INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET AUTOMATIQUE

Conditions aux limites absorbantes pour les équations de Maxwell en milieu stratifié

Francis Collino

N° 2700

Novembre 1995

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,

modélisation

et logiciel numérique



ISSN 0249-6399

INRIA
ROCQUENCOURT

Conditions aux limites absorbantes pour les équations de Maxwell en milieu stratifié

Francis Collino

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet Ident

Rapport de recherche n° 2700 — Novembre 1995 — 156 pages

Résumé : La résolution numérique des équations de Maxwell en régime transitoire dans un milieu de propagation infini nécessite l'adjonction de conditions aux limites absorbantes (CLA) sur les bords du domaine de calcul. Dans ce rapport, on décrit un schéma numérique s'appuyant sur des CLA dites d'ordre élevé étudiées dans un travail précédent et on donne une description fonctionnelle de l'algorithme en vue de son implémentation dans le code GORF du Centre d'étude de Gramat.

Mots-clé : Condition aux limites absorbante, méthode de différence finie, équations de Maxwell

(Abstract: pto)

Ce travail a été soutenu par le Centre d'étude de Gramat dans le cadre d'une convention de recherche. Les moyens de calcul de l'IDRIS ont été utilisés.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Absorbing Boundary Conditions for the Maxwell's Equations in a stratified conducting media

Abstract: The numerical solution of transient Maxwell equations in infinite domains of propagation requires the adjunction of artificial conditions on the boundaries of the computational domain. In this report, a description of a numerical scheme based on the discretisation of the so-called higher order absorbing boundary conditions (ABC) is given. A detailed description of their implementation is also provided.

Key-words: Absorbing Boundary Condition, Finite-difference Time-domain method, Maxwell equations

Chapitre 1

CLA d'ordre élevé pour le système de Maxwell en milieu stratifié

1.1 Introduction

Dans un précédent rapport, [4], on a présenté et analysé de nouvelles Conditions aux Limites Absorbantes (CLA) d'ordre élevé pour le système de Maxwell dans un cube. La méthode consiste à imposer sur chaque face du cube une CLA d'ordre élevé associée à l'équation des ondes scalaire à chacune des deux composantes tangentielles du champ électrique. Des conditions d'arête et de coin, obtenues par l'étude d'une famille de solutions particulières complètent le système. Un schéma de discrétisation de ces équations a été présenté et validé sur des expériences numériques. Le cas traité était celui du milieu homogène conducteur ou non conducteur.

L'objet de ce qui suit est de généraliser ce travail au cas d'un milieu stratifié horizontalement. Toutes les équations composant les CLA du cas homogène étant locales, cette généralisation ne pose pas de problème méthodologique important, si ce n'est dans le choix de la position des paramètres par rapport aux opérateurs différentiels (par exemple $c^2\partial_z^2$ peut s'écrire $c(z)^2\partial_z^2$ ou $c(z)\partial_z c(z)\partial_z$). Pour statuer sur cette indétermination, nous nous sommes ins-

pirés des travaux de Bamberger et al., [1], portant sur les équations paraxiales en milieu hétérogène sans toutefois apporter de justification sur ce point.

La présentation comprend cinq sections. La première est dédiée à une présentation des notations utilisées. Celles-ci sont assez lourdes eu égard à la multiplicité des indices intervenant dans la formulation des problèmes continu et surtout discrétisé. Les trois sections suivantes traitent, successivement, le cas des faces, des arêtes et des coins. Pour chacune de ces trois géométries, on présente sans trop s'appesantir une formulation généralisant au cas stratifié les problèmes continus et leur discrétisation. Dans une seconde étape, on explicite la récurrence en temps du schéma. Enfin, on donne *in extenso* dans une sous-section qui peut être lue indépendamment de ce qui la précède, un algorithme de résolution en vue d'une implémentation sur ordinateur. La dernière section est consacrée à l'inversion du système linéaire au coin, la taille de la matrice ($12\ L^2$, où L est le nombre de fractions rationnelles pour la CLA) justifiant une attention particulière à ce point.

1.2 Notations

1.2.1 Variables d'espace

- Les coordonnées sont x, y et z
- Les pas de discrétisation sont constants dans chaque direction. On les note Δx, Δy et Δz.
- La discrétisation spatiale fait intervenir deux type de nœuds. Les nœuds de type entier et les nœuds de type demi-entier.

type entier :	type demi-entier:
$x_i = i\Delta x$	$x_{i-\frac{1}{2}} = (i-\frac{1}{2})\Delta x$
$y_j = i\Delta y$	$y_{j-\frac{1}{2}} = (j-\frac{1}{2})\Delta y$
$z_k = i\Delta z$	$z_{k-\frac{1}{2}} = (k-\frac{1}{2})\Delta z$

Ainsi, i est l'indice en x, j est l'indice en y et k est l'indice en z.

- Les indices i, j, k peuvent varier au plus entre 0 et n_x, n_y, n_z.
- Si F est une fonction d'une variable d'espace, par exemple $F(x)$, on notera F_i et $F_{i-\frac{1}{2}}$ ces valeurs prises aux nœuds entiers et demi-entiers. L'indice spatial est donc toujours situé en bas et à droite du symbole de la fonction.

$$F_i = F(x_i) \quad F_{i-\frac{1}{2}} = F\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Ces notations s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables

$$\text{Exemples :} \quad G_{i,j-\frac{1}{2}} = G\left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}\right), \quad H_{k-\frac{1}{2},j,i-\frac{1}{2}} = H\left(z_{k-\frac{1}{2}}, y_j, x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

- Le symbole $\bigcirc$ désignera toujours un nœud de type entier, $\otimes$ un nœud de type demi-entier. Ces symboles sont utilisés pour signifier de façon générique les nœuds frontières des fonctions de face, d' arête ou de coin.

1.2.2 Variable temporelle

- t désigne le temps. Δt est le pas de temps. On distingue également les instants de type entier de ceux de type demi-entier

$$t_n = n\Delta t, \quad t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})\Delta t$$

n est ainsi l'indice en temps.

- Si F est une fonction du temps, on notera F^n et $F^{n-\frac{1}{2}}$ ces valeurs prises aux instants entiers ou demi-entiers. L'indice temporel est donc toujours situé en haut et à droite du symbole de la fonction.

$$F^n = F(t_n), \quad F^{n-\frac{1}{2}} = F\left(t_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

On peux bien sûr combiner ces notations avec celles relatives aux variables spatiales.

$$\text{Exemples :} \quad G^n_{i,j-\frac{1}{2}} = G\left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, t_n\right), \quad H^{n-\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},j,i-\frac{1}{2}} = H\left(z_{k-\frac{1}{2}}, y_j, x_{i-\frac{1}{2}}, t_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

1.2.3 Paramètres décrivant la physique

Le physique du problème est supposée être stratifiée suivant la variable verticale z, les points de stratification coïncidant avec des nœuds de type demi-entier. On caractérise le milieu par la donnée des paramètres ϵ, μ et σ comme respectivement la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité du milieu. On suppose ces paramètres constants entre deux points demi-entiers, on définit

$$\begin{array}{l} \epsilon_k = \epsilon(z), \quad \mu_k = \mu(z), \quad \sigma_k = \sigma(z), \\ \text{pour} \quad (k-\frac{1}{2})\Delta z < z < (k+\frac{1}{2})\Delta z \end{array}$$

Les équations aux dérivées partielles qui composent les CLA font intervenir les paramètres

$$\begin{array}{lcl} c = \sqrt{\dfrac{1}{\epsilon\mu}} & : & \text{vitesse du milieu} \\ (\sigma\mu c) & \equiv & \text{homogène à l'inverse d'une longueur.} \end{array}$$

La discrétisation de ces équations au nœud de type demi-entier $(k-\frac{1}{2})\Delta z$ font apparaître les quantités

$$\begin{array}{lcl} (\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{2}\left(\sigma_k\sqrt{\dfrac{\mu_k}{\epsilon_k}} + \sigma_{k-1}\sqrt{\dfrac{\mu_{k-1}}{\epsilon_{k-1}}}\right) \\ \dfrac{1}{c_{k-\frac{1}{2}}} & = & \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu_k\epsilon_k} + \sqrt{\mu_{k-1}\epsilon_{k-1}}\right) \\ c_{k-1} & = & \dfrac{1}{\sqrt{\mu_{k-1}\epsilon_k}} \quad c_k = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_k\epsilon_k}} \end{array}$$

tandis que la discrétisation en des nœuds de type entier utilise

$$\begin{aligned}
(\sigma\mu c)_k &= \sigma_k\sqrt{\frac{\mu_k}{\epsilon_k}} \\
\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k\epsilon_k}}+\frac{1}{\sqrt{\mu_{k-1}\epsilon_{k-1}}}\right) \\
\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k\epsilon_k}}+\frac{1}{\sqrt{\mu_{k+1}\epsilon_{k+1}}}\right) \\
\frac{1}{\tilde{c}_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients retenus (de façon arbitraire) sont

- Les valeurs ponctuelles du paramètre pour $\sigma\mu c$
- Les valeurs moyennées sur un pas d'espace pour c
- Les valeurs moyennées sur deux pas d'espace pour $\frac{1}{c}$.

1.2.4 Paramètres pour la CLA

La CLA est déterminée par la donnée

- D'un entier positif ou nul noté L,
- De $2L$ paramètres positifs notés α_l et β_l, l variant de 1 à L.
  α_l et β_l sont choisis tels que l'on ait

$$\forall\, |x|<1 \quad \sqrt{1-x} \approx 1-\sum_{l=1}^{L}\beta_l\frac{x}{1-\alpha_l x} = \gamma-\sum_{l=1}^{L}\frac{\beta_l}{\alpha_l}\frac{1}{1-\alpha_l x},$$

  expression dans laquelle on a introduit

$$\gamma = 1+\sum_{l=1}^{L}\frac{\beta_l}{\alpha_l}$$

γ est un paramètre qui sera fréquemment utilisé. Enfin, pour des raisons de stabilité, il est conseillé de s'assurer de

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l}{1-\alpha_l} \; < \; 1.$$

1.2.5 Notations pour le cube

Le cube de calcul est composé des six composantes du champ électromagnétique. On note E_x, E_y, E_z les composantes du champ électrique et H_x, H_y, H_z les composantes du champ magnétique. Les règles de discrétisation de ces champs sont les suivantes

- Discrétisation en temps : les trois composantes du champ électrique sont évaluées en des instants de type entier, les trois du champ magnétique en des instants de type demi-entier.

- Discrétisation en espace : Chaque composante du champ électrique est discrétisée aux nœuds de type entier pour la variable commune à la composante et aux nœuds de type demi-entier pour les deux variables distinctes de la composante. Le champ magnétique connaît une situation inverse. La variable commune à la composante est échantillonnée en des nœuds de type demi-entier, les deux composantes distinctes en des nœuds de type entier.

En résumé on sera amené à travailler avec

$$(E_x)^n_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}, \quad (E_y)^n_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}, \quad (E_z)^n_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k},$$

$$(H_x)^{n-\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j,k}, \qquad (H_y)^{n-\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2},k}, \qquad (H_z)^{n-\frac{1}{2}}_{i,j,k-\frac{1}{2}}.$$

1.2.6 Notations pour les faces

Le cube de calcul, (comme tout cube qui se respecte) possède six faces. On convient de repérer chaque face par son vecteur normal. On notera par un x entre parenthèse soit $^{(x)}$ les deux faces dont la normale orientée est $\pm\hat{x}$. Les deux faces seront discriminées par le signe $\pm$ de la normale à la face. On

associera $\varepsilon_x = 1$ pour le signe positif et $\varepsilon_x = -1$ pour le signe négatif. En substituant y ou z à x. On caractérise ainsi les six faces

face x^+ : indice $^{(x)}$, $\varepsilon_x = +1$	face x^- : indice $^{(x)}$, $\varepsilon_x = -1$
face y^+ : indice $^{(y)}$, $\varepsilon_y = +1$	face y^- : indice $^{(y)}$, $\varepsilon_y = -1$
face z^+ : indice $^{(z)}$, $\varepsilon_z = +1$	face z^- : indice $^{(z)}$, $\varepsilon_z = -1$

Sur chaque face on définit des fonctions de face.

On en distingue deux types, les fonctions auxiliaires de face et les composantes tangentielles du champ électrique.

Les fonctions auxiliaires de face prennent leur valeur sur le plan considéré. On en compte $L + 1$ par plan (le "+1" sera expliqué plus bas). Leur notation se construit progressivement de la manière suivante:

- ψ_l désigne la $l$ième fonction vectorielle.
- $\psi_l^{(x)}$ précise qu'il s'agit d'une fonction relative à une face dont la normale est $\pm\hat{x}$. En fait on devrait noter $\psi_l^{(x^+)}$ ou $\psi_l^{(x^-)}$. Mais les deux faces $^{(x^+)}$ et $^{(x^-)}$ ne s'intersectant pas l'algorithme de calcul ne fait jamais intervenir ces deux fonctions en même temps et on allège la notation sans confusion possible.
- $\psi_{l,y}^{(x)}$ et $\psi_{l,z}^{(x)}$ désignent les deux composantes de la fonction $\psi_l^{(x)}$
- Enfin $\psi_{l,y}^{(x)}$ et $\psi_{l,z}^{(x)}$ sont des fonctions des variables y, z et t. On obtient finalement,
$$\psi_{l,y}^{(x)}(y,z,t) \quad \text{et} \quad \psi_{l,z}^{(x)}(y,z,t)$$

Pour étendre ces notations au cas des faces $^{(y)}$ et $^{(z)}$, on a choisi de "faire tourner les indices" des notations précédemment décrites. L'intérêt de cette manière de faire est de permettre de n'écrire qu'un seul algorithme pour chacun des trois types de face et ainsi de n'avoir à coder qu'un seul sous-programme, la rotation des arguments d'appel permettant de traiter les trois cas.

On définit donc

face $^{(x)}$	$\psi_{l,y}^{(x)}(y,z,t)$	et	$\psi_{l,z}^{(x)}(y,z,t)$
face $^{(y)}$	$\psi_{l,z}^{(y)}(z,x,t)$	et	$\psi_{l,x}^{(y)}(z,x,t)$
face $^{(z)}$	$\psi_{l,x}^{(z)}(x,y,t)$	et	$\psi_{l,y}^{(z)}(x,y,t)$

Ce choix se paye par une contorsion intellectuelle pour admettre que le x vient après le z pour les fonctions de type $^{(z)}$!

La discrétisation des fonctions auxiliaires de face obéit aux règles suivantes.

- Discrétisation temporelle : les fonctions de face sont évaluées en des instants de type entier $(n\Delta t)$.
- Discrétisation spatiale : elles sont discrétisées
  - sur des nœuds de type demi-entier suivant la coordonnée distincte de la composante,
  - sur des nœuds de type entier suivant la coordonnée égale à la composante.

$$\text{Exemples :} \left| \begin{array}{lcl} \left(\psi^{(x)}_{l,y}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} & = & \left(\psi^{(x)}_{l,y}\right)(y_j, z_{k-\frac{1}{2}}, t_n) \\ \left(\psi^{(y)}_{l,x}\right)^n_{k-\frac{1}{2},i} & = & \left(\psi^{(y)}_{l,x}\right)(z_{k-\frac{1}{2}}, x_i, t_n) \\ \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^n_{k,i-\frac{1}{2}} & = & \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)(z_k, x_{i-\frac{1}{2}}, t_n) \end{array} \right.$$

Chaque composante est donc décalée d'un demi-pas dans chaque direction.

Le deuxième type de fonction de face est constitué des composantes tangentielles du champ électrique. Celles-ci sont situées sur un plan décalé d'un demi-pas (à l'extérieur ou à l'intérieur) par rapport à la face considèrée. Comme on a deux composantes par face et deux faces, face interne et externe, on obtient quatre plans distincts. On désigne par $\otimes_b^+$, $(b = x, y, z)$ le nœud externe et par par $\otimes_b^-$ le nœud interne. En adoptant les même conventions que pour les fonctions auxiliaires de face, on définira ainsi, par exemple pour une face $^{(y)}$

$$\begin{array}{ll} E^{(y)}_x(z,x,t)_{\otimes_y^+}, & E^{(y)}_z(z,x,t)_{\otimes_y^+}, \\ E^{(y)}_x(z,x,t)_{\otimes_y^-}, & E^{(y)}_z(z,x,t)_{\otimes_y^-}, \end{array}$$

fonctions dont on considèrera les valeurs échantillonnées

$$\begin{array}{ll} \left(E^{(y)}_x\right)^n_{k-\frac{1}{2},i,\otimes_y^+}, & \left(E^{(y)}_z\right)^n_{k,i-\frac{1}{2},\otimes_y^+}, \\ \left(E^{(y)}_x\right)^n_{k-\frac{1}{2},i,\otimes_y^-}, & \left(E^{(y)}_z\right)^n_{k,i-\frac{1}{2},\otimes_y^-}. \end{array}$$

Ces fonctions sont bien sûr en rapport avec le champ électrique défini sur le cube. On a par exemple

$$\begin{aligned} \left(E_x^{(y)}\right)^n_{k-\frac{1}{2},i,\otimes_y^+} &= (E_x)^n_{i,j^{ext}-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \\ \left(E_y^{(z)}\right)^n_{i-\frac{1}{2},j,\otimes_z^+} &= (E_y)^n_{i-\frac{1}{2},j,k^{ext}-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où j^{ext} et k^{ext} désignent les coordonnées des nœuds externes au cube de calcul.

1.2.7 Notation pour les arêtes

Dans le cas de deux plans non parallèles, on est amené à définir sur l'arête commune à ces deux plans des fonctions d'arête. Chaque fonction d'arête est associée à une composante d'une fonction de face : les fonctions d'arête vérifient des équations des ondes 1D le long de l'arête, leur terme source étant fonction de cette composante. Il y a L fonctions d'arête pour chaque composante de fonction de face. Comme il y a deux faces et deux composantes on est amené à "accrocher" quatre familles de fonctions d'arête par arête, chaque famille comprenant $L \times L$ éléments (Le premier L est dû au nombre des fonctions de face, le second au nombre de fonctions d'arête par composante).

Les notations, pour une arête suivant z, sont les suivantes

$$\begin{aligned} \psi_{l,m}^{(x,z)} &\rightarrow \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right), \quad \psi_{l,m}^{(y,z)} \rightarrow \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right), \\ \eta_{l,m}^{(y,z)} &\rightarrow \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right), \quad \eta_{l,m}^{(x,z)} \rightarrow \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, le symbole η est lié aux composantes qui sont distinctes de la variable courante de l'arête, le symbole ψ à celles qui sont confondues à cette même variable. Le premier indice inférieur, l, renvoie au numéro de la fonction auxiliaire de face associée, le premier terme entre parenthèses et en indice supérieur, à la normale de cette même face. Enfin le second indice entre parenthèse rappelle la variable courante de l'arête.

La discrétisation des fonctions auxiliaires d'arête s'appuie sur les règles suivantes.

- Discrétisation temporelle : les fonctions d'arête sont évaluées en des instants de type entier ($n\Delta t$).

– Discrétisation spatiale : elles sont discrétisées

  – sur des nœuds de type demi-entier pour les fonctions de type η
  – sur des nœuds de type entier pour les fonctions de type ψ

$$\text{Exemples :} \left| \begin{array}{rcl} \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} & = & \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)(z_{k-\frac{1}{2}}, t_n) \\ \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k}^{n} & = & \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)(z_k, t_n) \end{array} \right.$$

Les notations relatives aux arêtes en y et z s'obtiennent bien sûr par rotations d'indices.

1.2.8 Notations pour les coins

A l'intersection de trois arêtes concourantes, on est amené à définir L fonctions de coin pour chaque fonction d'arête. Comme il y a quatre familles de fonctions d'arête par arête, on arrive à douze familles au coin d'intersections, chaque famille contenant L^2 éléments. Au total on a donc 12 L^3 fonctions de coin. En adoptant les notations consistant à réécrire la fonction d'arête associée et à ajouter le troisième indice, on est amené à définir

$$l, m, p = 1, \ldots, L$$

$$\begin{array}{lll} \left(\psi_{l,m,p}^{(z,x)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(x,y)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(y,z)}\right)^{n+1}, \\ \left(\psi_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(z,y)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1}, \\ \left(\eta_{l,m,p}^{(z,x)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(x,y)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(y,z)}\right)^{n+1}, \\ \left(\eta_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(z,y)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1} \end{array}$$

Ces fonctions, uniquement définies au coin sont échantillonnées en temps suivant les instants de type entier.

1.3 Équations pour les faces absorbantes

1.3.1 Les équations dans le domaine du continu

On se place sur la face x^- ($\varepsilon_x = -1$) ou x^+ ($\varepsilon_x = +1$), on définit l'opérateur $A(z)$ par,

$$A(z) = \mathrm{div}\left(c(z).\vec{\nabla}_T\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(c(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) + c(z)\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

Les équations de faces dans le domaine du continu sont,

$$\varepsilon_x \frac{\partial E_y^{(x)}}{\partial x} + \frac{\gamma}{c(z)}\frac{\partial E_y^{(x)}}{\partial t} - \frac{1}{c(z)}\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial\left(\psi_m^{(x)}\right)_y}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad x = x^{\pm}, \tag{1.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \ l = 1, .., L, \\ \\ \dfrac{1}{c(z)}\dfrac{\partial^2\left(\psi_l^{(x)}\right)_y}{\partial t^2} + \alpha_l\left((c\sigma\mu)(z)\dfrac{\partial\left(\psi_l^{(x)}\right)_y}{\partial t} - A(z).\left(\psi_l^{(x)}\right)_y\right) = \dfrac{1}{c(z)}\dfrac{\partial^2 E_y^{(x)}}{\partial t^2}/_{x=x^{\pm}} \end{array} \right. \tag{1.3}$$

pour les composantes suivant y, et

$$\varepsilon_x \frac{\partial E_z^{(x)}}{\partial x} + \frac{\gamma}{c(z)}\frac{\partial E_z^{(x)}}{\partial t} - \frac{1}{c(z)}\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\partial\left(\psi_m^{(x)}\right)_z}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad x = x^{\pm}, \tag{1.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \ l = 1, .., L, \\ \\ \dfrac{1}{c(z)}\dfrac{\partial^2\left(\psi_l^{(x)}\right)_z}{\partial t^2} + \alpha_l\left((c\sigma\mu)\dfrac{\partial\left(\psi_l^{(x)}\right)_z}{\partial t} - A(z).\left(\psi_l^{(x)}\right)_z\right) = \dfrac{1}{c(z)}\dfrac{\partial^2 E_z^{(x)}}{\partial t^2}/_{x=x^{\pm}} \end{array} \right. \tag{1.5}$$

pour les composantes en z.

Cette généralisation des équations de face au cas hétérogène est directement inspirée de la formulation proposée par Bamberger et Al. pour les équations paraxiales, [1].

1.3.2 Les équations dans le domaine discret

Le schéma utilise trois plans en x, soient

$$\text{face } x^- : \qquad x = \tfrac{1}{2}\Delta x, \qquad x = \Delta x, \qquad x = \tfrac{3}{2}\Delta x$$

$$\text{face } x^+ : \qquad x = (nx - \tfrac{1}{2})\Delta x, \quad x = (nx - 1)\Delta x, \quad x = (nx - \tfrac{3}{2})\Delta x$$

Les fonctions auxiliaires de face sont évaluées sur le plan milieu, c'est à dire sur le plan où s'applique la CLA. Sur les plans décalés de $\pm\Delta x/2$, le schéma utilise les composantes tangentielles du champ électrique. La grille de discrétisation sur chacun des trois plans est représentée sur la figure 1.3.2. Les composantes suivant y sont évaluées en des nœuds décalés d'un demi pas dans chaque direction par rapport à ceux où sont évaluées les composantes suivant z.

Dans la suite on indicera par $\otimes_x^+$ la face externe (i.e. la face $\Delta x/2$ ou $(n_x - 1/2)\Delta x$) et $\otimes_x^-$ la face interne. (i.e. la face $3\Delta x/2$ ou $(n_x - 3/2)\Delta x$). La discrétisation proposée s'appuie sur le schéma composé de,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left((E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} + (E_y^{(x)})^{n}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} - (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} - (E_y^{(x)})^{n}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} \right)}{2\Delta x} + \\ + \gamma \dfrac{\left((E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} + (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} - (E_y^{(x)})^{n}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} - (E_y^{(x)})^{n}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} \right)}{2c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t} - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left(\left(\psi_{my}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} - \left(\psi_{my}^{(x)}\right)^{n}_{j,k-\frac{1}{2}} \right)}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t} \;=\; 0 \end{array} \right. \tag{1.6}$$

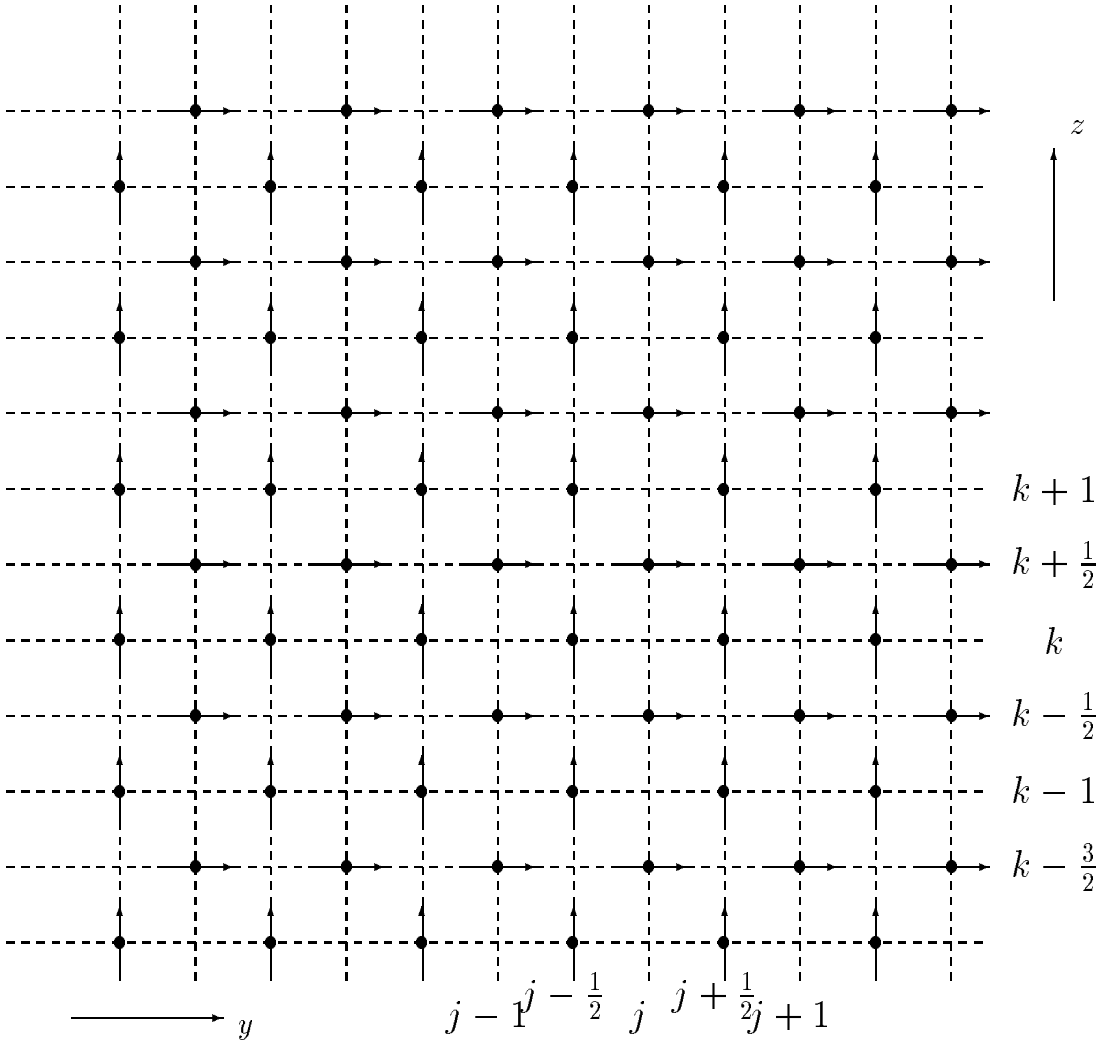


FIG. 1.1 - *Grille de discrétisation pour les faces. Le pas suivant la direction verticale z est Δz, celui pour la direction horizontale est Δy*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\dfrac{\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2} + (\sigma c\mu)_{k-\frac{1}{2}}\alpha_l \dfrac{\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2\Delta t} - \\
-\alpha_l \dfrac{1}{\Delta z^2}\left(c_k\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k+\frac{1}{2}}^{n} - (c_k + c_{k-1})\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} + c_{k-1}\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{3}{2}}^{n}\right) - \\
-\alpha_l \dfrac{c_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta y^2}\left(\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j+1,k-\frac{1}{2}}^{n} - 2\left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\psi_{my}^{(x)}\right)_{j-1,k-\frac{1}{2}}^{n}\right) = \\
= \dfrac{\left(\psi_{0y}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\left(\psi_{0y}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\psi_{0y}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2} \\
m = 1,..,L \quad \text{et avec} \quad \left(\psi_{0y}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} = \dfrac{1}{2}\left((E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}^{n} + (E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-}^{n}\right)
\end{array}
\right. \tag{1.7}
$$

pour les composantes y et

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\dfrac{\left((E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1} + (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n} - (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n+1} - (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n}\right)}{2\Delta x} + \\
+\gamma\dfrac{\left((E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1} + (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n+1} - (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n} - (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n}\right)}{2\tilde{c}_k\Delta t} - \\
-\sum_{m=1}^{L}\dfrac{\beta_m}{\alpha_m}\dfrac{\left(\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} - \left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n}\right)}{\tilde{c}_k\Delta t} = 0
\end{array}
\right. \tag{1.8}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} - 2\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} + \left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2} + (\sigma c \mu)_k \alpha_l \dfrac{\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} - \left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n-1}}{2\tilde{c}_k \Delta t} - \\
-\alpha_l \dfrac{1}{\Delta z^2}\left(\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k+1}^{n} - (\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}})\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k-1}^{n}\right) - \\
- \alpha_l \dfrac{\tilde{c}_k}{\Delta y^2}\left(\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j+\frac{1}{2},k}^{n} - 2\left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} + \left(\psi_{mz}^{(x)}\right)_{j-\frac{3}{2},k}^{n}\right) = \\
= \dfrac{\left(\psi_{0z}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} - 2\left(\psi_{0z}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} + \left(\psi_{0z}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2} \\
m = 1, .., L \quad \text{et avec} \quad \left(\psi_{0z}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} = \dfrac{1}{2}\left((E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n} + (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n}\right)
\end{array}
\right. \tag{1.9}
$$

pour les composantes suivant z.

1.3.3 La récurrence explicitée

Supposons les instants $n-1$ et n connus, comme les champs $(E_y^{(x)})$ et $(E_z^{(x)})$ sont évalués à l'instant $n+1$ et sur le plan interne (noté $\otimes_x^-$) à l'aide du schéma pour les nœuds internes au cube, (1.6), (1.7), (1.8) et (1.9) forment un système de 2(L+1) équations en les inconnues :

$$
(E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}^{n+1},\ \left(\psi_{1y}^{(z)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}, ..., \left(\psi_{Ly}^{(z)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}
$$

et

$$
(E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1},\ \left(\psi_{1z}^{(z)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1}, ..., \left(\psi_{Lz}^{(z)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1}.
$$

Ce système s'inverse facilement : on commence par éliminer les fonctions auxiliaires explicitement selon

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,k-\frac{1}{2}}}{2}(E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}^{n+1} + (F_{ly})_{j,k-\frac{1}{2}} \\
\left(\psi_{lz}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,k}}{2}(E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1} + (F_{lz})_{j-\frac{1}{2},k}
\end{array}
\right. \tag{1.10}
$$

où on a noté :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{l,k-\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{1+(\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}}\alpha_l c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t/2} \\ a_{l,k} & = & \dfrac{1}{1+(\sigma\mu c)_k\alpha_l \tilde{c}_k\Delta t/2} \end{array}\right. \tag{1.11}$$

et où $(F_{ly})_{j,k-\frac{1}{2}}$ et $(F_{lz})_{j-\frac{1}{2},k}$ se calculent explicitement à l'aide de quantités connues. Plus précisément, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} (F_{ly})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} = A^1_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} + A^2_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^{n-1}_{j,k-\frac{1}{2}} + \\ \quad + A^{31}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{j-1,k-\frac{1}{2}} + \left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{j+1,k-\frac{1}{2}}\right) + \\ \quad + A^{32}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{k+\frac{1}{2},j} + A^{33}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{k-\frac{3}{2},j} + \\ + A^4_{l,k-\frac{1}{2}}\left((E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes^-_x} - 2\left(2\psi^{(x)}_{0y}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} + \left(2\psi^{(x)}_{0y}\right)^{n-1}_{j,k-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{1.12}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} (F_{lz})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k} = A^1_{l,k}\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} + A^2_{l,k}\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2},k} + \\ \quad + A^{31}_{l,k}\left(\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^n_{j+\frac{1}{2},k} + \left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^n_{j-\frac{3}{2},k}\right) + \\ \quad + A^{32}_{l,k}\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k+1} + A^{33}_{l,k}\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k-1} + \\ + A^4_{l,k}\left((E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes^-_x} - 2\left(2\psi^{(x)}_{0z}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} + \left(2\psi^{(x)}_{0z}\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2},k}\right) \end{array}\right. \tag{1.13}$$

avec

$$\left|\begin{array}{rcl} A^1_{l,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,k-\frac{1}{2}}\left(2-\alpha_l\left(c_{k-\frac{1}{2}}(c_{k-1}+c_k)\frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}+2c^2_{k-\frac{1}{2}}\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\right)\right) \\ A^2_{l,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\alpha_l(\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}}c_{k-\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{2}-1\right) \\ A^{31}_{l,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,k-\frac{1}{2}}\alpha_l\frac{c^2_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2}{\Delta y^2} \qquad A^{32}_{l,k-\frac{1}{2}}=a_{l,k-\frac{1}{2}}\alpha_l\frac{c_{k-\frac{1}{2}}c_k\Delta t^2}{\Delta z^2} \\ A^{33}_{l,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,k-\frac{1}{2}}\alpha_l\frac{c_{k-\frac{1}{2}}c_{k-1}\Delta t^2}{\Delta z^2} \qquad A^4_{l,k-\frac{1}{2}}=\frac{a_{l,k-\frac{1}{2}}}{2} \end{array}\right. \tag{1.14}$$

et

$$\left|\begin{array}{rcl} A^1_{l,k} & = & a_{l,k}\left(2-\alpha_l\left(\tilde{c}_k(\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}+\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}})\frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}+2\tilde{c}^2_k\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\right)\right) \\ A^2_{l,k} & = & a_{l,k}\left(\alpha_l(\sigma\mu c)_k\tilde{c}_k\frac{\Delta t}{2}-1\right) \\ A^{31}_{l,k} & = & a_{l,k}\alpha_l\frac{\tilde{c}^2_k\Delta t^2}{\Delta y^2} \qquad A^{32}_{l,k}=a_{l,k}\alpha_l\frac{\tilde{c}_k\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}\Delta t^2}{\Delta z^2} \\ A^{33}_{l,k} & = & a_{l,k}\alpha_l\frac{\tilde{c}_k\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2}{\Delta z^2} \qquad A^4_{l,k}=\frac{a_{l,k}}{2} \end{array}\right. \tag{1.15}$$

