

## A propos de la méthode de Mei: cas du cylindre conducteur

Francis Collino

► **To cite this version:**

Francis Collino. A propos de la méthode de Mei: cas du cylindre conducteur. [Rapport de recherche] RR-2699, INRIA. 1995. <inria-00073991>

**HAL Id: inria-00073991**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073991>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET AUTOMATIQUE

*A propos de la méthode de Mei :  
cas du cylindre conducteur*

Francis Collino

**N° 2699**

Novembre 1995

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,  
modélisation  
et logiciel numérique



*Rapport  
de recherche*

1995





## A propos de la méthode de Mei : cas du cylindre conducteur

Francis Collino

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Ident

Rapport de recherche n° 2699 — Novembre 1995 — 21 pages

**Résumé :** La méthode de Mei est présentée et analysée sur un exemple simple, le cas de la diffraction par un cylindre conducteur. Un calcul analytique montre que le principe de Mei n'est pas satisfait par toutes les solutions du problème de diffraction, tout au moins lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0. Toutefois, l'application de ce principe permet de retrouver des conditions approchées hautes fréquences de type conditions absorbantes. Des exemples numériques montrent que la méthode trouve surtout son domaine de validité sur des objets de petites tailles.

**Mots-clé :** Condition aux limites absorbante, méthode de Mei, équations d'Helmoltz

*(Abstract: pto)*

Ce travail a été soutenu par le Centre d'étude de Gramat dans le cadre d'une convention de recherche

## About Mei's method : the case of the cylinder

**Abstract:** Mei's method is presented and analyzed in the case of the diffraction by a hard cylinder. An analytic calculation shows that Mei's principle is not satisfied for all the solutions of the diffraction problem, at least when the discretization step vanishes. However, this principle allow us to recover some approximate high frequency conditions (absorbing boundary conditions). Numerical examples demonstrate that the method is specifically adapted for small size scatterers.

**Key-words:** Absorbing Boundary Condition, Mei method, Helmholtz equation

## 1 Introduction

Récemment, Mei a proposé une méthode originale de résolution des problèmes de diffraction posés en milieux non bornés, [6], [8]. En s'appuyant sur un principe (le principe de MEI pour Measured Equations of Invariance), cette méthode donne un moyen systématique de construire des équations discrètes en des points situés sur la frontière artificielle. Le système linéaire résultant a alors l'avantage d'être creux et de petite taille (la frontière artificielle étant localisée à une distance d'une demi longueur d'onde des objets diffractants). Si cette méthode a été accueillie avec intérêt (signalons la technique NABC pour Numerical Absorbing Boundary Condition, [9], [1] qui s'en inspire très directement), elle a également suscité certaines réticences : aucune justification mathématique fondée n'a été donnée pour la valider. Des comparaisons menées sur des exemples de calcul de SER ont montré que MEI était équivalent en performance et en qualité à une classique méthode d'ordre 2, [7].

Dans ce papier, nous nous proposons de présenter succinctement la méthode de MEI puis de l'analyser à travers un exemple très simple (diffraction par un disque conducteur). Par des calculs analytiques, nous montrons que cette méthode est équivalente, lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0 et en régime haute fréquence, à une condition à la limite absorbante de type local. Les exemples numériques tendent à montrer que si la méthode est très précise pour les objets de petite taille, la précision est très dégradée lorsque cette taille est grande par rapport à la longueur d'onde.

## 2 Présentation de la méthode de Mei

### 2.1 Position du Problème

On considère le problème

$$(P) \begin{cases} \omega^2 u + \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ u|_{\Gamma_0} = f \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right) = 0 \end{cases}$$

où  $\Gamma_0$  est une courbe fermée régulière, représentant la frontière d'un conducteur parfait, et où  $\Omega_e$  est le domaine extérieur à  $\Gamma_0$ .

Il est bien connu, cf. [2], que pour tout  $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  il existe une unique solution  $u$  de (P) avec

$$\begin{aligned} & \bullet u \in H_{loc}^2(\Omega_e) \\ & \bullet \forall K \text{ compact de } \Omega_e, \|u\|_{H^2(K)} \leq C_k \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Afin de calculer une solution approchée de (P), il est nécessaire de se ramener à un problème posé dans un domaine borné. On choisit

$$\Omega = \text{extérieur de } \Gamma_0 \cap \text{intérieur de } \Gamma_e \quad (2)$$

où  $\Gamma_e$  est une courbe fermée englobant  $\Gamma_0$  (cf. figure 2.1).

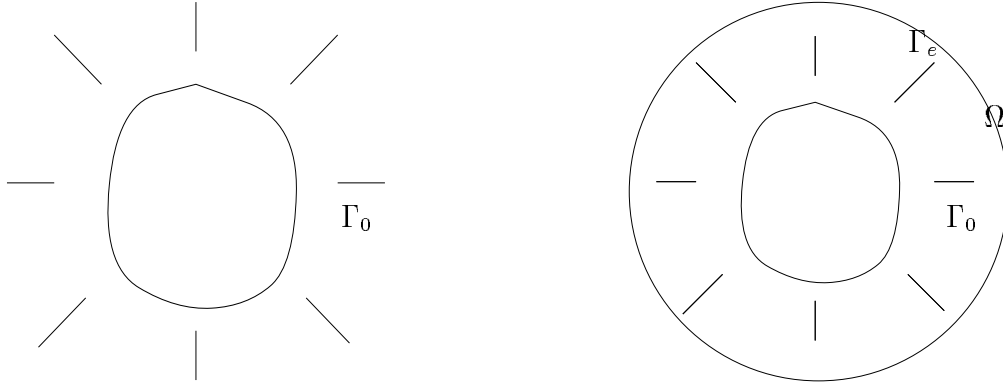


FIG. 1 - géométrie du problème

Puis, on se donne un espace d'approximation, par exemple d'éléments finis  $P_1$ , dans lequel la solution sera recherchée

$$V_h = \{ \varphi \in C^0(\Omega) / \varphi \text{ est linéaire par morceaux sur chaque } T_h \} \quad (3)$$

$$\Omega = \bigcup T_h, \quad \text{diam}(T_h) < Ch, \quad (4)$$

$$\varphi_h \in V_h \iff \varphi_h = \sum_{i \in I} \varphi_i u_h^i(x) \quad (5)$$

