  $N$ , le nombre de degrés de liberté  $n$ , ainsi qu'un indicateur  $T$  du temps de calcul nécessaire pour factoriser la matrice assemblée défini par  $T = b^2n$ , où  $b$  est la largeur de bande maximale pour la numérotation "naturelle".

Ces résultats appellent plusieurs remarques. Il apparaît une grande différence de comportement entre les éléments de MODULEF. Le DKT, élément de relativement bas degré, s'avère extrêmement performant pour une coque plutôt épaisse, mais son comportement est très sévèrement altéré par une diminution de l'épaisseur. L'élément Argyris/Ganev est certes beaucoup plus lourd dans l'absolu, mais il est beaucoup moins sensible au verrouillage et ses performances s'en trouvent comparables à celles du DKT pour une épaisseur moyenne, et bien meilleures pour une faible épaisseur. Ce résultat demanderait évidemment à être confirmé par d'autres tests, mais il semble indiquer que les éléments de haut degré peuvent

---

constituer une solution de compromis pour pallier le problème du verrouillage des coques. Quant à l'élément Q8, le tableau 2 confirme que sa sensibilité au verrouillage est intermédiaire entre les deux autres éléments. Ses performances sont par contre moins bonnes que celles des deux autres dans toutes les configurations.

## Références

- [1] D.N. Arnold. Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem. *Numer. Math.*, 37:405–421, 1981.
- [2] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [3] T. Belytschko, H. Stolarsky, W.K. Liu, N. Carpenter, and J.S.J. Ong. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 51:221–258, 1985.
- [4] M. Bernadou. Numerical analysis of thin shell problems: approximation and shape optimization. Technical Report 744, INRIA, 1987.
- [5] M. Bernadou, P. Mato Eiroa, and P. Trouvé. On the convergence of a discrete Kirchhoff triangle method valid for shells of arbitrary shape. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118:373–391, 1994.
- [6] D. Chapelle. Approximations numériques stables des formulations de structures minces. In *Journées des sciences de l'ingénieur*, octobre 1994.
- [7] T. Kerber. Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes. *La Recherche Aérospatiale*, (3):45–76, May-June 1990.
- [8] W.T. Koiter. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, B69:1–54, 1965.
- [9] E. Sanchez-Palencia. On the membrane approximation for thin elastic shells in the hyperbolic case. *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*, 6:311–331, 1993.





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399