On injecte l'expression (1.10) dans (1.6) et on résout, il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes^+_x} & = & A^5_{k-\frac{1}{2}}(E^{(x)}_y)^n_{j,k-\frac{1}{2},\otimes^+_x}+A^6_{k-\frac{1}{2}}\left(2\psi^{(x)}_{0y}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}}+A^7_{k-\frac{1}{2}}(E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes^-_x}+ \\ & & +\sum_{m=1}^{L}A^8_{m,k-\frac{1}{2}}\left((F_{my})_{j,k-\frac{1}{2}}-\left(\psi^{(x)}_{my}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{1.16}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} (E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes^+_x} & = & A^5_k(E^{(x)}_z)^n_{j-\frac{1}{2},k,\otimes^+_x}+A^6_k\left(2\psi^{(x)}_{0z}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k}+A^7_k(E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes^-_x}+ \\ & & +\sum_{m=1}^{L}A^8_{m,k}\left((F_{mz})_{j-\frac{1}{2},k}-\left(\psi^{(x)}_{mz}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k}\right) \end{array}\right. \tag{1.17}$$

avec

$$\left|\begin{array}{lcllcl} A^5_{k-\frac12} &=& \dfrac{-2c_{k-\frac12}\Delta t}{c_{k-\frac12}\Delta t+\gamma^*_{k-\frac12}\Delta x} & A^5_k &=& \dfrac{-2\tilde c_k\Delta t}{\tilde c_k\Delta t+\gamma^*_k\Delta x}\\ A^6_{k-\frac12} &=& \dfrac{c_{k-\frac12}\Delta t+\gamma\Delta x}{c_{k-\frac12}\Delta t+\gamma^*_{k-\frac12}\Delta x} & A^6_k &=& \dfrac{\tilde c_k\Delta t+\gamma\Delta x}{\tilde c_k\Delta t+\gamma^*_k\Delta x}\\ A^7_{k-\frac12} &=& \dfrac{c_{k-\frac12}\Delta t-\gamma\Delta x}{c_{k-\frac12}\Delta t+\gamma^*_{k-\frac12}\Delta x} & A^7_k &=& \dfrac{\tilde c_k\Delta t-\gamma\Delta x}{\tilde c_k\Delta t+\gamma^*_k\Delta x}\\ A^8_{l,k-\frac12} &=& \dfrac{2\beta_l}{\alpha_l}\dfrac{\Delta x}{c_{k-\frac12}\Delta t+\gamma^*_{k-\frac12}\Delta x} & A^8_{l,k} &=& \dfrac{2\beta_l}{\alpha_l}\dfrac{\Delta x}{\tilde c_k\Delta t+\gamma^*_k\Delta x}\end{array}\right. \tag{1.18}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl}\gamma^*_{k-\frac12} &=& 1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left(1-a_{m,k-\frac12}\right)\\ \gamma^*_k &=& 1+\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\left(1-a_{m,k}\right)\end{array}\right. \tag{1.19}$$

$(E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac12,\otimes^+_x}$ et $(E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac12,k,\otimes^+_x}$ étant connus, il est alors facile de calculer les 2L+2 quantités $\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^{n+1}_{j,k-\frac12}$ et $\left(\psi^{(x)}_{lz}\right)^{n+1}_{j-\frac12,k}$ pour $l=0,..,$ L en utilisant (1.10) et (1.20) avec

$$\left\{\begin{array}{l}2\left(\psi^{(x)}_{0y}\right)^{n+1}_{j,k-\frac12}=(E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac12,\otimes^+_x}+(E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac12,\otimes^-_x}\\ 2\left(\psi^{(x)}_{0z}\right)^{n+1}_{j-\frac12,k}=(E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac12,k,\otimes^+_x}+(E^{(x)}_z)^{n+1}_{j-\frac12,k,\otimes^-_x}\end{array}\right. \tag{1.20}$$

1.3.4 Un algorithme de résolution

On suppose connues les faces

$$(E^{(x)}_y)^n_{j,k-\frac12,\otimes^+_x},\quad (E^{(x)}_y)^{n+1}_{j,k-\frac12,\otimes^-_x}$$

ainsi que

$$\left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^n_{j,k-\frac12}\quad \left(\psi^{(x)}_{ly}\right)^{n-1}_{j,k-\frac12}\quad l=0,...,L.$$

A l'aide des coefficients donnés par (1.14), (1.15), (1.18) et (1.19), l'algorithme suivant permet de calculer

$$(E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}, \quad \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} \quad l=0,...,L.$$

– Faire pour les nœuds $(k-\frac{1}{2},j)$ de la face :

$$\left| \; (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} = A^5_{k-\frac{1}{2}}(E_y^{(x)})^n_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} + A^6_{k-\frac{1}{2}}\left(2\psi_{0y}^{(x)}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} + A^7_{k-\frac{1}{2}}(E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} \right. \tag{1.21}$$

– Faire pour $l=1,..,L$
Faire pour les nœuds $(k-\frac{1}{2},j)$ de la face :

$$\left| \begin{array}{lcl} F & = & A^1_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} + A^2_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^{n-1}_{j,k-\frac{1}{2}} + \\ & & + A^{31}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{j-1,k-\frac{1}{2}} + \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{j+1,k-\frac{1}{2}}\right) + \\ & & + A^{32}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{k+\frac{1}{2},j} + A^{33}_{l,k-\frac{1}{2}}\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{k-\frac{3}{2},j} + \\ & & + A^4_{l,k-\frac{1}{2}}\left((E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} - 2\left(2\psi_{0y}^{(x)}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}} + \left(2\psi_{0y}^{(x)}\right)^{n-1}_{j,k-\frac{1}{2}}\right) \\ \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} & = & F \\ (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} & = & (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} + A^8_{l,k-\frac{1}{2}}\left(F - \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^n_{j,k-\frac{1}{2}}\right) \end{array} \right. \tag{1.22}$$

– Faire pour $l=1,..,L$
Faire pour les nœuds $(k-\frac{1}{2},j)$ de la face :

$$\left| \; \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} = \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} + A^4_{l,k-\frac{1}{2}}(E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} \right. \tag{1.23}$$

– Faire pour les nœuds $(k-\frac{1}{2},j)$ de la face :

$$\left| \; \left(2\psi_{0y}^{(x)}\right)^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2}} = (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+} + (E_y^{(x)})^{n+1}_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-} \right. \tag{1.24}$$

L'autre composante se traite de manière analogue, On suppose connus les faces

$$(E_z^{(x)})^n_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}, \quad (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}$$

ainsi que

$$\left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} \quad \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2},k} \quad l=0,...,L.$$

L'algorithme suivant permet de calculer

$$(E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} \quad \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k} \quad l=0,...,L.$$

- Faire pour les nœuds $(j-\frac{1}{2},k)$ de la face :

$$\left|\begin{array}{rcl} (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} & = & A_k^5 (E_z^{(x)})^n_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} + A_k^6 \left(2\psi_{0z}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} + A_k^7 (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-} \end{array}\right. \tag{1.25}$$

- Faire pour $l=1,..,L$
  Faire pour les nœuds $(j-\frac{1}{2},k)$ de la face :

$$\left|\begin{array}{rcl} F & = & A_{l,k}^1 \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} + A_{l,k}^2 \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2},k} + \\ & & + A_{l,k}^{31} \left(\left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j+\frac{1}{2},k} + \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{3}{2},k}\right) + \\ & & + A_{l,k}^{32} \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k+1} + A_{l,k}^{33} \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k-1} + \\ & & + A_{l,k}^4 \left((E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-} - 2\left(2\psi_{0z}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k} + \left(2\psi_{0z}^{(x)}\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2},k}\right) \\ \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k} & = & F \\ (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} & = & (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} + A_{l,k}^8 \left(F - \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^n_{j-\frac{1}{2},k}\right) \end{array}\right. \tag{1.26}$$

- Faire pour $l=1,..,L$
  Faire pour les nœuds $(j-\frac{1}{2},k)$ de la face :

$$\left|\begin{array}{l} \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k} = \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k} + A_{l,k}^4 (E_z^{(x)})^{n+1}_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+} \end{array}\right. \tag{1.27}$$

– Faire pour les nœuds $(j-\frac{1}{2},k)$ de la face :

$$\left| \quad \left(2\psi_{0z}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} = (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1} + (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n+1} \tag{1.28}$$

Cet algorithme nécessite l'utilisation de $4(L+1)$ faces en mémoire pour les fonctions auxiliaires

$$\left(\psi_{ly}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \equiv \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n-1} \quad \text{et} \quad \left(\psi_{ly}^{(x)}\right)_{j-\frac{1}{2},k}^{n} \quad l=0,...,L$$

$$\left(\psi_{lz}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \equiv \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad \text{et} \quad \left(\psi_{lz}^{(x)}\right)_{j,k-\frac{1}{2}}^{n} \quad l=0,...,L$$

et des quatre plans contenant les champs électriques tangents de part et d'autre à la face

$$(E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n+1} \equiv (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^+}^{n} \quad \text{et} \quad (E_z^{(x)})_{j-\frac{1}{2},k,\otimes_x^-}^{n+1}$$

$$(E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}^{n+1} \equiv (E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^+}^{n} \quad \text{et} \quad (E_y^{(x)})_{j,k-\frac{1}{2},\otimes_x^-}^{n+1}.$$

1.4 Équations pour les arêtes associées à deux faces absorbantes

1.4.1 Les équations dans le domaine du continu

On traite le cas des arêtes "hétérogènes", c'est à dire celles dont la variable tangente est z. Ces arêtes sont au nombre de quatre,

$$\begin{aligned}
x^+y^+ &: \quad x = (nx-1)\cdot\Delta x \quad \cap \quad y = (ny-1)\cdot\Delta y \\
x^-y^+ &: \quad x = \Delta x \qquad\qquad\quad \cap \quad y = (ny-1)\cdot\Delta y \\
x^+y^- &: \quad x = (nx-1)\cdot\Delta x \quad \cap \quad y = \Delta y \\
x^-y^- &: \quad x = \Delta x \qquad\qquad\quad \cap \quad y = \Delta y
\end{aligned}$$

A chaque arête, on associe les nombres (penser au signe de la normale à la face)

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 & \text{pour} & x^+y^+,\ x^+y^- \\ -1 & \text{pour} & x^-y^+,\ x^-y^- \end{bmatrix} \quad \varepsilon_y = \begin{bmatrix} 1 & \text{pour} & x^+y^+,\ x^-y^+ \\ -1 & \text{pour} & x^+y^-,\ x^-y^- \end{bmatrix}.$$

On suppose que sur chacun des deux plans portant l'arête sont appliquées des conditions aux limites absorbantes. On doit alors imposer le long de l'arête des conditions aux limites dites conditions d'arête. L'ensemble de ces conditions est formée de 4 (L × L) + 2 L équations aux dérivées partielles.

On a d'une part les 4 (L × L) équations des ondes 1D définissant les fonctions auxiliaires d'arête : (pour $l, m = 1, ...,$L)

$$\frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m}\left((\sigma\mu c)(z)\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(c(z)\cdot\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}\right)\right) = \frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \left(\psi_l^{(x)}\right)_z}{\partial t^2}_{/y=y^\pm} \tag{1.29}$$

$$\frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m}\left((\sigma\mu c)(z)\frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(c(z)\cdot\frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z}\right)\right) = \frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \left(\psi_l^{(y)}\right)_z}{\partial t^2}_{/x=x^\pm} \tag{1.30}$$

$$\frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m}\left((\sigma\mu c)(z)\frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(c(z)\cdot\frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}\right)\right) = \varepsilon_y\frac{\partial^2 \left(\psi_l^{(x)}\right)_y}{\partial t \partial y}_{/y=y^\pm} \tag{1.31}$$

$$\frac{1}{c(z)}\frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m}\left((\sigma\mu c)(z)\frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(c(z)\cdot\frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z}\right)\right) = \varepsilon_x\frac{\partial^2 \left(\psi_l^{(y)}\right)_x}{\partial t \partial x}_{/x=x^\pm} \tag{1.32}$$

et d'autre part, les 4 L équations reliant les fonctions d'arête à certaines dérivées de la trace sur l'arête des fonctions de face : (pour $l = 1, .., L$)

$$\varepsilon_y\frac{\partial \left(\psi_l^{(x)}\right)_z}{\partial y}_{/y=y^\pm} = -\frac{\gamma}{c(z)}\frac{\partial \left(\psi_l^{(x)}\right)_z}{\partial t}_{/y=y^\pm} + \sum_{m=1}^{L}\frac{C_{l,m}}{c(z)}\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{L}\frac{D_{l,m}}{c(z)}\frac{\partial \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t} \tag{1.33}$$

$$\varepsilon_x \frac{\partial \left(\psi_l^{(y)}\right)_z}{\partial x}_{/x=x^\pm} = -\frac{\gamma}{c(z)} \frac{\partial \left(\psi_l^{(y)}\right)_z}{\partial t}_{x=x^\pm} + \sum_{m=1}^{L} \frac{C_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{L} \frac{D_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t} \tag{1.34}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(z) \dfrac{\partial^2 \left(\psi_l^{(x)}\right)_y}{\partial y^2}_{/y=y^\pm} = -\varepsilon_y \gamma \dfrac{\partial^2 \left(\psi_l^{(x)}\right)_y}{\partial y \partial t}_{/y=y^\pm} + \\ + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{C_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} - \sum_{m=1}^{L} \varepsilon_y \frac{D_{l,m}}{c(z)} \left(\varepsilon_x \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t \partial z} \right) \end{array} \right. \tag{1.35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(z) \dfrac{\partial^2 \left(\psi_l^{(y)}\right)_x}{\partial x^2}_{/x=x^\pm} = -\gamma \varepsilon_x \dfrac{\partial^2 \left(\psi_l^{(y)}\right)_x}{\partial x \partial t}_{/x=x^\pm} + \\ + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{C_{l,m}}{c(z)} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} - \sum_{m=1}^{L} \varepsilon_x \frac{D_{l,m}}{c(z)} \left(\varepsilon_y \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z} \right) \end{array} \right. \tag{1.36}$$

où on a noté :

$$C_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \qquad D_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \qquad \gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \tag{1.37}$$

Remarque : *Afin de ne pas alourdir les notations, on a noté indifféremment les fonctions d'arête sans préciser l'arête à laquelle elles sont associées*

1.4.2 Les équations dans le domaine discret

Le maillage pour les fonctions de face est représenté sur la figure 1.4.2.

Le schéma va faire intervenir cinq ordonnées consécutives suivant x et y. Deux correspondent à des nœuds externes à la face, deux à des nœuds internes et enfin une à la position de la ligne frontière (i.e. de l'arête considérée). On choisit une numérotation de ces indices indépendante de la position droite ou gauche de la frontière considérée. On définit

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_x = -1 : & \bigcirc_x^+ = 0 & \otimes_x^+ = \frac{1}{2} & \bigcirc_x = 1 & \otimes_x^+ = \frac{3}{2} \qquad \bigcirc_x^+ = 2 \\ \varepsilon_x = +1 : & \bigcirc_x^+ = n_x & \otimes_x^+ = n_x - \frac{1}{2} & \bigcirc_x = n_x - 1 & \otimes_x^+ = n_x - \frac{3}{2} \qquad \bigcirc_x^+ = n_x - 2 \end{array} \tag{1.38}$$

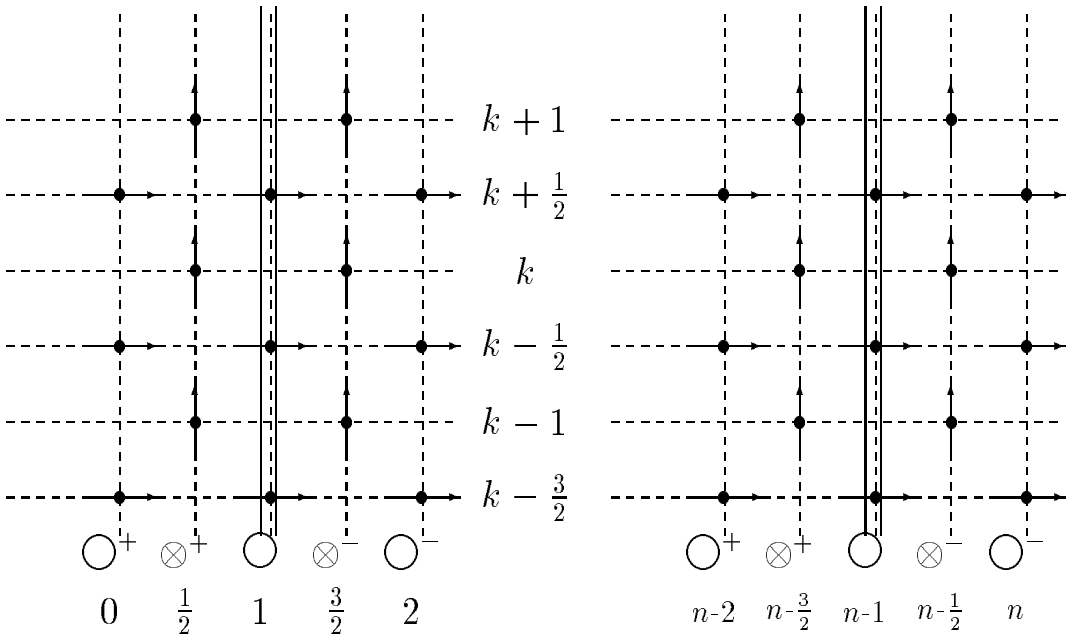


FIG. 1.2 - *Représentation du maillage sur l'une des faces contenant l'arête. n désigne n_x pour la face $y = y^{\pm}$ et n_y pour la face $x = x^{\pm}$.*

$$\begin{array}{lllll}
\varepsilon_y = -1 : & \bigcirc_y^+ = 0 & \otimes_y^+ = \frac{1}{2} & \bigcirc_y = 1 & \otimes_y^+ = \frac{3}{2} \quad \bigcirc_y^+ = 2 \\
\varepsilon_y = +1 : & \bigcirc_y^+ = n_y & \otimes_y^+ = n_y - \frac{1}{2} & \bigcirc_y = n_y - 1 & \otimes_y^+ = n_y - \frac{3}{2} \quad \bigcirc_y^+ = n_y - 2
\end{array} \tag{1.39}$$

Le symbole $\bigcirc$ désigne ainsi les coordonnées entières, Le symbole $\otimes$ les coordonnées demi-entières.

Les équations (1.29) et (1.30) sont approchées par

$$\left\{ \begin{array}{c}
\forall \ l, m = 1, .., L \quad a = x \text{ ou } y \\
\dfrac{\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - 2\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n} + \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2} + (\sigma\mu c)_k \gamma_{l,m} \dfrac{\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{2\Delta t} - \\
-\gamma_{l,m} \dfrac{\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+1}^{n} - (\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}) \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n} + \tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-1}^{n}}{\Delta z^2} = \\
= \dfrac{\left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n+1} - 2\left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n} + \left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n-1}}{\tilde{c}_k \Delta t^2}
\end{array} \right. \tag{1.40}$$

avec

$$\left(\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2}\left(\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+,k}^n + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^-,k}^n\right) \tag{1.41}$$

$$\left(\psi_{l,0}^{(y,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2}\left(\left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^n + \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^-}^n\right) \tag{1.42}$$

Les équations (1.31) et (1.32) sont approchées par

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\ l,\, m = 1,..,L \quad a = x \text{ ou } y \\ \dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2} + (\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}}\gamma_{l,m}\dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2\Delta t} \\ -\gamma_{l,m}\dfrac{c_k\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n} - (c_{k-1}+c_k)\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} + c_{k-1}\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{3}{2}}^{n}}{\Delta z^2} = \\ = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{4\Delta y\Delta t} & (a=x) \\ \dfrac{\left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{4\Delta x\Delta t} & (a=y) \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.43}$$

avec

$$\left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} = \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n} - \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^{n} \tag{1.44}$$

et

$$\left(\eta_{l,0}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} = \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^+}^{n} - \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^-}^{n} \tag{1.45}$$

Les équations (1.33) sont approchées par

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\ l = 1,..,L \\ \dfrac{\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n} - \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} - \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n}}{2\Delta y} + \\ + \gamma\,\dfrac{\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} - \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n} - \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n}}{2\tilde{c}_k\Delta t} - \\ - \sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\dfrac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n}}{\tilde{c}_k\Delta t} - \sum_{m=1}^{L} D_{l,m}\dfrac{\left(\psi_{m,l}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(y,z)}\right)_k^{n}}{\tilde{c}_k\Delta t} = 0 \end{array} \right. \tag{1.46}$$

Pour les équations (1.34), le système est obtenu en substituant x à y et réciproquement dans les équations (1.46) Enfin, les équations (1.36) sont discrétisées par

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\ l=1,..,L \\ c_{k-\frac{1}{2}}\dfrac{\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}+2\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n}+\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{4\Delta x^2} \\ +\gamma\dfrac{\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}-\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1}-\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n-1}+\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n-1}}{4\Delta t\Delta x} \\ -\sum_{m=1}^{L}C_{l,m}\dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}-2\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n}+\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2} \\ +\sum_{m=1}^{L}D_{l,m}\varepsilon_x\varepsilon_y\dfrac{\left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}-2\left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n}+\left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t^2} \\ +\sum_{m=1}^{L}D_{l,m}\varepsilon_x\dfrac{\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n+1}-\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k}^{n+1}-\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n-1}+\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k}^{n-1}}{2\Delta t\Delta z}=0 \end{array}\right. \tag{1.47}$$

Pour les équations (1.35), le système est obtenu en substituant x à y et réciproquement dans les équations (1.47).

1.4.3 La récurrence explicitée

Supposons les instants n et $n-1$ connus, comme les nœuds internes aux faces sont évalués à l'aide des équations de face, l'ensemble des équations composant le schéma forme un système de 4 L × L + 4 L équations en les inconnues

$$\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k}^{n+1},\ \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k}^{n+1},\ \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1},\ \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

$$\text{pour}\quad l,m=1,..,L\ \text{et}$$

$$\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+,k}^{n+1},\ \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1},\ \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1},\ \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^+}^{n+1}$$

$$\text{pour } \; l = 1, .., L.$$

Ce système s'inverse de la manière suivante, on commence par éliminer les inconnues d'arête

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,m,k}}{2} \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+,k}^{n+1} \; + \; \left(P_{l,m}^{(x,z)}\right)_k \\ \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,m,k}}{2} \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^{n+1} \; + \; \left(P_{l,m}^{(y,z)}\right)_k \\ \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,m,k-\frac{1}{2}} c_{k-\frac{1}{2}} \Delta t}{4\Delta y} \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \; + \; \left(E_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}} \\ \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \dfrac{a_{l,m,k-\frac{1}{2}} c_{k-\frac{1}{2}} \Delta t}{4\Delta x} \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^+}^{n+1} \; + \; \left(E_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \tag{1.48}$$

où on a noté

$$a_{l,m,k} = \frac{1}{1 + (\sigma\mu c)_k \gamma_{l,m} c_k \Delta t/2} \quad a_{l,m,k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + (\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{l,m} c_{k-\frac{1}{2}} \Delta t/2} \tag{1.49}$$

et où $\left(P_{l,m}^{(x,z)}\right)_k$, $\left(P_{l,m}^{(y,z)}\right)_k$, $\left(E_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}$ et $\left(E_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}$ se calculent en fonction de quantités connues. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} & \forall \; l,m = 1, ..., L, \quad a = x \text{ ou } y & \\ \left(P_{l,m}^{(a,z)}\right)_k & = & B_{l,m,k}^1 \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^n \; + \; B_{l,m,k}^2 \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n-1} \; + \\ & & + \; B_{l,m,k}^{31} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+1}^n + B_{l,m,k}^{32} \left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-1}^n \; + \\ & & + B_{l,m,k}^4 \left(\left[\begin{array}{l} \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^-,k}^{n+1} \\ \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^-}^{n+1} \end{array} \right. - 2 \left(2\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^n + \left(2\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^{n-1} \right) \end{array} \right. \tag{1.50}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} & & \forall\ l,m=1,...,L, \quad a=x \text{ ou } y \\ \left(E_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}} & = & B^1_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)^n_{k-\frac{1}{2}} + B^2_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} + \\ & & + B^{31}_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)^n_{k+\frac{1}{2}} + B^{32}_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)^n_{k-\frac{3}{2}} + \\ & & + B^{5a}_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(\left[\begin{array}{l}\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)^{n+1}_{j=\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}} \\ \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)^{n+1}_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^-}\end{array}\right. + \left(\eta_{l,0}^{(a,z)}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}}\right) \end{array}\right. \tag{1.51}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} B^1_{l,m,k} & = & a_{l,m,k}\left(2-\gamma_{l,m}\tilde{c}_k(\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}+\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}})\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}\right), \\ B^1_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,m,k-\frac{1}{2}}\left(2-\gamma_{l,m}c_{k-\frac{1}{2}}(c_{k-1}+c_k)\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}\right) \\ B^2_{l,m,k} & = & a_{l,m,k}(\gamma_{l,m}(\sigma\mu\tilde{c})_k\tilde{c}_k\dfrac{\Delta t}{2}-1) \\ B^2_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,m,k-\frac{1}{2}}(\gamma_{l,m}(\sigma\mu c)_{k-\frac{1}{2}}c_{k-\frac{1}{2}}\dfrac{\Delta t}{2}-1) \end{array} \tag{1.52}$$

$$\begin{array}{rclrcl} B^{31}_{l,m,k} & = & a_{l,m,k}\gamma_{l,m}\tilde{c}_k\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, & B^{31}_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,m,k-\frac{1}{2}}\gamma_{l,m}c_{k-\frac{1}{2}}c_k\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, \\ B^{32}_{l,m,k} & = & a_{l,m,k}\gamma_{l,m}\tilde{c}_k\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, & B^{32}_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & a_{l,m,k-\frac{1}{2}}\gamma_{l,m}c_{k-\frac{1}{2}}c_{k-1}\dfrac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, \\ B^4_{l,m,k} & = & \dfrac{a_{l,m,k}}{2} & & & \\ B^{5x}_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & -\dfrac{a_{l,m,k-\frac{1}{2}}c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}{4\Delta y} & B^{5y}_{l,m,k-\frac{1}{2}} & = & -\dfrac{a_{l,m,k-\frac{1}{2}}c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}{4\Delta x} \end{array} \tag{1.53}$$

On est donc ramené à la détermination des inconnues de face. Le principe de résolution consiste à calculer d'abord les composantes communes aux deux

faces (ici selon z) et ensuite les autres composantes. En effet, ces inconnues sont données par les deux systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} & \text{pour} \quad l=1,..,L & \\ \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B^6_{l,k}\right)\cdot\left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n+1}_{j=\otimes^+_y,k} - \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\displaystyle\sum_{m=1}^{L} B^7_{l,m,k}\cdot\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n+1}_{k,i=\otimes^+_x} &=& F^{(x)}_l \\ -\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\displaystyle\sum_{m=1}^{L} B^7_{l,m,k}\cdot\left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n+1}_{j=\otimes^+_y,k} + \left(1+\dfrac{\Delta x}{\Delta t}B^6_{l,k}\right)\cdot\left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^{n+1}_{k,i=\otimes^+_x} &=& F^{(y)}_l \end{array}\right. \tag{1.54}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B^6_{l,k-\frac12}\right)\cdot\left(\psi^{(x)}_{l,y}\right)^{n+1}_{j=\bigcirc^+_y,k-\frac12} + \dfrac{\varepsilon_x\varepsilon_y\Delta y^2}{\Delta x\Delta t}\displaystyle\sum_{m=1}^{L} B^7_{l,m,k-\frac12}\cdot\left(\psi^{(y)}_{m,x}\right)^{n+1}_{k-\frac12,i=\bigcirc^+_x} = G^{(x)}_l \\ \dfrac{\varepsilon_x\varepsilon_y\Delta x^2}{\Delta y\Delta t}\displaystyle\sum_{m=1}^{L} B^7_{l,m,k-\frac12}\cdot\left(\psi^{(x)}_{m,y}\right)^{n+1}_{j=\bigcirc^+_y,k-\frac12} + \left(1+\dfrac{\Delta x}{\Delta t}B^6_{l,k-\frac12}\right)\cdot\left(\psi^{(y)}_{l,x}\right)^{n+1}_{k-\frac12,i=\bigcirc^-_y} = G^{(y)}_l \end{array}\right. \tag{1.55}$$

avec

$$\left|\begin{array}{lcllcl} B^7_{l,m,k} &=& \dfrac{a_{l,m,k}}{\tilde c_k}D_{l,m} & B^7_{l,m,k-\frac12} &=& \dfrac{a_{l,m,k-\frac12}}{c_{k-\frac12}}D_{l,m} \\ B^6_{l,k} &=& \dfrac{\gamma-\displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m}a_{l,m,k}}{\tilde c_k} & B^6_{l,k-\frac12} &=& \dfrac{\gamma-\displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m}a_{l,m,k-\frac12}}{c_{k-\frac12}} \end{array}\right. \tag{1.56}$$

et où $F^{(x)}_l$, $F^{(y)}_l$ sont explicitement donnés à l'aide de quantités connues tandis que $G^{(x)}_l$ et $G^{(y)}_l$ sont des expressions algébriques qui peuvent être calculées dès que le système (1.54) est résolu. Plus explicitement, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F^{(x)}_l &=& \left(1+\gamma\dfrac{\Delta y}{\tilde c_k\Delta t}\right)\left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n}_{\otimes^+_y,k} + \left(1-\gamma\dfrac{\Delta y}{\tilde c_k\Delta t}\right)\left(\left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n+1}_{\otimes^-_y,k} - \left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n}_{\otimes^+_y,k}\right) + \\ && + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\frac{2\Delta y}{\tilde c_k\Delta t}\left(\left(P^{(x,z)}_{l,m}\right)_k - \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^n_k\right) + \\ && + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} D_{l,m}\frac{2\Delta y}{\tilde c_k\Delta t}\left(\left(P^{(y,z)}_{m,l}\right)_k - \left(\psi^{(y,z)}_{m,l}\right)^n_k\right) \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} G_l^{(y)} & = & 2\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1} - \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} + \\ & & + \gamma\,\dfrac{\Delta x}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}\left(\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1} + \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n-1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n-1}\right) + \\ & & + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} C_{l,m}\dfrac{4\Delta x^2}{c_{k-\frac{1}{2}}^2\Delta t^2}\left(\left(E_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}} - 2\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \\ & & - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} D_{l,m}\varepsilon_x\varepsilon_y\dfrac{4\Delta x^2}{c_{k-\frac{1}{2}}^2\Delta t^2}\left(\left(E_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}} - 2\left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} + \left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \\ & & - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} D_{l,m}\varepsilon_x\dfrac{2\Delta x^2}{\Delta z c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}\left(\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k}^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-1}^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k}^{n-1} + \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-1}^{n-1}\right) \end{array}\right.$$

ainsi que des formules analogues pour $F_l^{(y)}$ et $G_l^{(x)}$. Ainsi, les inconnues de face sont déterminées en inversant deux systèmes linéaires de taille 2L

1.4.4 Un algorithme de résolution

On rappelle que l'on a définit pour tout l

$$\left(\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2}\left(\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^+,k}^n + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{j=\otimes_y^-,k}^n\right) \tag{1.57}$$

$$\left(\psi_{l,0}^{(y,z)}\right)_k^n = \frac{1}{2}\left(\left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^+}^n + \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,i=\otimes_x^-}^n\right) \tag{1.58}$$

et

$$\left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^n = \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^n - \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^n \tag{1.59}$$

$$\left(\eta_{l,0}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^n = \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^+}^n - \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^-}^n \tag{1.60}$$

On définit également

$$\left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^n = \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^n - 2\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y,k-\frac{1}{2}}^n + \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{j=\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^n \tag{1.61}$$

$$\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^n = \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^+}^n - 2\left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x}^n + \left(\psi_{l,y}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},i=\bigcirc_x^-}^n \tag{1.62}$$

Remarque $\left(\psi_{l,0}^{(a,z)}\right)_k^n$, $a = x, y$ *n'étant pas définies, elles sont de bons candidat pour contenir les seconds membres* $G_l^{(.)}$ *et* $F_l^{(.)}$.
On suppose connues

- Les inconnues liées aux fonctions de face

$$\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^{n_t}, \quad \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y,k-\frac{1}{2}}^{n_t}, \quad \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n_t}, \quad \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x}^{n_t}, \quad n_t = n+1,\ n$$

  et

$$\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_x^-,k}^{n_t}, \quad \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_y^-}^{n_t}, \quad n_t = n+1,\ n$$

  ainsi que

$$\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n}, \quad \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n} \quad \text{et} \quad \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n}, \quad \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^+}^{n}.$$

- Les inconnues liées aux fonctions d'arête

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n_t}, \quad a = x,\ y, \quad l = 1,..,L,\ m = 0,...,L,\ n_t = n-1, n$$

  et

$$\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n_t}, \quad a = x,\ y, \quad l = 0,..,L,\ m = 0,...,L,\ n_t = n-1, n.$$

L'algorithme ci-dessous permet de calculer les quantités,

- liées aux fonctions de face

$$\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1} \quad \text{et} \quad \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1}, \quad \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1}.$$

- liées aux fonctions d'arête

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,z)}\right)_k^{n+1}, \quad a = x,\ y, \quad l = 1,..,L,\ m = 0,...,L,$$

  et

$$\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad a = x,\ y, \quad l = 0,..,L,\ m = 0,...,L.$$

Cet algorithme permet de substituer le nouvel instant calculé, soit $n+1$, à l'instant $n-1$. Outre les coefficients précédemment définis, il utilise les quantités, (cf. (1.52), (1.53) via (1.49) et (1.37))

$$\begin{array}{llllll}
B_k^{8y} & = \left(1+\gamma\dfrac{\Delta x}{\tilde{c}_k\Delta t}\right), & B_k^{8x} & = \left(1+\gamma\dfrac{\Delta y}{\tilde{c}_k\Delta t}\right), & B_k^{9y} & = \left(1-\gamma\dfrac{\Delta x}{\tilde{c}_k\Delta t}\right) \\
B_k^{9x} & = \left(1-\gamma\dfrac{\Delta y}{\tilde{c}_k\Delta t}\right), & B_{l,m,k}^{10x} & = \dfrac{2C_{l,m}\Delta y}{\tilde{c}_k\Delta t}, & B_{l,m,k}^{10y} & = \dfrac{2C_{l,m}\Delta x}{\tilde{c}_k\Delta t} \\
B_{l,m,k}^{11x} & = \dfrac{2D_{l,m}\Delta y}{\tilde{c}_k\Delta t}, & B_{l,m,k}^{11y} & = \dfrac{2D_{l,m}\Delta x}{\tilde{c}_k\Delta t}, & B_{k-\frac{1}{2}}^{12y} & = \dfrac{\gamma\Delta x}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t} \\
B_{k-\frac{1}{2}}^{12x} & = \dfrac{\gamma\Delta y}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}, & B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{13y} & = \dfrac{4C_{l,m}\Delta x^2}{c_{k-\frac{1}{2}}^2\Delta t^2}, & B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{13x} & = \dfrac{4C_{l,m}\Delta y^2}{c_{k-\frac{1}{2}}^2\Delta t^2} \\
B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{14y} & = -\dfrac{2D_{l,m}\Delta x^2}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t\Delta z}, & B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{14x} & = -\dfrac{2D_{l,m}\Delta y^2}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t\Delta z}, & B_{k-\frac{1}{2}}^{15} & = \dfrac{2\Delta z}{c_{k-\frac{1}{2}}\Delta t}
\end{array} \tag{1.63}$$

ainsi que, cf. (1.56),

$$\begin{bmatrix} B_{l,m,k}^{16}, & B_{l,m,k}^{17} \\ B_{l,m,k}^{18}, & B_{l,m,k}^{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B_{l,k}^6\right)\delta_{l,m}I & , & -\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B_{\cdot,\cdot,k}^7\right)_{l,m} \\ -\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}B_{\cdot,\cdot,k}^7\right)_{l,m} & , & \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B_{l,k}^6\right)I \end{bmatrix}^{-1} \tag{1.64}$$

et

$$\begin{bmatrix} B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{20}, & B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{21} \\ B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{22}, & B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B_{l,k-\frac{1}{2}}^6\right)I & , & -\left(\dfrac{\Delta y^2}{\Delta t\Delta x}B_{\cdot,\cdot,k-\frac{1}{2}}^7\right)_{l,m} \\ -\left(\dfrac{\Delta x^2}{\Delta t\Delta y}B_{\cdot,\cdot,k-\frac{1}{2}}^7\right)_{l,m} & , & \left(1+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}B_{l,k-\frac{1}{2}}^6\right)I \end{bmatrix}^{-1}. \tag{1.65}$$

– On commence le calcul de $\left(G_l^{(.)}\right)$ et de $\left(\eta_{0,l}^{(.,z)}\right)^{n+1}$. On mets dans $\left(\eta_{l,0}^{(.,z)}\right)^{n+1}$ le second membre de l'équation donnant $\left(\eta_{l,m}^{(.,z)}\right)^{n+1}$
Faire pour $l=1,..,L$

Faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$
Face y :

$$\left|\begin{array}{lcl} F & = & \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1} - 2\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x}^{n+1} \\ G & = & \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1} + \left(\eta_{l,0}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ \left(G_l^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2}} & = & B_{k-\frac{1}{2}}^{12y} G - \left(F + \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} \\ \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & F \quad \text{et} \quad \left(\eta_{l,0}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} = G \end{array}\right. \tag{1.66}$$