$I$  est l'ensemble des noeuds du maillage; on a

$$I = I_{int} \cup I_0 \cup I_e$$

avec

$$\begin{cases} I_{int} & = & \text{noeuds intérieurs} \\ I_0 & = & \text{noeuds sur } \Gamma_0 \\ I_e & = & \text{noeuds sur } \Gamma_e \end{cases}$$

L'approche éléments finis permet d'obtenir

$$|I_0| + |I_{int}| \text{ équations} \quad (6)$$

$I_0$  équations de la forme  $u_i = f_i^h$

$I_{int}$  équations de la forme  $\omega^2 \sum_{j \in V_i} m_{i,j} u_j - \sum_{j \in V_i} k_{i,j} u_j = 0$

$m$  est la matrice de masse,  $k$  la matrice de rigidité

$$\begin{cases} m_{i,j} = \int_{\Omega} \varphi_i^h \varphi_j^h dx \\ k_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^h \nabla \varphi_j^h dx \end{cases} \quad (7)$$

et  $V_i$  est l'ensemble des noeuds voisins de  $i$ .

Restent  $|I_e|$  relations indéterminées dues au fait qu'il manque une relation sur  $\Gamma_e$  pour clore le problème sur  $\Omega$  : c'est le problème de la condition transparente ou absorbante.

## 2.2 Les méthodes classiques

On commence par rappeler la méthode classique. On suppose pour simplifier que la frontière extérieure est un cercle. On note  $r_e$  son rayon. Dans ce cas, on montre que la restriction à  $\Omega$  de la solution posée dans le domaine extérieur complet de  $\Omega^e$  coïncide avec la solution du problème

$$\begin{cases} \omega^2 u + \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = f & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} - Tu = 0 & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (8)$$

$T$  est l'opérateur transparent

$$T : \begin{array}{ccc} H^{+1/2}(\Gamma_e) & \hookrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_e) \\ \varphi & \mapsto & T\varphi \end{array}$$

La définition de  $T$  passe par la résolution du problème extérieur posé sur  $\Omega_e^{ext} = \text{extérieur de } \Gamma_e$

$$\begin{cases} \Delta w + \omega^2 w = 0 & \text{sur } \Omega^{ext} \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}_r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - i\omega w \right) = 0 & \text{(condition de radiation à l'infini)} \\ w = \varphi & \text{sur } \Gamma_e. \end{cases} \quad (9)$$



$T$  est précisément défini par

$$T\varphi = \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_{/\Gamma_e}.$$

Le choix du cercle comme domaine extérieur permet une écriture plus compacte de  $T$ ;

$$\begin{aligned} \text{si } \hat{\varphi}_n = \mathcal{F}(\varphi)(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(r_e \exp^{i\theta}) \exp^{-in\theta} d\theta \\ \varphi(s = r_e \exp^{i\theta}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \hat{\varphi}_n \exp^{+in\theta}. \end{aligned}$$

$T$  est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T : \varphi & \longrightarrow & T\varphi \\ \mathcal{F} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}^{-1} \\ \hat{T} : \hat{\varphi}_n & \longrightarrow & a_n \hat{\varphi}_n \end{array}$$

avec ( $r_e$  désigne le rayon du cercle extérieur)

$$a_n = \omega \frac{H_n^{(1)'}(\omega r_e)}{H_n^{(1)}(\omega r_e)}. \quad (10)$$

Notons, et ce fait est important pour critiquer la méthode de Mei, que cet opérateur est non local sur  $\Gamma_e$ . La condition transparente relie  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en chaque point de  $\Gamma_e$  à l'ensemble des valeurs de  $u$  sur tout le cercle. La substitution à cette équation non locale d'une relation approchée locale s'appuie toujours sur une approximation haute fréquence : on suppose que le cercle a un rayon suffisamment grand en regard de la longueur d'onde et on peut alors substituer à  $T(\omega r_e)$  son développement asymptotique. Par exemple, on montre

$$\lim_{r_e \rightarrow +\infty} (T(\omega r_e) - i\omega) \varphi = 0 \quad (11)$$

et on peut écrire le problème approché

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 u + \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_{\Gamma_0} = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} - i\omega u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e \end{array} \right. \quad (12)$$

la condition sur  $\Gamma_e$  est appelée condition du premier ordre. Une autre approximation s'appuie sur un développement asymptotique plus précis car tenant compte de la courbure de la frontière artificielle. Elle correspond à la deuxième condition absorbante de Feng, ([3]),

$$\begin{cases} \omega^2 u + \Delta u = 0 \\ u|_{\Gamma_0} = f \\ \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u + \frac{u}{2r_e} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (13)$$

Feng fournit une condition encore plus sophistiquée en prenant

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \left( i\omega - \frac{1}{2r_e} + \frac{i}{8\omega r_e^2} + \frac{1}{8\omega^2 r_e^3} \right) u - \left( \frac{i}{2\omega r_e^2} + \frac{1}{2\omega^2 r_e^3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e \quad (14)$$

Une approche plus précise, proposée par Keller ([4]), consiste à négliger les grands nombres d'ondes ( $\equiv$  les  $n$  grands) dans la condition transparente. On suppose que les variations de  $u$  sur  $\Gamma_e$  peuvent être représentées par un nombre fini de sinusoides et on écrira

$$\begin{cases} \omega^2 u + \Delta u = 0 \\ u|_{\Gamma_0} = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} - T_N u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (15)$$

$$T_N \varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=-N}^{+N} a_n e^{in(\theta-\theta')} \right) \varphi(r_e e^{i\theta'}) d\theta' \quad \text{sur } \Gamma_e \quad (16)$$

L'approximation par élément finis de ce problème revient à ajouter pour chaque noeud  $i$  de la frontière la relation

$$\omega^2 \sum_{j \in V_i} m_{i,j} u_j - \sum_{j \in V_i} k_{i,j} u_j + \sum_{k \in I_e} T_{i,k} u_k = 0 \quad (17)$$

où  $T_{i,k} = \int_{\Gamma_e} (T_N \varphi_h)^k \varphi_h^i$  est une matrice pleine couplant tous les noeuds de  $\Gamma_e$ . Le prix à payer pour passer d'une condition locale comme (14) et (12) est la présence de cette matrice pleine.

### 2.3 La méthode de Mei

La méthode de Mei consiste à postuler l'existence, pour toute solution du problème ( $P$ ) et en chaque noeud de la frontière  $\Gamma_e$ , d'une relation de la forme

$$u_i = \sum_{j \in V} a_{i,j} u_j \quad \text{pour } i \in I_e \quad (18)$$

où les  $a_{i,j}$  sont indépendants de l'excitation  $f$  sur  $\Gamma_0$ .

Bien sûr (et quoique cela ne soit pas explicitement dit dans les écrits de Mei) il s'agit là d'une relation approchée. Ainsi on aurait

$$\exists a_{i,j} \text{ indépendant de } f \text{ tq } : u_i = \sum_{j \in V_i} a_{i,j} u_j + o(h)$$

$V_i$  est l'ensemble des noeuds voisins de  $i$ . Mei suggère de prendre trois noeuds (ceux à droite et à gauche sur  $\Gamma_e$  et le noeud interne à  $\Omega$  directement voisin à  $i$ ) où cinq (on ajoute les deux noeuds à gauche et à droite du noeud interne, voir la figure ci-dessous) et quelques fois plus. Par la suite, pour simplifier, on prendra la configuration à trois noeuds.

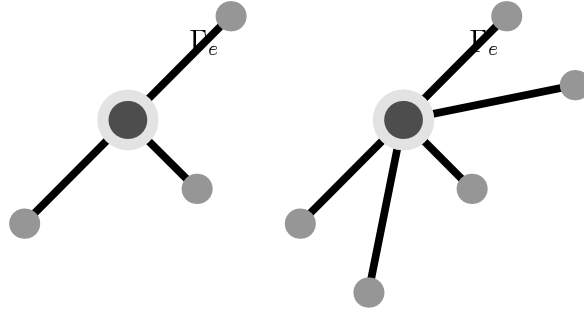


FIG. 2 - Configuration a trois voisins (à gauche) et cinq voisins (à droite).

A partir du principe on peut évaluer les  $a_{i,j}$  en prenant des solutions particulières connues (les métrons). On choisit par exemple les solutions liées à un potentiel de simple couche

$$u^k = \int_{\Gamma_0} G_\omega(r - r') \Phi_k(v') dv' \quad (19)$$

où  $G_\omega$  est la fonction de Green sortante de l'équation Helmholtz à deux dimensions d'espace:

$$G_\omega(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega r) \quad (20)$$

et  $\Phi_k$  est une fonction arbitraire donnée sur  $\Gamma_0$ .

Rappelons que ces solutions particulières vérifient l'équation d'Helmholtz en tout point du plan situé hors du contour  $\Gamma_0$  et la condition de radiation à l'infini. De plus, le saut de leur trace à travers  $\Gamma_0$  est nulle tandis que leur dérivée normale présente un saut valant précisément  $\Phi_k(s)$  au point  $s$  de  $\Gamma_0$ .

Les  $a_{i,j}$  se calculent alors comme les solutions de

$$u^k(x_i) = \sum_{j \in V_i} a_{i,j} u^k(x_j) \quad (21)$$

$k$  varie de 1 à  $K$  où  $K$  est au moins égal à  $|V_j|$  (trois dans notre cas). Dans le cas où  $k$  dépasse cette valeur, les  $a_{i,j}$  pour  $j = 1, |V_j|$  sont déterminés par résolution d'un problème de moindre carré.

Les  $a_{i,j}$  étant déterminés, on complète les  $|I_0| + |I_{int}|$  relation par  $|I_e|$  relations de type

$$u_i = \sum_{j \in V_j} a_{i,j} u_j. \quad (22)$$

### 3 Etude d'un cas modèle

#### 3.1 Présentation et résolution du cas modèle

On se propose de tester le principe de Mei sur un exemple simple. On prend pour  $\Gamma_o$  un cercle de rayon  $r_o$  et pour  $\Gamma_e$  un cercle de rayon  $r_e > r_o$ . Le problème de diffraction en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \omega^2 u = 0, \text{ pour } r_o < r, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(r_o, \theta) = f(\theta) \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right) (r, \theta) = 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

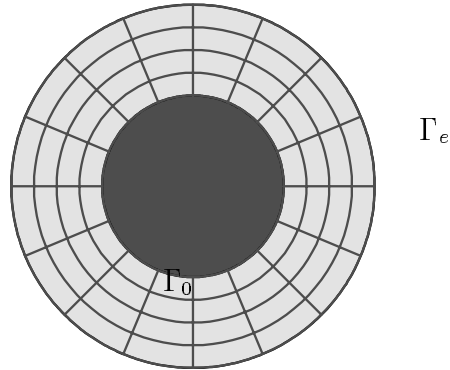
Sa résolution utilise la transformée de Fourier en  $\theta$

$$\text{si } f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n f_n e^{-in\theta} \quad (24)$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n u_n(r) e^{-in\theta} \quad (25)$$

Chaque  $u_n(r)$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_n}{dr} \right) + \left( \omega^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) u_n = 0, \quad r_o < r \\ u_n(r_o) = f_n, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{du_n}{dr} - i\omega u_n \right) = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

FIG. 3 - *Maillage pour le problème modèle*

et on a

$$u_n(r) = \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{H_n^{(1)}(\omega r_o)} f_n. \quad (27)$$

Pour définir le maillage, nous choisissons

$$\begin{cases} \Delta\theta = \frac{2\pi}{N}, & N \text{ suffisamment grand} \\ \Delta r \ll r_o. \end{cases}$$

Le principe de Mei postule l'existence d'une relation approchée de la forme

$$u(r_e, \theta) = A^+ u(r_e, \theta + \Delta\theta) + A^- u(r_e, \theta - \Delta\theta) + B u(r_e - \Delta r, \theta) \quad (28)$$