Face x :

$$\left|\begin{array}{lcl} F & = & \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ G & = & \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ \left(G_l^{(x)}\right)_{k-\frac{1}{2}} & = & B_{k-\frac{1}{2}}^{12x} G - \left(F + \left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2\left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} \\ \left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} & = & F \quad \text{et} \quad \left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n} = G \end{array}\right. \tag{1.67}$$

– On continue le calcul de $\left(G_l^{(\cdot)}\right)$ et on commence celui des $\left(\eta_{l,m}^{(.,z)}\right)$:
Faire pour $l = 1, .., L$
Faire pour $m = 1, .., L$
Faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$

Face x :

$$
\left|
\begin{aligned}
E &= B^1_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{1}{2}} \; + \; B^2_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \; + \\
&\quad + B^{31}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^n_{k+\frac{1}{2}} + B^{32}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{3}{2}} + B^{5x}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(x,z)}_{l,0}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \\
G &= E - 2\left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{1}{2}} + \left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \\
\left(\eta^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{k-\frac{1}{2}} &= E \\
\left(G^{(x)}_l\right)_{k-\frac{1}{2}} &= \left(G^{(x)}_l\right)_{k-\frac{1}{2}} + B^{13x}_{l,m,k-\frac{1}{2}} G \\
\left(G^{(y)}_m\right)_{k-\frac{1}{2}} &= \left(G^{(y)}_m\right)_{k-\frac{1}{2}} + \varepsilon_x B^{14y}_{m,l,k-\frac{1}{2}} \left(\left(\psi^{(x,z)}_{m,l}\right)^{n-1}_{k-1} - \left(\psi^{(x,z)}_{m,l}\right)^{n-1}_{k} + \varepsilon_y B^{15}_{k-\frac{1}{2}} G\right)
\end{aligned}
\right. \tag{1.68}
$$

Face y :

$$
\left|
\begin{aligned}
E &= B^1_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{1}{2}} \; + \; B^2_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \; + \\
&\quad + B^{31}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k+\frac{1}{2}} + B^{32}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{3}{2}} + B^{5y}_{l,m,k-\frac{1}{2}} \left(\eta^{(y,z)}_{l,0}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \\
G &= E - 2\left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k-\frac{1}{2}} + \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{k-\frac{1}{2}} \\
\left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{k-\frac{1}{2}} &= E \\
\left(G^{(y)}_l\right)_{k-\frac{1}{2}} &= \left(G^{(y)}_l\right)_{k-\frac{1}{2}} + B^{13y}_{l,m,k-\frac{1}{2}} G \\
\left(G^{(x)}_m\right)_{k-\frac{1}{2}} &= \left(G^{(x)}_m\right)_{k-\frac{1}{2}} + \varepsilon_x B^{14x}_{m,l,k-\frac{1}{2}} \left(\left(\psi^{(y,z)}_{m,l}\right)^{n-1}_{k-1} - \left(\psi^{(y,z)}_{m,l}\right)^{n-1}_{k} + \varepsilon_y B^{15}_{k-\frac{1}{2}} G\right)
\end{aligned}
\right. \tag{1.69}
$$

– On commence le calcul de $\left(F^{(\cdot)}_l\right)$:
Faire pour $l = 1, .., L$
Faire pour tous les nœuds k

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\left(F_l^{(y)}\right)_k &=& B_k^{8y}\left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^-}^n + B_k^{9y}\left(\left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^-}^{n+1} - \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^+}^n\right) \\
\left(F_l^{(x)}\right)_k &=& B_k^{8x}\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^n + B_k^{9x}\left(\left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} - \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^n\right)
\end{array}
\right. \tag{1.70}
$$

– On continue le calcul de $\left(F_l^{(\cdot)}\right)$ et on commence celui des $\left(\psi_{l,m}^{(\cdot,z)}\right)$:
Faire pour $l = 1, .., L$
Faire pour $m = 1, .., L$
Faire pour tous les nœuds k
Face x :

$$
\left|
\begin{array}{l}
P = B_{l,m,k}^1\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^n + B_{l,m,k}^2\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n-1} + \\
\qquad + B_{l,m,k}^{31}\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k+1}^n + B_{l,m,k}^{32} + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-1}^n + \\
\qquad + B_{l,m,k}^4\left(-2\left(2\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^n + \left(2\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^{n-1} + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1}\right) \\
G = P - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n-1} \\
\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} = P \\
\left(F_l^{(x)}\right)_k = \left(F_l^{(x)}\right)_k + B_{l,m,k}^{10x} G \\
\left(F_m^{(y)}\right)_k = \left(F_m^{(y)}\right)_k + B_{m,l,k}^{11y} G
\end{array}
\right. \tag{1.71}
$$

Face y :

$$\left|\begin{array}{l} P = B^1_{l,m,k}\left(\psi^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_k \; + \; B^2_{l,m,k}\left(\psi^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_k \; + \\ \qquad + B^{31}_{l,m,k}\left(\psi^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k+1} + B^{32}_{l,m,k} + \left(\psi^{(y,z)}_{l,m}\right)^n_{k-1} + \\ \qquad + B^4_{l,m,k}\left(-2\left(2\psi^{(y,z)}_{l,0}\right)^n_k + \left(2\psi^{(y,z)}_{l,0}\right)^{n-1}_k + \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes^-_x}\right) \\ G = P - \left(\psi^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_k \\ \left(\eta^{(y,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_k = P \\ \left(F^{(y)}_l\right)_k = \left(F^{(y)}_l\right)_k + B^{10y}_{l,m,k}G \\ \left(F^{(x)}_m\right)_k = \left(F^{(x)}_m\right)_k + B^{11x}_{m,l,k}G \end{array}\right. \tag{1.72}$$

– Résolution du système en $\psi^{(.,z)}_{l,m}$:
faire pour l=1,L
faire pour tous les nœuds k

$$\left|\begin{array}{l} \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes^+_x} = 0 \\ \left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n+1}_{\otimes^+_y,k} = 0 \end{array}\right. \tag{1.73}$$

faire pour l=1,L
faire pour m=1,L
faire pour tous les nœuds k

$$\left|\begin{array}{l} \left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n+1}_{\otimes^+_y,k} = \left(\psi^{(x)}_{l,z}\right)^{n+1}_{\otimes^+_y,k} + B^{16}_{k,l,m}\left(F^{(x)}_m\right)_k + B^{17}_{k,l,m}\left(F^{(y)}_m\right)_k \\ \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes^+_x} = \left(\psi^{(y)}_{l,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes^+_x} + B^{18}_{k,l,m}\left(F^{(x)}_m\right)_k + B^{19}_{k,l,m}\left(F^{(y)}_m\right)_k \end{array}\right. \tag{1.74}$$

– On finit le calcul des fonctions d'arête de type $\psi_{l,m}^{(.,z)}$:
faire pour l=1,L
faire pour m=1,L
faire pour tous les nœuds k

$$\left|\begin{array}{l} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} = \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} + B_{l,m,k}^4 \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} \\ \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} = \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} + B_{l,m,k}^4 \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} \end{array}\right. \tag{1.75}$$

– puis, le calcul de deux fois la trace de la fonction de face :
faire pour l=1,L
faire pour tous les nœuds k

$$\left|\begin{array}{l} \left(2\psi_{l,0}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} = \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^+}^{n+1} + \left(\psi_{l,z}^{(y)}\right)_{k,\otimes_x^-}^{n+1} \\ \left(2\psi_{l,0}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} = \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^+,k}^{n+1} + \left(\psi_{l,z}^{(x)}\right)_{\otimes_y^-,k}^{n+1} \end{array}\right. \tag{1.76}$$

– On termine le calcul de $\left(G_m^{(.)}\right)$:
faire pour l=1,L
faire pour m=1,L
faire pour tous les nœuds k

$$\left|\begin{array}{l} \left(G_m^{(x)}\right)_{k-\frac{1}{2}} = \left(G_m^{(x)}\right)_{k-\frac{1}{2}} + \varepsilon_x B_{m,l,k-\frac{1}{2}}^{14x} \left(\left(\psi_{m,l}^{(y,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(y,z)}\right)_{k-1}^{n+1}\right) \\ \left(G_m^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2}} = \left(G_m^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2}} + \varepsilon_x B_{m,l,k-\frac{1}{2}}^{14y} \left(\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k-1}^{n+1}\right) \end{array}\right. \tag{1.77}$$

– Résolution du système en $\eta_{l,m}^{(.,z)}$:
faire pour l=1,L
faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$

$$\left|\begin{array}{l} \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1} = 0 \\ \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1} = 0 \end{array}\right. \tag{1.78}$$

faire pour l=1,L
faire pour m=1,L
faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$

$$\left|\begin{array}{l}\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}=\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}+B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{20}\left(G_m^{(x)}\right)_{k-\frac{1}{2}}+\varepsilon_x\varepsilon_y B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{21}\left(G_m^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2}}\\ \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}=\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}+B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{23}\left(G_m^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2}}+\varepsilon_x\varepsilon_y B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{22}\left(G_m^{(x)}\right)_{k-\frac{1}{2}}\end{array}\right. \tag{1.79}$$

– On finit le calcul des fonctions d'arête de type $\eta_{l,m}^{(.,z)}$:
faire pour l=1,L
faire pour m=1,L
faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$

$$\left|\begin{array}{l}\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}=\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}+B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{5x}\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}\\ \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}=\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}+B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{5y}\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}\end{array}\right. \tag{1.80}$$

– Enfin, on calcule les fonctions d'arête d'indice 0. (Remarque : celles d'indice $0,l$ sont simplement complétées. Le début du calcul étant effectué dans (1.66) et (1.67)) :
faire pour l=1,L
faire pour tous les nœuds $k-\frac{1}{2}$

$$\left|\begin{array}{lcl}\left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}+\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}\\ \left(\eta_{l,0}^{(y,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^+}^{n+1}-\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k-\frac{1}{2},\bigcirc_x^-}^{n+1}\\ \left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \left(\eta_{0,l}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1}+\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}\\ \left(\eta_{l,0}^{(x,z)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{n+1} & = & \left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^+,k-\frac{1}{2}}^{n+1}-\left(\psi_{l,y}^{(x)}\right)_{\bigcirc_y^-,k-\frac{1}{2}}^{n+1}\end{array}\right. \tag{1.81}$$

1.5 Traitement des composantes tangentielles du champ électrique le long des arêtes

Le calcul des fonctions de face aux nœuds situés le long des arêtes à l'aide des équations discrètes écrites précédemment amène à une situation paradoxale concernant le calcul des composantes tangentielles du champ électrique le long de l'arête: on dispose de deux équations pour les évaluer. En effet et par exemple pour une arête en z, on peut tout d'abord considérer que cette arête appartient à la face (x) et donc que $(E_z)^{n+1}_{i=\otimes_x^+,j=\otimes_y^+,k}$ se calcule par la CLA relative à cette face auquel cas :

$$(E_z)^{\cdot}_{i=\otimes_x^+,j=\otimes_y^+,k} = (E_z^{(x)})^{\cdot}_{j=\otimes_y^+,k,\otimes_x^+} \tag{1.82}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} + (E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} - (E_z)^{n+1}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k} - (E_z)^{n}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}\right)}{2\Delta x} + \\ + \gamma \dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} + (E_z)^{n+1}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k} - (E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} - (E_z)^{n}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}\right)}{2\Delta t} - \\ - \displaystyle\sum_{m=1}^{L} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left(\left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n+1}_{\otimes_y^+,k} - \left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n}_{\otimes_y^+,k}\right)}{\tilde{c}_k \Delta t} = 0. \end{array} \right. \tag{1.83}$$

On peut également voir l'arête comme un sous-ensemble du plan en (y) et considérer que c'est la CLA sur ce plan qui s'applique :

$$(E_z)^{\cdot}_{i=\otimes_x^+,j=\otimes_y^+,k} = (E_z^{(x)})^{\cdot}_{j=\otimes_y^+,k,\otimes_x^+} \tag{1.84}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}\right)}{2\Delta y}+ \\ +\gamma\dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}\right)}{2\Delta t}- \\ -\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\left(\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes_x^+}-\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n}_{k,\otimes_x^+}\right)}{\tilde{c}_k\Delta t}\;=\;0. \end{array}\right. \tag{1.85}$$

Je conjecture que modulo les équations discrètes satisfaites par les fonctions auxiliaires, ces deux équations ne sont en fait pas indépendantes et que l'une entraîne l'autre. Ceci demanderait à être vérifié par des calculs analytiques. On peut également adopter un profil plus bas consistant à ne pas favoriser une face plutôt que l'autre et de retenir le schéma obtenu en sommant les deux équations relatives à chacune des faces. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}\right)}{2\Delta x}+ \\ +\dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}\right)}{2\Delta y}+ \\ +\gamma\dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k}\right)}{2\tilde{c}_k\Delta t}+ \\ +\gamma\dfrac{\left((E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}+(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}-(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k}\right)}{2\tilde{c}_k\Delta t}- \\ -\displaystyle\sum_{m=1}^{L}\frac{\beta_m}{\alpha_m}\frac{\left(\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes_x^+}-\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n}_{k,\otimes_x^+}+\left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n+1}_{\otimes_y^+,k}-\left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n}_{\otimes_y^+,k}\right)}{\tilde{c}_k\Delta t}\;=\;0. \end{array}\right. \tag{1.86}$$

$(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k}$ peut alors se calculer via:

$$\left\{\begin{array}{l} (E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} \;=\; D_k^1\cdot(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k} \;+\; D_k^2\cdot(E_z)^{n}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k} + \\ \quad + D_k^3\cdot(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^+,\otimes_y^-,k} \;+\; D_k^4\cdot(E_z)^{n+1}_{\otimes_x^-,\otimes_y^+,k} \;+\; D_k^5\cdot(E_z)^{n}_{\otimes_x^+,\otimes_y^+,k} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{m=1}^{L} D_m^6\left(\left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n+1}_{k,\otimes_x^+} - \left(\psi^{(y)}_{m,z}\right)^{n}_{k,\otimes_x^+} + \left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n+1}_{\otimes_y^+,k} - \left(\psi^{(x)}_{m,z}\right)^{n}_{\otimes_y^+,k}\right) \end{array}\right. \tag{1.87}$$

avec

$$\left\|\begin{array}{lcllcl} D_k^1 &=& \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} & , & D_k^2 &=& \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} \\ D_k^3 &=& \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta y}-\dfrac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} & , & D_k^4 &=& \dfrac{\dfrac{1}{2\Delta x}-\dfrac{\gamma}{2\tilde{c}_k\Delta t}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} \\ D_k^5 &=& \dfrac{\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}-\dfrac{1}{2\Delta x}-\dfrac{1}{2\Delta y}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} & , & D_{m,k}^6 &=& \dfrac{\dfrac{1}{\tilde{c}_k\Delta t}\cdot\dfrac{\alpha_m}{\beta_m}}{\dfrac{1}{2\Delta x}+\dfrac{1}{2\Delta y}+\dfrac{\gamma}{\tilde{c}_k\Delta t}} \end{array}\right. \tag{1.88}$$

1.6 Équations pour les coins associés à trois faces absorbantes

1.6.1 Les équations dans le domaine du continu

On note c la vitesse et σ la conductivité au coin considéré. On définit,

$$\gamma_{l,m}=\frac{\alpha_l\alpha_m}{\alpha_l+\alpha_m-\alpha_l\alpha_m},\quad \gamma_{l,m,p}=\frac{\gamma_{l,m}\alpha_p}{\gamma_{l,m}+\alpha_p-\gamma_{l,m}\alpha_p} \tag{1.89}$$

L'ensemble des conditions de coin est construit à partir des deux systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(z^{\pm},t) \;=\; -\varepsilon_z \dfrac{\gamma}{c} \dfrac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(z^{\pm},t) + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{1}{c^2} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{d^2 \psi_{l,m,p}^{(x,z)}}{dt^2}(t) - \\ - \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\varepsilon_z}{c^2} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\varepsilon_x \frac{d^2 \eta_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2}(t) + \varepsilon_y \frac{d^2 \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2}(t) \right) \;+\; \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{1}{c^2} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{d^2 \eta_{l,p,m}^{(x,y)}}{dt^2}(t) \end{array} \right. \tag{1.90}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z \dfrac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(z^{\pm},t) = -\dfrac{\gamma}{c} \dfrac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(z^{\pm},t) \;+\; \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{d \eta_{l,m,p}^{(x,z)}}{dt}(t) + \\ \quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{d \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt}(t) \;+\; \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{1}{c} \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{d \psi_{l,p,m}^{(x,y)}}{dt}(t) \end{array} \right. \tag{1.91}$$

Les fonctions de coin, triplement indicées, étant données par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{c} \dfrac{d \psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,p}(\sigma \mu c) \psi_{l,m,p}^{(a,b)}(t) & = & \varepsilon_b \dfrac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(b = b^{\pm},t) \qquad (1.92)_1 \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{d \eta_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,p}(\sigma \mu c) \eta_{l,m,p}^{(a,b)}(t) & = & \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \eta_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b = b^{\pm},t) \qquad (1.92)_2 \end{array} \right. \tag{1.92}$$

Le système complet est obtenu en effectuant sur (1.91) et (1.90),

1. La permutation $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow x$, l'indice z restant fixé.
2. Deux fois et successivement la rotation d'indice $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow z$ et $z \longrightarrow x$.

On obtient ainsi 12 systèmes de L^2 équations. Après discrétisation, ce système permet d'évaluer les 12 L^2 inconnues manquantes dans le processus itératif en temps, à savoir,

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{b=0 \; ou \; n_b}^{n+1}, \quad \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{b=\frac{1}{2} \; ou \; n_b - \frac{1}{2}}^{n+1}, \qquad a,b = x,\, y, \text{ ou } z \quad \text{et } a \neq b, \quad l,m = 1,\ldots,L$$

1.6.2 Les équations dans le domaine discret

On commence par définir des notations appropriées pour les indices relatifs aux fonctions d'arête. Ces notations permettent une écriture unique du schéma pour chacun des huit coins possibles.

Le schéma numérique fait intervenir les fonctions d'arête de type $\psi^{(a,b)}_{l,m}$ en trois nœuds noté $\bigcirc^+_b$, $\bigcirc_b$ et $\bigcirc^-_b$. $\bigcirc^+_b$ est le nœud extérieur au volume de calcul, $\bigcirc_b$ est situé sur le coin et $\bigcirc^-_b$ est le nœud interne. Les fonctions d'arête de type $\eta^{(a,b)}_{l,m}$ interviennent en deux points situés à une demi-maille de part et d'autre du coin. On note $\otimes^+_b$ le nœud externe et $\otimes^-_b$ le nœud interne. On a ainsi les correspondances,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_b = 1 : \qquad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{n_b}, \qquad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_b} \equiv \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{n_b-\frac{1}{2}},\\
&\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{n_b-1}, \qquad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_b} \equiv \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{n_b-\frac{3}{2}}, \qquad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{n_b-2}
\end{aligned} \tag{1.93}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_b = -1 : \qquad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{0}, \qquad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_b} \equiv \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\frac{1}{2}},\\
&\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{1}, \qquad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_b} \equiv \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\frac{3}{2}}, \qquad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} \equiv \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{2}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

La figure 1.6.2 représente la numérotation correspondante pour l'arête en x.

On commence par la discrétisation des équations différentielles ordinaires au coin. On centre ces équations sur l'instant $t_{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$, en écrivant

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\psi^{(a,b)}_{l,m,p}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + \left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n}}{2}\\
\dfrac{d\psi^{(a,b)}_{l,m,p}}{dt}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n}}{\Delta t}
\end{array}\right. \tag{1.95}$$

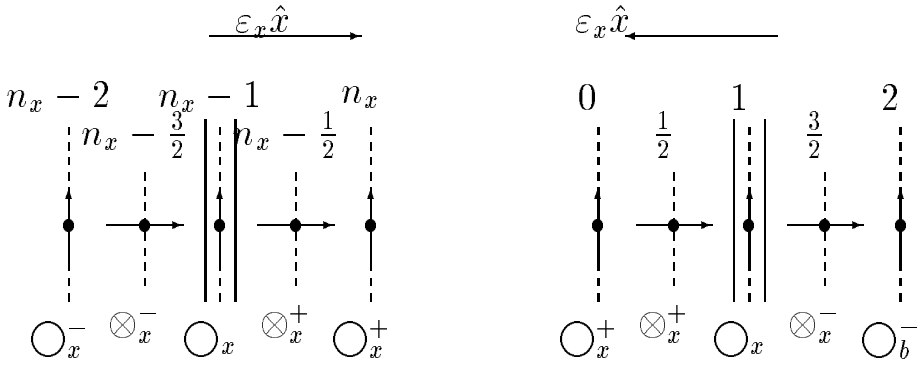


FIG. 1.3 - *Numérotation pour le maillage sur l' arête en x contenant le coin. La numérotation du bas est adaptée au schéma pour le coin. La numérotation du haut correspond aux indices réels des fonctions d'arête. On distingue deux cas selon que le coin est au début ou à la fin de l'arête.*

et pareillement pour $\eta^{(a,b)}_{l,m,p}$. De même, on utilise les approximations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varepsilon_b \dfrac{\partial \psi^{(a,b)}_{l,m}}{\partial b}(b=0,t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_b} + \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^-_b}}{4\Delta b} \\ \dfrac{\partial \eta^{(a,b)}_{l,m}}{\partial t}(b=0,t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^+_b} + \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^-_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\otimes^+_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\otimes^-_b}}{2\Delta t} \end{array}\right. \tag{1.96}$$

Le schéma pour les fonctions de coin s'écrit alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n}}{c\Delta t} + (\sigma\mu c)\gamma_{l,m,p}\dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + \left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n}}{2} = \\ \qquad = \dfrac{\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_b} + \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^-_b}}{4\Delta b} \end{array}\right. \tag{1.97}$$

pour $(1.92)_1$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n}}{c\Delta t} + (\sigma\mu c)\gamma_{l,m,p}\dfrac{\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} + \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n}}{2} = \\ \quad = \dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^+}^{n+1} + \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^-}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^+}^{n} - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^-}^{n}}{2c\Delta t} \end{array} \right. \tag{1.98}$$

pour $(1.92)_2$.
Le système (1.91) se discrétise en utilisant des approximations similaires. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} + \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n} - \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n}}{2\Delta z} = \\ -\gamma\,\dfrac{\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n} - \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n}}{2c\Delta t} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\,\frac{\left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1} - \left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n}}{c\Delta t} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\,\frac{\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n}}{c\Delta t} + \\ \quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\,\frac{\left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n}}{c\Delta t} \end{array} \right. \tag{1.99}$$

Reste la discrétisation du système (1.90). Elle s'appuie sur les approximations,

$$\left|\begin{array}{lcl}
\varepsilon_b \dfrac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b \partial t}(0, t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^+}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^+}^{n-1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^-}^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^-}^{n-1}}{4\Delta b \Delta t} \\
\dfrac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b^2}(b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\frac{1}{4}\left(\psi_{l,m,0}^{(a,b)}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\psi_{l,m,0}^{(a,b)}\right)^{n} + \frac{1}{4}\left(\psi_{l,m,0}^{(a,b)}\right)^{n-1}}{\Delta b^2} \\
\dfrac{d^2 \psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt^2}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - 2\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n} + \left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n-1}}{\Delta t^2} \\
\dfrac{d^2 \eta_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt^2}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx & \dfrac{\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - 2\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n} + \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n-1}}{\Delta t^2}
\end{array}\right. \tag{1.100}$$

où on a noté,

$$\left(\psi_{l,m,0}^{(a,b)}\right)^{n} = \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^+}^{n} - 2\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b}^{n} + \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^-}^{n} \tag{1.101}$$

Le schéma pour (1.90) s'écrit alors :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\frac{1}{4}\left(\psi^{(x,z)}_{l,m,0}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\psi^{(x,z)}_{l,m,0}\right)^{n} + \frac{1}{4}\left(\psi^{(x,z)}_{l,m,0}\right)^{n-1}}{\Delta z^2} = \\
\quad - \gamma \dfrac{\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_z} - \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{\bigcirc^+_z} - \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_z} + \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{\bigcirc^-_z}}{4c\Delta z\Delta t} + \\
\quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \dfrac{\left(\psi^{(x,z)}_{l,m,p}\right)^{n+1} - 2\left(\psi^{(x,z)}_{l,m,p}\right)^{n} + \left(\psi^{(x,z)}_{l,m,p}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2} - \\
\quad - \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}} \left(\varepsilon_z\varepsilon_x \dfrac{\left(\eta^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n+1} - 2\left(\eta^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n} + \left(\eta^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2} + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \ \varepsilon_x\varepsilon_z \dfrac{\left(\psi^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n+1} - 2\left(\psi^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n} + \left(\psi^{(z,y)}_{p,l,m}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2} \right) + \\
\quad + \displaystyle\sum_{p=1}^{L} \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}} \dfrac{\left(\eta^{(x,y)}_{l,p,m}\right)^{n+1} - 2\left(\eta^{(x,y)}_{l,p,m}\right)^{n} + \left(\eta^{(x,y)}_{l,p,m}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2}
\end{array}
\right.
\tag{1.102}
$$

En permutant et faisant circuler les indices comme indiqué dans le préambule, on obtient un schéma constitué de $12L^3$ équations du type (1.97) et (1.98) ainsi que de 6 systèmes de L^2 équations analogues à (1.99) et de 6 autres analogues à (1.102).

1.6.3 La récurrence explicitée

Le système précédemment décrit s'interprète comme un ensemble d'équations en les inconnues:

$$l,m = 1,\ldots,L$$

$$\begin{array}{lll}
\left(\psi_{l,m}^{(z,x)}\right)_{\bigcirc_x^+}^{n+1}, & \left(\psi_{l,m}^{(x,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}, & \left(\psi_{l,m}^{(y,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1}, \\
\left(\psi_{l,m}^{(y,x)}\right)_{\bigcirc_x^+}^{n+1}, & \left(\psi_{l,m}^{(z,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}, & \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1}, \\
\left(\eta_{l,m}^{(z,x)}\right)_{\otimes_x^+}^{n+1}, & \left(\eta_{l,m}^{(x,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}, & \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}, \\
\left(\eta_{l,m}^{(y,x)}\right)_{\otimes_x^+}^{n+1}, & \left(\eta_{l,m}^{(z,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}, & \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}
\end{array}$$

(inconnues d'arête) ainsi que

$$l,m,p = 1,\ldots,L$$

$$\begin{array}{lll}
\left(\psi_{l,m,p}^{(z,x)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(x,y)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(y,z)}\right)^{n+1}, \\
\left(\psi_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(z,y)}\right)^{n+1}, & \left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1}, \\
\left(\eta_{l,m,p}^{(z,x)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(x,y)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(y,z)}\right)^{n+1}, \\
\left(\eta_{l,m,p}^{(y,x)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(z,y)}\right)^{n+1}, & \left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1}
\end{array}$$

qui sont les inconnues de coin.
On commence par éliminer les inconnues de coin. On a:

$$\begin{aligned}
\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} &= a_{l,m,p}\frac{c\Delta t}{4\Delta b}\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^+}^{n+1} + \left(P_{l,m,p}^{(a,b)}\right) \\
\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} &= \frac{1}{2}a_{l,m,p}\left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^+}^{n+1} + \left(E_{l,m,p}^{(a,b)}\right)
\end{aligned} \tag{1.103}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\left(P^{(a,b)}_{l,m,p}\right) &= A^1_{l,m,p}\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n + \\
&\quad + a_{l,m,p}\frac{c\Delta t}{4\Delta b}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b}\right) \\
\left(E^{(a,b)}_{l,m,p}\right) &= A^1_{l,m,p}\left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n + \\
&\quad + a_{l,m,p}\frac{1}{2}\left(\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^-_b}\right)
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

et

$$
A^1_{l,m,p} = \frac{1-\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}}{1+\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}}, \quad a_{l,m,p} = \frac{1}{1+\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}} \tag{1.105}
$$

Puis, on injecte ces expressions dans les équations de type arête, il vient:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_z} - 2\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc_z} + \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_z}}{\Delta z^2} + \\
+\ &\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{\bigcirc^+_z} - 2\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{\bigcirc_z} + \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n-1}_{\bigcirc^-_z}}{\Delta z^2} + \\
+\ &\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^+_z} - 2\left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc_z} + \left(\psi^{(x,z)}_{l,m}\right)^{n}_{\bigcirc^-_z}}{\Delta z^2}
\end{aligned}
\quad = \quad \Rightarrow
\right.
\tag{1.106}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \qquad =\\
&-\gamma\,\frac{\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1}-\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n-1}-\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n+1}+\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n-1}}{4\Delta z c\Delta t}+\\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\,\frac{a_{l,m,p}\frac{c\Delta t}{4\Delta z}\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1}+\left(P_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n+1}-2\left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n}+\left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2}-\\
&-\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\,\varepsilon_z\left(\varepsilon_x\frac{\frac{1}{2}a_{p,l,m}\left(\eta_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}+\left(E_{p,l,m}^{(z,y)}\right)-2\left(\eta_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n}+\left(\eta_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\,\varepsilon_y\,\frac{a_{p,l,m}\frac{c\Delta t}{4\Delta y}\left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}+\left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right)-2\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n}+\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2}\right)+\\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\,\frac{\frac{1}{2}a_{l,p,m}\left(\eta_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}+\left(E_{l,p,m}^{(x,y)}\right)-2\left(\eta_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n}+\left(\eta_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n-1}}{c^2\Delta t^2}
\end{aligned}
$$

ainsi que

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}-\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1}+\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n}-\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n}}{2\Delta z} \quad =\\
&-\gamma\,\frac{\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}+\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1}-\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n}-\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n}}{2c\Delta t}+\\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}a_{l,m,p}\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1}+\left(E_{l,m,p}^{(x,z)}\right)-\left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^{n}}{c\Delta t}+\\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\cdot\frac{a_{p,l,m}\frac{c\Delta t}{4\Delta y}\left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}+\left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right)-\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^{n}}{c\Delta t}+\\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\cdot\frac{a_{l,p,m}\frac{c\Delta t}{4\Delta y}\left(\psi_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}+\left(P_{l,p,m}^{(x,y)}\right)-\left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^{n}}{c\Delta t}
\end{aligned}
\right. \tag{1.107}
$$

En séparant les inconnues des quantités connues et après multiplication de (1.107) par $2c\Delta t$ et de (1.106) par $2c^2\Delta t^2$, on obtient

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\dfrac{c\Delta t}{\Delta z}\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} + \gamma\ \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}a_{l,m,p}\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n+1} - \\
- \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\ \cdot\ a_{p,l,m}\frac{c\Delta t}{2\Delta y}\left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1} - \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\ \cdot\ a_{l,p,m}\frac{c\Delta t}{2\Delta y}\left(\psi_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}
\end{array}
\right.
$$

$$
=
$$

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta z}+\gamma\right)\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n} + \left(\dfrac{c\Delta t}{\Delta z}-\gamma\right)\left(\left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^-}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\otimes_z^+}^{n}\right) + \\
+ \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\ \cdot\ \left(2\left(E_{l,m,p}^{(x,z)}\right) - 2\left(\eta_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n\right) + \\
+ \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\ \cdot\ \left(2\left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right) - 2\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n\right) + \\
+ \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\ \cdot\ \left(2\left(P_{l,p,m}^{(x,y)}\right) - 2\left(\psi_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n\right)
\end{array}
\right.
$$

et

$$
\left|
\begin{array}{c}
\dfrac{c^2\Delta t^2}{2\Delta z^2}\cdot\left(\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1}\right) + \quad \gamma\,\dfrac{c\Delta t}{2\Delta z}\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1} - \\
- \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\,a_{l,m,p}\frac{c\Delta t}{2\Delta z}\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n+1} + \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\,\varepsilon_z\left(\varepsilon_x a_{p,l,m}\left(\eta_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1} + \right. \\
\left. + \varepsilon_y\ a_{p,l,m}\dfrac{c\Delta t}{2\Delta y}\left(\psi_{p,l}^{(z,y)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}\right) - \displaystyle\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\,a_{l,p,m}\left(\eta_{l,p}^{(x,y)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}
\end{array}
\right.
$$

$$
=
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_{l,m,0}^{(x,z)}\right)^n \; + \\
+\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta z^2}\cdot &\left(\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z}^{n+1} \; + \; \left(2\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z}^{n} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n}\right)\right) \; + \\
&+\left(-\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta z^2}+\frac{\gamma c\Delta t}{2\Delta z}\right)\left(\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n+1}\right) \quad + \\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\left(2\left(P_{l,m,p}^{(x,z)}\right)-4\left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n\right) \; - \\
&-\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\,\varepsilon_z\left(\varepsilon_x\left(2\left(E_{p,l,m}^{(z,y)}\right)-4\left(\eta_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n\right) \; + \right. \\
&\qquad\left. +\,\varepsilon_y\left(2\left(P_{p,l,m}^{(z,y)}\right)-4\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n\right)\right) \; + \\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\left(2\left(E_{l,p,m}^{(x,y)}\right)-4\left(\eta_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

Où l'on a défini (ce qui est nécessaire si l'on veut garder un schéma sur deux pas de temps)

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_{l,m,0}^{(x,z)}\right)^{n+1} = \\
&\frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta z^2}\cdot\left(2\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z}^{n} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n}\right) \; + \\
&\qquad+\gamma\,\frac{c\Delta t}{2\Delta z}\left(\left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^+}^{n} - \left(\psi_{l,m}^{(x,z)}\right)_{\bigcirc_z^-}^{n}\right) \; + \\
&+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}\left(2\left(\eta_{l,p,m}^{(x,y)}\right)^n\right) \; - \sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2}\left(2\left(\psi_{l,m,p}^{(x,z)}\right)^n\right) \; - \\
&\quad-\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\,\varepsilon_z\left(\varepsilon_x\left(2\left(\eta_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n\right) \; + \varepsilon_y\left(2\left(\psi_{p,l,m}^{(z,y)}\right)^n\right)\right)
\end{aligned}
\tag{1.108}
$$

En procédant de même pour les six autres systèmes, on obtient un système linéaire à 12 L^2 inconnues. Afin d'obtenir un système plus facile a étudier, on

a choisi de prendre comme inconnues

$$ {}^tV \;=\; \left(\left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_b^+}^{n+1} \;,\; \frac{c\Delta t}{2\Delta a} \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_b^+}^{n+1} \;, \quad l,m = 1,...,L,\; a,b = x,y,z,\; a \neq b \right). $$

Le système linéaire s'écrit:

$$ (\Lambda \;\; \mathbf{M} \;\; \Lambda)\; V \quad = U $$

où U se calcule explicitement. La matrice Λ est la matrice diagonale à valeurs dans $\{-1,1\}$ donnée par

$$ \Lambda \quad = \qquad (1.109) $$

	$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	$\eta_{l,m}^{(x,z)}$
$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	$\varepsilon_x Id$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	0	$\varepsilon_y Id$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	0	0	$\varepsilon_z Id$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	0	$\varepsilon_x Id$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	0	0	0	0	$\varepsilon_y Id$	0	0	0	0	0	0	0
$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	0	0	0	0	0	$\varepsilon_z Id$	0	0	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_y Id$	0	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_z Id$	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_x Id$	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_z Id$	0	0
$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_x Id$	0
$\eta_{l,m}^{(x,z)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_z Id$

La matrice $\mathbf{M}$ a pour expression

$$\mathbf{M} \quad = \tag{1.110}$$

	$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	$\eta_{l,m}^{(x,z)}$
$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	A_x	B	0	0	0	0	0	B	0	0	$-C$	0
$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	0	A_y	B	0	0	0	0	0	B	0	0	$-C$
$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	B	0	A_z	0	0	0	B	0	0	$-C$	0	0
$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	0	A_x	0	B	0	0	$-C$	0	0	B
$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	0	0	0	B	A_y	0	$-C$	0	0	B	0	0
$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	0	0	0	0	B	A_z	0	$-C$	0	0	B	0
$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	0	$-B$	0	0	$-C$	0	A_x	0	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	0	0	$-B$	0	0	$-C$	0	A_y	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	$-B$	0	0	$-C$	0	0	0	0	A_z	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	A_x	0	0
$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	0	0	0	A_y	0
$\eta_{l,m}^{(x,z)}$	0	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	0	0	0	A_z

les matrices $B, C, A_x, A_y, ...$ étant carrées de taille $\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2$ et données par

$$A_a = \frac{c\Delta t}{\Delta a}\, Id \;+\; A, \quad a = x, y \text{ ou } z \tag{1.111}$$

$$
\begin{aligned}
A^{p,q}_{l,m} &= \delta^p_l\,\delta^q_m\,\left(1+\sum_{p=1}^{L}\frac{\beta_p}{\alpha_p}\left(1-\frac{\gamma_{l,m,p}a_{l,m,p}}{\alpha_p}\right)\right)\\
B^{p,q}_{l,m} &= \delta^q_l\,\frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}a_{p,l,m}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}} \qquad (1.112)\\
C^{p,q}_{l,m} &= \delta^p_l\,\frac{\beta_q\gamma_{l,m,q}\gamma_{q,l}a_{l,q,m}}{\alpha_q^2\gamma_{l,m}}
\end{aligned}
$$