$A^+$ ,  $A^-$  et  $B$  étant quasi indépendants de  $f(\theta)$  et uniquement fonction des quantités géométriques  $(r_e, \theta, \Delta r, \Delta\theta)$  et de la pulsation  $\omega$ . Le problème (23) est alors approché par

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \omega^2 v = 0 & \text{pour } r_o < r < r_e \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ v(r_o, \theta) = f(\theta) \\ v(r_e, \theta) = A^+ v(r_e, \theta + \Delta\theta) + A^- v(r_e, \theta - \Delta\theta) + B v(r_e - \Delta r, \theta) \end{cases} \quad (29)$$

En utilisant  $\Delta\theta$  et  $\Delta r$  comme pas de discrétisation d'un maillage régulier (cf. figure 3.1), on obtient le système complet d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 v_{p,j} + (Av)_{p,j} = 0 \quad \forall j, 0 < p < P \\ (Av)_{p,j} = \frac{1}{r_p \Delta r} \left( r_{p+\frac{1}{2}} \frac{v_{p+1,j} - v_{p,j}}{\Delta r} - r_{p-\frac{1}{2}} \frac{v_{p,j} - v_{p-1,j}}{\Delta r} \right) + \frac{v_{p,j+1} - 2v_{p,j} + v_{p,j-1}}{r_p^2 \Delta \theta^2} \\ v_{o,j} = f_j \quad \forall j \\ v_{P,j} = A^+ v_{P,j+1} + A^- v_{P,j-1} + B v_{P-1,j} \quad \forall j \\ r_p = (p_0 + p) \Delta r, \quad r_0 = p_0 \Delta r, \quad r_e = (p_0 + P) \Delta r. \end{array} \right. \quad (30)$$

Toutefois, comme dans notre analyse l'erreur due au maillage interne n'est pas la question centrale, nous concentrerons notre attention sur l'analyse de (29).

Afin d'évaluer  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B$ , il nous faut choisir trois solutions particulières du problème de diffraction. Pour cela on se donne  $(m_1, m_2, m_3)$  trois entiers naturels et on prend  $f_k(\theta) = \exp^{im_k \theta}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Les solutions correspondantes s'écrivent

$$u_k(r, \theta) = u_k(r) e^{im_k \theta} = \frac{H_{m_k}^{(1)}(\omega r)}{H_{m_k}^{(1)}(\omega r_0)} e^{im_k \theta} \quad (31)$$

On remarquera que la donnée de Dirichlet,  $f_k(\theta) = \exp^{im_k \theta}$ , que nous retenons pour évaluer les constantes du système de Mei correspond, à une constante près, à choisir comme métron (i.e. comme  $\phi_k$  dans la formule (19) ) cette même harmonique  $\Phi_k(\theta) = \exp^{im_k \theta}$ . Ce choix étant conseillé et utilisé par Mei, il n'est donc pas complètement innocent.

Avec ce choix, la relation (28) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k(r_e) = A^+ e^{im_k \Delta \theta} u_k(r_e) + A^- e^{-im_k \Delta \theta} u_k(r_e) + B u_k(r_e - \Delta r) \\ \text{pour } k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (32)$$

Ainsi, le choix fait sur les solutions particulières implique l'indépendance de  $(A^+, A^-, B)$  par rapport à  $\theta$ . Cela va nous permettre de résoudre le problème approché à l'aide de la transformée de Fourier.

$$\text{Si } v(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n v_n(r) e^{-in\theta}$$

$v_n(r)$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_n}{dr} \right) + \left( \omega^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) v_n = 0, \text{ pour } r_o < r < r_e \\ v_n(r_o) = f_n \\ v_n(r_e) = A^+ e^{im_k \Delta \theta} v_n(r_e) + A^- e^{-im_k \Delta \theta} v_n(r_e) + B v_n(r_e - \Delta r). \end{array} \right. \quad (33)$$

On peut résoudre explicitement ce problème. Il vient

$$v_n(r) = f_n \left( C_n^+ \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{H_n^{(1)}(\omega r_o)} + C_n^- \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{H_n^{(1)}(\omega r_o)} \right) \quad (34)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_n^+ + C_n^- = 1 \\ \bullet \left[ C_n^+ \frac{H_n^{(1)}(\omega r_e)}{H_n^{(1)}(\omega r_o)} + C_n^- \frac{H_n^{(2)}(\omega r_e)}{H_n^{(2)}(\omega r_e)} \right] [A^+ e^{im_k \Delta \theta} + A^- e^{-im_k \Delta \theta} - 1] + \\ + B \left[ C_n^+ \frac{H_n^{(1)}(\omega r_e - \omega \Delta r)}{H_n^{(1)}(\omega r_o)} + C_n^- \frac{H_n^{(2)}(\omega r_e - \omega \Delta r)}{H_n^{(2)}(\omega r_e)} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (35)$$

système qui détermine  $C_n^+$  et  $C_n^-$ . L'interprétation de cette solution est la suivante :  $v_n(r)$  apparaît comme la somme de deux ondes, l'une, proportionnelle à  $H_n^{(1)}(\omega r)$  est une onde divergente et correspond à la solution réelle. L'autre est une onde parasite convergente et est due au fait que  $v_n(r)$  ne satisfait pas la condition de radiation à l'infini. Ainsi,  $C_n^-$  peut être interprété comme un coefficient de réflexion dû à la frontière artificielle.

### 3.2 Que se passe-t-il lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro ?

Dans la section précédente, nous avons suggéré une première critique du postulat de Mei en nous appuyant sur le caractère non local de la condition transparente ou condition exacte. Rappelons que la solution exacte de notre problème de diffraction vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial r} - Tu = 0 \text{ sur } \Gamma_e \\ T\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m(\theta - \theta') \varphi(r_e e^{i\theta'}) d\theta' \\ m(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}, \text{ } a_n \text{ donné par (10)} \end{array} \right. \quad (36)$$

La condition exacte implique donc une convolution de la trace de la fonction  $u$  avec un noyau dont le support est étalé sur tout le cercle frontière et ce d'autant plus que l'on est en régime basse fréquence (i.e.  $\omega r_e$  est petit). Si maintenant on reprend la condition approchée de Mei

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r_e, \theta) = A^+ v(r_e, \theta + \Delta\theta) + A^- v(r_e, \theta - \Delta\theta) + Bv(r_e - \Delta r, \theta), \\ \text{où } A^+, A^-, B \text{ sont solutions de} \\ v^k(r_e, \theta) = A^+ v^k(r_e, \theta + \Delta\theta) + A^- v^k(r_e, \theta - \Delta\theta) + Bv^k(r_e - \Delta r, \theta), \quad k = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (37)$$

et que l'on étudie la condition limite que l'on obtient lorsque les pas tendent vers zéro. Les calculs sont délicats car le système limite donnant les coefficients devient très singulier. On s'en tire en faisant d'abord le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1}{\Delta r} = \frac{B}{A^+ + A^- + B - 1} \\ \frac{b_2}{2\Delta\theta} = -\frac{1}{2} \frac{A^+ - A^-}{A^+ + A^- + B - 1} \\ \frac{b_3}{\Delta\theta^2} = -\frac{1}{2} \frac{A^+ + A^-}{A^+ + A^- + B - 1} \end{array} \right. \quad (38)$$

de telle sorte que la condition de Mei se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r_e, \theta) = b_1 \frac{v(r_e, \theta) - v(r_e - \Delta r, \theta)}{\Delta r} + b_2 \frac{v(r_e, \theta - \Delta\theta) - v(r_e, \theta + \Delta\theta)}{2\Delta\theta} \\ \quad + b_3 \frac{v(r_e, \theta - \Delta\theta) - 2v(r_e, \theta) + v(r_e, \theta + \Delta\theta)}{\Delta\theta^2} \\ \text{où } b_1, b_2, b_3 \text{ sont solutions de} \\ v^k(r_e, \theta) = b_1 \frac{v^k(r_e, \theta) - v^k(r_e - \Delta r, \theta)}{\Delta r} + b_2 \frac{v^k(r_e, \theta - \Delta\theta) - v^k(r_e, \theta + \Delta\theta)}{2\Delta\theta} \\ \quad + b_3 \frac{v^k(r_e, \theta - \Delta\theta) - 2v^k(r_e, \theta) + v^k(r_e, \theta + \Delta\theta)}{\Delta\theta^2}, \quad k = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (39)$$

Le passage à la limite devient alors très simple. On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} v = b_1 \frac{\partial v}{\partial r} + b_2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ \text{où } b_1, b_2, b_3 \text{ sont solutions de} \\ v^k = b_1 \frac{\partial v^k}{\partial r} + b_2 \frac{\partial v^k}{\partial \theta} + b_3 \frac{\partial^2 v^k}{\partial \theta^2}, \quad k = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (40)$$



En d'autres termes, on trouve ainsi la condition locale du second ordre qui est satisfaite par les trois solutions particulières que l'on a retenues. Il est alors bien clair que l'adéquation de cette condition à la condition exacte est tributaire de l'existence de conditions locales approchées pour la condition (36).

Pour bien montrer que la condition trouvée n'est pas indépendante des métrons ou solutions particulières retenues on envisage la famille de choix, indexée par  $p$

$$\begin{array}{ll} \text{métron 1 : } 1 & \text{solution : } C^{ste} H_0^{(1)}(\omega r) \\ \text{métron 2 : } \exp^{ip\theta} & \text{solution : } C^{ste} H_p^{(1)}(\omega r) \exp^{ip\theta} \\ \text{métron 3 : } \exp^{-ip\theta} & \text{solution : } C^{ste} H_p^{(1)}(\omega r) \exp^{-ip\theta} \end{array} \quad (41)$$

Le système déterminant  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  devient

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\omega r_e) &= b_1 \omega H_0^{(1)' }(\omega r_e) \\ H_p^{(1)}(\omega r_e) &= b_1 \omega H_p^{(1)' }(\omega r_e) + (ipb_2 - p^2 b_3) H_p^{(1)}(\omega r_e) \\ H_p^{(1)}(\omega r_e) &= b_1 \omega H_p^{(1)' }(\omega r_e) + (-ipb_2 - p^2 b_3) H_p^{(1)}(\omega r_e) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\Rightarrow b_2 = 0, \quad \frac{1}{b_1} = \omega \frac{H_0^{(1)' }(\omega r_e)}{H_0^{(1)}(\omega r_e)}, \quad \frac{b_3}{b_1} = -\frac{\omega}{p^2} \left( \frac{H_0^{(1)' }(\omega r_e)}{H_0^{(1)}(\omega r_e)} - \frac{H_p^{(1)' }(\omega r_e)}{H_p^{(1)}(\omega r_e)} \right) \quad (43)$$

et la condition s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} - \alpha i \omega v + \beta_p i \omega \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \\ \alpha = \frac{H_0^{(1)' }(\omega r_e)}{i H_0^{(1)}(\omega r_e)}, \quad \beta_p = \frac{1}{ip^2} \left( \frac{H_p^{(1)' }(\omega r_e)}{H_p^{(1)}(\omega r_e)} - \frac{H_0^{(1)' }(\omega r_e)}{H_0^{(1)}(\omega r_e)} \right) \end{cases} \quad (44)$$

Cette famille de condition est bien dépendante de  $p$  et donc des métrons choisis. Ce qui contredit le principe de Mei.

Il est intéressant de regarder ce que deviennent ces conditions lorsque  $\omega r_e$  tend vers l'infini.. D'après [5] pages 108 et 122, on a