A est diagonale et Les matrices B, C sont creuses. Par exemple, pour $L = 2$, A, B et C se présentent sous la forme : (les points noirs sont les éléments non nuls)

$$
A = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{bmatrix}
\qquad
B = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \end{bmatrix}
\qquad
C = \begin{bmatrix} \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet \end{bmatrix}
$$

1.6.4 Un algorithme de résolution

On suppose connues

$$\forall\, l, m, p = 1, ..., L, \quad \forall\, a, b = x, y, z,\ a \neq b$$

– Les quantités liées aux fonctions d'arête :

$$
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_y},\quad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc_y},\quad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_y},
$$
$$
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_y},\quad \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc_y},
$$
$$
\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_y},\quad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes_y},\quad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_y},
$$
$$
\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^-_y},\quad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes_y}.
$$

– Les quantités liées aux fonctions de coin :

$$
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n,\quad \left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n,
$$
$$
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,0}\right)^n.
$$

L'algorithme suivant permet le calcul

– Des quantités liés aux fonctions d'arête

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\bigcirc_y^+}^{n+1}, \quad \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\otimes_y^+}^{n+1}.$$

– Des quantités liés aux fonctions de coin

$$\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1}, \quad \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1},$$

$$\left(\psi_{l,m,0}^{(a,b)}\right)^{n+1}.$$

Il utilise deux vecteurs auxiliaires de taille 12 L^2 notés

$$U = \left(U_{\psi,l,m}^{(a,b)},\ U_{\eta,l,m}^{(a,b)}\right) \quad \text{et} \quad V = \left(V_{\psi,l,m}^{(a,b)},\ U_{\eta,l,m}^{(a,b)}\right)$$

On affecte progressivement au vecteur U la valeur du second membre du système linéaire. Le vecteur V a une double fonction. A la fin du processus il contient la solution du système linéaire. Il sert également à stocker des quantités intermédiaires dans le calcul des fonctions de coin. Plus précisément ce calcul est réalisé en procèdant de la manière suivante

On calcule les expressions indépendantes de p :

$$\begin{aligned}
V^{(a,b)}_{\psi,l,m} &= \frac{c\Delta t}{2\Delta b}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b}\right)\\
V^{(a,b)}_{\eta,l,m} &= \left(\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^-_b}\right)
\end{aligned}$$

On calcule $2P^{(a,b)}_{l,m,p}$ et $2E^{(a,b)}_{l,m,p}$:

$$\begin{aligned}
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} &\equiv (2P) \quad = A^1_{l,m,p}(2\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n) + A_{l,m,p}V^{(a,b)}_{\psi,l,m}\\
\left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} &\equiv (2E) \quad = A^1_{l,m,p}(2\left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^n) + A_{l,m,p}V^{(a,b)}_{\eta,l,m}
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Puis, après inversion du système linéaire :

$$\begin{aligned}
V^{(a,b)}_{\psi,l,m} &= \frac{c\Delta t}{2\Delta b}\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_b}\\
V^{(a,b)}_{\eta,l,m} &= \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^+_b}
\end{aligned}$$

On complète le calcul des fonctions de coins :

$$\begin{aligned}
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + A_{l,m,p}V^{(a,b)}_{\psi,l,m}\right)\\
\left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + A_{l,m,p}V^{(a,b)}_{\eta,l,m}\right)
\end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned}
r^{1b} &= \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta b^2} \quad r^{2b} = \left(\frac{\gamma c\Delta t}{2\Delta b} - \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta b^2}\right)\\
r^{3b} &= \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta b^2} \quad r^{5b} = \left(\gamma + \frac{c\Delta t}{\Delta b}\right)\\
r^{4b} &= \frac{\gamma c\Delta t}{2\Delta b} \quad r^{6b} = \left(-\gamma + \frac{c\Delta t}{\Delta b}\right)
\end{aligned} \tag{1.114}$$

et

$$
\begin{aligned}
A_{l,m,p} &= \frac{1}{1+\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}} \qquad A^1_{l,m,p} = \frac{1-\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}}{1+\gamma_{l,m,p}(\sigma\mu c)c\dfrac{\Delta t}{2}},\\
A^2_{l,m,p} &= \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \qquad A^3_{l,m,p} = \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p\alpha_l\gamma_{l,m}}\\
A^4_{l,m,p} &= \frac{\beta_p\gamma_{l,m,p}\gamma_{p,l}}{\alpha_p^2\gamma_{l,m}}
\end{aligned}
\tag{1.115}
$$

L'algorithme s'écrit

– Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$
Pour $a, b = x, y$ ou z, $a \neq b$

$$
\begin{aligned}
V^{(a,b)}_{\psi,l,m} &= \frac{c\Delta t}{2\Delta b}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b}\right)\\
V^{(a,b)}_{\eta,l,m} &= \left(\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^+_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\otimes^-_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^-_b}\right)\\
T &= \left(2\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b}\right)\\
U^{(a,b)}_{\psi,l,m} &= \left(\psi^{(a,b)}_{l,m,0}\right)^n + r^{1b}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc_b} + T\right) + r^{2b}\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b}\\
\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,0}\right)^{n+1} &= r^{3b}T + r^{4b}\left(\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b} - \left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b}\right)\\
U^{(a,b)}_{\eta,l,m} &= r^{5b}\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^-_b} + r^{6b}\left(\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^-_b} - \left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^n_{\bigcirc^+_b}\right)
\end{aligned}
\tag{1.116}
$$

– Les instructions ci-dessous ajoutent les contributions des termes en $\left(\psi^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n$ et $\left(\eta^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n$. Pour obtenir l'algorithme complet, on doit ajouter les six

exemplaires obtenus en faisant circuler les indices. Cette circulation s'obtient de la manière suivante (très facile à réaliser avec un éditeur)

1 On fait la substitution

$$z \longrightarrow z \quad x \longrightarrow y \quad y \longrightarrow x$$

On obtient ainsi deux exemplaires, l'original plus le nouveau.

2 Sur chacun des deux exemplaires on fait deux fois et successivement

$$x \longrightarrow y \quad y \longrightarrow z \quad z \longrightarrow x$$

On obtient ainsi les six exemplaires.

Termes en $\left(\psi^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n$ et $\left(\eta^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n$:
Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$
Faire pour $p = 1, ..., L$

$$
\begin{array}{lcl|lcl}
(2PSI) & = & 2\left(\psi^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n & (2ETA) & = & 2\left(\eta^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^n \\
\left(\psi^{(y,x)}_{l,m,0}\right)^{n+1} & = & \left(\psi^{(y,x)}_{l,m,0}\right)^{n+1} + A^2_{l,m,p}(2PSI) & \left(\psi^{(y,z)}_{l,p,0}\right)^{n+1} & = & \left(\psi^{(y,z)}_{l,p,0}\right)^{n+1} + A^4_{l,p,m}(2ETA) \\
\left(\psi^{(z,y)}_{m,p,0}\right)^{n+1} & = & \left(\psi^{(z,y)}_{m,p,0}\right)^{n+1} & \left(\psi^{(z,y)}_{m,p,0}\right)^{n+1} & = & \left(\psi^{(z,y)}_{m,p,0}\right)^{n+1} \\
 & & -\varepsilon_x\varepsilon_y A^3_{m,p,l}(2PSI) & & & -\varepsilon_z\varepsilon_y A^3_{m,p,l}(2ETA) \\
(2P) & = & A^1_{l,m,p}(2PSI) + A_{l,m,p}V^{(y,x)}_{\psi,l,m} & (2E) & = & A^1_{l,m,p}(2ETA) + A_{l,m,p}V^{(y,x)}_{\eta,l,m} \\
\left(2\psi^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^{n+1} & = & (2P) & \left(2\eta^{(y,x)}_{l,m,p}\right)^{n+1} & = & (2E) \\
D1 & = & (2P) - 2\cdot(2PSI) & D3 & = & (2E) - 2\cdot(2ETA) \\
U^{(y,x)}_{\psi,l,m} & = & U^{(y,x)}_{\psi,l,m} + A^2_{l,m,p}D1 & U^{(z,y)}_{\psi,m,p} & = & U^{(z,y)}_{\psi,m,p} - \varepsilon_y\varepsilon_z A^3_{m,p,l}D3 \\
U^{(z,y)}_{\psi,m,p} & = & U^{(z,y)}_{\psi,m,p} - \varepsilon_x\varepsilon_y A^3_{m,p,l}D1 & U^{(y,z)}_{\psi,l,p} & = & U^{(y,z)}_{\psi,l,p} + A^4_{l,p,m}D3 \\
D2 & = & (2P) - (2PSI) & D4 & = & (2E) - (2ETA) \\
U^{(z,y)}_{\eta,m,p} & = & U^{(z,y)}_{\eta,m,p} + A^3_{m,p,l}D2 & U^{(y,x)}_{\eta,l,m} & = & U^{(y,x)}_{\eta,l,m} + A^2_{l,m,p}D4 \\
U^{(y,z)}_{\eta,l,p} & = & U^{(y,z)}_{\eta,l,p} + A^4_{l,p,m}D2 & & & \\
 & & & & & (1.117)
\end{array}
$$

– On multiplie par la matrice Λ :
Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$

Faire pour $a, b = x, y$ ou $z,\ a \neq b$

$$U^{(a,b)}_{\psi,l,m} = \varepsilon_b U^{(a,b)}_{\psi,l,m}$$

$$U^{(a,b)}_{\eta,l,m} = \varepsilon_e U^{(a,b)}_{\eta,l,m} \quad a, b, e \quad \text{distincts}$$

– On inverse le système linéaire :

$$\left(V^{(a,b)}_{\psi,l,m},\ V^{(a,b)}_{\eta,l,m}\right) = (\ \mathrm{M}\ )^{-1} \cdot \left(U^{(a,b)}_{\psi,l,m},\ U^{(a,b)}_{\eta,l,m}\right)$$

– On multiplie le résultat par la matrice Λ :
Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$
Faire pour $a, b = x, y$ ou $z,\ a \neq b$

$$U^{(a,b)}_{\psi,l,m} = \varepsilon_b U^{(a,b)}_{\psi,l,m}$$

$$U^{(a,b)}_{\eta,l,m} = \varepsilon_e U^{(a,b)}_{\eta,l,m} \quad a, b, e \quad \text{distincts}$$

– On termine le calcul des fonctions de coin à l'instant $n+1$:
Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$
Faire pour $a, b = x, y$ ou $z,\ a \neq b$

$$\left(\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(2\psi^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + A_{l,m,p} V^{(a,b)}_{\psi,l,m}\right)$$

$$\left(\eta^{a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(2\eta^{(a,b)}_{l,m,p}\right)^{n+1} + A_{l,m,p} V^{(a,b)}_{\eta,l,m}\right)$$

– Et on récupère les fonctions d'arête aux extrémités et à l'instant $n+1$:
Faire pour $l = 1, ..., L$
Faire pour $m = 1, ..., L$
Faire pour $a, b = x, y$ ou $z,\ a \neq b$

$$\left(\psi^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\bigcirc^+_b} = \frac{2\Delta b}{c\Delta t} V^{(a,b)}_{\psi,l,m}$$

$$\left(\eta^{(a,b)}_{l,m}\right)^{n+1}_{\otimes^+_b} = V^{(a,b)}_{\eta,l,m}$$

Chapitre 2

Description fonctionnelle

2.1 Introduction

Ce chapitre vise à donner une description fonctionnelle du problème posé par l'adjonction de nouvelles conditions aux limites au code de simulation déjà existant au centre de Gramat ([GORF]). On commence par définir des concepts clés pour la formulation du problème: notion de maillage, de physique, de conditions aux limites ou encore d'itération. Puis, on décrit les objets principaux qui sont au centre du déroulement de l'algorithme (champ électromagnétique, fonctions de face, d'arête ou de coin, faces supplémentaires pour le champ électrique) et on en donne le traitement. Enfin, des considérations sur l'utilisation de la mémoire closent ce chapitre.

2.2 Description du maillage

On s'intéresse tout d'abord à la discrétisation suivant une direction fixée. On appelle h le pas de discrétisation. La direction peut être x, y ou z et h est respectivement égal à Δx, Δy ou Δz. Le maillage, représenté sur la figure 2.1, comprend deux types de nœuds. Les nœuds de type entier et les nœuds de type demi-entier. Les premiers sont symbolisés par le symbole $\bigcirc$, les seconds par le symbole $\otimes$.

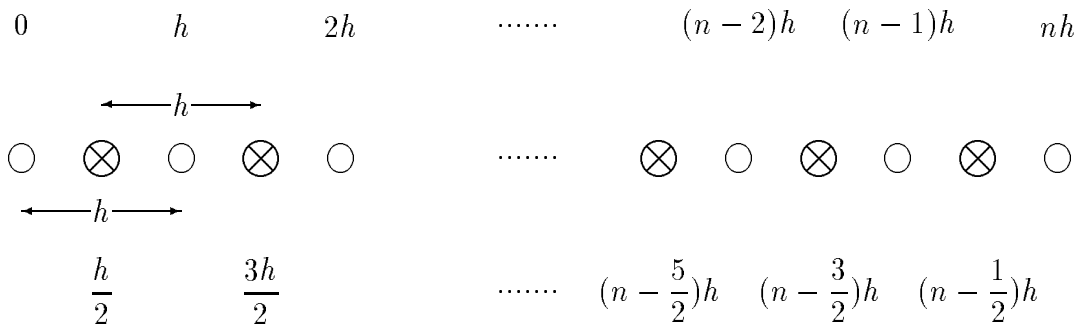


FIG. 2.1 - *Description du maillage*

On a choisit de numéroter les nœuds de type entier et demi-entier de 0 à n, n pouvant valoir nx, ny ou nz. Si a (resp. b) est une fonction définie sur les nœuds de type entier (resp. demi-entier), on a

$$\begin{aligned} a(\nu_\circ h) &= a_{\nu_\circ} = A_\circ(\nu_\circ), & \nu_\circ &= 0, ..., n \\ b((\nu_\otimes - \tfrac{1}{2})h) &= b_{\nu_\otimes - \frac{1}{2}} = B_\otimes(\nu_\otimes), & \nu_\otimes &= 0, ..., n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les lettres majuscules correspondent à une notation adaptée à la programmation, les lettres minuscules aux notations du rapport de référence.
La numérotation est représentée sur la figure 2.2



FIG. 2.2 - *Numérotation du maillage*

Sur chaque segment, on doit positionner les deux points frontières du domaine. Un point frontière étant un point où s'applique une condition à la limite (symétrie, périodicité, CLA,...). Pour chaque extrémité, on peut distinguer deux cas selon sa coïncidence avec un nœud de type entier ou un nœud

de type demi-entier. Dans les deux cas, on convient de positionner ce point frontière en 1 à gauche et en $n-1$ (cas entier) ou n (cas demi-entier) à droite. On définira

$$\text{frg} = \begin{cases} 0 & \text{si le point frontière de gauche est de type entier} \\ 1 & \text{si le point frontière de gauche est de type demi-entier} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\text{frd} = \begin{cases} 0 & \text{si le point frontière de droite est de type entier} \\ 1 & \text{si le point frontière de droite est de type demi-entier} \end{cases} \tag{2.3}$$

Les situations sont schématisées sur la figure 2.2

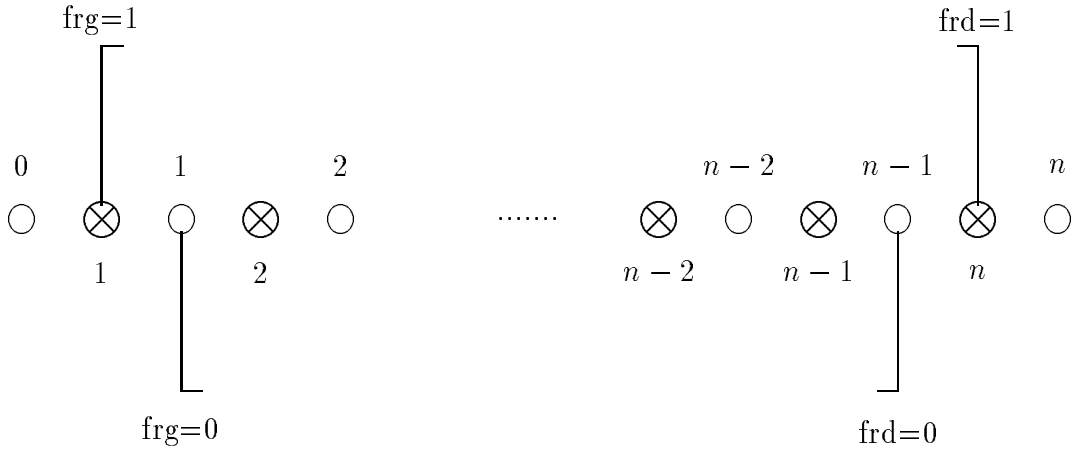


FIG. 2.3 - *Positionnement de la frontière sur le maillage selon les valeurs de frg et frd*

La frontière étant positionnée, on décompose l'ensemble des nœuds en deux sous-ensembles. les nœuds intérieurs et les nœuds extérieurs au domaine. Les nœuds intérieurs au domaine sont, par définition, ceux qui sont compris entre les deux points frontières, ceux-ci inclus.

Les nœuds intérieurs de type entiers sont tels que,

$$\nu_\circ^- \;\leq\; \nu \;\leq\; \nu_\circ^+ \tag{2.4}$$

avec (cf. figure 2.2)

$$\nu_\circ^- = 1, \quad \nu_\circ^+ = n-1 \tag{2.5}$$

Les nœuds intérieurs de type demi-entier sont tels que,

$$\nu_{\otimes}^{-} \leq \nu \leq \nu_{\otimes}^{+} \tag{2.6}$$

avec

$$\nu_{\otimes}^{-} = \begin{cases} 1 & \text{si frg} = 1 \\ 2 & \text{si frg} = 0 \end{cases} \quad , , \quad \nu_{\otimes}^{+} = \begin{cases} n-1 & \text{si frd} = 0 \\ n & \text{si frd} = 1 \end{cases} \quad , \tag{2.7}$$

Le maillage tridimensionnel sera défini par la donnée de

$$\begin{array}{llll} \Delta x, & \text{frg}_x & \text{frd}_x & nx \\ \Delta y, & \text{frg}_y & \text{frd}_y & ny \\ \Delta z, & \text{frg}_z & \text{frd}_z & nz \end{array} \tag{2.8}$$

A l'aide des formules (2.7), on définira,

$$(\nu_{\otimes x}^{-},\ \nu_{\otimes x}^{+}), \quad (\nu_{\otimes y}^{-},\ \nu_{\otimes y}^{+}), \quad (\nu_{\otimes z}^{-},\ \nu_{\otimes z}^{+}) \tag{2.9}$$

2.3 Physique du problème

La physique du problème est déterminée par les trois fonctions σ, ϵ et μ.

2.3.1 Hypothèses

F désignant une face où des CLA sont appliquées. Les hypothèses suivantes sont supposées satisfaites.

- La restriction à F de la physique ne dépend que de la variable z.
- La perméabilité magnétique μ est constante, égale à sa valeur dans le vide.

$$\mu(z) = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \tag{2.10}$$

- La restriction à F de la conductivité σ et de la permittivité diélectrique ϵ sont constantes par strate horizontale,

$$\epsilon \equiv \epsilon(z) = \sum_{p=1}^{n_{stra}} \epsilon_p \, 1_{]z_{p-1},z_p[}(z), \qquad \sigma \equiv \sigma(z) = \sum_{p=1}^{n_{stra}} \sigma_p \, 1_{]z_{p-1},z_p[}(z) \tag{2.11}$$

– Les interfaces z_p, $p = 1, ..., n_{stra} - 1$ définissant les strates coïncident avec des nœuds de type demi-entier.

  En d'autres termes, on modélise des hétérogénéités 3D localisées à l'intérieur d'un milieu stratifié horizontalement. Ces hétérogénéités n'intersectant les frontières du domaine de calcul qu'en des faces où des conditions de symétrie ou de périodicité sont appliquées.

2.3.2 Lien avec le schéma

Le schéma numérique fait intervenir les fonctions triplement indicées,

$$\begin{cases} \epsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \text{ et } \sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \text{ pour } (E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \\ \epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \text{ et } \sigma_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \text{ pour } (E_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\ \epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \text{ et } \sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \text{ pour } (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{2.12}$$

L'hypothèse faite sur les interfaces implique l'existence pour tout indice k d'un indice p tel que, au moins sur une face où une CLA est appliquée.

$$\begin{cases} \epsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \epsilon_p \\ \epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \epsilon_p \text{ ou } \dfrac{\epsilon_p + \epsilon_{p+1}}{2} \\ \epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \epsilon_p \text{ ou } \dfrac{\epsilon_p + \epsilon_{p+1}}{2} \end{cases} \tag{2.13}$$

et des équations analogues pour σ. Le cas où les valeurs de ϵ sont moyennées correspond aux interfaces $(z_p = (k + \frac{1}{2}).\Delta z)$.

2.4 Conditions à la limite

En un point frontière, quatre possibilités sont envisagées. La variable bord permet de discriminer les cas,

– bord = 1 : condition de symétrie par rapport à un point frontière de type demi-entier.

- bord = 2 : condition de symétrie par rapport à un point frontière de type entier.
- bord = 3 : condition de périodicité par rapport à un point frontière de type entier.
- bord = 4 : condition absorbante par rapport à un point frontière de type entier.

L'ensemble des conditions aux limites pour le cube de calcul est déterminé par une valeur de "bord" pour chacune des six faces du cube. L'ensemble,

$$\left(\text{bord}_x^-,\ \text{bord}_x^+,\ \text{bord}_y^-,\ \text{bord}_y^+,\ \text{bord}_z^-,\ \text{bord}_z^+.\right) \tag{2.14}$$

détermine ainsi complètement les conditions aux limites retenues.

Remarquons, que la variable "bord" détermine également la nature du point limite. Par exemple

$$\text{frg}_x = \begin{cases} 1 & \text{si bord}_x^- = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{frd}_x = \begin{cases} 1 & \text{si bord}_x^+ = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les conditions de symétries se décomposent en deux cas de figure,

- Mur Électrique : Les deux composantes tangentielles du champ magnétique et la composante normale du champ électrique sont symétriques par rapport au plan considéré.
  Les deux composantes tangentielles du champ électrique et la composante normale du champ magnétique sont anti-symétriques par rapport au plan considéré,

$$\Rightarrow \quad E_{\text{tangent}} = 0 \quad \text{sur la face} \tag{2.15}$$

- Mur Magnétique : Les deux composantes tangentielles du champ électrique et la composante normale du champ magnétique sont symétriques par rapport au plan considéré.
  Les deux composantes tangentielles du champ magnétique et la composante normale du champ électrique sont anti-symétriques par rapport au

plan considéré.

$$\Rightarrow \quad H_{\text{ tangent}} = 0 \quad \text{sur la face} \tag{2.16}$$

A chaque type de conditions à la limite sont affectées des variables de commande.

2.4.1 Variable de commande pour les conditions de symétries (bord=1)

Cette condition de bord correspond à celle existant dans GORF. La symétrie est appliquée en $\nu_{\otimes} = 1$ à gauche (respectivement en $\nu_{\otimes} = n$ à droite) afin de déterminer les deux composantes tangentielles du **champ magnétique** sur le plan externe $\nu_{\circ} = 0$ (respectivement $\nu_{\circ} = n$, $n = nx, ny$ ou nz). On distingue alors les deux sous-cas, selon la nature du mur:

$$\begin{cases} \text{mur} = 1 & \Rightarrow \text{ Mur magnétique} \\ \text{mur} = -1 & \Rightarrow \text{ Mur électrique} \end{cases} \tag{2.17}$$

2.4.2 Variable de commande pour les conditions de symétries (bord=2)

Cette condition de bord n'existe pas actuellement dans GORF. La symétrie est appliquée en $\nu_{\circ} = 1$ à gauche (respectivement en $\nu_{\circ} = n - 1$ à droite) afin de déterminer les deux composantes tangentielles du **champ électrique** sur le plan externe $\nu_{\otimes} = 1$ (respectivement $\nu_{\otimes} = n$, $n = nx, ny$ ou nz). On distingue alors les deux sous-cas, selon la nature du mur:

$$\begin{cases} \text{mur} = 1 & \Rightarrow \text{ Mur magnétique} \\ \text{mur} = -1 & \Rightarrow \text{ Mur électrique} \end{cases} \tag{2.18}$$

2.4.3 Variable de commande pour les conditions de périodicité (bord=3)

Cette condition de bord n'existe pas actuellement dans GORF. La condition consiste à identifier les deux composantes tangentielles du **champ électrique** du plan externe $\nu_{\otimes} = 1$ à celles du plan $\nu_{\otimes} = n - 1$ et les deux composantes tangentielles du champ électrique du plan externe $\nu_{\otimes} = n$ à celles du plan $\nu_{\otimes} = 2$. Aucun paramètre n'est requis pour ce cas.

2.4.4 Variable de commande pour les CLA (bord=4)

La CLA est déterminée par une variable de commande. Celle-ci permet de choisir le nombre de fractions rationnelles L et les 2L coefficients α_ℓ et β_ℓ. Deux cas seront programmés: les coefficients de Padé et les coefficients optimisés à L=5 fractions. Le nombre maximal de fractions sera fixé à 10.

2.5 Description de l'algorithme itératif, variables d'état et variables de commande

L'intégration des équations de Maxwell se fait selon l'algorithme itératif suivant:

- lecture des variables de commande [GORF] et [BORD]
- initialisation des modules de calculs [GORF]
- initialisation des modules de calculs [BORD]
- initialisation des modules de sorties [GORF]
- Faire pour n:$nt^- \rightarrow nt^+$
  - Calcul du champ magnétique et du cube de calcul électrique [GORF] avec échange des faces [DIAL]
  - Calcul des faces champ électrique [BORD]
  - Sorties [GORF]

– Fin Faire

On a mis entre crochets le nom du module concerné. [GORF] désigne le programme déjà existant. [BORD] et [DIAL] sont les deux nouveaux modules. Le premier travaille uniquement sur les faces, les arêtes et les coins du cube de calcul, le second permet de faire le lien entre les variables liées au cube de calcul et les variables liées aux faces.

Une initialisation comporte trois fonctions

1 Gestion de la mémoire nécessaire au module (allocation ou vérification de la taille disponible, calcul d'adresses et de dimension,...),

2 Calcul des variables de commande du module, c'est à dire des variables associées dont la valeur est fixe au cour des itérations,

3 Initialisation des variables d'états, c'est à dire des variables qui évoluent de manière récurrente au cours des itérations (Les champs électriques et magnétiques sont des variables d'états de [GORF]). Ces variables seront à zéro (champ nul à l'instant $t = 0$), mais on peut imaginer qu'elles soient lues sur un fichier au cas d'une reprise d'un calcul antérieur.

L'échange des faces consiste à actualiser les variables d'état du module [BORD] en fonction des variables d'états de [GORF] et réciproquement. L'algorithme retenu impose que le calcul de [GORF] soit antérieur au calcul de [BORD].
Un calcul est une actualisation des variables d'état du module concerné. Il est paramétré par les variables de commande du module associé.
Les variables de commandes sont chaînées dans le sens où chaque variable est déterminée soit par une autre variable de commande soit est une sortie du module de lecture.
Le nouveau module [BORD] ajoutera donc deux types de variable de commande, celles qui sont reliées à des variables de commande déjà existantes dans [GORF] et celles qui sont uniquement liées au module [BORD]. Ces dernières devront être prise en compte dans le module de lecture.

2.6 Description des variables de commande de [BORD]

On commence par celles qui sont indépendantes des variables de commande de [GORF] ; on introduira

- bordx^-, bordx^+, bordy^-, bordy^+, bordz^-, bordz^+
  Ces variables déterminent le type de condition que l'on impose sur les faces du cube.

- symx^-, symx^+, symy^-, symy^+, symz^-, symz^+.
  Ces variables précisent le type de symétrie que l'on applique sur les faces.Elles peuvent correspondre à une valeur signifiant leur inutilité.

- cla
  Cette variable détermine le type de CLA appliqué. (Condition de Padé, Coefficients optimisés,..)

D'autre part, on définit et on calculera à l'aide des variables de commande de [GORF],

- Nombre de points dans chaque direction (nx, ny, nz) ;
- Pas d'espace dans chaque direction (Δx, Δy, Δz) ;
- Milieu physique

2.7 Description des variables d'état

2.7.1 Champ électrique

On pose

$$\begin{cases} x_i = i.\Delta x & y_j = j.\Delta y & z_k = k.\Delta z \\ x_{i-\frac{1}{2}} = i - \frac{1}{2}.\Delta x & y_{j-\frac{1}{2}} = j - \frac{1}{2}.\Delta y & z_{k-\frac{1}{2}} = k - \frac{1}{2}.\Delta z \end{cases} \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned} Ex(\text{i, j, k}) &\equiv (E_x)_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \approx E_x\left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_{k-\frac{1}{2}}\right) \\ Ey(\text{i ,j, k}) &\equiv (E_y)_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \approx E_y\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, z_{k-\frac{1}{2}}\right) \\ Ez(\text{i ,j, k}) &\equiv (E_z)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \approx E_z\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Le champ électrique est déterminé par la donnée de

$$\begin{aligned} &Ex(\quad \text{i}: \ 1 \to nx-1, \quad \text{j}: \quad 1 \to ny, \quad \text{k}: \quad 1 \to nz) \\ &Ey(\quad \text{i}: \quad 1 \to nx, \quad \text{j}: \ 1 \to ny-1, \quad \text{k}: \quad 1 \to nz) \\ &Ez(\quad \text{i}: \quad 1 \to nx, \quad \text{j}: \quad 1 \to ny, \quad \text{k}: \ 1 \to nz-1) \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.7.2 Champ magnétique

On pose

$$\begin{aligned} Hx(\text{i, j, k}) &\equiv (H_x)_{i-\frac{1}{2},j,k} \approx H_x\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, z_k\right) \\ Hy(\text{i ,j, k}) &\equiv (H_y)_{i,j-\frac{1}{2},k} \approx H_y\left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, z_k\right) \\ Hz(\text{i ,j, k}) &\equiv (H_z)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \approx H_z\left(x_i, y_j, z_{k-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Le champ magnétique est déterminé par la donnée de

$$\begin{aligned} &Hx(\quad \text{i}: \quad 1 \to nx, \quad \text{j}: \ 1 \to ny-1, \quad \text{k}: \ 1 \to nz-1) \\ &Hy(\quad \text{i}: \ 1 \to nx-1, \quad \text{j}: \quad 1 \to ny, \quad \text{k}: \ 1 \to nz-1) \\ &Hz(\quad \text{i}: \ 1 \to nx-1, \quad \text{j}: \ 1 \to ny-1, \quad \text{k}: \quad 1 \to nz) \end{aligned} \tag{2.23}$$

auquel on adjoint des faces externes pour chaque face de type demi-entier, soient
Si $\text{frg}_x = 1$ (resp.$\text{frd}_x = 1$),

$$\begin{aligned} &Hy(\quad \text{i}: \ 0 \ (\text{resp. } nx), \quad \text{j}: \quad 1 \to ny, \quad \text{k}: \ 1 \to nz-1) \\ &Hz(\quad \text{i}: \ 0 \ (\text{resp } nx), \quad \text{j}: \ 1 \to ny-1, \quad \text{k}: \quad 1 \to nz) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Si $\mathrm{frg}_y = 1$ (resp.$\mathrm{frd}_y = 1$),

$$\begin{array}{l} Hz(\ \mathrm{i}:\ 1 \to nx-1,\ \mathrm{j}:\ 0(\text{resp. } ny),\ \mathrm{k}:\ 1 \to nz) \\ Hx(\ \mathrm{i}:\ 1 \to nx,\ \mathrm{j}:\ 0(\text{resp. } ny),\ \mathrm{k}:\ 1 \to nz-1) \end{array} \tag{2.25}$$

Si $\mathrm{frg}_z = 1$ (resp.$\mathrm{frd}_z = 1$),

$$\begin{array}{l} Hy(\ \mathrm{i}:\ 1 \to nx-1,\ \mathrm{j}:\ 1 \to ny,\ \mathrm{k}:\ 0(\text{resp. } nz)) \\ Hx(\ \mathrm{i}:\ 1 \to nx,\ \mathrm{j}:\ 1 \to ny-1,\ \mathrm{k}:\ 0(\text{resp. } nz)) \end{array} \tag{2.26}$$

On remarquera que ces plans supplémentaires ne s'intersectent pas, il n'y a donc pas de calcul d'arêtes pour le champ magnétique.

En d'autres termes, lorsque la frontière est de type demi-entier on rajoute un plan supplémentaire pour les composantes tangentielles du champ magnétique. Ceci est compatible avec ce qui est fait dans GORF.

2.7.3 Faces externes

Afin de bien séparer le calcul (compliqué) des composantes tangentielles du champ électrique sur les faces de type entier du reste du code, on a choisi de dupliquer les faces;
on introduit ainsi les faces supplémentaires, (le signe $\pm$ discriminant les faces dont la normale est positive de celles dont la normale est négative).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } bord_x^+ \neq 1 :\ Ebx^+(\ \mathrm{y}:\ 1 \to ny,\ \mathrm{z}:\ 1 \to nz,\ \text{comp.}:\ y:z,\ \text{plan}:\ 1:2) \\ \text{si } bord_x^- \neq 1 :\ Ebx^-(\ \mathrm{y}:\ 1 \to ny,\ \mathrm{z}:\ 1 \to nz,\ \text{comp.}:\ y:z,\ \text{plan}:\ 1:2) \\ \text{si } bord_y^+ \neq 1 :\ Eby^+(\ \mathrm{z}:\ 1 \to nz,\ \mathrm{x}:\ 1 \to nx,\ \text{comp.}:\ z:x,\ \text{plan}:\ 1:2) \\ \text{si } bord_y^- \neq 1 :\ Eby^-(\ \mathrm{z}:\ 1 \to nz,\ \mathrm{x}:\ 1 \to nx,\ \text{comp.}:\ z:x,\ \text{plan}:\ 1:2) \\ \text{si } bord_z^+ \neq 1 :\ Ebz^+(\ \mathrm{x}:\ 1 \to nx,\ \mathrm{y}:\ 1 \to ny,\ \text{comp.}:\ x:y,\ \text{plan}:\ 1:2) \\ \text{si } bord_z^- \neq 1 :\ Ebz^-(\ \mathrm{x}:\ 1 \to nx,\ \mathrm{y}:\ 1 \to ny,\ \text{comp.}:\ x:y,\ \text{plan}:\ 1:2) \end{array} \right.$$

L'indice 2 correspond à la face extérieure au volume de calcul et l'indice 1 à la face intérieure, "comp" signifie composante.

Remarque: On a choisit une notation qui peut sembler curieuse pour définir les champs électriques sur les faces : pour passer de la définition d'une face à la définition pour une autre face on fait circuler les indices suivant $x \to y \to z \to x$. On verra par la suite que cette "circulation" permet de coder le traitement des CLA indépendamment de la face traitée.

2.7.4 Fonctions auxiliaires

Il y a trois types de fonctions auxiliaires: les fonctions auxiliaires de face, celles d'arête, celles de coin (sels de bain et selles de cheval). Ces fonctions sont uniquement définies en cas de besoin, c'est à dire lorsque une CLA est imposée sur la face ou lorsque l'arête correspond à l'intersection de deux plans absorbants ou encore lorsque le coin est à l'intersection de trois plans absorbants. On définira ainsi et par exemple pour les faces (x^-) et (x^+)
Si $\text{bord}_x^{\pm} = 4$

$$Fx^{\pm}(\quad \text{J:}\nu_y^- - 1 \to \nu_y^+ + 1, \qquad \text{K:}1 \to nz - 1, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tm, tp)$$

$$Fx^{\pm}(\qquad \text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \qquad \text{K:}0 \to nz, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tm, tp)$$

$$Fx^{\pm}(\qquad \text{J:}1 \to ny - 1, \quad \text{K:}\nu_z^- - 1 \to nu_z^+ + 1, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tm, tp)$$

$$Fx^{\pm}(\qquad \text{J:}1 \to ny - 1, \quad \text{K:}\nu_z^- - 1 \to nu_z^+ + 1, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tm, tp)$$

(tm, tp) désignant deux positions mémoire permettant d'accéder à deux instants consécutifs.
Les fonctions de face relatives aux faces (y^-), (y^+), (z^-) et (z^+) se définissent de manière identiques.