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)' } (z) = \frac{1}{2} \left( H_{\nu-1}^{(1)}(z) - H_{\nu+1}^{(1)}(z) \right) \\ H_\nu^{(1)}(z) = \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{1}{4}\pi)} \left[ \sum_{k=1}^n (-1)^k (\nu, k) (2iz)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] \\ (\nu, 0) = 1, \quad (\nu, k) = \frac{1}{k!} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \nu^2 - \frac{3^2}{4} \right) \dots \left( \nu^2 - \frac{(2k-1)^2}{4} \right) \end{cases} \quad (45)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{H_\nu^{(1)' } (z)}{H_\nu^{(1)}(z)} = i \left( 1 - \frac{1}{2iz} + \frac{2\nu^2 - \frac{1}{2}}{(2iz)^2} + \frac{4\nu^2 - 1}{(2iz)^3} + \frac{13\nu^2 - 2\nu^4 - \frac{25}{8}}{(2iz)^4} + O\left(\frac{1}{|z|^5}\right) \right) \quad (46)$$

et asymptotiquement, on a donc

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \frac{1}{2i\omega r_e} - \frac{1}{2} \frac{1}{(2i\omega r_e)^2} - \frac{1}{(2i\omega r_e)^3} - \frac{25}{8} \frac{1}{(2i\omega r_e)^4} + O\left(\frac{1}{|\omega r_e|^5}\right) \\ \beta_p = \frac{2}{(2i\omega r_e)^2} + \frac{4}{(2i\omega r_e)^3} + \frac{13 - 2p^2}{(2i\omega r_e)^4} + O\left(\frac{1}{|\omega r_e|^5}\right) \end{cases} \quad (47)$$

En négligeant les termes d'ordre deux on trouve une condition indépendante de  $p$  qui coïncide avec la condition proposée par Feng (équation 14). La dépendance en  $p$  n'est visible que dans les termes d'ordre supérieurs à quatre. Ce résultat asymptotique tempère les critiques que l'on peut faire sur la méthode de Mei. Il est remarquable que cette méthode permet de retrouver des conditions locales approchées en régime haute fréquence. Et cela, sans déterminer au préalable l'opérateur transparent. Cela est intéressant pour des applications sur des géométries plus complexes (ellipses par exemple) où la détermination de l'opérateur exact est délicate. La méthode de Mei permet de déterminer des coefficients pour une approximation locale de type fixé. C'est un point positif à souligner.

Un autre point intéressant à regarder est ce que devient la condition limite obtenue lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0 lorsque l'on ajoute des points voisins. Les calculs sont bien sûr plus difficiles mais la démarche est identique. Pour une configuration à cinq voisins, on ajoute les deux points  $(j - 1, P - 1)$  et  $(j + 1, P - 1)$  aux trois points précédents et on prend cinq métrons pour calculer les coefficients. La condition obtenue est

$$\begin{cases} v = b_1 \frac{\partial v}{\partial r} + b_2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + b_4 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} + b_5 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^2 \partial r} \\ \text{où } b_1, b_2, b_3 \text{ sont solutions de} \\ v^k = b_1 \frac{\partial v^k}{\partial r} + b_2 \frac{\partial v^k}{\partial \theta} + b_3 \frac{\partial^2 v^k}{\partial \theta^2} + b_4 \frac{\partial^2 v^k}{\partial \theta \partial r} + b_5 \frac{\partial^3 v^k}{\partial \theta^2 \partial r}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (48)$$

soit une condition de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial r} = R(\partial_\theta) \cdot v \quad (49)$$

où  $R$  est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes de degrés deux et dont les coefficients sont déterminés de telles sortes que les cinq métrons satisfont exactement la condition (49). On reconnaît une approximation par fractions rationnelles. Et bien que l'on ne ait pas vérifié cette assertion, cette condition devient universelle (i.e. les coefficients de  $R$  deviennent indépendants des métrons choisis) lorsque l'on se place à haute fréquence (i.e. lorsque  $\omega r_e$  tend vers l'infini). Ainsi, le fait de prendre plus de voisins permettrait de construire des conditions plus sophistiquées et donc, a priori, meilleures.

Pour finir, notons que l'indépendance par rapport à  $p$  de la condition (40) obtenue à haute fréquence cesse d'être valable lorsque la fréquence diminue. Pour le voir on a calculé numériquement les coefficients  $\beta_p$  lorsque  $\omega r_e$  a pour valeur 1. Les résultats montrent clairement une dépendance par rapport au choix des métrons.

$$\begin{array}{llll}
\beta_1 = -0.2811078 & + i & 0.2155927, & \beta_9 = -1.324672210^{-2} & + i & 0.1047641 \\
\beta_2 = -0.2101170 & + i & 0.2648060, & \beta_{10} = -1.072984510^{-2} & + i & 9.492923310^{-2} \\
\beta_3 = -0.1171333 & + i & 0.2516738, & \beta_{11} = -8.867640010^{-3} & + i & 8.676476010^{-2} \\
\beta_4 = -6.702560210^{-2} & + i & 0.2108589, & \beta_{12} = -7.451281910^{-3} & + i & 7.988274810^{-2} \\
\beta_5 = -4.291900610^{-2} & + i & 0.1768353, & \beta_{13} = -6.349021110^{-3} & + i & 7.400549210^{-2} \\
\beta_6 = -2.980512410^{-2} & + i & 0.1513162, & \beta_{14} = -5.474411010^{-3} & + i & 6.892934410^{-2} \\
\beta_7 = -2.189764210^{-2} & + i & 0.1319313, & \beta_{15} = -4.768820010^{-3} & + i & 6.450182910^{-2} \\
\beta_8 = -1.676538210^{-2} & + i & 0.1168253, & \beta_{16} = -4.191346010^{-3} & + i & 6.060664710^{-2}
\end{array}$$

### 3.3 Etude quantitative : diffraction d'une onde plane

Pour obtenir des résultats plus quantitatifs, on a choisit de s'intéresser à la diffraction d'un disque par une onde plane. Le problème étant invariant par rotation, on peut toujours se ramener au cas où la propagation de l'onde incidente est parallèle à l'axe des  $x$ . La trace de l'onde incidente sur l'obstacle s'écrit alors

$$u_{inc}(\theta) = e^{i\omega r_0 \cos \theta} = -f(\theta) \quad (50)$$

Le champ diffracté s'obtient par résolution du problème (23) avec  $f(\theta)$  donné par (50). On utilise le développement ([2], pages )

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= -e^{i\omega r_0 \cos \theta} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} \\
f_n &= i^n J_n(\omega r_0),
\end{aligned} \quad (51)$$

et la solution s'écrit

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\theta} \\
u_n &= -i^n J_n(\omega r_0) \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{H_n^{(1)}(\omega r_0)}.
\end{aligned} \quad (52)$$