Les fonctions d'arête se subdivisent en trois familles selon la nature de la variable d'espace courante, x, y ou z. Par exemple, on définira
Si $\text{bord}_x^{\pm} = 4$ et $\text{bord}_y^{\pm} = 4$

$$Ay^{\pm}x^{\pm}(\qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad m : 0 \to L, \quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tm, tp)$$

$$Ay^{\pm}x^{\pm}(\quad \text{K:}1 \to nz - 1, \quad \ell : 0 \to L, \quad m : 0 \to L, \quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}, \text{instant} = tm, tp)$$

Enfin on définira les fonctions de coin par la donnée de

$$Co^{\pm\pm\pm}(\ell : 1 \to L, m : 1 \to L, p : 1 \to L, \text{comp.} : \psi^{(a,b)}, \eta^{(a,b)}, a, b = x, y, z, a \neq b)$$

2.8 Traitement des variables d'état du module [GORF]

Le calcul du champ magnétique est supposé entièrement traité par GORF, conditions de symétrie comprises. Il est décomposé en deux parties, le traitement du cube (à l'aide de l'équation du schéma) et éventuellement le calcul de faces externes (symétrie pour une face de type demi-entier). Le calcul du champ électrique est traité par GORF à l'exception des faces externes aux frontières caractérisées par une coordonnée de type entier. Ces faces sont, quant à elles, actualisée dans le module [DIAL].

2.8.1 Traitement du cube "champ magnétique"

Il s'agit de calculer,

$$\begin{aligned} &Hx(\ \text{i}: \quad 1 \to nx,\ \ \text{j}:\ 1 \to ny-1,\ \ \text{k}:\ 1 \to nz-1) \\ &Hy(\ \text{i}:\ 1 \to nx-1,\ \ \text{j}: \quad 1 \to ny,\ \ \text{k}:\ 1 \to nz-1) \\ &Hz(\ \text{i}:\ 1 \to nx-1,\ \ \text{j}:\ 1 \to ny-1,\ \ \text{k}: \quad 1 \to nz) \end{aligned} \tag{2.27}$$

On utilise les trois équations de Maxwell,

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{2.28}$$

Le schéma de discrétisation (écrit ici pour la composante Hz) est,

$$\left\{ \mu_0 \frac{(H_z)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (H_z)^{n-\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(E_x)^n_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (E_x)^n_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \right. \\ \left. - \frac{(E_y)^n_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (E_y)^n_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \right. \tag{2.29}$$

Pour passer de l'instant $n - \frac{1}{2}$ à $n + \frac{1}{2}$, les trois formules sont donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour I: } 1 \to nx, \quad \text{Pour J: } 1 \to ny - 1, \quad \text{Pour K: } 1 \to nz - 1 \\ Hx(\text{I, J, K}) = Hx(\text{I, J, K}) + Ry.(Ez(\text{I, J, K}) - Ez(\text{I, J+1, K})) \\ \qquad\qquad + Rz.(Ey(\text{I, J, K+1}) - Ey(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.30}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour I: } 1 \to nx - 1, \quad \text{Pour J: } 1 \to ny, \quad \text{Pour K: } 1 \to nz - 1 \\ Hy(\text{I, J, K}) = Hy(\text{I, J, K}) + Rz.(Ex(\text{I, J, K}) - Ex(\text{I, J, K+1})) \\ \qquad\qquad + Rx.(Ez(\text{I+1, J, K}) - Ez(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.31}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour I: } 1 \to nx - 1, \quad \text{Pour J: } 1 \to ny - 1, \quad \text{Pour K: } 1 \to nz \\ Hz(\text{I, J, K}) = Hz(\text{I, J, K}) + Rx.(Ey(\text{I, J, K}) - Ey(\text{I+1, J, K})) \\ \qquad\qquad + Ry.(Ex(\text{I, J+1, K}) - Ex(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.32}$$

avec

$$Rx = \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x}, \quad Ry = \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y}, \quad Rz = \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z}, \tag{2.33}$$

2.8.2 Traitement des faces "champ magnétique"

Pour chacune des 6 faces, il s'agit de calculer, si la face est de type demi-entier, les deux composantes externes du champ magnétique. Dans ce cas (la variable bord est à 1) et il suffit d'appliquer une simple symétrie. Par exemple

pour la face x^-,

$$\text{Si } \mathrm{frg}_x = 1 \quad : \text{on calcule}$$

$$\left| \begin{array}{l} Hy(\ \text{i}:\ 0,\ \text{j}:\ 1 \to ny-1,\ \text{k}:\ 1 \to nz) \\ Hz(\ \text{i}:\ 0,\ \text{j}:\ 1 \to ny,\ \text{k}:\ 1 \to nz-1) \end{array} \right. \tag{2.34}$$

Les formules sont,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour J}:\ 1 \to ny-1, \quad \text{Pour K}:\ 1 \to nz \\ Hz(\ \text{I:0, J, K}) \ = \pm Hz(\ \text{I:1, J, K}) \end{array} \right. \tag{2.35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour J}:\ 1 \to ny, \quad \text{Pour K}:\ 1 \to nz-1 \\ Hy(\ \text{I:0, J, K}) \ = \pm Hy(\ \text{I:1, J, K}) \end{array} \right. \tag{2.36}$$

Le signe + correspond au cas d'un mur électrique, le signe − au cas d'un mur magnétique.

Il est important de noter que ces formules doivent être appliquées après le traitement du cube magnétique.

2.8.3 Traitement du cube "champ électrique"

Ce traitement est supposé entièrement traité par GORF Il s'agit de calculer,

$$\begin{array}{l} Ex(\ \text{i}:\ 1 \to nx-1,\ \text{j}:\ \nu^-_{\otimes y} \to \nu^+_{\otimes y},\ \text{k}:\ \nu^-_{\otimes z} \to \nu^+_{\otimes z}) \\ Ey(\ \text{i}:\ \nu^-_{\otimes x} \to \nu^+_{\otimes x},\ \text{j}:\ 1 \to ny-1,\ \text{k}:\ \nu^-_{\otimes z} \to \nu^+_{\otimes z}) \\ Ez(\ \text{i}:\ \nu^-_{\otimes x} \to \nu^+_{\otimes x},\ \text{j}:\ \nu^-_{\otimes y} \to \nu^+_{\otimes y},\ \text{k}:\ 1 \to nz-1) \end{array} \tag{2.37}$$

On utilise les trois équations de Maxwell,

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} \quad ; \quad \epsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \epsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} \end{array} \right. \tag{2.38}$$

Pour un milieu stratifié, le schéma de discrétisation est [1]

$$\epsilon_k \frac{(E_z)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (E_z)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} + \sigma_k \frac{(E_z)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + (E_z)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{2} =$$
$$= \frac{(H_y)^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - (H_y)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x} - \frac{(H_x)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - (H_x)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta y} \tag{2.39}$$

$$\epsilon_{k+\frac{1}{2}} \frac{(E_x)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (E_x)^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sigma_{k+\frac{1}{2}} \frac{(E_x)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + (E_x)^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{2} =$$
$$= \frac{(H_z)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (H_z)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{(H_y)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - (H_y)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta z} \tag{2.40}$$

$$\epsilon_{k+\frac{1}{2}} \frac{(E_y)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (E_y)^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sigma_{k+\frac{1}{2}} \frac{(E_y)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + (E_y)^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{2} =$$
$$= \frac{(H_x)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (H_x)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta z} - \frac{(H_z)^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - (H_z)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{2.41}$$

Les formules sont un peu plus compliquées puisqu'il y a dépendance en k. On va décomposer le calcul en couche selon,
faire pour c=1, nombre de couches

$$R = \frac{\epsilon_c - \sigma_c \Delta t/2}{\epsilon_c + \sigma_c \Delta t/2} \qquad Rx = \frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta t}{\epsilon_c + \sigma_c \Delta t/2}$$
$$Ry = \frac{1}{\Delta y}\frac{\Delta t}{\epsilon_c + \sigma_c \Delta t/2} \qquad Rz = \frac{1}{\Delta z}\frac{\Delta t}{\epsilon_c + \sigma_c \Delta t/2}$$

1. On donne ici ces formules a des fins de comparaisons avec les formules programmées dans GORF

faire pour k= $k^-(c) \rightarrow k^+(c)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour J}: \ \nu^-_{\otimes y} \rightarrow \nu^+_{\otimes y}, \quad \text{Pour I}: \ 1 \rightarrow nx-1, \\ Ex(\text{I, J, K}) \ = R.Ex(\text{I, J, K}) \ + Ry.(Hz(\text{I, J, K}) - Hz(\text{I, J-1, K})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Rz.(Hy(\text{I, J, K-1}) - Hy(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.42}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour I}: \ \nu^-_{\otimes x} \rightarrow \nu^+_{\otimes x}, \quad \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny-1, \\ Ey(\text{I, J, K}) \ = R.Ey(\text{I, J, K}) \ + Rz.(Hx(\text{I, J, K}) - Hx(\text{I, J, K-1})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Rx.(Hz(\text{I-1, J, K}) - Hz(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.43}$$

fin faire sur k
faire pour k= $k^-(c)+1 \rightarrow k^+(c)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour I}: \ \nu^-_{\otimes x} \rightarrow \nu^+_{\otimes x}, \quad \text{Pour J}: \ \nu^-_{\otimes y} \rightarrow \nu^+_{\otimes y}, \\ Ez(\text{I, J, K}) \ = R.Ez(\text{I, J, K}) \ + Rx.(Hy(\text{I-1, J, K}) - Hy(\text{I, J, K})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Ry.(Hx(\text{I, J-1, K}) - Hx(\text{I, J, K})) \end{array} \right. \tag{2.44}$$

fin faire sur k.
fin faire sur le nombre de couches.

2.8.4 Traitement des faces "champ électrique"

Pour chacune des six faces, il s'agit d'actualiser, si la face est de type entier, les deux composantes tangentielles manquantes du champ électrique. A l'aide des variables supplémentaires, Le traitement de ces faces se fait par un simple transfert de données (module [DIAL]).
Pour la face x^-, si $\text{bord}^-_x \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny-1, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz & \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz-1 \\ Ey(\text{ I:1, J, K}) = Ebx^-(\text{ J, K, Y, 2}) & Ez(\text{ I:1, J, K}) = Ebx^-(\text{ J, K, Z, 2}) \end{array} \right. \tag{2.45}$$

Pour la face x^+, si $\text{bord}_x^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny-1, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz & \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz-1 \\ Ey(\ \text{I:}nx, \ \text{J}, \ \text{K}) = Eby^+(\ \text{J}, \ \text{K}, \ \text{Y}, \ 2) & Ez(\ \text{I:}nx, \ \text{J}, \ \text{K}) = Ebx^+(\ \text{J}, \ \text{K}, \ \text{Z}, \ 2) \end{array} \right. \tag{2.46}$$

Pour la face y^-, si $\text{bord}_y^- \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour K :1} \ 1 \rightarrow nz-1, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx & \text{Pour K}: \ 1 \rightarrow nz, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx-1 \\ Ez(\ \text{I, J:1, K}) = Eby^-(\ \text{K, I, Z, 2}) & Ex(\ \text{I, J:1, K}) = Eby^-(\ \text{K, I, X, 2}) \end{array} \right. \tag{2.47}$$

Pour la face y^+, si $\text{bord}_y^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour K :1} \ 1 \rightarrow nz-1, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx & \text{Pour K}: \ 1 \rightarrow nz, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx-1 \\ Ez(\ \text{I, J:}ny, \ \text{K}) = Eby^+(\ \text{K, I, Z, 2}) & Ex(\ \text{I, J:}ny, \ \text{K}) = Eby^+(\ \text{K, I, X, 2}) \end{array} \right. \tag{2.48}$$

Pour la face z^-, si $\text{bord}_z^- \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour I :1} \ 1 \rightarrow nx-1, \ \text{J}: \ 1 \rightarrow ny & \text{Pour I}: \ 1 \rightarrow nx, \ \text{J}: \ 1 \rightarrow ny-1 \\ Ex(\ \text{I, J, K:1}) = Ebz^-(\ \text{I, J, X, 2}) & Ey(\ \text{I, J, K:1}) = Ebz^-(\ \text{I, J, Y, 2}) \end{array} \right. \tag{2.49}$$

Pour la face z^+, si $\text{bord}_z^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour I :1} \ 1 \rightarrow nx-1, \text{J}: \ 1 \rightarrow ny & \text{Pour I}: \ 1 \rightarrow nx, \ \text{J}: \ 1 \rightarrow ny-1 \\ Ex(\ \text{I, J, K:}nz) = Ebz^+(\ \text{I, J, X, 2}) & Ey(\ \text{I, J, K:}nz) = Ebz^+(\ \text{I, J, Y, 2}) \end{array} \right. \tag{2.50}$$

De même, le module BORD devra connaître avant tout calcul les valeurs des champs électriques sur les faces internes, on devra donc réaliser un transfert du type,
Pour la face x^-, si $\text{bord}_x^- \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny-1, \ \text{K}: \ \nu_z^- \rightarrow \nu_z^+ & \text{Pour J}: \ \nu_y^- \rightarrow \nu_y^+, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz-1 \\ Ebx^-(\ \text{K, J, Y, 1}) = Ey(\ \text{I:2, J, K}) & Ebx^-(\ \text{J, K, Z, 1}) = Ez(\ \text{I:2, J, K}) \end{array} \right. \tag{2.51}$$

Pour la face x^+, si $\text{bord}_x^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour J}: \ 1 \rightarrow ny-1, \ \text{K}: \ \nu_z^- \rightarrow \nu_z^+ & \text{Pour J}: \ \nu_y^- \rightarrow \nu_y^+, \ \text{K}: \ 1 \rightarrow nz-1 \\ Ebx^+(\ \text{K, J, Y, 1}) = Ey(\ \text{I:}nx\text{-1, J, K}) & Ebx^+(\ \text{J, K, Z, 1}) = Ez(\ \text{I:}nx\text{-1, J, K}) \end{array} \right. \tag{2.52}$$

Pour la face y^-, si $\text{bord}_y^- \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour K}: 1 \rightarrow nz-1, \ \text{I}: \ \nu_x^- \rightarrow \nu_x^+, & \text{Pour K}: \ \nu_z^- \rightarrow \nu_z^+, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx-1 \\ Eby^-(\ \text{I, K, Z, 1}) = Ez(\ \text{I, J:2, K}) & Eby^-(\ \text{K, I, X, 1}) = Ex(\ \text{I, J:2, K}) \end{array} \right. \tag{2.53}$$

Pour la face y^+, si $\text{bord}_y^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour K}: 1 \rightarrow nz-1, \ \text{I}: \ \nu_x^- \rightarrow \nu_x^+, & \text{Pour K}: \ \nu_z^- \rightarrow \nu_z^+, \ \text{I}: \ 1 \rightarrow nx-1 \\ Eby^+(\ \text{I, K, Z, 1}) = Ez(\ \text{I, J:}ny\text{-1, K}) & Eby^+(\ \text{K, I, X, 1}) = Ex(\ \text{I, J:}ny\text{-1, K}) \end{array} \right. \tag{2.54}$$

Pour la face z^-, si $\text{bord}_z^- \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour I}: 1 \rightarrow nx-1, \ \text{J}: \ \nu_y^- \rightarrow \nu_y^+, & \text{Pour I}: \nu_x^- \rightarrow \nu_x^+, \ \text{J}: \ 1 \rightarrow ny-1 \\ Ebz^-(\ \text{K, I, X, 1}) = Ex(\ \text{I, J, K:2}) & Ebz^-(\ \text{I, K, Y, 1}) = Ey(\ \text{I, J, K:2}) \end{array} \right. \tag{2.55}$$

Pour la face z^+, si $\text{bord}_z^+ \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Pour I}: 1 \rightarrow nx-1, \ \text{J}: \ \nu_y^- \rightarrow \nu_y^+, & \text{Pour I}: \ \nu_x^- \rightarrow \nu_x^+, \ \text{J}: \ 1 \rightarrow ny-1 \\ Ebz^+(\ \text{K, I, X, 1}) = Ex(\ \text{I, J, K:}nz\text{-1}) & Ebz^+(\ \text{I, K, Y, 1}) = Ey(\ \text{I, J, K:}nz\text{-1}) \end{array} \right. \tag{2.56}$$

Ces deux transferts seront les seuls points de contact entre les champs électromagnétiques et le module BORD. On obtient ainsi une maintenance facile en cas de modification de la structure de ces champs dans GORF.

2.9 Calcul des variables d'état du module BORD

Ce calcul est segmenté en trois étapes successives.

- Traitement des faces
- Traitement des arêtes
- Traitement des coins

2.9.1 Traitement des faces externes

Nous commençons par un exemple, le traitement de la face $(x-)$. On distingue quatre cas.

- bordx_ $= 1$: condition de symétrie par rapport à un nœud de type demi entier. Dans ce cas il n'y a rien a faire puisque la symétrie s'applique sur le champ magnétique.
- bordx_ $= 2$: condition de symétrie par rapport à un nœud de type entier. On identifie les valeurs de la face externe à l'instant $n+1$

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}1 \to ny-1, \mathrm{K}{:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \mathrm{comp.} = y, 2)$$

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \mathrm{K}{:}1 \to nz-1, \mathrm{comp.} = z, 2)$$

  à plus ou moins les valeurs de la face interne au même instant, soient

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}1 \to ny-1, \mathrm{K}{:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \mathrm{comp.} = y, 1)$$

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \mathrm{K}{:}1 \to nz-1, \mathrm{comp.} = z, 1)$$

  Le signe est déterminé par la nature de la condition de symétrie.
- bordx_ $= 3$: condition de périodicité par rapport à un nœud de type entier. On identifie les valeurs de la face externe à l'instant $n+1$

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}1 \to ny-1, \mathrm{K}{:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \mathrm{comp.} = y, 2)$$

$$Ebx^{-}(\mathrm{J}{:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \mathrm{K}{:}1 \to nz-1, \mathrm{comp.} = z, 2)$$

aux valeurs de la face interne opposée, ici (x^+), au même instant, soient

$$Ebx^+(\text{J:}1 \to ny-1, \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \text{comp.} = y, 1)$$

$$Ebx^+(\text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \text{K:}1 \to nz-1, \text{comp.} = z, 1)$$

– bordx_ = 4 : condition aux limites absorbantes par rapport à un nœud de type entier. Ce calcul actualise

$$Ebx^-(\text{J:}1 \to ny-1, \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \text{comp.} = y, 2)$$

$$Ebx^-(\text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \text{K:}1 \to nz-1, \text{comp.} = z, 2).$$

et

$$Fx^-(\text{J:}1 \to ny-1, \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \ell : 0 \to L, \text{ comp.} = y, \text{instants} = tm, tp)$$

$$Fx^-(\text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \text{K:}1 \to nz-1, \ell : 0 \to L, \text{ comp.} = z, \text{instants} = tm, tp)$$

Le terme "actualiser" signifiant qu'aux valeurs de la face externe à l'instant n sont substituées les valeurs de cette même face à l'instant $n+1$ et que les valeurs des fonctions auxiliaires de face aux instants $n-1$ et n sont remplacées par les valeurs de ces mêmes fonctions aux instants n et $n+1$.
L'algorithme utilise en outre, les quantités suivantes
1) Les valeurs de la face interne à l'instant $n+1$:

$$Ebx^-(\text{J:}1 \to ny-1, \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \text{comp.} = y, 1)$$

$$Ebx^-(\text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+, \text{K:}1 \to nz-1, \text{comp.} = z, 1).$$

2) Les valeurs des arêtes externes à la face pour les fonctions auxiliaires et à l'instant n

$$Fx^-(\ \text{J:}1 \to ny-1, \quad \text{K:}\nu_z^- - 1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\ \text{J:}1 \to ny-1 \quad \text{K:}\nu_z^+ + 1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\ \text{J:}0 \quad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\ \text{J:}nx \quad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instants} = tm)$$

et

$$Fx^-(\quad \text{J:}\nu_y^- - 1,\ \text{K:}1 \to nz - 1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\quad \text{J:}\nu_y^+ + 1,\ \text{K:}1 \to nz - 1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\ \text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+,\ \text{K:}0,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tm)$$

$$Fx^-(\ \text{J:}\nu_y^- \to \nu_y^+,\ \text{K:}\ nz,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tm)$$

L'algorithme est donné en section 1.3.4, page 20.

Les autres faces se traitent de manière identique.

2.9.2 Traitement des arêtes

Une arête étant une intersection de deux faces, et le nombre de conditions possibles sur chaque face étant de quatre, on a seize possibilités pour chaque arête. Pour l'arête $(x^+) \cap (y^+)$, le traitement est le suivant,

- Si bordx$^+$=1, bordy$^+$=1 (typea = 0)
  Il n'y a rien à faire

- Si bordx$^+$=2, bordy$^+$=1 (typea = 0)
  Il n'y a rien à faire (Remarquez que ν_y^+ étant égal à ny, la composante selon z de Ebx^+ a déjà été calculée dans le traitement de la face (x^+)).

- Si bordx$^+$=1, bordy$^+$=2 (typea = 0)
  Rien à faire.

- Si bordx$^+$=1, bordy$^+$=3 (typea = 0)
  Rien à faire.

- Si bordx$^+$=3, bordy$^+$=1 (typea = 0)
  Rien à faire.

- Si bordx$^+$=2, bordy$^+$=2 (typea = 1)
  On évalue la comp. selon z du champ électrique le long de l'arête. C'est

à dire

$$Ebx^{+}(\quad \text{J:}ny,\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\ \ \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Eby^{+}(\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\quad \text{I:}nx-1,\ \ \text{comp.} = z, 2)$$

et

$$Eby^{+}(\quad \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\quad \text{I:}nx,\ \ \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Ebx^{+}(\ \ \text{J:}ny-1, \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\ \ \text{comp.} = z, 2)$$

Les valeurs calculées, représentant le même champ sont identiques pour les deux faces.

– Si bordx^{+}=3, bordy^{+}=2 (typea = 2)
On évalue la composante selon z du champ électrique le long de l'arête. C'est à dire

$$Ebx^{+}(\quad \text{J:}ny,\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\ \ \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Eby^{+}(\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\quad \text{I:}2,\ \ \text{comp.} = z, 2)$$

et

$$Eby^{+}(\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\quad \text{I:}nx,\ \ \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Ebx^{+}(\quad \text{J:}ny-1,\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\ \ \text{comp.} = z, 2)$$

Les valeurs calculées, représentant le même champ sont identiques pour les deux faces.

– Si bordx^{+}=2, bordy^{+}=3 (typea = 3)
On évalue la composante selon z du champ électrique le long de l'arête. C'est à dire

$$Ebx^{+}(\quad \text{J:}ny,\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\ \ \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Eby^{+}(\ \ \text{K:}1 \rightarrow nz-1,\quad \text{I:}nx-1,\ \ \text{comp.} = z, 2)$$

et

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}2, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

Les valeurs calculées, représentant le même champ sont identiques pour les deux faces.

– Si bordx$^+$=3, bordy$^+$=3 (typea = 4)
On évalue la composante selon z du champ électrique le long de l'arête. C'est à dire

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}2, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

et

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}2, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

Les valeurs calculées, représentant le même champ sont identiques pour les deux faces.

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=1 (typea = 5)
On applique la symétrie pour obtenir les valeurs manquantes le long de l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (x^+).

$$Fx^+(\quad \text{J:}ny+1, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fx^+(\quad \text{J:}ny-1, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fx^+(\qquad \text{J:}ny \qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fx^+(\quad \text{J:}ny-1 \qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=1, bordy$^+$=4 (typea = 6)
On applique la symétrie pour obtenir les valeurs manquantes le long de

l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (y^+).

$$Fy^+(\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{I:}nx+1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fy^+(\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{I:}nx-1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fy^+(\ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \text{I:}nx,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = x, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fy^+(\ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \text{I:}nx-1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = x, \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=2 (typea = 7)
On applique la symétrie pour obtenir, d'une part les valeurs manquantes le long de l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (x^+)

$$Fx^+(\ \text{J:}ny,\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fx^+(\ \text{J:}ny-1,\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fx^+(\ \text{J:}ny\ \ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \ell : 0 \to L,\ \text{comp.} = y, \text{instants} = tp) = \pm$$

$$Fx^+(\ \text{J:}ny-2\ \ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \ell : 0 \to L,\ \text{comp.} = y, \text{instants} = tp)$$

et d'autre part le champ électrique le long de l'arête

$$Eby^+(\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{I:}nx,\ \text{comp.} = z, 2) \equiv$$

$$Ebx^+(\ \text{J:}ny,\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Ebx^+(\ \text{J:}ny-1,\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{comp.} = z, 2)$$

– Si bordx$^+$=2, bordy$^+$=4 (typea = 8)
On applique la symétrie pour obtenir, d'une part les valeurs manquantes le long de l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (y^+).

$$Fy^+(\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{I:}nx,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fy^+(\ \text{K:}1 \to nz-1,\ \text{I:}nx-1,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fy^+(\ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \text{I:}nx,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = x, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Fy^+(\ \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+,\ \text{I:}nx-2,\ \ell : 1 \to L,\ \text{comp.} = x, \text{instant} = tp)$$

et d'autre part le champ électrique le long de l'arête

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}nx, \quad \text{comp.} = z, 2) \equiv$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2) = \pm$$

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad \text{I:}nx-1, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=3 (typea = 9)
On applique la condition de périodicité pour obtenir, d'une part les valeurs manquantes le long de l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (x^+).

$$Fx^+(\quad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) =$$

$$Fx^+(\quad \text{J:}2, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fx^+(\quad \text{J:}ny \qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instants} = tp) =$$

$$Fx^+(\quad \text{J:}2 \qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instants} = tp)$$

et d'autre part le champ électrique le long de l'arête

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}nx, \quad \text{comp.} = z, 2) \equiv$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}2, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

– Si bordx$^+$=3, bordy$^+$=4 (typea = 10)
On applique la condition de périodicité pour obtenir, d'une part les valeurs manquantes le long de l'arête des fonctions auxiliaires pour la face (y^+).

$$Fy^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{I:}nx, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp) =$$

$$Fy^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{I:}2, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instant} = tp)$$

$$Fy^+(\quad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \text{I:}nx, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = x, \text{instant} = tp) =$$

$$Fy^+(\quad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \text{I:}2, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = x, \text{instant} = tp)$$

et d'autre part le champ électrique le long de l'arête

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}nx, \quad \text{comp.} = z, 2) \equiv$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2) =$$

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}2, \quad \text{comp.} = z, 2)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=4 (typea = 11)
On est dans le cas où deux plans absorbants s'intersectent. Le traitement est double. Tout d'abord on actualise, i.e. on substitue aux instants $n-1, n$ les instants $n, n+1$ des quantités
(fonctions de face externe ou sur l'arête)

$$Fy^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad \text{I:}nx+1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instants} = tm, tp)$$

$$Fy^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}nx, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = x, \text{instants} = tm, tp)$$

$$Fx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 1 \to L, \quad \text{comp.} = z, \text{instants} = tm, tp)$$

$$Fx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny \qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad \text{comp.} = y, \text{instants} = tm, tp)$$

et (fonctions d'arête)

$$Ay^+x^+(\qquad \text{K:}\nu_z^- \to \nu_z^+, \quad \ell : 0 \to L, \quad m : 0 \to L, \quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tm, tp)$$

$$Ay^+x^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \ell : 0 \to L, \quad m : 0 \to L, \quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tm, tp$$

(l'algorithme est donné en section 1.4.4, page 33).
D'autre part, on évalue à l'aide de l'algorithme de la section 1.5, page 42 le champ électrique tangent le long de l'arête, soit

$$Eby^+(\quad \text{K:}1 \to nz-1, \qquad\qquad \text{I:}nx, \quad \text{comp.} = z, 2) \equiv$$

$$Ebx^+(\qquad\qquad \text{J:}ny, \quad \text{K:}1 \to nz-1, \quad \text{comp.} = z, 2).$$

2.9.3 Traitement des coins

Le traitement des faces et des arêtes permet de clore la récurrence dans tous les cas sauf si l'arête est intersection de deux plans absorbants. Dans ce cas on doit calculer en sus (pour l'arête $(x^+) \cap (y^+)$)

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}\nu_z^- - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}\nu_z^+ + 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}0,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

C'est l'objet du traitement des coins.
Pour chaque coin on distingue dix cas où un traitement est nécessaire. (on écrit le cas du coin $(x^+) \cap (y^+) \cap (z^+)$).

- Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=4, bordz$^+$=1 (typec =1)
  On applique la symétrie en z pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

  $$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz + 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) = \pm$$

  $$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

  $$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) = \pm$$

  $$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

- Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=1, bordz$^+$=4 (typec =2)
  On applique la symétrie en y pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

  $$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny + 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) = \pm$$

  $$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

  $$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) = \pm$$

  $$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=1, bordy$^+$=4, bordz$^+$=4 (typec = 3)
On applique la symétrie en x pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

$Ay^+z^+($ I:$nx+1$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp) = \pm$

$Ay^+z^+($ I:$nx-1$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp)$

$Ay^+z^+($ I:nx, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp) = \pm$

$Ay^+z^+($ I:$nx-1$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp)$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=4, bordz$^+$=2 (typec =4)
On applique la symétrie en z pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

$Ax^+y^+($ K:nz, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp) = \pm$

$Ax^+y^+($ K:$nz-1$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp)$

$Ax^+y^+($ K:nz, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp) = \pm$

$Ax^+y^+($ K:$nz-2$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp)$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=2, bordz$^+$=4 (typec =5)
On applique la symétrie en y pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

$Az^+x^+($ J:ny, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp) = \pm$

$Az^+x^+($ J:$ny-1$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}$, instant $= tp)$

$Az^+x^+($ J:ny, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp) = \pm$

$Az^+x^+($ J:$ny-2$, $\ell : 1 \to L$, $m : 1 \to L$, comp. $= \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)}$instant $= tp)$

– Si bordx$^+$=2, bordy$^+$=4, bordz$^+$=4 (typec =6)
On applique la symétrie en x pour obtenir les extrémités des fonctions

d'arête.

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx - 1,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) = \pm$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx - 2,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=4, bordz$^+$=3 (typec =7)
On applique la condition de périodicité en z pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) =$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) =$$

$$Ax^+y^+(\quad \text{K:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=3, bordz$^+$=4 (typec =8)
On applique la condition de périodicité en y pour obtenir les extrémités des fonctions d'arête.

$$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) =$$

$$Az^+x^+(\quad \text{J:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) =$$

$$Az^+x^+(\quad \text{J:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=3, bordy$^+$=4, bordz$^+$=4 (typec =9)
On applique la condition de périodicité en x pour obtenir les extrémités

des fonctions d'arête.

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp) =$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp)$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp) =$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:2},\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp)$$

– Si bordx$^+$=4, bordy$^+$=4, bordz$^+$=4 (typec =10)
On est ici dans le cas de trois plans absorbants. A ce coin se croisent 12 L^2 fonctions d'arête donnant naissance à 12 L^3 fonctions de coin. Le traitement de ce coin revient à actualiser

$$Ay^+x^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp, tm)$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp, tm)$$

$$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \psi^{(x,z)}, \psi^{(y,z)} \text{instant} = tp, tm)$$

et

$$Ay^+x^+(\quad \text{K:}nz,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp, tm)$$

$$Ay^+z^+(\quad \text{I:}nx,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp, tm)$$

$$Az^+x^+(\quad \text{J:}ny,\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(x,z)}, \eta^{(y,z)}, \text{instant} = tp, tm)$$

ainsi que

$$Cx^+y^+z^+(\quad \ell : 1 \to L,\quad m : 1 \to L,\quad \text{comp.} = \eta^{(a,b)}, \psi^{(a,b)}, a, b = x, y, z\ a \neq b)$$

L'algorithme est donné en section 1.6.4, page 59.

2.10 Capacité mémoire requise

La place mémoire requise par [GORF] est essentiellement utilisée pour le champ électromagnétique. La place mémoire requise est de

3 (NX+1) · (NY+1) · (NZ+1)	:	champ magnétique
3 NX · NY · NZ	:	champ électrique

L'adjonction des deux nouveaux modules ([BORD] et [DIAL]) va nécessiter un supplément, non négligeable, de place mémoire. Sa quantité est fonction des conditions aux limites imposées sur les bords.

Par exemple la face (x^+) utilisera

- Si bord_x=1, (condition de symétrie sur le champ magnétique).

  Néant

- Si bord_x=2 ou 3 (condition de symétrie sur le champ électrique ou condition de périodicité).

  $4 \cdot \text{NY} \cdot \text{NZ}$: Faces dupliquées

- Si bord_x=4 (CLA).

  $4 \cdot \text{NY} \cdot \text{NZ}$: Faces dupliquées

  $4 \cdot \text{NY} \cdot \text{NZ} \cdot (\text{L}+1)$: Fonctions de face

De même on devra réserver une place mémoire pour les fonctions d'arête pour chaque arête intersection de deux plans où une CLA s'applique, soit, pour une arête en z

$8 \cdot \text{NZ} \cdot (\text{L}+1)^2$: Fonctions d'arête

Enfin pour chaque coin, intersection de trois plans absorbants, on devra allouer

$12 \cdot \text{L}^3$: Fonctions de coin

Pour un cube où chaque face est absorbante, on devra allouer en supplément du champ électromagnétique

$\Rightarrow$

$96 \cdot \mathrm{L}^3$	:	Fonctions de coin
$32 \cdot \mathrm{NX} \cdot (\mathrm{L}+1)^2$	:	Fonctions d'arête en x
$32 \cdot \mathrm{NY} \cdot (\mathrm{L}+1)^2$	:	Fonctions d'arête en y
$32 \cdot \mathrm{NZ} \cdot (\mathrm{L}+1)^2$	:	Fonctions d'arête en z
$8 \cdot (\mathrm{NX}+1) \cdot (\mathrm{NY}+1) \cdot (\mathrm{L}+1)$	:	Fonctions de face en x, y
$8 \cdot (\mathrm{NX}+1) \cdot (\mathrm{NZ}+1) \cdot (\mathrm{L}+1)$	:	Fonctions de face en x, z
$8 \cdot (\mathrm{NX}+1) \cdot (\mathrm{NY}+1) \cdot (\mathrm{L}+1)$	:	Fonctions de face en y, z
$8 \cdot \mathrm{NX} \cdot \mathrm{NY}$	:	Faces suppl. en x, y
$8 \cdot \mathrm{NX} \cdot \mathrm{NZ}$	:	Faces suppl. en x, z
$8 \cdot \mathrm{NX} \cdot \mathrm{NY}$	:	Faces suppl.en y, z

Les deux modules devront permettre une gestion automatique de cette place mémoire. Une possibilité est de prévoir deux tableaux de travail, l'un destiné à contenir les fonctions auxiliaires de face, d'arête et de coin, l'autre les faces supplémentaires. Un premier appel au modules [BORD] et [DIAL], outre les initialisations de leurs variables de commande, devrait renvoyer le nombre de places mémoire nécessaire, afin que le programme principal puisse procéder à une allocation ou à une vérification.

Chapitre 3

Réalisation informatique

3.1 Présentation générale

Ce chapitre est consacré à la réalisation informatique effectuée pour implémenter les clas dans le code GORF. Il contient notamment une description des sous-programmes FORTRAN qui ont été réalisés à cet effet.

3.1.1 Les cla d'ordre élevées vus par l'utilisateur

L'utilisation des conditions à la limite absorbantes d'ordre élevé est une nouvelle fonctionalité du code de calcul GORF. Elle s'obtient en ajoutant les deux lignes suivantes au fichier d'entrée DON:

```
⋆CLA_NN
5
```

⋆CLA_NN est le mot clé signifiant l'utilisation des conditions d'ordre élevé pour les bords absorbants. L'entier 5 précise la version retenue pour ces conditions (ici, version à cinq fractions rationnelles avec coefficients optimisés).

3.1.2 Les cla d'ordre élevés vus par le programme principal

GORF.C est le programme principal de GORF. Les conditions d'ordre élevé ont nécessité deux adjonctions à ce module.

1. Lors de la phase préliminaire, avant toute itération temporelle.
2. Lors de la phase phase d'itération.

1. Schématisation des deux étapes de l'algorithme

La première phase, ou phase d'initialisation s'écrit

```
INIGOR(....,ICLA_NN = 1)
si( ICLA_NN ) alors
   DATACLA( ICLA_NN,...)                  → BDIN.DAT
   BDGORF(ETAT=-1,.....)                  ← BDIN.DAT
   ALLOCATION MEMOIRE (COEF, MAT)
   BDGORF(ETAT=2,.....)
   RESTITUTION MEMOIRE (MAT)
   ALLOCATION MEMOIRE (ETG, WRK)
   BDGORF(ETAT=0,.....)
fin si
```

La seconde phase, phase d'itération s'écrit

```
si( ICLA_NN ) alors
              | DIALGFBD: ETG← (EX,EY,EZ)
   BDTRAIT :  | BDGORF(ETAT=1,ETG,...)
              | DIALGFBD: ETG→ (EX,EY,EZ)
fin si
```

2. Phase préliminaire

Elle se présente comme suit:

1. Initialisation de la variable ICLA_NN :
   Si la carte "⋆CLA_NN" est présente ICLA_NN=1 sinon ICLA_NN=0 (cette étape est réalisée lors de l'appel à INIGORF.F)

2. Si ICLA_NN=1 :

   - Appel du sous-programme DATACLA : Création du fichier d'entrée BDIN.DAT. Ce fichier contient les variables de commande pour les modules des cla.
   - Appel de BDGORF avec ETAT = -1: Cette phase comprend la lecture du fichier BDIN.DAT et le calcul des tailles des 4 tableaux qui vont être nécessaires au fonctionnement ultérieur des modules des clas. Ces quatre entiers sont NETG pour le tableau ETG, NWK pour le tableau WRK, NBCOE pour le tableau COEF et NBMAT pour le tableau MAT. Cette phase comprend également, l'initialisation des commons des modules des clas. Ceux-ci sont décrits en détail dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3
     (Remarque: les arguments inutilisés du sous-programme BDGORF sont indiqués par le signifiant BIDON).
   - Allocation de la place mémoire pour les deux tableaux MAT et COEF
   - Appel de BDGORF avec ETAT = 2: Cette phase permet le calcul et le rangement dans le tableau COEF des coefficients. Ces coefficients sont des quantités qui sont constantes au cours des itérations en temps. Ce calcul utilise le tableau de travail MAT.
   - Désallocation de la place mémoire pour le tableau MAT. La taille de ce tableau peut être importante: $144 \times$ (le nombre de fractions rationnelles à la puissance 4). Cette étape permet de libérer de la place mémoire.
   - Allocation de la place mémoire pour les tableaux ETG et WRK. Ces tableaux sont les variables d'état du module des bords (i.e. leurs valeurs changent au cours des itérations en temps). WRK est le tableau des fonctions auxiliaires (de face d'arête ou de coin). ETG est le tableau des composantes tangentielles du champ électrique sur lequel travaillent les modules du bord. Il y a donc une redondance entre ce tableau et les tableaux du cube de calcul EX , EY et EZ.
   - Appel de BDGORF avec ETAT= 0. C'est l'initialisation des variables d'état. Ces variables sont mises à zéro.

3. Phase d'itération

Cette phase apparaît dans la boucle d'itération temporelle après le calcul des composantes du cube champ électrique. Si les clas d'ordre élevé sont retenues, les modules de bord vont calculer les composantes manquantes du champ électrique, celles non calculées par le schéma interne. La réalisation se fait par l'appel (si ICLA_NN=1) du module BDTRAIT. BDTRAIT comprend trois phases.

- Transfert des quantités nécessaires au calcul des composantes manquantes: il s'agit de transférer certaines parties des trois tableaux EX, EY, EZ vers le tableau ETG.
- Appel de BDGORF avec ETAT=1. On effectue une itération sur les variables d'état du bord.
- Transfert des composantes manquantes : il s'agit de transférer les quantités nouvellement calculées de ETG vers EX, EY, EZ.

Le transfert est réalisé par le sous-programme BDDIALOG avec ces deux points d'entrées : DIALGFBD pour la phase 1 et DIALBDGF pour la phase 2.

3.2 Description des données

Avant d'aborder la description des sous-programmes réalisés et leur enchaînement. On donne la structure des paramètres de commande, PARAMETERS et COMMONS , avec lesquels ils s'articulent.

3.2.1 Les Parameters

- PARAMETER(LMAX=5)
  LMAX est la valeur maximale du nombre de fractions rationnelles pour la cla. Il est utilisé pour définir la taille maximum des tableaux ALPHA(LMAX) et BETA(LMAX). (modules BDCOM, BDCFCLA, BDCACLA et BDCCCLA) et celle des tableaux utilisés pour l'inversion des systèmes linéaires via des programmes LINPACK (IPVT(2⋆LMAX), WORK(2⋆LMAX) et

MAT(2⋆LMAX,2⋆LMAX) dans BDCA et IPVT(12⋆LMAX⋆LMAX) dans BDCCCLA).

- PARAMETER(NCMAX=3)
  NCMAX est le nombre maximal de couches en z. Dans GORF, on utilise, pour l'instant deux couches. NCMAX est utilisé soit pour définir la taille des tableaux EPSREL(NCMAX), MUREL(NCMAX), SIGMA(NCMAX) et INTERF(NCMAX) (modules BDINB et BDSTRATC) soit pour définir NMMAX (cf. ci-dessous).

- PARAMETER(NMMAX=4⋆NCMAX-3)
  NMMAX est le nombre maximal de "milieux numériques". Il est uniquement utilisé pour définir la taille des tableaux du common BDKDCOUP.

- $$\text{PARAMETER} \left(\begin{array}{ccc} \text{C0} & = & \text{3.E+08} \\ \text{MU0} & = & \text{1.2566370614359170E-06} \\ \text{EPS0} & = & \text{1./ (MU0*C0*C0)} \end{array} \right)$$

  C0 est la vitesse de la lumière, MU0 le μ_0 du vide EPS0 le ϵ_0 du vide. Ces valeurs sont uniquement utilisées dans les modules BDSTRATC et BDINB

3.2.2 Les Commons (1) : les variables de commandes des modules de bord

- COMMON/ BDTAILLE /NETGB, NBCOEFB, NMATB, NWRKB :
  (SUBROUTINE BDGORF)
  Ces quatre entiers sont les tailles des quatre tableaux qu'utilise le module BDGORF Lors de l'appel de BDGORF avec ETAT = -1, ces quatre valeurs sont calculées et transférées en argument à l'extérieur du module afin que le main GORF.C puisse effectuer l'allocation nécessaire. Elles sont en outre dupliquées dans ce common afin de permettre une vérification des tailles lors des appels ultérieurs de BDGORF.
  L'initialisation a donc lieu dans BDGORF avec ETAT = -1. L'utilisation a lieu dans ce même sous-programme lors de l'appel avec ETAT = 0 et ETAT = 2.
  Remarque : le test n'est pas effectué lors des itérations en temps (ETAT=1).

- COMMON/ BDPASE /DX, DY, DZ et COMMON/ BDPAST /DT:
  (SUBROUTINE :BDCCCLA, BDCFCLA, BDCACLA et BDINB)
  Ces deux commons contiennent les pas d'espace et de temps. Ils sont initialisés dans BDINB (via BDGORF avec ETAT=-1) par une lecture dans le fichier BDIN.DAT. Ils sont utilisés lors du calcul des coefficients du schéma pour les faces (dans BDCFCLA), les arêtes (dans BDCACLA) et les coins (dans BDCCCLA). Ces trois sous-programmes sont appelés par les modules BDFACE, BDARETE et BDCOIN avec ETAT = 2 eux mêmes appelé par BDGORF avec ETAT=2.

- COMMON/ BDSYM / SYMXM, SYMXP, SYMYM, SYMYP, SYMZM, SYMZP
  (SUBROUTINE :BDINB, BDARETE BDFACE, BDCOIN ...)
  Ce common contient six entiers (1 pour chacunes des 6 faces) permettant de caractériser la symétrie éventuelle sur la face. (chaque entier vaut -1,0 ou 1). Ces 6 valeurs sont initialisées dans BDINB (via BDGORF avec ETAT=-1) par une lecture dans le fichier BDIN.DAT. Pour l'application GORF chaque entier vaut 0 si la face associée est absorbante et -1 si la face associée est symétrique (cf. section 2.4). En effet GORF ne traite que le cas des conditions de symétrie de type mur électrique.

- COMMON/ BDCLAE /CLA :
  (SUBROUTINE :BDINB et BDCOM)
  Ce common contient l'entier CLA qui permet le choix du type de conditions absorbantes requises. Il est initialisé lors de l'appel de BDINB (via BDGORF avec ETAT=-1) par une lecture dans le fichier BDIN.DAT. Pour GORF, il est identique à l'entier lu dans le fichier DON. Il est utilisé dans BDCOM pour piloter le calcul du nombre de fractions rationnelles NL et des coefficients $\alpha_\ell, \beta_\ell, \ell = 1, .., \text{NL}$ (appel de BDCOEFCLA(CLA,....).
  Ces valeurs sont alors rangées dans le common BDCLA dont il est question plus bas.

- COMMON /BDCLA / ALPHA(LMAX), BETA(LMAX), GAMMA
  (SUBROUTINE : BDCOM, BDCFCLA BDCACLA BDCCCLA)
  L'initialisation de ce common est expliquée ci-dessus. Ces valeurs sont utilisées lors du calcul des coefficients du schéma pour les faces (dans BDCFCLA), les arêtes (dans BDCACLA) et les coins (dans BDCCCLA). Ces

trois sous-programmes sont appelés par les modules BDFACE, BDARETE et BDCOIN avec ETAT = 2 eux mêmes appelé par BDGORF avec ETAT=2. La signification des variables est donnée dans la section 1.2.4.

- COMMON /BDTYF / BDXM, BDXP, BDYM, BDYP, BDZM, BDZP :
  (SUBROUTINE :BDINB, BDCOM, BDDIALOG, ...)
  Ce common contient six entiers (1 pour chacunes des 6 faces) indiquant le type de condition à la limite que l'on impose sur chaque face. (vaut -1 ou 4 pour notre application). Ces 6 valeurs sont initialisées dans BDINB (via BDGORF avec ETAT=-1) par une lecture dans le fichier BDIN.DAT. Le sens de ces variables est donnée dans la section 2.4.

- COMMON/ BDTYA / ARTXMYM, ARTXMYP, ARTXPYM, ARTXPYP, ARTYMZM, ARTYMZP, ARTYPZM, ARTYPZP, ARTZMXM, ARTZMXP, ARTZPXM, ARTZPXP
  Ce common contient douze entiers, un pour chacunes des douze arêtes du cube de calcul. Chaque entier indique le type de traitement à effectuer sur l'arête à laquelle il se rattache. Par exemple, ARTXMYP désigne l'arête intersection des deux plans de normale $-\hat{x}$ et $+\hat{y}$. Chacune des douze valeurs est initialisée dans BDARETE lorsque ETAT = -1 (appel de BDAGSM). Pour GORF chaque entier ne peut prendre que 4 valeurs suivant les deux possibilités offertes au deux plans dont l'arête est l'intersection.

  - 0, deux plans de symétrie,
  - 5, premier plan, symétrie, second plan absorbant
  - 6, premier plan, absorbant, second plan symétrie
  - 11, deux plans absorbants

- COMMON / COIN / COINPPP, COINPPM, COINPMP, COINPMM, COINMPP, COINMPM, COINMMP, COINMMM
  Ce common contient 8 entiers (1 pour chacun des 8 coins) indiquant le type de traitement à réaliser au coin considéré. Chacune des 8 valeurs est initialisée dans BDCOIN lorsque ETAT= -1 (appel de BDCGSM). Chacune des 8 valeurs est utilisée pour aiguiller le type de traitement requis au coin au cours des itérations.

- COMMON/ BDINF / IXM, IXP, IYM, IYP, IZM, IZP
  (SUBROUTINE :BDCOM BDARETE BDFACE)
  Ce common contient, pour chacune des trois directions, les indices inférieurs et supérieurs de calcul pour les indices demi-entiers. Ils sont calculés dans BDCOM (via BDGORF avec ETAT=-1). Concernant les valeurs de ces variables, IXM vaut toujours 1 ou 2, XP, NX ou NX-1. On a bien sûr l'analogue pour les indices Y ou Z. La signification de ces variables correspond à celle données dans la formule (2.4) page 68.

- COMMON/ BDCOU /NCOU, EPSREL(NCMAX), MUREL(NCMAX), SIGMA(NCMAX), INTERF(NCMAX)
  (SUBROUTINE :BDINB, BDSTRATC)
  Ce common contient le nombre de couche pour la stratification en z, les valeurs de (ϵ_r, μ_r et σ) caractérisant les propriétés électromagnétiques de chaque couche et enfin les indices d'interfaces de l'empilement (cf. section 2.3). Il est initialisé lors de l'appel de BDINB (via BDGORF avec ETAT=-1) par une lecture dans le fichier BDIN.DAT. Il est utilisé dans BDSTRATC (via BDFACE et BDGORF avec ETAT=-1 et 2) pour définir le découpage en "milieux numériques" (common BDKDCOUP et NBML) et calculer les paramètres de chaque "milieu numérique".

- COMMON /BDKDCOUP/ KMDE(NMMAX), KPDE(NMMAX), MLDE(NMMAX), NBMLDE, KMEN(NMMAX), KPEN(NMMAX), MLEN(NMMAX), NBMLEN
  (SUBROUTINE : BDSTRATC, BDARETE, BDCFCLA, BDCACLA, BDCCCLA, BDFACLAX et BDFACLAX)
  Ce common contient les indices de type demi-entier inférieurs (KMDE) et supérieurs (KMDE) ainsi que le numéro de milieu (MLDE) pour chaque couche numérique DEmi-entière. NBMLDE est le nombre total de milieux numériques demi-entiers. Il contient également ces mêmes quantités mais pour les milieux de type ENtiers. Son initialisation est réalisée dans BDSTRATC (via BDGORF puis BDFACE avec ETAT=-1 ou 2). Il est utilisé, d'une part pour piloter le calcul des coefficients (BDCFCLA BDCACLA BDCCCLA) mais également il sert à dérouler les calculs en z pour le calcul des faces hétérogènes (BDFACLAX et BDFACLAY) et le calcul des arêtes en z (BDARETE). Pour plus de précision on pourra lire la section 3.3.6.

- COMMON /BDNBMIL/ NBML
  (SUBROUTINE: BDSTRATC, BDARETE BDFACE BDCOIN)
  NBML est le nombre total de milieux numériques. Ce common est initialisé lors de l'appel de BDSTRATC au même moment que le common précédent. Il est utilisé pour déterminer le nombre de coefficients pour les faces, les arêtes et les coins.

- COMMON/ BDSITC / SITCOIN
  SITCOIN (SITuation aux COINs) est un entier qui permet de déterminer le nombre de matrices distinctes nécessaires pour les coins intersections de trois plans absorbants. On distingue les matrices pour les coins en haut du cube (z^+) de celles pour les coins en bas du cube (z^-). Si SITCOIN = 0, aucun coefficient n'est à calculer. Si SITCOIN = 1 (resp. 2), on doit calculer cette matrice uniquement pour des coins en haut (resp. en bas) du cube. Si SITCOIN = 3 ou 4, le calcul doit se faire pour des coins en haut et en bas du cube. Le cas SITCOIN = 3 implique l'existence d'un sol: les systèmes matriciels sont alors réellement distincts. Par contre SITCOIN = 4 implique l'homogénéité du milieu, une seule matrice est alors nécessaire. SITCOIN est initialisé dans BDCGSC lors de l'appel de BDCOIN via BDGORF avec ETAT = 2

3.2.3 Les Common (2) : les pointeurs d'adresses dans les tableaux ETG, WRK et COEF

Les commons suivants sont initialisés lors de l'appel de BDGORF avec ETAT=-1. Ils contiennent les adresses relatives dans les tableaux ETG, WRK et COEF de quantités dont on donne la description ci-dessous. Cette manière de faire permet de ranger dans un espace signifié par un même nom vu de l'extérieur (Ex:WRK, les fonctions auxiliaires) des quantités distinctes pour le module de traitement (Ex:WRK(ADFXP) contient les fonctions auxiliaires de la face XP, i.e. dont la normale est $+\hat{x}$. Elle est permise en FORTRAN si l'on se souvient qu'un tableau se transmet au cours de l'appel d'une SUBROUTINE en transmettant l'adresse de son premier élément.Par exemple,

```
SUBROUTINE SUB1(WRK,N,N1,N2,NL)
REAL WRK(N)
INTEGER N1, N2, NL
INTEGER ADRESSE
ADRESSE= 5
CALL SUB2(WRK( ADRESSE ),N1,N2,NL )
WRITE(6,*) WRK(ADRESSE)
END
SUBROUTINE SUB2(F,N1,N2,NL)
REAL F(0:N1+1, 0:N2+1, NL+1, 4)
F(0,0,1,1) = 100
RETURN
END
```

donnera 100 comme output. En effet, vu de SUB2 le premier élément du tableau F est rangé dans la place mémoire dont l'adresse est celle fournie par son premier argument.

- COMMON/ BDADETG / ADEXM, ADEXP, ADEYM, ADEYP, ADEZM, ADEZP
  (Pointeur d'adresse dans ETG)
  Lorsque BDXP vaut 4 (cla sur la face x^+), on a choisi de dupliquer dans un tableau les deux plans successifs des deux composantes tangentielles du champ électrique qui encadre le plan où s'applique la cla. Ces éléments sont rangés dans ETG(ADEXP $\rightarrow$ ADEXP + 4(NY+1)(NZ+1)). ADEXP est donc le pointeur de l'adresse du premier élément de ce tableau dans ETG.
  Remarque: les indices 1 et 2 contiennent les plans intérieurs (première direction puis seconde direction). Leurs valeurs sont fournies par GORF, les indices 3 et 4 contiennent les plans externes (ceux calculés par BDGORF). Pour une face de normale $\pm x$, (resp. $\pm y$ et $\pm z$. les directions 1 et 3 sont relatives aux composantes selon y (resp. z et x) les directions 2 et 4 sont relatives aux composantes selon z (resp. x et y).

- COMMON/ BDADF / ADFXM, ADFXP, ADFYM, ADFYP, ADFZM, ADFZP
  (Pointeur d'a dresse dans WRK)
  Lorsque BDXM vaut 4 (cla sur la face x^-), on a besoin de définir un ta-

bleau contenant deux instants successifs des fonctions auxiliaires de face attachées à x^-. Ceux-ci trouvent leurs place dans WRK(ADFXM → ADFXM + 4(NY+2)(NZ+2)(NL+1)). ADFXM est donc le pointeur de l'adresse du premier élément de ce tableau dans WRK. Comme on a six faces, on a six pointeurs.

– COMMON/ BDCOMPF / T1P, T1M, T2P, T2M
Ce sont les pointeurs d'instants pour chaque face. Ces variables permettent de repérer les quatre composantes des fonctions auxiliaires de face :
T1P : Composante suivant la direction 1 pour l'instant courant $n\Delta t$
T1M : Composante suivant la direction 1 pour l'instant $(n-1)\Delta t$ puis $(n+1)\Delta t$
T2P : Composante suivant la direction 2 pour l'instant courant $n\Delta t$
T2M : Composante suivant la direction 2 pour l'instant $(n-1)\Delta t$ puis $(n+1)\Delta t$
(Les valeurs (=1,2 et 3,4) sont échangées au cours des itérations). Ainsi
WRK(ADFXM + (T1P-1)(NY+2)(NZ+2)(NL+1) → ADFXM + T1P (NY+2)(NZ+2)(NL+1))
contient les NL+1 fonctions auxiliaires à l'instant n.

– COMMON/ BDADA / ADXMYM, ADXMYP, ADXPYM, ADXPYP, ADYMZM, ADYMZP, ADYPZM, ADYPZP, ADZMXM, ADZMXP, ADZPXM, ADZPXP
(Pointeurs d'adresse dans WRK)
Lorsque BDXM et BDYM valent 4 (cla sur les faces x^- et y^-), on a besoin de définir un tableau contenant deux instants successifs pour les fonctions auxiliaires d'arêtes. Celui-ci trouve sa place dans WRK(ADXMYM → ADXMYM + 8(NZ+2)(NL+1)(NL+1)). ADXMYM est donc le pointeur de l'adresse du premier élément de ce tableau dans WRK. Comme on a douze arêtes, on a douze pointeurs.

– COMMON/ BDCOMPA / PS13TM, PS23TM, ET13TM, ET23TM, PS13TP, PS23TP, ET13TP, ET23TP
Chaque fonction d'arête comprend 2 instants et 4 composantes par instant ($\psi^{(1,3)}(x_3)$, $\psi^{(2,3)}(x_3)$, $\eta^{(1,3)}(x_3)$, $\eta^{(2,3)}(x_3)$). L'instant TP correspondant à $n\Delta t$, l'instant TM correspond soit à $(n-1)\Delta t$ (avant le calcul, en entrée de bdgorf avec ETAT=1) soit à $(n+1)\Delta t$ (aprés le calcul, en sortie de bdgorf avec ETAT=1). Ces pointeurs sont initialisés par DATA

dans ECHFLA puis les instants plus et moins sont échangés dans ce même sous-programme.

- COMMON/ BDADC / ADMMM, ADMMP, ADMPM, ADPMM, ADPPM, ADPMP, ADMPP, ADPPP
  (Pointeurs d'adresse dans WRK)
  Lorsque BDXM, BDYM et BDYM valent 4 (cla sur les face x^-, y^- et z^-), on a besoin de définir un tableau contenant un instant des fonctions auxiliaires de coin. Ceux-ci trouvent leurs place dans WRK(ADMMM $\rightarrow$ ADMMM + 12(NL+1)NL^2). ADMMM est donc le pointeur de l'adresse du premier élément de ce tableau dans WRK. Comme on a huit coins, on a huit pointeurs.

- COMMON/ BDCOMPC / PSZX, PSXY, PSYZ, PSYX, PSZY, PSXZ, ETZX, ETXY, ETYZ, ETYX, ETZY, ETXZ
  Ce sont les douze indices des fonctions de coin. ils sont initialisés dans BDCINI par l'ordre DATA.

- COMMON/ BDADFC / ADCFX, ADCFY, ADCFZM, ADCFZP
  (Pointeurs d'adresse dans COEF)
  Dans BDADFC sont rangés les pointeurs d'adresses des coefficients relatifs aux schémas pour les faces. On distingue les coefficients pour les schémas relatifs à une face de normale $\pm\hat{x}$ (ADCFX), $\pm\hat{y}$ (ADCFY) $+\hat{z}$ (ADCFZP) et $-\hat{z}$ (ADCFZM). L'initialisation s'effectue lors de l'appel de BDGORF avec ETAT=-1.

- COMMON/ BDADAC / ADCAXM, ADCAXP, ADCAYM, ADCAYP, ADCAZ
  (Pointeurs d'adresse dans COEF)
  Dans BDADAC sont rangés les pointeurs d'adresses des coefficients relatifs aux schémas pour les arêtes. Les coefficients relatifs à une arête dont la variable courante est z a pour pointeur ADCAZ. Pour une arête de variable courante x ou y, on distingue les arêtes situées sur la face z^- de celles de la face opposée, z^+. On a donc quatre autres familles de coefficients pointées par ADCF(X ou Y)(M ou P). L'initialisation s'effectue lors de l'appel de BDGORF avec ETAT=-1.

- COMMON/ BDADCC / ADCM(9), ADCP(9)
  (Pointeurs d'adresse dans COEF)
  Dans BDADCC sont rangés les pointeurs d'adresses des coefficients relatifs aux schémas pour les coins. On distingue le pointeur pour les coefficients relatif à un coin situé en haut du cube d'un point du bas. Comme on est conduit à ventiler les coefficients en neuf familles, on a neuf pointeurs. L'initialisation s'effectue lors de l'appel de BDGORF avec ETAT=-1. Ce common contient les deux adresses dans le tableau COEF de deux tableaux de travail pour le calcul des coins (VE et VS). L'initialisation s'effectue lors de l'appel de BDGORF avec ETAT=-1.

- COMMON/ BDCVEC / ADVE, ADVS
  (Pointeurs d'adresse dans COEF)
  Ce common contient les deux adresses dans le tableau COEF de deux tableaux de travail (de taille 12 NL^2) pour le calcul des coins (VE etVS).

- COMMON/ BDADPBD/ ADPV, ADPVG, ADPVD, ADPSMC
  (Pointeurs d'adresse dans COEF)
  Ce common contient les adresses des quatre paramètres caractérisant chaque "milieu numérique". Chaque paramètre a pour taille NBML et représente soit la vitesse à gauche (PVG) ou à droite (PVD) du nœud soit leur moyenne harmonique (PV) soit enfin la valeur moyenne de $\sigma\mu c$ (PSMC). L'initialisation a lieu dans BDSTRATE via BDFACE et BDGORF avec ETAT=-1.

3.3 Description des sous-programmes

3.3.1 Où sont les sous-programmes?

On donne ci-dessous la liste des sous-programmes ainsi que le nom du fichier $\star$.f qui le contient.

bdgorf.f: SUBROUTINE BDGORF

datacla.f: SUBROUTINE DATACLA

bdtrait.f: SUBROUTINE BDTRAIT

bddialog.f: SUBROUTINE DIALOGUE

bdinput.f: SUBROUTINE BDINB
bdinput.f: SUBROUTINE BDCOHER
bdinput.f: SUBROUTINE BDCOHERS
bdcom.f: SUBROUTINE BDCOM
bdcoefcla.f: SUBROUTINE BDCOECLA

bdstrate.f: SUBROUTINE BDSTRATE
bdstrate.f: SUBROUTINE BDSTRATC

bdgswk.f: SUBROUTINE BDGSWK

bdface.f: SUBROUTINE BDFACE
bdface.f: SUBROUTINE BDFGSM
bdface.f: SUBROUTINE BDFGSC
bdface.f: SUBROUTINE BDFINI
bdface.f: SUBROUTINE BDFPER
bdface.f: SUBROUTINE BDFSYM
bdface.f: SUBROUTINE BDCHFLF
bdfaccla.f: SUBROUTINE BDCFCLA
bdfaccla.f: SUBROUTINE BDCF
bdfaccla.f: SUBROUTINE BDFACLAH
bdfaccla.f: SUBROUTINE BDFACLAY
bdfaccla.f: SUBROUTINE BDFACLAX

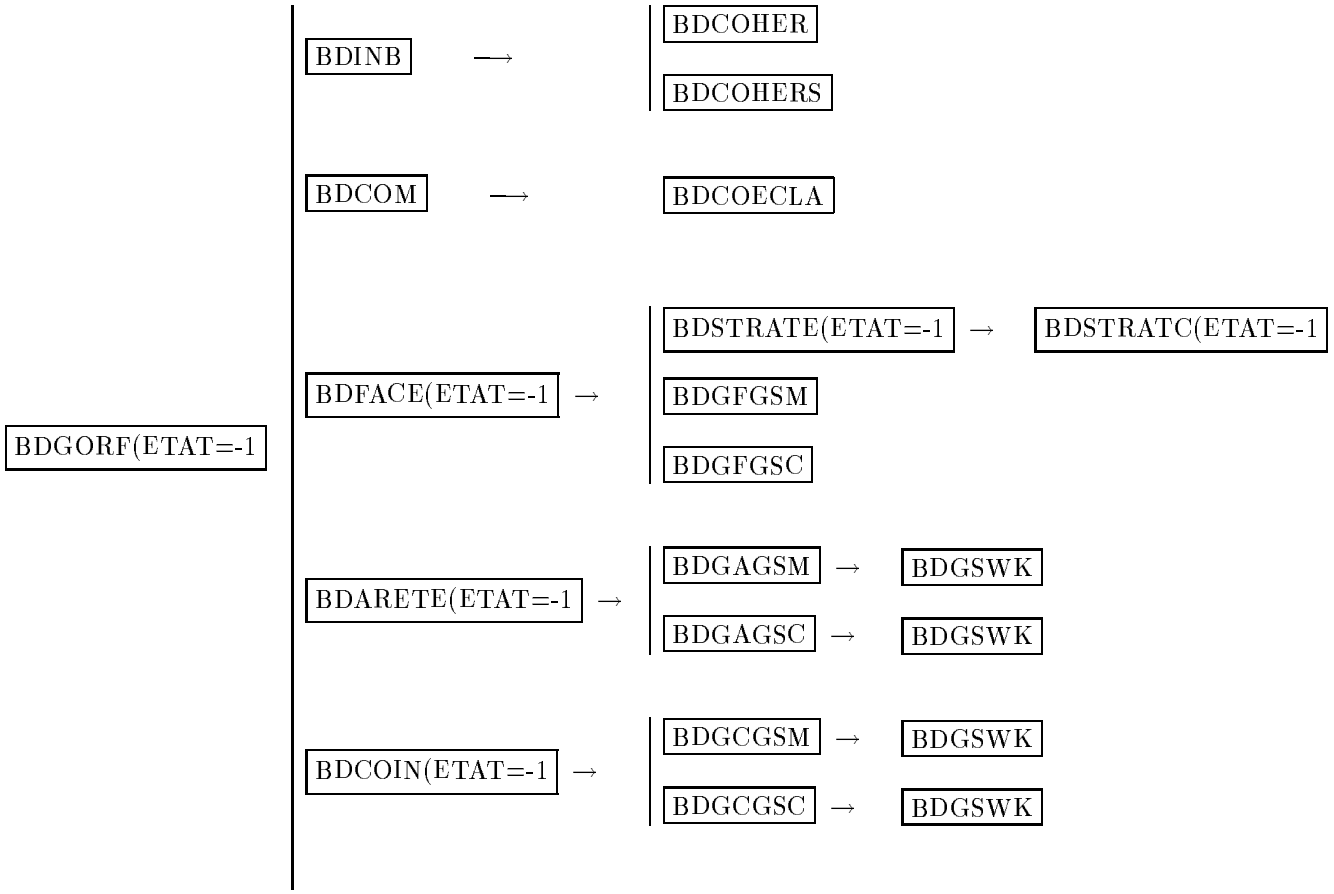
bdarete.f: SUBROUTINE BDARETE
bdarete.f: SUBROUTINE BDAGSM
bdarete.f: SUBROUTINE BDAGSC
bdarete.f: SUBROUTINE BDAINI
bdarete.f: SUBROUTINE BDACAL
bdarete.f: SUBROUTINE BDCHFLA
bdarecla.f: SUBROUTINE BDCACLA

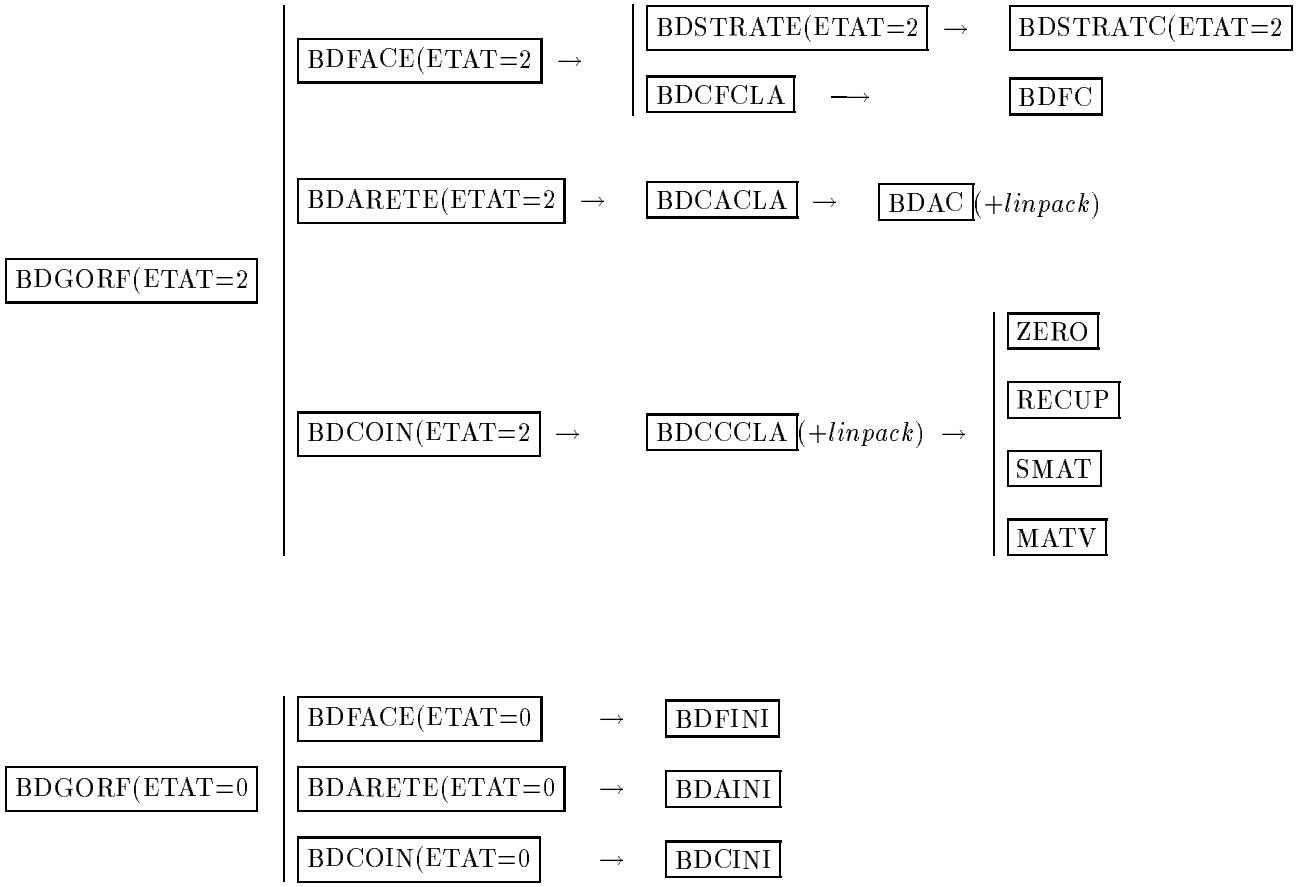
bdarecla.f: SUBROUTINE BDCA
bdarecla.f: SUBROUTINE BDARECLA

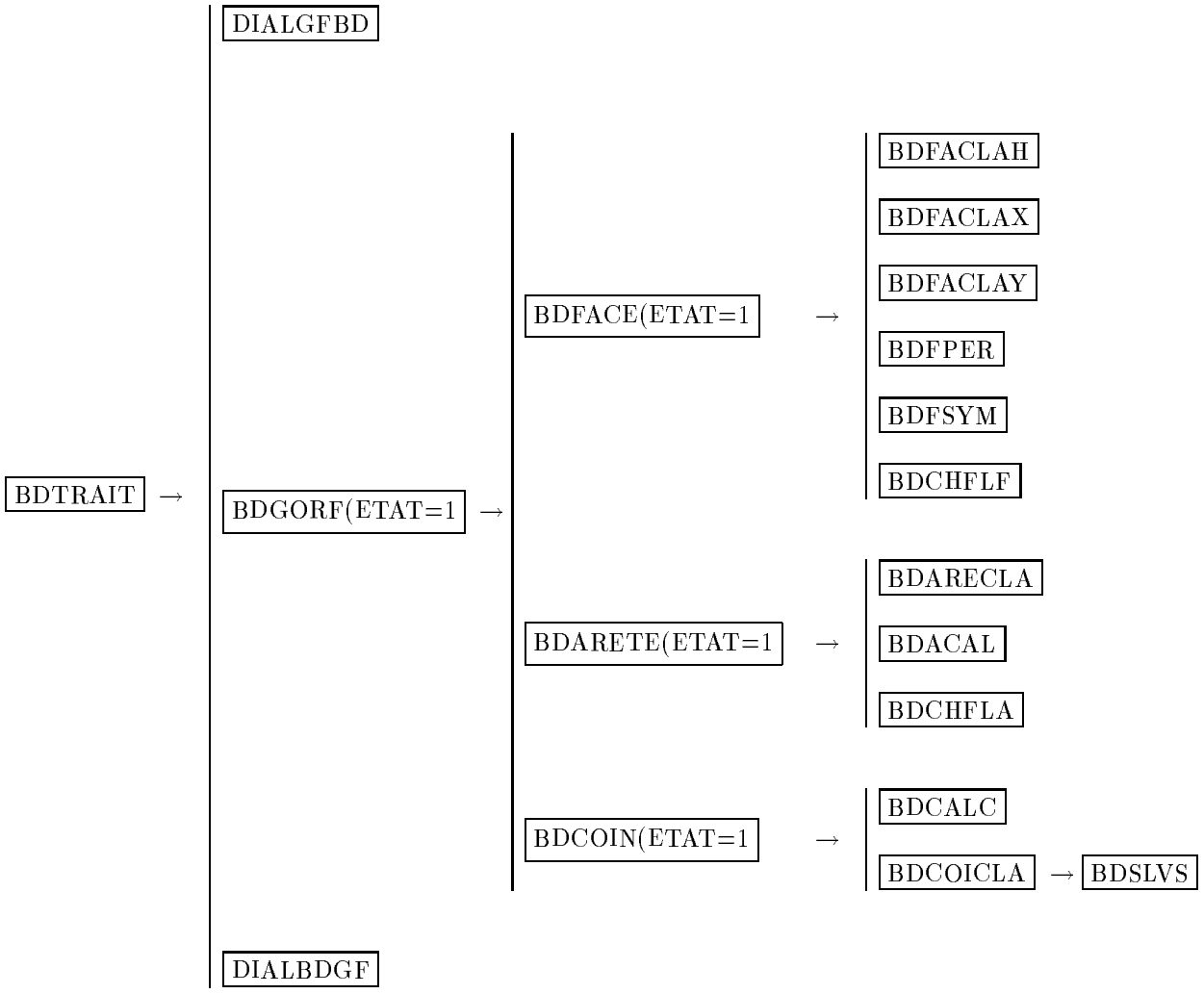
bdcoin.f: SUBROUTINE BDCOIN
bdcoin.f: SUBROUTINE BDCGSM
bdcoin.f: SUBROUTINE BDCGSC
bdcoin.f: SUBROUTINE BDCINI
bdcoin.f: SUBROUTINE BDCALC
bdcoicla.f: SUBROUTINE BDCCCLA
bdcoicla.f: SUBROUTINE ZERO
bdcoicla.f: SUBROUTINE RECUP
bdcoicla.f: SUBROUTINE BDSLVS
bdcoicla.f: SUBROUTINE BDCOICLA
bdcoicla.f: SUBROUTINE SMAT
bdcoicla.f: SUBROUTINE MATV

Remarque : On utilise également les deux sous-programmes SGEFA et SGEDI de la librairie LINPACK qui eux-même utilisent les modules SAXPY, SSCAL et ISAMAX de la librairie BLAS.