On définit alors le courant se propageant à la surface du disque par

$$\left\{ \begin{array}{l}
C(\theta) = \frac{-1}{i\omega} \left( \frac{\partial(u + u_{inc})}{\partial r} \right)_{/r=r_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \\
c_n = -i^{n-1} \left( J_n'(\omega r_0) - J_n(\omega r_0) \frac{H_n^{(1)' }(\omega r_0)}{H_n^{(1)}(\omega r_0)} \right) = -i^n \frac{2}{\pi \omega r_0} \frac{1}{H_n^{(1)}(\omega r_0)},
\end{array} \right. \quad (53)$$

la dernière égalité provenant de l'identité remarquable

$$\frac{2i}{\pi z} = J_n'(z) H_n^{(1)}(z) - H_n^{(1)' }(z) J_n(z). \quad (54)$$

Ce calcul est un calcul exact. Supposons à présent que le calcul soit effectué par la méthode de Mei. Si l'on néglige le maillage volumique, le calcul se fait mode par mode selon la procédure explicitée dans la section 3.1 et qui aboutit aux expressions (34) et (35). On a

$$u^{mei}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^{mei} e^{in\theta} \quad (55)$$

$$u_n^{mei} = -i^n J_n(\omega r_0) \left( \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{H_n^{(1)}(\omega r_0)} C_n^+ + \frac{H_n^{(2)}(\omega r)}{H_n^{(2)}(\omega r_0)} C_n^- \right),$$

où  $C_n^+$  et  $C_n^-$  sont les deux constantes, solution du système (35).

L'expression du courant est alors évaluée par les formules

$$c^{mei}(\theta) = \frac{-1}{i\omega} \left( \frac{\partial(u^{mei} + u_{inc})}{\partial r} \right)_{/r=r_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{mei} e^{in\theta} \quad (56)$$

$$c_n^{mei} = -i^{n-1} \left( J_n'(\omega r_0) - J_n(\omega r_0) \left( \frac{H_n^{(1)'}(\omega r_0)}{H_n^{(1)}(\omega r_0)} C_n^+ + \frac{H_n^{(2)'}(\omega r_0)}{H_n^{(2)}(\omega r_0)} C_n^- \right) \right).$$

Ce qui, compte tenu de ce que  $C_n^+ + C_n^- = 1$ , peut se réécrire

$$\begin{cases} c_n^{mei} &= -i^{n-1} \left( \frac{(J_n' H_n^{(1)} - H_n^{(1)'} J_n)(\omega r_0)}{H_n^{(1)}(\omega r_0)} C_n^+ + \frac{(J_n' H_n^{(2)} - H_n^{(2)'} J_n)(\omega r_0)}{H_n^{(2)}(\omega r_0)} C_n^- \right) \\ &= -i^n \frac{2}{\pi \omega r_0} \left( \frac{C_n^+}{H_n^{(1)}(\omega r_0)} - \frac{C_n^-}{H_n^{(2)}(\omega r_0)} \right). \end{cases} \quad (57)$$

Nous avons comparé numériquement le courant évalué par la méthode de Mei au courant exact. Suivant ce que propose Mei, nous avons localisé la frontière absorbante à une demi longueur d'onde du disque. Les coefficients de la méthode de Mei que nous avons choisis, correspondent au métrons définis en (41) avec  $p = 0, -1, 1$ . Enfin, Le maillage retenu est construit avec  $N_\lambda = 10$  points par longueur d'onde, soient

$$2\pi r_e \Delta\theta = \Delta r = \frac{\lambda}{N_\lambda} \Rightarrow \omega \Delta r = \frac{2\pi}{N_\lambda}. \quad (58)$$

Les figures 4, 6 et 8 comparent le module du courant correspondant à un rayon du disque  $r_0 =$  égal à un, dix et cent longueur d'onde. On voit que si la méthode de Mei est très précise dans le cas d'un objet de petite taille par rapport à la longueur d'onde, la précision se dégrade lorsque cette taille augmente. Le calcul approché est surtout imprécis dans la zone d'ombre. On peut comprendre ce qui se passe en comparant les coefficients  $c_n$  et  $c_n^{mei}$ ; les figures 5, 7 et 9 montrent clairement que pour des objets de petite taille, très peu de coefficients  $c_n$  interviennent significativement dans l'expression du courant sous forme de série (environ 100000 pour  $r_0 = 1$  longueur d'onde). Il n'en est pas de même pour les objets de grande

taille (il faut tenir compte de 700 termes pour  $r_0 = 100$  longueur d'onde). De plus, l'erreur  $c_n^{mei} - c_n$  augmente avec l'entier  $n$ ; c'est l'erreur sur les coefficients associés aux modes avec  $n$  grand qui dégrade le résultat.

Afin de calculer plus précisément le courant pour l'objet de 100 longueur d'onde, on a repoussé la frontière à trente longueur d'onde. Le résultat, illustré par la figure, est alors bien meilleur. Mais, bien sûr, le maillage est alors de très grande taille.

## Références

- [1] A. Boag and R. Mittra. A numerical absorbing boundary condition for finite and finite element analysis of open periodic structure. *IEEE trans. of microwave theory and technique*, 43(1):1215–22, January 1995.
- [2] D.Colton and R.Kress. *Inverse Acoustic and electromagnetic scattering theory*. Applied Mathematical Sciences 93. Springer-Verlag, 1992.
- [3] D. Givoli. Non reflecting boundary conditions. *Jour. Comp. Phys*, 94(1):1–26, Mai 1991.
- [4] D. Givoli and J.B.Keller. . *J. Comput. Phys*,, 82:172, 1988.
- [5] N.N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications, inc, 1972.
- [6] K.K. Mei, R.Pous, Z.Chen, and Y.W.Liu. the measured equation of invariance a new concept in field computation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 42:320–328, 1994.
- [7] L. Muth and J. Gary. Applications and numerical methods for the solution of the maxwell equations , washington. In *Second International Conference and Workshop on*, 1993.
- [8] R. Pous. *The measured equation of invariance : a new concept in field computation*. PhD thesis, Engineering-electrical engineering, University of California at Berkeley, 1992.
- [9] B. Stupfel and R. Mittra. A theoritical study of numerical absorbing boundary condition. *IEEE trans. on Antennas and Propagation*, 43(5):478–487, May 1995.