Les sous-programmes s'articulent entre eux suivant les schémas ci-dessous :


BDGORF(ETAT=-1
BDINB
BDCOHER
BDCOHERS
BDCOM
BDCOECLA
BDFACE(ETAT=-1
BDSTRATE(ETAT=-1
BDSTRATC(ETAT=-1
BDGFGSM
BDGFGSC
BDARETE(ETAT=-1
BDGAGSM
BDGSWK
BDGAGSC
BDGSWK
BDCOIN(ETAT=-1
BDGCGSM
BDGSWK
BDGCGSC
BDGSWK


BDGORF(ETAT=2
BDFACE(ETAT=2 →
BDSTRATE(ETAT=2 → BDSTRATC(ETAT=2
BDCFCLA ⟶ BDFC
BDARETE(ETAT=2 → BDCACLA → BDAC (+linpack)
BDCOIN(ETAT=2 → BDCCCLA (+linpack) →
ZERO
RECUP
SMAT
MATV
BDGORF(ETAT=0
BDFACE(ETAT=0 → BDFINI
BDARETE(ETAT=0 → BDAINI
BDCOIN(ETAT=0 → BDCINI



3.3.2 Traitement d'une itération : les sous-programmes BDDIALOG et BDTRAIT

Dans la boucle d'itération en temps, à la suite du calcul du champ électrique pour les nœuds internes, est appelé le sous programme BDTRAIT. Ce sous programme se présente sous la forme:

```
      SUBROUTINE BDTRAIT(   NX,NY,NZ,NL,EX,EY,EZ,NBCOEF,COEF,
                            NWK,WRK,NETG,ETG)
```

- NX, NY, NZ, input : nombre de nœuds dans chaque direction
- EX, EY, EZ, input/output : trois composantes du champ électrique, déclarés sous la forme E.(1:NX,1:NY,1:NZ)
- COEF, input : tableau de coefficients pour les bords.
- WRK, input/output : tableau des fonctions auxiliaires pour les bords.
- ETG, input/output : tableau des champs électriques tangents sur les faces absorbantes
- NBCOEF, NETG, NWK, input : tailles de ces tableaux

Le sous-programme utilise également les six pointeurs ADEXM, ADEXP, ADEYM, ADEYP, ADEZM et ADEZP du common BDADETG. Ceux-ci permettent de repérer les six champs électriques tangents contenus dans ETG .

Le programme appelle successivement trois sous-programmes :

```
C           Livraisons des faces internes pour les bords
            CALL DIALGFBD(NX,NY,NZ, EX,EY,EZ, 1, NZ,
     S      ETG(ADEXM), ETG(ADEYM), ETG(ADEZM),
     S      ETG(ADEXP), ETG(ADEYP), ETG(ADEZP))
C           Calcul des faces externes
            ETAT = 1
            CALL BDGORF( ETAT, NX, NY, NZ, NL, WRK, NWK, ETG, NETG,
     S      COEF, NBCOEF, BIDON, NBIDON)
C           Récuperation des faces externes pour le cube
            CALL DIALBDGF(NX,NY,NZ, EX,EY,EZ, 1, NZ,
     S      ETG(ADEXM), ETG(ADEYM), ETG(ADEZM),
     S      ETG(ADEXP), ETG(ADEYP), ETG(ADEZP))
            RETURN
C
```

Si on note n l'instant d'itération, à l'entrée du sous-programme, toutes les composantes du champ électrique contenues dans les tableaux EX, EY, EZ sont évaluées à l'instant $n+1$ à l'exception des composantes tangentielles situées

sur les faces absorbantes qui sont alors encore évaluées à l'instant n. L'appel à BDTRAIT vise à faire passer ces composantes de l'instant n à l'instant $n+1$.

Le calcul proprement dit est effectué par le sous-programme BDGORF appelé avec ETAT = 1. Pour chaque face absorbante, ce programme travaille sur quatre plans de champ électrique rangés dans le tableau ETG (ex: de ETG(ADEXM) → ETG(ADEXM) + 4 NY NZ pour la face de normale $-\hat{x}$).. Les deux premiers plans représentent les deux composantes tangentielles situées sur le plan directement voisin au plan absorbant, les deux derniers, les deux mêmes composantes mais situées sur le plan absorbant lui même. Parmi les deux composantes tangentielles de ces deux plans on définit la première composante, c_1, et la seconde composante, c_2, en imposant que (c_1, c_2, c_3) forme un trièdre direct, c_3 étant la composante suivant la normale à la face considérée. Par exemple, z est la première composante de la face dont la normale est $-\hat{y}$, x en est la seconde. Pareillement, x est la première composante de la face dont la normale est $+\hat{z}$, y en est la seconde Ces quatre composante sont repérées et rangées suivant l'ordre, 1,2,3 et 4 par

1:première composante face interne, 2:deuxième composante face interne,
3:première composante face externe, 4:deuxième composante face externe.

chaque plan possède deux coordonnées. Là encore, on convient de ranger la première puis la seconde coordonnée. Attention, cette convention entraîne de ranger les nœuds suivant: k:1 → NZ, i:1 → NX pour les faces de normales $\pm\hat{y}$).

Le sous-programme DIALGFBD a pour objet de recopier les composantes tangentielles du champ électrique situées sur les plans internes aux faces absorbantes qui se trouvent dans les tableaux (EX, EY, EZ) dans les composantes 1 et 2 du tableau ETG . Ceux-ci ayant été calculés par le schéma pour les nœuds internes ils donc évaluées à l'instant $n+1$. A ce stade, les composantes 3 et 4 sont, elles, toujours évaluées à l'instant n.

L'appel au sous-programme BDGORF(ETAT=1 a pour objet de calculer les composantes 3 et 4 du tableau ETG, c'est à dire les composantes tangentielles du champ électrique des plans externes aux faces absorbantes. Ces composantes sont en sortie évaluées à l'instant $n+1$.

Le sous-programme DIALBDGF a pour objet de recopier les composantes 3 et 4 du tableau ETG sur les composantes tangentielles du champ électrique

situées sur les plans externes aux faces absorbantes et qui se trouvent dans les tableaux (EX, EY, EZ). Maintenant, tout le cube (EX, EY, EZ) représente l'instant $n+1$.

Pour une description plus détaillée, on se réfèrera utilement à la section 2.8.4 page 83.

DIALGFBD et DIALBDGF sont les deux points d'entrée du programme BDDIALOG. Le premier assure le dialogue du cube vers le module des bords, le second du module des bords vers le cube. le sous-programme se présente sous la forme:

```
SUBROUTINE DIALOGUE(  NX,NY,NZ, EX,EY,EZ, KM, KP,
                      ETXM, ETYM, ETZM,
                      ETXP, ETYP, ETZP)
```

- NX, NY, NZ, input : nombre de nœuds dans chaque direction
- EX, EY, EZ, input/output : trois composantes du champ électrique, déclarés sous la forme E.(1:NX,1:NY,1:NZ)
- ETXM, ETXP input/output : tableau des champs électriques tangents sur les faces de normales $+\hat{x}$ et $-\hat{x}$. Ils sont déclarés sous la forme REAL ETXM(NY,NZ,4), ETXP(NY,NZ,4)
- ETYM, ETYP input/output: tableau des champs électriques tangents sur les faces de normales $+\hat{y}$ et $-\hat{y}$. Ils sont déclarés sous la forme REAL ETYM(NZ,NX,4), ETYP(NZ,NX,4)
- ETZM, ETZP input/output : tableau des champs électriques tangents sur les faces de normales $+\hat{z}$ et $-\hat{z}$. Ils sont déclarés sous la forme REAL ETZM(NX,NY,4), ETZP(NX,NY,4)
- KM, KP, inputs : indices en z inférieur et supérieur. Ces indices déterminent des cotes demi-entières bornant l'intervalle en z sur lequel on fait les transferts. Pour l'instant, à l'appel dans BDTRAIT, KM est égal à 1 et KP est égal à NZ : le transfert est donc réalisé en une seule fois.

Ce sous-programme fait appel en input aux six entiers BDXM, BDXP, BDYM, BDYP, BDZM, BDZP du common BDTYF. En effet, le transfert n'est pas nécessaire en cas de symétrie sur un plan (BD..=1). Le sous-programme teste donc la valeur de BD.. pour chacune des six faces avant de faire le transfert.

3.3.3 Le sous-programme BDGORF

Le sous-programme BDGORF est le programme qui pilote toutes les phases des traitements des bords. Il est appelé, soit par GORF.C, soit par BDTRAIT Il se présente sous la forme:

SUBROUTINE BDGORF(ETAT, NX, NY, NZ, NL, WRK, NWRK, ETG, NETG,
COEF, NBCOEF, MAT, NMAT)

- ETAT (input) est un entier qui détermine l'action à effectuer: phase préliminaire (ETAT =-1), calcul de coefficients (ETAT =2), initialisation du processus temporel (ETAT =0) et calcul pour une itération (ETAT =1).
- NX, NY, NZ sont les tailles des tableaux des champs électriques et magnétiques.
- NL est le nombre de fractions rationnelles pour les cla.
- ETG est le tableau des composantes tangentielles du champ électrique sur le bord.
- WRK est le tableau des fonctions auxiliaires.
- COEF est le tableau des coefficients .
- MAT est la matrice au coin.
- NETG, NWK, NBCOEF, NMAT sont les tailles de ces tableaux.

Son algorithme est le suivant:

```
si(ETAT=-1 ) alors
   BDINB                          lecture du fichier bdin.dat
                                  et initialisation de 6 commons
   BDCOM                          initialisation de 2 commons et de NL
   MISES A ZERO DES TAILLES       NETG,NWK,NMAT,NBCOEF =0
   BDFACE(ETAT=-1,...             initialisation pour les faces:
                                  Incrémentation de NETG,NWK,NBCOEF et
                                  initialisation des commons liés aux faces.
   BDARETE(ETAT=-1,...            initialisation pour les arêtes:
                                  Incrémentation de NETG,NWK,NBCOEF et
                                  initialisation des commons liés aux arêtes .
   BDCOIN(ETAT=-1,...             initialisation pour les coins :
                                  Incrémentation de NETG,NWK,NMAT,NBCOEF et
                                  initialisation des commons liés aux coins.
   SAUVEGARDE DES TAILLES         Dans le common BDTAILLE
sinon si(ETAT=0 ) alors
   VERIFICATION DES TAILLES       NETG,NWK assez grands?
   BDFACE(ETAT=0,...              mise à zéro pour les faces
   BDARETE(ETAT=0,...             mise à zéro pour les arêtes
   BDCOIN(ETAT=0,...              mise à zéro pour les coins
sinon si(ETAT=2 ) alors
   VERIFICATION DES TAILLES       NMAT,NBCOEF
   BDFACE(ETAT=2,...              calcul des coef. pour les faces
   BDARETE(ETAT=2,...             calcul des coef. pour les arêtes
   BDCOIN(ETAT=2,...              calcul des coef. pour les coins
sinon si(ETAT=1 ) alors
   BDFACE(ETAT=1,...      itération pour les faces
   BDARETE(ETAT=1,...     itération pour les arêtes
   BDCOIN(ETAT=1,...      itération pour les coins
fin si
```

Remarque: Les arguments NX, NY, NZ et NL sont en fait inutilisés dans GORF.C et BDTRAIT .

3.3.4 Les sous-programmes BDINB, BDCOHER et BDCOHERS

Le sous-programme BDINB est le premier sous-programme appelé par BDGORF lorsque ETAT=-1. Il permet la lecture du fichier d'entrée des modules des bords (bdin.dat) et initialise 6 commons.

Il se présente sous la forme:

SUBROUTINE BDINB(NX, NY, NZ)

son algorithme est le suivant:

OUVERTURE DE L'UNITE 33	ouverture du fichier bdin.dat
LECTURE DES 6 ENTIERS BD..	initialisation du common BDTYF
LECTURE DES 6 ENTIERS SYM..	initialisation du common BDSYM
LECTURE DE L'ENTIER CLA	initialisation du common BDCLAE
LECTURE DES PAS DX, DY, DZ	initialisation du common BDPASE
LECTURE DU PAS DT	initialisation du common BDPAST
	initialisation du common BDCOU :
LECTURE DU NBR. DE COUCHES NCOU	(nbre de couches)
LECTURE DE EPSR(IK:1,NCOU)	(ϵ_r)
LECTURE DE MUR(IK:1,NCOU)	(μ_r)
LECTURE DE SIGMA(IK:1,NCOU)	(σ)
LECTURE DE INTERF(IK:1,NCOU-1)	(indices d'interface)
COHER	Cohérence des données (1)
COHERS(NZ)	Cohérence des données (2)

La cohérence des données consiste à vérifier qu'il y a bien compatibilité entre les différentes variables (exemple: un bord avec une symétrie (BD..=1 ou 2) doit être associé à un type de symétrie (SY..) égal à 1 (mur électrique) ou -1 (mur magnétique), la valeur d'une conductivité doit être positive ou nulle,...). Cette cohérence est observée dans les deux sous-programmes BDCOHER et BDCOHERS(NZ). Le premier est attentif à la compatibilité entre les deux commons BDTYF et BDSYM , le second vérifie le common BDCOU . Au cas, où l'un de ces deux modules détecte une erreur, un message est affiché sur l'unité 6 et le programme est arrêté.

Remarque : Le common BDTYF contient : BDXM, BDXP, BDYM, BDYP, BDZM, BDZP. La syntaxe est BD-(face X, Y ou Z)-(Plus ou Moins)). Ce sont les entiers déterminant le type de condition a la limite sur chacune des six faces (X, Y ou

Z) et (Plus ou Moins).

BD.. = 1 ⇒ Condition de symétrie par rapport a un plan de coordonnées demi-entières.
BD.. = 2 ⇒ Condition de symétrie par rapport a un plan de coordonnées entières.
BD.. = 3 ⇒ Condition de périodicité par rapport a un plan de coordonnées entieres.
BD.. = 4 ⇒ Condition absorbante par rapport a un plan de coordonnées entières.

GORF n'utilise que BD..=1 et BD..=4.

3.3.5 Les sous-programmes BDCOM et BDCOECLA

Le sous-programme BDCOM initialise les deux commons BDINF et BDCLA ainsi que la variable entière NL. Il se présente sous la forme:

SUBROUTINE BDCOM(NX, NY, NZ, NL)

BDINF contient les 6 entiers IXM, IXP, IYM, IYP, IZM, IZP (syntaxe Indice en (X, Y ou Z)-(supérieur(Plus) ou inférieur (Moins)). IXM vaut 1 ou 2 suivant le type de condition sur XM. IXP vaut NX ou NX-1 suivant le type de condition sur XP. Ces indices délimitent la zone de calcul pour les formules liées aux faces. Plus précisément, on aura IXM=1 si BDXM=1, IXM=2 sinon et IXP=NX si BDXP=1, IXP=NX-1 sinon. Ces variables permettent de déterminer quels sont les indices demi-entiers inférieur et supérieur de calcul pour chaque coordonnée (cf. formule (2.4), page 68).

BDCLA contient les valeurs de α_ℓ, β_ℓ et de $\gamma = 1 + \sum \beta_\ell/\alpha_\ell$, ℓ variant de 1 à NL. L'initialisation se fait par l'appel du sous-programme BDCOECLA . Lorsque CLA vaut 5, on obtient 5 fractions rationnelles avec "coefficients optimisés". Lorsque CLA vaut -NL on aura la décomposition de Padé à NL fraction rationnelles. La valeur de cet entier est celle qui est lue dans le fichier DON.

3.3.6 Les sous-programmes BDSTRATE et BDSTRATC

Ces deux programmes vont gérer la stratification en z du milieu. L'option retenue suppose que le nombre de couches est faible en rapport au nombre de

nœuds en z et travaille sur la notion de "milieu numérique". Cette notion peut s'expliquer comme suit.

Si l'on regarde les équations pour les clas en un nœud d'une face ou d'une arête du cube, on s'aperçoit que les paramètres physiques décrivant le milieu n'interviennent que par quatre valeurs :

- la vitesse de la maille situé à gauche du nœud :VG
- la vitesse de la maille situé à droite du nœud :VD
- la valeur harmonique de ces deux vitesses V
- la valeur moyenne de $\sigma\mu c$ sur les deux mailles entourant le nœud SMC

Les valeurs de ces paramètres sont précisés dans le tableau ci-dessous

	nœud $k-\frac{1}{2}$	nœud k
VG	c_{k-1}	$\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} = \dfrac{c_k + c_{k-1}}{2}$
VD	c_k	$\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{c_k + c_{k+1}}{2}$
V	$\dfrac{2c_k c_{k-1}}{c_k + c_{k-1}}$	$\dfrac{2\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}}}{\tilde{c}_{k-\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{k+\frac{1}{2}}}$
SMC	$\dfrac{1}{2}\left((\sigma\mu c)_{k-1} + (\sigma\mu c)_k\right)$	$(\sigma\mu c)_k$

Un "milieu numérique" est constitué par une collection de nœuds d'indice croissants et dont les quatre paramètres associés sont identiques. Chaque milieu numérique est divisé en deux familles, les nœuds d'indice entier et les nœuds d'indice demi-entier. Pour une stratification donnée, on désignera par NBML le nombre de milieux total et NBMLEN (resp. NBMLDE) le nombre de milieux contenant au moins un nœud de type entier (resp. (demi-entier). Enfin, on désignera par KMDE(de) et KPDE(de), de=1,NBMLDE les indices demi-entiers inférieurs et supérieurs de la couche numérique de et par KMEN(en) et KPEN(en), en=1,NBMLEN les indices entiers inférieurs et supérieurs de la couche numérique

en. Remarquez qu'un milieu peut très bien ne contenir qu'un seul nœud (par exemple s'il est situé à l'interface de deux couches).

Toutes ces variables vont être nécessaire pour "découper" les boucles en z. Ainsi, une boucle sur les nœuds entiers du type:

```
Faire sur k=1,nz-1
   A(k) = (σμc)_k etc etc
Fin faire
```

se déroulera selon

```
Faire sur tous les milieux de type entier, en:1,nbmlen
   milieu = mlen( en )
   val = PSMC( milieu )
   Faire sur k= kmen( en ), kpen( en )
      A(k) = val
   Fin faire
Fin faire
```

De même, une boucle sur les nœuds demi-entiers du type:

```
Faire sur k=1,nz
   A(k) = (σμc)_{k-1/2}
Fin faire
```

se déroulera selon :

```
Faire sur tous les milieux de type demi-entier, de:1,nbmlde
   milieu = mlde( de )
   val = PSMC( milieu )
   Faire sur k= kmen( de ), kpen( de )
      A(k) = val etc etc
   Fin faire
Fin faire
```

Le sous-programme BDSTRATE(ETAT,..., est le premier programme appelé par BDFACE (via BDGORF) lorsque ETAT=-1 ou 2.

Il a pour objet

1. d'initialiser le common BDNBMIL contenant le nombre de milieux numériques (ETAT=-1 ou 2).

2. d'augmenter la taille requise par le tableau des coefficients (entier NBCOEF) pour pouvoir ranger les quatre paramètres dans le tableau. (ETAT=-1)

3. d'initialiser le common BDADPBD contenant les pointeurs d'adresse de ces quatre tableaux dans le tableau COEF

4. de calculer ces quatre paramètres et de les positionner dans le tableau des coefficients. (ETAT=2).

5. d'initialiser le common BDKDECOUP contenant la description du découpage en milieux numériques.

Les première et les deux dernières étapes sont réalisés en appelant le sous-programme BDSTRATC(ETAT,..., . Celui-ci part de la description en couches homogènes du milieu physique (common BDCOU) pour réaliser le découpage. Il procède en balayant les interfaces en rajoutant de deux à cinq milieux par interfaces selon les cas. Ce nombre varie suivant la position de la couche (première, intermédiaire ou dernière couche) et le nombre de nœuds demi-entiers contenus dans la couche (un ou plus). On peut avoir jusqu'à cinq milieux, puisque trois milieux hétérogènes apparaissent lorsque l'on introduit un interface. (en effet, le nœud situé à + ou $-\Delta z/2$ d'un interface a sa vitesse à droite ou à gauche qui dépend du milieu adjacent). Le programme est donc un peu lourd car devant gérer tous les cas mais son algorithme est élémentaire.

3.3.7 Traitement des faces le sous-programme BDFACE

Le sous-programme BDFACE appelle les modules de traitement des faces. Il est appelé par BDGORF . Il se présente sous la forme :

```
SUBROUTINE BDFACE( ETAT, NX, NY, NZ, NL, WRK, NWRK, ETG, NETG,
                   COEF, NBCOEF)
```

Outre ses arguments, ses variables d'entrées sont celles des commons initialisés par BDINB et BDCOM.

Son premier argument permet de distinguer le type de traitement à réaliser (initialisation, mise à zéro, calcul de coefficients ou traitement d'une itération). Son algorithme s'écrit

```
si(ETAT=-1 ) alors
   appel de BDSTRATE(ETAT,..   (Initialisation des commons BDKDCOUP,
                                BDNBMIL et BDADPBD)
   Faire pour chacune des 6 faces
                               (Initialisation des commons
      appel de BDFGSM           BDADF, BDADETG et incrémentation
                                de NETG, NWK)
   Fin faire
   appel de BDFGSC             (Initialisation du common BDADFC et
                               incrémentation de NBCOEF)
sinon si(ETAT=0 ) alors
   Faire pour chacune des 6 faces
                               (Mise à zéro des faces externes des
      appel de BDFINI           champs électriques et des fonctions auxiliaires
                                de faces)
   Fin faire
sinon si(ETAT=2 ) alors
   appel de BDSTRATE(ETAT,...  (init. de COEF(ADPad), ad=VC,VG,VD,SMC,
                                i.e. init. des paramètres des couches numériques)
   appel DE BDCFCLA            (init. de COEF(ad), ad ∈ common BDADFC:
                                calcul des coef. pour les faces)
sinon si(ETAT=1 ) alors :    (traitement d'une itération pour chaque face)
   si(BDXM=4 ) alors
      Appel de BDFACLAX      (itération pour une face en x)
   si(BDXP=4 ) alors
      Appel de BDFACLAX      (itération pour une face en x)
   si(BDYM=4 ) alors
      Appel de BDFACLAY      (itération pour une face en y)
   si(BDYP=4 ) alors
      Appel de BDFACLAY      (itération pour une face en y)
   si(BDZM=4 ) alors
      Appel de BDFACLAH      (itération pour une face homogène)
   si(BDZP=4 ) alors
      Appel de BDFACLAH      (itération pour une face homogène)
Appel de ECHFLG              (échange des instants plus et moins)
fin si
```

– Remarque 1:
  Le traitement des faces + ou − se distingue uniquement par la phase d'appel. Pour la face $\hat{x}^-$, on aura:

```
CALL BDFACLAX(  NY, NZ, NL, WRK(ADFXM), ETG(ADEXM), COEF(ADCFX),
```

IYM, IYP, IZM, IZP, NBML)

tandis que pour la face $\hat{x}^+$, on utilisera

CALL BDFACLAX(NY, NZ, NL, WRK(ADFXP), ETG(ADEXP), COEF(ADCFX),
IYM, IYP, IZM, IZP, NBML)

– Remarque 2:
Deux cas supplémentaires sont en fait programmés pour le traitement de chaque face: le cas de conditions périodiques et le cas de conditions de symétrie par rapport à un nœud de coordonnée entière. Ces deux derniers cas, traités par les sous-programmes BDFSYM et BDFPER, ne sont pas utilisés par GORF

3.3.8 Traitement des faces : les sous-programmes BDFINI, BDFGSM, BDFGSC

Le sous-programme BDFGSM augmente la taille des tableaux de travail pour une face donnée lorsque cette face est absorbante. Il détermine également les adresses relatives dans les tableaux de travail. Il se présente comme suit,
SUBROUTINE BDFGSM(BD, N1, N2, NL, ADF, ADE, NWRK, NETG)

– BD, input est un entier qui détermine le type de traitement de la face.

– N1, N2, inputs sont les dimensions suivant la première et la seconde direction du plan considéré. Pour distinguer ces deux directions entre elles, on doit prendre en compte la variable normale à la face. Pour une face de normale z la première coordonnée est x la seconde est y, pour une face de normale y (resp. x) la première coordonnée est z (resp. y) la seconde est x (resp. z).

– NL, input est le nbre de fractions rationnelles

– ADE, output est l'adresse dans le tableau ETG du champ électrique tangent pour la face considérée.

- ADF, output est l'adresse dans le tableau WRK des fonctions auxiliaires pour la face considérée.

- NWRK, NETGinput/output sont les tailles courantes des tableaux de travail nécessaires. Ils sont augmentés en cas de besoin.

Le sous-programme BDFGSC augmente la taille du tableau des coefficients selon les besoins des 6 faces. On distingue quatre type de face: les faces de normale $\pm\hat{x}$, celles de normale $\pm\hat{y}$, celles de normale $+\hat{z}$ et enfin celles de normale $-\hat{z}$. Les deux premières comprennent un jeu de coefficient pour chaque "milieu numérique" de la stratification en z. Les deux dernières faces sont homogènes et n'ont qu'une famille de coefficients. Pour chaque milieu numérique, le nombre de coefficients par milieu est de $3 + 8 \times NL$. Il se présente sous la forme.

SUBROUTINE BDFGSC(NBCOEF, ADCFX, ADCFY, ADCFZM, ADCFZP, NBML, NL)

- NBCOEF, input/output est le nbre de coefficients nécessaire. Il est incrémenté du nbre de coefficients nécessaire au traitement des faces.

- ADCFX,...,ADCFZP sont les adresses des coefficients dans le tableau COEF.

- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles

Le sous-programme BDFINI initialise à zéro les variables d'état d'une face donnée. Ces variables sont (si la face est absorbante)

- Les deux composantes externes du champ électrique tangent à la face, soient
  E(i1:1 → N1-1, i2:IM2 → IP2, 3) pour la composante selon la première direction et
  E(i1:IM1 → IP1, i2:1 → N2-1, 4) selon la seconde direction.

- Les fonctions auxiliaires de la face considérée, à savoir
  F(i1:0 → N1+1, i2:0 → N2+1, L:0 → NL+1, t: 1,2,3,4)

3.3.9 Traitement des faces : les sous-programmes BDFCLA et BDFC

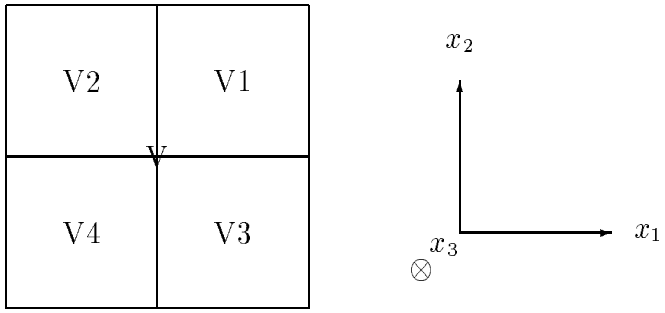
Le calcul des coefficients des systèmes pour les faces absorbantes est piloté par le sous-progamme BDFCLA. Ce premier programme appelle, pour chaque face absorbante et pour chaque milieu numérique de la face, le programme BDFC déterminant les coefficients. Lorsque la face est homogène, comme c'est le cas pour une face de normale en z, il n'y a de facto qu'un milieu par face, sinon, on utilise le découpage en z décrit dans la section précédente.

Au total, les coefficients sont au nombre de 8 NL+3 pour une face homogène (ZM ou ZP) et au nombre de (8 NL+3) $\times$ NBMIL pour une face à stratification en z. Le sous-programme se présente sous la forme:

SUBROUTINE BDCFCLA(NL,NBML, PV,PVG,PVD,PSMC, AX,AY,AZM,AZP)

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.
- PV, PVG, PVD, PSMC, inputs sont quatre tableaux contenant, pour chaque milieu numérique, les valeurs des quatre paramètres caractérisant ce milieu. Un milieu numérique est un milieu auquel se rattachent des nœuds du maillage connexes qui possèdent la même vitesse à leur gauche et à leur droite et la même conductivité moyenne.
- AX(8NL+3,NBMIL), AY(8NL+3,NBMIL), AZM(8NL+3), AZP(8NL+3), outputs sont les tableaux des coefficients.

Le sous-programme BDFC calcule les 8NL+3 coefficients pour un milieu numérique donné. Celui-ci est caractérisé par une valeur de $\sigma\mu c$ et de cinq valeurs de vitesses: celle au centre, et celles au centre de chacune des quatre mailles dont le nœud est l'intersection :



Ces coefficients sont ceux nécessaires à l'algorithme pour les faces absorbantes décrit en section 1.3.4. La liste de ces coefficients est donnée par les formules (1.14), (1.15), (1.18) et (1.19), les indices k et $k-\frac{1}{2}$ étant omis.

Pour L=1:NL

$$A_l = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\mathrm{V}\Delta t\alpha_l \mathrm{SMC}}$$

$$\mathrm{C(L)} = -A_l\alpha_l\left(\mathrm{V}(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_3)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_1}\right)^2 + \mathrm{V}(\mathrm{V}_2+\mathrm{V}_4)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_2}\right)^2\right)$$

$$\mathrm{C(L+\ NL)} = A_l\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\Delta t\alpha_l\mathrm{SMC}-1\right)$$

$$\mathrm{C(L+2NL)} = A_l\alpha_l\mathrm{V1\ V}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_1}\right)^2, \qquad \mathrm{C(L+3NL)} = A_l\alpha_l\mathrm{V2\ V}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_2}\right)^2$$

$$\mathrm{C(L+4NL)} = A_l\alpha_l\mathrm{V3\ V}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_1}\right)^2, \qquad \mathrm{C(L+5NL)} = A_l\alpha_l\mathrm{V4\ V}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_2}\right)^2$$

$$\mathrm{C(L+6NL)} = \tfrac{1}{2}A_l$$

$$\mathrm{C(L+7NL)} = \frac{2\beta_l\Delta x_3}{\alpha_l(\mathrm{V}\Delta t+\gamma^*\Delta x_3)},$$

Fin faire Pour l=1:NL

avec

$$\gamma^* = 1+\sum_l (1-A_l)\frac{\beta_l}{\alpha_l}$$

et

$$\mathrm{C(8NL+1)} = -\frac{2\mathrm{V}\Delta t}{\mathrm{V}\Delta t + \gamma^*\Delta x_3}$$

$$\mathrm{C(8NL+2)} = \frac{\gamma\Delta x_3 + \mathrm{V}\Delta t}{\mathrm{V}\Delta t + \gamma^*\Delta x_3}$$

$$\mathrm{C(8NL+3)} = \frac{-\gamma\Delta x_3 + \mathrm{V}\Delta t}{\mathrm{V}\Delta t + \gamma^*\Delta x_3}$$

3.3.10 les sous-programmes BDFCLAX, BDFCLAY et BDFCLAH

Ces sous-programmes mettent en œuvre l'algorithme de traitement d'une face absorbante (cf. section 1.3.4, page 20). Le sous-programme pour une face homogène se présente sous la forme
SUBROUTINE BDFACLAH(N1, N2, NL, F, E, C, I1M, I1P, I2M, I2P)

- N1, N2, inputs sont les dimensions suivant la première et la seconde direction du plan considéré.
- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- F(0:N1+1, 0:N2+1, NL+1, 4), input/output : fonctions auxiliaires
- E(N1, N2, 4), input/output :champ électrique tangent.
- C(8NL+3), input : coefficients pour la face
- I1M, I1P entier, indice inférieur et supérieur des nœuds demi-entiers pour la coordonnée 1.
- I2M, I2P entier, même chose mais pour l'indice 2

Il utilise également les quatre entiers T1M, T1P, T2M, T2P du common BDCOMPF comme inputs.

Le sous-programme modifie E(i1:1 → N1-1, i2:IM2 → IP2, 3) et E(i1:IM1 → IP1, i2:1 → N2-1, 4) ainsi que F(i1:1 → N1-1, i2:IM2 → IP2, l:1→NL+1, T1M) et F(i1:IM1 → IP1, i2:1 → N2-1 l:1→NL+1, T2M) .

E(.,., 3) contient la première composante du champ électrique et E(.,., 4) la seconde (les indices 3 et 4 sont relatifs aux composantes du plan externe) Si ces deux composantes sont évaluées à l'instant n en entrée, elles seront évaluées à l'instant $n+1$ en sortie. E(.,., 1) et E(.,., 2) restent quant à elles inchangées et contiennent les composantes relatives au plan interne évaluées à l'instant $n+1$.

L'algorithme permettant ce passage est celui décrit en sections (1.4.4) et (1.5).

F(.,.,L,T1M) (resp. F(.,.,L,T2M)) contient la première (resp. seconde) composante de la L^{ieme} fonction auxiliaire de face. Elles sont évaluées à l'instant $n-1$ en entrée et à l'instant $n+1$ en sortie. F(.,.,L,T1P) et F(.,.,L,T2P) contiennent les deux composantes des fonctions auxiliaires de face à l'instant n et restent inchangés.

L'appel au sous-programme BDCHFLF en fin de traitement effectue l'échange des indices (T1M,T2M) avec (T1P, T2P), c'est à dire de remettre les indices TM et TP selon les instants croissants ($(n-1,n)$ en entrée de BDFACE, $(n,n+1)$ en sortie).

Le passage d'un milieu homogène à un milieu hétérogène s'effectue en prenant en compte le découpage en milieux et les coefficients selon chaque milieu. Il nécessite la connaissance du common BDKDECOUP. Les boucles selon l'indice en z sont alors découpés en double boucles comme indiqué au paragraphe 3.3.6.

Remarque :Afin d'assurer une vectorisation pas trop désastreuse, on a écrit deux sous-programmes, un pour chacune des deux normales possibles. De cette façon, les boucles d'indice x ou y sont toujours les plus internes, les boucles en z les boucles les plus externes. La seule différence entre BDFCLAX et BDFCLAY réside donc dans l'ordre des boucles.

3.3.11 Traitement des arêtes : le sous-programme BDARETE

Le sous-programme BDARETE appelle les modules de traitement des arêtes. Il est appelé par BDGORF après le traitement des faces. Il se présente sous la forme :

```
SUBROUTINE BDARETE( ETAT, NX, NY, NZ, NL, WRK, NWRK, ETG, NETG,
                    COEF, NBCOEF)
```

Outre ses arguments, ses variables d'entrées sont celles des commons initialisés par BDINB et BDCOM et BDFACE.

Son premier argument permet de distinguer le type de traitement à réaliser (initialisation, mise à zéro, calcul de coefficients ou traitement d'une itération). Son algorithme s'écrit

```
si(ETAT=-1 ) alors
   Faire pour chacune des 12 arêtes
                                  (Initialisation des commons
      appel de BDAGSM              BDADA et BDTYA et incrémentation
                                   de NETG, NWK)
   Fin faire
   appel de BDAGSC                (Initialisation du common BDADAC et
                                  incrémentation de NBCOEF)
sinon si(ETAT=0 ) alors
   Faire pour chacune des 12 arêtes
                                  (Mise à zéro des
      appel de BDAINI              des fonctions auxiliaires
                                   d'arêtes)
   Fin faire
sinon si(ETAT=2 ) alors
   appel DE BDCACLA               (init. de COEF(ad), ad ∈ common BDADAC:
                                   calcul des coef. pour les arêtes)
sinon si(ETAT=1 ) alors :         (traitement d'une itération pour chaque arête)
   Faire pour chacune des 12 arêtes
    si l'arête est absorbante     (intersection de deux plans absorbants)
      appel de BDARECLA
    sinon                         (intersection d'un plan de symétrie avec
      appel de BDACAL              un plan de symétrie ou absorbant)
    fin si
   Fin faire
fin si
```

– Remarque 1:
Beaucoup de cas supplémentaires sont en fait programmés pour le traitement de chaque arête: le cas de conditions périodiques et le cas de conditions de symétrie par rapport à un nœud de coordonnée entière sur chacune des faces multiplie les possibilités pour les arêtes. Elles ne seront pas décrites ici car non utilisées par GORF

3.3.12 Traitement des arêtes : les sous-programmes BDAINI, BDAGSM, BDAGSC

Le sous-programme BDAGSM augmente la taille des tableaux de travail pour une arête donnée lorsque cette arête est intersection de deux plans absorbants. Il détermine également les adresses relatives des fonctions d'arêtes dans les

tableaux de travail. Il se présente comme suit,
SUBROUTINE BDAGSM(BD1, BD2, N3, NL, TYPEA, ADA, NWRK)

- BD1, BD2, input sont deux entiers qui déterminent le type de traitement chacune des deux faces dont l'arête est l'intersection. Lors de l'appel, les indices $(1, 2, 3)$ sont soient (x, y, z), (y, z, x) ou (z, x, y).
- N3, input est la dimension suivant la coordonnée de l'arête.
- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- TYPEA, output est un entier caractérisant le type de traitement sur l'arête. Pour GORF, quatre cas sont possibles:
  - 0 : les deux plans sont absorbants
  - 5 le premier est un plan de symétrie, le second est absorbant
  - 6 le second est un plan de symétrie, le premier est absorbant
  - 11 les deux plans sont absorbants
- ADA, output est l'adresse dans le tableau WRK des fonctions auxiliaires pour l'arête considérée.
- NWRK, input/output est la taille courante du tableau de travail pour les fonction auxiliaires. Il est augmenté en cas de besoin (i.e. si TYPA =11) de 8(NL+1)(NL+1)(N3+2)) qui est la taille requise pour une fonction d'arête.

Le sous-programme BDAGSC augmente la taille du tableau des coefficients selon les besoins des 12 arêtes. On distingue cinq types d'arête: les arêtes de coordonnée z (arête hétérogène), et celles de coordonnée x (resp. y) qui appartiennent au plan du bas du cube et du haut du cube. La première comprend un jeu de coefficient pour chaque "milieu numérique" de la stratification en z. Les quatre dernières arête sont homogènes et n'ont qu'une famille de coefficients. Pour chaque milieu numérique, le nombre de coefficients par milieu est de $(23NL^2 + NL + 12)$. Il se présente sous la forme.

BDAGSC(NBCOEF, ADCAZ, ADCAXM, ADCAXP, ADCAYM, ADCAYP, NBML, NL)

- NBCOEF, input/output est le nbre de coefficients nécessaire. Il est incrémenté du nbre de coefficients nécessaire au traitement des arêtes.

- ADCAZ,...,ADCAYP sont les adresses des coefficients pour les arêtes dans le tableau COEF.
- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.
- NL, input est le nbre de fractions rationnelles

Le sous-programme BDAINI initialise à zéro les variables d'état d'une arête donnée, c'est à dire la fonction d'arête qui lui est associée.

3.3.13 Traitement des arêtes : le sous-programme BDACAL

Le sous-programme BDACAL calcule une itération pour une arête qui n'est pas intersection de deux plans absorbants. Pour GORF, cette situation se présente uniquement pour les arêtes de type 0, 5 et 6. Pour une arête de type 0, il n'y a rien à faire. Ils reste donc deux cas à traiter. Ils consistent à symétriser ou anti-symétriser les fonctions de face relative à la face qui est absorbante. Les détails se trouvent dans la section (2.9.2)

3.3.14 Traitement des arêtes : les sous-programmes BDCACLA et BDAC

Le calcul des coefficients des systèmes pour les arêtes absorbantes est piloté dans le sous-progamme BDCACLA. Ces coefficients sont au nombre de $(23NL^2 + NL + 12)$ pour une arête homogène (i.e. en x ou en y) et au nombre de $(23NL^2 + NL + 12) \times NBMIL$ pour une arête de coordonnée z. Le sous-programme se présente sous la forme:

SUBROUTINE BDCACLA(NL,NBML, PV,PVG,PVD,PSMC, BXM,BXP,BYM,BYP,BZ)

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.

- PV, PVG, PVD, PSMC, inputs sont quatre tableaux contenant, pour chaque milieu numérique, les valeurs des quatre paramètres caractérisant ce milieu. Un milieu numérique est un milieu auquel se rattachent des nœuds du maillage connexes qui possèdent la même vitesse à leur gauche et à leur droite et la même conductivité moyenne.

- BZ(N,NBMIL), BXM(N), BYM(N), BXP(N), BYP(N), N= 23 NL(NL+ 1) +12, outputs sont les tableaux des coefficients.

Le sous-programme BDFA calcule les (23 NL(NL+1)+12 coefficients pour un milieu numérique donné. Ce programme réalise l'inversion de deux matrices de taille 2 NL^2 à l'aide de deux sous-programmes LINPACK, SGEFA et SGEDI. Les tableaux nécessaires à cette inversion étant petits, ils ont été déclaré "en dur" (à l'aide du parameter LMAX) à l'intérieur du sous-programme.

Si B(1:(23 NL(NL+1)+12) est le tableau des coefficients, le lien avec les formules (1.52), (1.63), (1.53) via (1.49) et (1.37)) est

B(1: NL2)	$\longrightarrow$	$B^1_{l,m,k}$, $B^1_{l,m,k-\frac{1}{2}}$	B(NL2+1 :2 NL2)	$\longrightarrow$	$B^2_{l,m,k}$, $B^2_{l,m,k-\frac{1}{2}}$
B(2 NL2+1 :3 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{31}_{l,m,k}$, $B^{31}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$	B(3 NL2+1 :4 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{32}_{l,m,k}$, $B^{32}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$
B(4 NL2+1 :5 NL2)	$\longrightarrow$	$B^4_{l,m,k}$	B(5 NL2+1 :6 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{5x}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$
B(6 NL2+1 :7 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{5y}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$	B(7 NL2+1 :8 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{10x}_{l,m,k}$
B(8 NL2+1 :9 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{10y}_{l,m,k}$	B(9 NL2+1 :10 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{11x}_{l,m,k}$
B(10 NL2+1 :11 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{11y}_{l,m,k}$	B(11 NL2+1 :12 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{13y}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$
B(12 NL2+1 :13 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{13x}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$	B(13 NL2+1 :14 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{14y}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$
B(14 NL2+1 :15 NL2)	$\longrightarrow$	$B^{14x}_{l,m,k-\frac{1}{2}}$			

Dans tous ces tableaux, de taille NL2 = NL*NL, on rangent toutes les composantes en $(l,m), l,m = 1,..,NL$.

On utilisera également les correspondances

B(23 NL2+1)	$\longrightarrow$	B_k^{8y}	B(23 NL2+2)	$\longrightarrow$	B_k^{8x}
B(23 NL2+3)	$\longrightarrow$	B_k^{9y}	B(23 NL2+4)	$\longrightarrow$	B_k^{9x}
B(23 NL2+5)	$\longrightarrow$	$B_{k-\frac{1}{2}}^{12y}$	B(23 NL2+6)	$\longrightarrow$	$B_{k-\frac{1}{2}}^{12x}$
B(23 NL2+6)	$\longrightarrow$	$B_{k-\frac{1}{2}}^{15}$			

Les deux matrices inversées (cf. 1.64) et (1.65)) sont rangées suivant

B(15 NL2+1 :16 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k}^{16}$	B(16 NL2+1 :17 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k}^{17}$
B(17 NL2+1 :18 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k}^{18}$	B(18 NL2+1 :19 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k}^{19}$
B(19 NL2+1 :20 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{20}$	B(20 NL2+1 :21 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{21}$
B(21 NL2+1 :22 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{22}$	B(22 NL2+1 :23 NL2)	$\longrightarrow$	$B_{l,m,k-\frac{1}{2}}^{23}$

En ce qui concerne les coefficients pour la détermination des composantes tangentielles du champ électrique sur l'arête, le lien avec les formules de (1.88) est

B(23 NL2+8)	$\longrightarrow$	D_k^1	B(23 NL2+9)	$\longrightarrow$	B_k^2
B(23 NL2+10)	$\longrightarrow$	D_k^3	B(23 NL2+11)	$\longrightarrow$	B_k^4
B(23 NL2+12)	$\longrightarrow$	B_k^5	B(23 NL2+13)	$\longrightarrow$	B_k^4

$$\text{B(23 NL2+13 :23 NL2+12+NL)} \longrightarrow D_{l,k}^6$$

Notons que dans toutes ces formules, les indices k et $k-\frac{1}{2}$ disparaissent puisque l'on raisonne par milieu numérique.

3.3.15 Traitement des arêtes : le sous-programme BDARECLA

Ce sous-programme met en œuvre l'algorithme de traitement d'une arête intersection de deux arêtes absorbantes.

```
SUBROUTINE BDARECLA  (NL, NZ, A, FX, FY, NX, NY,
                      NRMLX, NRMLY, ETX, ETY,
                      IZM, IZP, SYMZM, SYMZP, B, NBML,
                      KMDE, KPDE, MLDE, NBMLDE,
                      KMEN, KPEN, MLEN, NBMLEN)
```

(Comme on le voit la syntaxe est liée à une arête de coordonnée z, mais une simple permutation des signes X, Y et Z lors de l'appel permet de traiter n'importe qu'elle arête.)

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- NZ, input est le nombre de points dans la direction de l'arête.
- NX, input nombre de points suivant la première coordonnée.
- NY, input nombre de points suivant la seconde coordonnée.
- A(0:NZ+1, NL+1, NL+1, 8), input/output : fonctions auxiliaires d'arête
- FX(0:NY+1, 0:NZ+1, NL+1, 4), input/output : fonction auxiliaire de face pour la face de normale x.
- FY(0:NZ+1, 0:NX+1, NL+1, 4), input/output : fonction auxiliaire de face pour la face de normale y.
- ETX(NY, NZ, 4), input/output : champ électrique tangent sur la face de normale x.
- ETY(NZ, NX, 4), input/output : champ électrique tangent sur la face de normale y.
- NRMLX, NRMLY : deux entiers valant plus ou moins un selon le signe des normales aux plans dont l'arête est l'intersection.
- IZM : entier valant 1 si il y a une symétrie à effectuer 2 sinon.

- IZP : entier valant NZ si il y a une symétrie à effectuer NZ-1 sinon.
- SYMZM, SYMZP : détermine les signes des symétries éventuelles en z
- B(23(NL+1)+12,NBMIL), input : coefficients pour l'arête
- NBML, input : nombre de milieux pour l'arête (1 pour les arêtes en x ou y)

Les autres arguments reprennent exactement la structure du common BDKDECOUP. Pour une arête en z, c'est à dire hétérogène, l'appel s'effectue avec les éléments de ce common. Pour une arête homogène, on initialise ces arguments d'appel de telle manière à décrire un milieu à une seule couche.

Ce sous programme utilise également comme inputs les drapeaux qui permettent de distinguer les instants et les plans dans les fonctions d'arête et de face, soient

- les quatre entiers T1M, T1P, T2M, T2P du common BDCOMPF.
- les entiers (PS13M,PS23M, ET13M,ET23M, PS13P,PS23P, ET13P,ET23P) du common BDCOMPA

L'algorithme permettant ce passage est celui décrit dans la section (1.6.4) auquel il faut rajouter la formule (1.87).

L'appel au sous-programme BDCHFLA en fin de traitement effectue l'échange des indices (PS13M,PS23M, ET13M,ET23M) avec (PS13P,PS23P, ET13P,ET23P), c'est à dire de remettre les indices M et P selon les instants croissants ($(n-1, n)$ en entrée de BDARETE, $(n, n+1)$ en sortie).

3.3.16 Traitement des coins : le sous-programme BDCOIN

Le sous-programme BDCOIN appelle les modules de traitement des coins. Il est appelé par BDGORF après le traitement des arêtes. Il se présente sous la forme :

```
SUBROUTINE BDCOIN( ETAT, NX, NY, NZ, NL, WRK, NWRK, ETG, NETG,
                   COEF, NBCOEF,MAT, NMAT )
```

Outre ses arguments, ses variables d'entrées sont celles des commons initialisés par BDINB et BDCOM, BDFACE et BDARETE.

Son premier argument permet de distinguer le type de traitement à réaliser (initialisation, mise à zéro, calcul de coefficients ou traitement d'une itération). Son algorithme s'écrit

```
si(ETAT=-1 ) alors
   Faire pour chacun des huit coins
                                    (Initialisation des commons
      appel de BDCGSM                BDADC et COIN et incrémentation
                                     de NETG, NWK)
   Fin faire
   appel de BDCGSC                  (Initialisation des common BDADCC, BDSITC et
                                    incrémentation de NBCOEF)
   détermination de NMAT
sinon si(ETAT=0 ) alors
   Faire pour chacun des huit coins
                                          (Mise à zéro
      appel de BDCINI                      des fonctions auxiliaires
                                           de coin)
   Fin faire
sinon si(ETAT=2 ) alors
   appel DE BDCCCLA (haut/bas du cube)    (init. de COEF(ad), ad ∈ common BDADCC:
                                           calcul des coef. pour les coins)
sinon si(ETAT=1 ) alors :                (traitement d'une itération pour chaque coin)
   Faire pour chacune des huit coins
    si le coin est absorbant             (intersection de trois plans absorbants)
      appel de BDCOICLA
    sinon (si nécessaire)                (intersection d'un plan de symétrie avec
      appel de BDCCAL                     deux plans absorbants)
    fin si
   Fin faire
fin si
```

- Remarque 1:
  Les coefficients aux coins ne sont nécessaires que pour un coin "absorbant". Les valeurs de ces coefficients sont tributaires de la cote (haute ou basse) du coin considéré. Il y a donc au plus deux familles de coefficients. De plus, ces coefficients sont identiques en cas de milieu homogène. On aura donc

  - Aucun coef. à calculer (SITCOIN = 0)

- Une seule famille de coef. (celle du bas) (SITCOIN = 1)
- Une seule famille de coef. (celle du haut) (SITCOIN = 2)
- Deux familles de coef. (celle du haut et celle du bas) (SITCOIN = 3)
- Une seule famille de coef. valant pour le haut et pour le bas (SITCOIN = 4)

3.3.17 Traitement des coins : les sous-programmes BDCINI, BDCGSM, BDCGSC

Le sous-programme BDCGSM augmente la taille des tableaux de travail pour absorbants. Il détermine également les adresses relatives des fonctions auxiliaires de coin dans les tableaux de travail. Il se présente comme suit,
SUBROUTINE BDCGSM(BD1, BD2, BD3, NL, ADC, NWRK, TYPE)

- BD1, BD2, BD3, input sont trois entiers qui déterminent le type de traitement sur chacune des trois faces dont le coin est l'intersection.
- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- TYPE, output est un entier caractérisant le type de traitement sur le coin. Pour GORF, cinq cas sont possibles suivant la nature des conditions imposées sur les faces dont le coin est l'intersection.
  - 0 Aucun traitement au coin n'est nécessaire
  - 1 le premier plan est un plan de symétrie, les second et troisième sont absorbants
  - 2 le second plan est un plan de symétrie, les premier et troisième sont absorbants
  - 3 le troisième est un plan de symétrie, le deux premiers sont absorbants
  - 10 les trois plans sont absorbants
- ADC, output est l'adresse dans le tableau WRK des fonctions auxiliaires pour le coin considéré.

- NWRK, input/output est la taille courante du tableau de travail pour les fonction auxiliaires. Il est augmenté en cas de besoin (i.e. si TYPE =10) de 12(NL+1)(NL)(NL)) qui est la taille requise pour une fonction de coin.

Le sous-programme BDCGSC augmente la taille du tableau des coefficients selon les besoins des huit coins.

Il se présente comme suit,

SUBROUTINE BDCGSC(NBCOEF, ADM, ADP, NBML, NL, SITCOIN, ADVE, ADVS)

- NBCOEF, input/output est le nbre de coefficients nécessaire. Il est incrémenté du nbre de coefficients nécessaire au traitement des coins.
- ADM,ADP, outputs, sont les adresses des coefficients pour les coins du bas et du haut dans le tableau COEF.
- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.
- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- SITCOIN, output, est une variable entière caractérisant la situation au coin
- ADVE,ADVS, outputs, sont les adresses de deux petits tableaux de travail nécessaires au traitement des coins absorbants.

Le sous-programme BDCINI initialise à zéro les variables d'état d'un coin donné, c'est à dire la fonction de coin qui lui est associée.

3.3.18 Traitement des coins : le sous-programme BDCCAL

Le sous-programme BDCCAL calcule une itération pour un coin qui est intersection d'un plan de symétrie avec deux plans absorbants. Pour GORF, cette situation se présente uniquement pour les arêtes de type 1, 2 et 3. Le traitement consiste à symétriser ou anti-symétriser les fonctions d'arête qui ont leurs support sur l'arête, intersection des deux plans absorbants. Les détails se trouvent dans la section 2.9.3.

3.3.19 Traitement des coins : le sous-programme BDCCCLA

Le calcul des coefficients des systèmes pour un coin absorbant est réalisé dans le sous-progamme BDCCCLA.

SUBROUTINE BDCCCLA(NL,NBML, PV,PSMC,
A1, AS, AB, B, C, R, D, A, BLOC, HAUTBAS ,
MAT, VE, VS)

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- NBML, input est le nbre total de milieux numériques.
- PV, PSMC, inputs sont deux tableaux contenant, pour chaque milieu numérique, les valeurs de la vitesse et du $\sigma\mu c$ caractérisant chaque milieu.
- A(NL,NL), A1(NL,NL,NL), AS(NL,NL,NL), B(NL,NL,NL), C(NL,NL,NL), AB(NL,NL,NL), R(8,3), D(NL,NL,3), BLOC(NL*NL,NL*NL,48), outputs sont les tableaux des coefficients.
- VE(NL,NL,12), VS(NL,NL,12), deux petits tableaux de travail
- HAUTBAS, input entier valant 1 si on traite un coin du haut et autre chose sinon.
- MAT(NL,NL,12,NL,NL,12) matrice (réelle) au coin

Les coefficients sont composés de différents tableaux:

- Le tableau R(1:8,1:3) lié aux coefficients donnés par (1.114):

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{R(1,j)} = \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 & \mathrm{R(3,j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 \\
\mathrm{R(4,j)} = \frac{1}{2}\gamma\frac{c\Delta t}{h} & \mathrm{R(2,j)} = \frac{1}{2}\gamma\frac{c\Delta t}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 \\
\mathrm{R(5,j)} = \gamma + \frac{c\Delta t}{h} & \mathrm{R(6,j)} = -\gamma + \frac{c\Delta t}{h} \\
\mathrm{R(7,j)} = \frac{1}{2}\frac{c\Delta t}{h} & \mathrm{R(8,j)} = 2\frac{h}{c\Delta t}
\end{array}
\qquad
h = \begin{vmatrix} \Delta x & (\mathrm{j}=1) \\ \Delta y & (\mathrm{j}=2) \\ \Delta z & (\mathrm{j}=3) \end{vmatrix}
$$

– Les tableaux AS , A1 , AB , B , C de type REAL(1:NL,1:NL,1:NL) liés aux coefficients donnés par (1.115)

$$\begin{aligned} \text{AS(l,m,p)} &= A_{l,m,p}, \quad \text{A1(l,m,p)} = A^1_{l,m,p}, \\ \text{AB(l,m,p)} &= A^2_{l,m,p}, \quad \text{B(l,m,p)} = A^3_{l,m,p}, \\ \text{C(l,m,p)} &= A^4_{l,m,p} \end{aligned}$$

– Les tableaux A(1:NL,1:NL) , et D(1:NL,1:NL,1:3) . A n'est autre que la diagonale de la matrice (diagonale!) $A^{p,q}_{l,m}$ donnée par (1.112). D contient les trois inverses des diagonales des matrices (diagonales également) A_x, A_y et A_z données par (1.111).

$$\text{A(l,m)} = A^{l,m}_{l,m}, \quad \text{D(l,m,j)} = \frac{1}{\frac{c\Delta t}{h} + A_{l,m}}, \; h = \begin{vmatrix} \Delta x & (\text{j} = 1) \\ \Delta y & (\text{j} = 2) \\ \Delta z & (\text{j} = 3) \end{vmatrix}$$

– Le tableau BLOC(1:NL*NL,1:NL*NL,1:48) . C'est le gros morceau qui permet l'inversion de la matrice $\mathbf{M}$ donnée par (1.110). Plus précisément, le système

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} U^{(a,b)}_{\psi,l,m} \\ \\ U^{(a,b)}_{\eta,l,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{(a,b)}_{\psi,l,m} \\ \\ V^{(a,b)}_{\eta,l,m} \end{bmatrix}$$

se résout pour les composantes en ψ par:

$$\begin{aligned} U^{(z,x)}_{\psi,l,m} = & \sum_{n,p} \text{BLOC}((l,m),(n,p),1) \cdot V^{(z,x)}_{\psi,n,p} + \text{BLOC}((l,m),(n,p),2) \cdot V^{(x,y)}_{\psi,n,p} + \\ & \sum_{n,p} \text{BLOC}((l,m),(n,p),3) \cdot V^{(y,x)}_{\psi,n,p} + \text{BLOC}((l,m),(n,p),4) \cdot V^{(x,z)}_{\psi,n,p} + \\ & \sum_{n,p} \text{BLOC}((l,m),(n,p),5) \cdot V^{(x,y)}_{\eta,n,p} + \text{BLOC}((l,m),(n,p),6) \cdot V^{(y,z)}_{\eta,n,p} + \\ & \sum_{n,p} \text{BLOC}((l,m),(n,p),7) \cdot V^{(z,y)}_{\eta,n,p} + \text{BLOC}((l,m),(n,p),8) \cdot V^{(x,z)}_{\eta,n,p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U^{(y,x)}_{\psi,l,m} &= \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),9)\cdot V^{(y,x)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),10)\cdot V^{(x,z)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),11)\cdot V^{(z,x)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),12)\cdot V^{(x,y)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),13)\cdot V^{(x,z)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),14)\cdot V^{(z,y)}_{\eta,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),15)\cdot V^{(y,z)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),16)\cdot V^{(x,y)}_{\eta,n,p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{(x,y)}_{\psi,l,m} &= \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),17)\cdot V^{(x,y)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),18)\cdot V^{(y,z)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),19)\cdot V^{(z,y)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),20)\cdot V^{(y,x)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),21)\cdot V^{(y,z)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),22)\cdot V^{(z,x)}_{\eta,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),23)\cdot V^{(x,z)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),24)\cdot V^{(y,x)}_{\eta,n,p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{(z,y)}_{\psi,l,m} &= \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),25)\cdot V^{(z,y)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),26)\cdot V^{(y,x)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),27)\cdot V^{(x,y)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),28)\cdot V^{(y,z)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),29)\cdot V^{(y,x)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),30)\cdot V^{(x,z)}_{\eta,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),31)\cdot V^{(z,x)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),32)\cdot V^{(y,z)}_{\eta,n,p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{(y,z)}_{\psi,l,m} &= \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),33)\cdot V^{(y,z)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),34)\cdot V^{(z,x)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),35)\cdot V^{(x,z)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),36)\cdot V^{(z,y)}_{\psi,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),37)\cdot V^{(z,x)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),38)\cdot V^{(x,y)}_{\eta,n,p} + \\
&\sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),39)\cdot V^{(y,x)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),40)\cdot V^{(z,y)}_{\eta,n,p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{(x,z)}_{\psi,l,m} \;=\; & \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),41)\cdot V^{(x,z)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),42)\cdot V^{(z,y)}_{\psi,n,p} + \\
& \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),43)\cdot V^{(y,z)}_{\psi,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),44)\cdot V^{(z,x)}_{\psi,n,p} + \\
& \sum_{n,p} +\mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),45)\cdot V^{(z,y)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),46)\cdot V^{(y,x)}_{\eta,n,p} + \\
& \sum_{n,p} \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),47)\cdot V^{(x,y)}_{\eta,n,p} + \mathrm{BLOC}((l,m),(n,p),48)\cdot V^{(z,x)}_{\eta,n,p}
\end{aligned}
$$

Une fois les composantes en *psi* de U connues, les composantes en η se déterminent facilement (cf. structure de la matrice $\mathbf{M}$ en (1.110) et la définition des coefficients données ci-dessus) :

$$
\begin{aligned}
U^{(z,x)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,1)}\cdot\left(V^{(z,x)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(x,y)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(z,y)}_{\psi,l,n}\right)\\
U^{(x,y)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,2)}\cdot\left(V^{(x,y)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(y,z)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(x,z)}_{\psi,l,n}\right)\\
U^{(y,z)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,3)}\cdot\left(V^{(y,z)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(z,x)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(y,x)}_{\psi,l,n}\right)\\
U^{(y,x)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,1)}\cdot\left(V^{(y,x)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(x,z)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(y,z)}_{\psi,l,n}\right)\\
U^{(z,y)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,2)}\cdot\left(V^{(z,y)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(y,x)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(z,x)}_{\psi,l,n}\right)\\
U^{(x,z)}_{\eta,l,m} &= \mathrm{D(l,m,3)}\cdot\left(V^{(x,z)}_{\eta,l,m} + \sum_n \mathrm{B(l,m,n)\ AS(n,l,m)}\cdot U^{(z,y)}_{\psi,n,l} + \mathrm{C(l,m,n)\ AS(l,n,m)}\cdot U^{(x,y)}_{\psi,l,n}\right)
\end{aligned}
$$

Le dernier tableau de coefficient (tableau BLOC) contient des éléments non nuls de l'inverse de la matrice au coin. Pour le calculer, on commence par former la matrice au coin dans le tableau MAT puis on l'inverse à l'aide de deux programmes LINPACK. L'inversion étant réalisée, on récupère les blocs de cette matrice nécessaire á l'inversion. Un test est effectué qui consiste á calculer l'image d'un vecteur arbitraire par cette matrice avant inversion puis

à appliquer le module d'inversion pour enfin calculer l'erreur relative entre le résultat et le vecteur de départ. Cette erreur est affichée sur l'unité 6. Ce test peut bien sûr être supprimé en phase d'exploitation courante.

3.3.20 Traitement des coins : les sous-programmes RECUP et BDSLVS

Comme explicité plus haut, la matrice au coin, MAT, est inversée par un sous-programme de la librairie LINPACK. Cette matrice a, a priori, $12\ NL^2 \times 12\ NL^2$ éléments non nuls, ce qui peut constituer une taille importante. Cette matrice doit être conservée pour inverser les systèmes du type MAT.VS = VE au cour des itérations. On peut réduire cette taille d'une part en constatant que chaque ligne de la matrice inversée possède $4\ NL^2$ éléments nuls; on peut donc ne conserver que $8\ NL^2$ éléments par ligne. D'autre part on remarque que si l'on connaît les $6\ NL^2$ premiers éléments du vecteur VS, (i.e. les fonctions $\psi_{l,m}^{(a,b)}$), les $6\ NL^2$ derniers (i.e. fonctions $\eta_{l,m}^{(a,b)}$) s'en déduisent par une simple formule. Au total on ne conservera donc que $8 \times 8 \times NL^4$ éléments de la matrice inversée. Ces éléments sont stockés dans le tableau BLOC par le sous-programme RECUP. Ce bloc est utilisé au cours des itérations pour l'inversion des systèmes au coin dans le sous-programme BDSLVS

3.3.21 Traitement des coins : le sous-programme BDCOICLA

Ce sous-programme met en œuvre l'algorithme de traitement d'un coin absorbant, intersection de trois plans absorbants.

```
SUBROUTINE BDCOICLA   (NL, COIN,
                       AX, NX, NRMLX, AY, NY, NRMLY, AZ, NZ, NRMLZ,
                       A1, AS, AB, B, C, R, D, A, BLOC, VE,VS)
```

- NL, input est le nbre de fractions rationnelles
- NX, NY, NZ input nombre de points suivant la coordonnée x, y et z.

- AX(0:NX+1, NL+1, NL+1, 8), AY(0:NY+1, NL+1, NL+1, 8), AZ (0:NZ+1, NL+1, NL+1, 8) input/output sont les fonctions d'arêtes de coordonnées x, y et z (le sous programme se charge de calculer les points au voisinage du coin de ces fonctions)

- NRMLX, NRMLY, NRMLZ, input : trois entiers valant plus ou moins un selon le signe des normales aux plans dont le coin est l'intersection.

- COIN(NL,NL,NL+1,12, input/output) : fonctions auxiliaires de coin

- A1, ..., BLOC, input : Coefficients pour le syst'eme (cf. plus haut)

- VE(NL,NL,12), VS(NL,NL,12), deux petits tableaux de travail

Ce sous programme utilise également comme inputs les drapeaux qui permettent de distinguer les instants et les plans dans les fonctions d'arête et de coin, soient

- les entiers (PS13M,PS23M, ET13M,ET23M, PS13P,PS23P, ET13P,ET23P) du common BDCOMPA

- les entiers PSZX,PSXY, PSYZ, (PSXZ,PSYX, PSZY, ETZX,ETXY, ETYZ, (ETXZ,ETYX, ETZY

L'algorithme permettant ce passage est celui décrit en section (1.6.4)

Bibliographie

[1] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène. part 2: Approximation d'ordre supérieur. Technical Report 128, C.M.A.P Ecole Polytechnique, Mars 1985.

[2] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Parabolic wave equation approximations in heterogeneous media. *SIAM J: Appl. Math.*, pages 129–154, 1988.

[3] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1794, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Novembre 1992.

[4] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour le systeme de maxwell dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1991, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Novembre 1993.

[5] P. JOLY and B. MERCIER. Une nouvelle condition transparente d'ordre 2 pour les équations de maxwell en dimension 3. Technical Report 1047, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Juin 1989.

[6] P. JOLY and R. VEZINET. Conditions aux limites absorbantes pour les équations de maxwell en milieu conducteur tridimensionnel. Technical Report 1728, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Juillet 1992.

Table des matières

1 CLA d'ordre élevé pour le système de Maxwell en milieu stratifié 3

1.1 Introduction 3
1.2 Notations 4
1.2.1 Variables d'espace 4
1.2.2 Variable temporelle 5
1.2.3 Paramètres décrivant la physique 6
1.2.4 Paramètres pour la CLA 7
1.2.5 Notations pour le cube 8
1.2.6 Notations pour les faces 8
1.2.7 Notation pour les arêtes 11
1.2.8 Notations pour les coins 12
1.3 Équations pour les faces absorbantes 13
1.3.1 Les équations dans le domaine du continu 13
1.3.2 Les équations dans le domaine discret 14
1.3.3 La récurrence explicitée 17
1.3.4 Un algorithme de résolution 20
1.4 Équations pour les arêtes associées à deux faces absorbantes . . 23
1.4.1 Les équations dans le domaine du continu 23
1.4.2 Les équations dans le domaine discret 25
1.4.3 La récurrence explicitée 29
1.4.4 Un algorithme de résolution 33
1.5 Traitement des composantes tangentielles du champ électrique le long des arêtes 42
1.6 Équations pour les coins associés à trois faces absorbantes . . . 44

1.6.1 Les équations dans le domaine du continu 44
1.6.2 Les équations dans le domaine discret 46
1.6.3 La récurrence explicitée 51
1.6.4 Un algorithme de résolution 59

2 Description fonctionnelle 66
2.1 Introduction 66
2.2 Description du maillage 66
2.3 Physique du problème 69
2.3.1 Hypothèses 69
2.3.2 Lien avec le schéma 70
2.4 Conditions à la limite 70
2.4.1 Variable de commande pour les conditions de symétries (bord=1) 72
2.4.2 Variable de commande pour les conditions de symétries (bord=2) 72
2.4.3 Variable de commande pour les conditions de périodicité (bord=3) 73
2.4.4 Variable de commande pour les CLA (bord=4) 73
2.5 Description de l'algorithme itératif, variables d'état et variables de commande 73
2.6 Description des variables de commande de [BORD] 75
2.7 Description des variables d'état 75
2.7.1 Champ électrique 75
2.7.2 Champ magnétique 76
2.7.3 Faces externes 77
2.7.4 Fonctions auxiliaires 78
2.8 Traitement des variables d'état du module [GORF] 79
2.8.1 Traitement du cube "champ magnétique" 79
2.8.2 Traitement des faces "champ magnétique" 80
2.8.3 Traitement du cube "champ électrique" 81
2.8.4 Traitement des faces "champ électrique" 83
2.9 Calcul des variables d'état du module BORD 86
2.9.1 Traitement des faces externes 86
2.9.2 Traitement des arêtes 88

2.9.3 Traitement des coins 94
2.10 Capacité mémoire requise 97

3 Réalisation informatique 100
3.1 Présentation générale 100
3.1.1 Les cla d'ordre élevées vus par l'utilisateur 100
3.1.2 Les cla d'ordre élevés vus par le programme principal . . 101
3.2 Description des données 103
3.2.1 Les Parameters 103
3.2.2 Les Commons (1) :les variables de commandes des modules de bord 104
3.2.3 Les Common (2) :les pointeurs d'adresses dans les tableaux ETG, WRK et COEF 108
3.3 Description des sous-programmes 112
3.3.1 Où sont les sous-programmes? 112
3.3.2 Traitement d'une itération :les sous-programmes BDDIALOG et BDTRAIT 117
3.3.3 Le sous-programme BDGORF 121
3.3.4 Les sous-programmes BDINB, BDCOHER et BDCOHERS 123
3.3.5 Les sous-programmes BDCOM et BDCOECLA 124
3.3.6 Les sous-programmes BDSTRATE et BDSTRATC . . 124
3.3.7 Traitement des faces le sous-programme BDFACE 127
3.3.8 Traitement des faces :les sous-programmes BDFINI, BDFGSM, BDFGSC 129
3.3.9 Traitement des faces :les sous-programmes BDFCLA et BDFC 131
3.3.10 les sous-programmes BDFCLAX, BDFCLAY et BDFCLAH 133
3.3.11 Traitement des arêtes :le sous-programme BDARETE . 135
3.3.12 Traitement des arêtes :les sous-programmes BDAINI, BDAGSM, BDAGSC 136
3.3.13 Traitement des arêtes :le sous-programme BDACAL . . 138
3.3.14 Traitement des arêtes :les sous-programmes BDCACLA et BDAC 138

3.3.15 Traitement des arêtes :le sous-programme BDARECLA 141
3.3.16 Traitement des coins :le sous-programme BDCOIN . . . 142
3.3.17 Traitement des coins :les sous-programmes BDCINI, BDCGSM, BDCGSC 144
3.3.18 Traitement des coins :le sous-programme BDCCAL . . 145
3.3.19 Traitement des coins :le sous-programme BDCCCLA . . 146
3.3.20 Traitement des coins :les sous-programmes RECUP et BDSLVS 150
3.3.21 Traitement des coins :le sous-programme BDCOICLA . 150



Unité de recherche Inria Lorraine, Technopôle de Nancy- Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 Villers Lès Nancy
Unité de recherche Inria Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
Unité de recherche Inria Rhône- Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1
Unité de recherche Inria Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex
Unité de recherche Inria Sophia- Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia- Antipolis Cedex

Éditeur
Inria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)
ISSN 0249- 6399