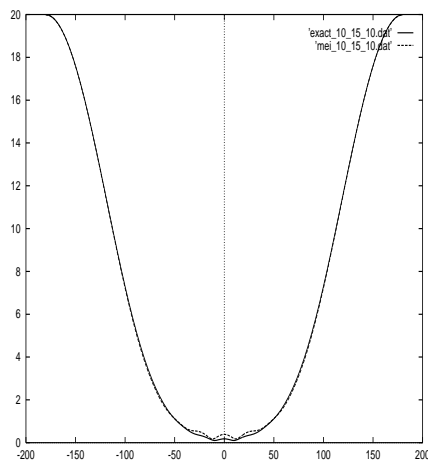


FIG. 4 - Comparaison entre courant exact et courant obtenu par la méthode de Mei pour un rayon du disque conducteur d'une longueur d'onde avec 10 points par longueur d'onde. L'angle  $\theta$ , en abscisse, est mesuré en degré.

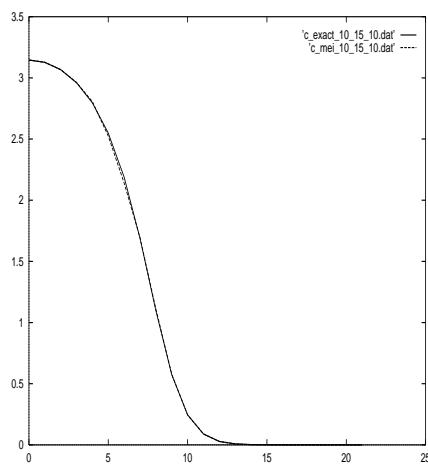


FIG. 5 - Comparaison des coefficients  $c_n$  et  $c_n^{mei}$  pour un disque de rayon d'une longueur d'onde et un schéma à 10 points par longueur d'onde. L'entier  $n$  est en abscisse

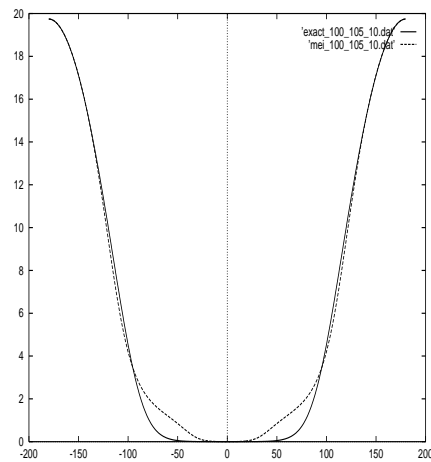


FIG. 6 - *Comparaison entre courant exact et courant obtenu par la méthode de Mei pour un rayon du disque conducteur de dix longueurs d'onde avec 10 points par longueur d'onde et frontière absorbante située à 1/2 longueur d'onde. L'angle  $\theta$ , en abscisse, est mesuré en degré.*

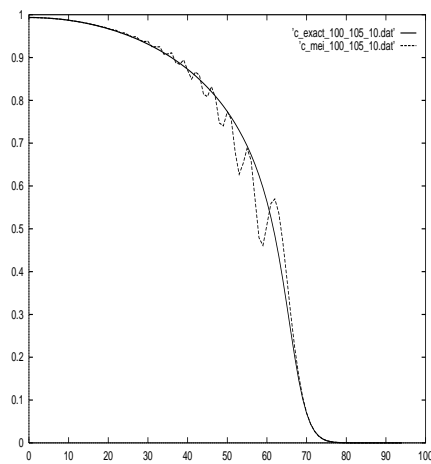


FIG. 7 - *Comparaison des coefficients  $c_n$  et  $c_n^{mei}$  pour un disque de rayon de 10 longueurs d'onde, un schéma à 10 points par longueur d'onde et une frontière absorbante située à 1/2 longueur d'onde. L'entier  $n$  est en abscisse*

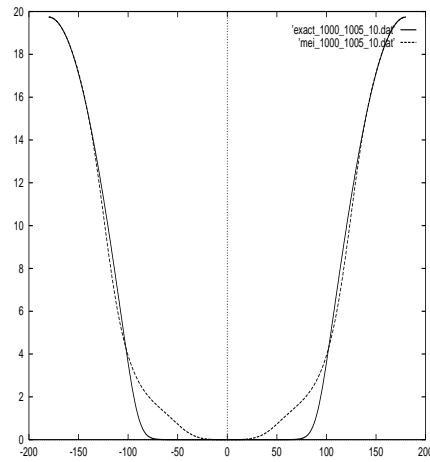


FIG. 8 - Comparaison entre courant exact et courant obtenu par la méthode de Mei pour un rayon du disque conducteur de cent longueurs d'onde avec 10 points par longueur d'onde et une frontière absorbante située à  $1/2$  longueur d'onde. L'angle  $\theta$ , en abscisse, est mesuré en degré.

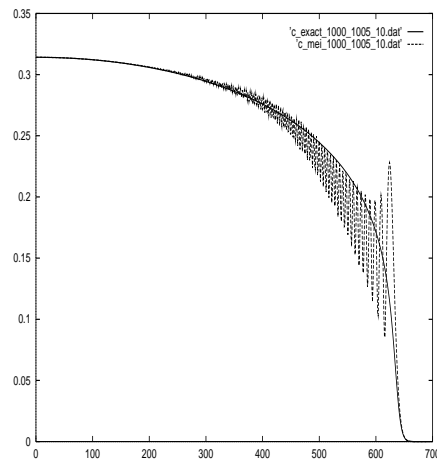


FIG. 9 - Comparaison des coefficients  $c_n$  et  $c_n^{mei}$  pour un disque de rayon de 100 longueurs d'onde et un schéma à 10 points par longueur d'onde et une frontière absorbante située à  $1/2$  longueur d'onde. L'entier  $n$  est en abscisse





---

Unité de recherche Inria Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 Villers Lès Nancy  
Unité de recherche Inria Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex  
Unité de recherche Inria Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1  
Unité de recherche Inria Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex  
Unité de recherche Inria Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

---

Éditeur  
Inria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
ISSN 0249- 6399