



HAL
open science

Etude d'un traitement par petites perturbations du domaine pour l'équation d'Euler instationnaire

Christophe Debiez

► **To cite this version:**

Christophe Debiez. Etude d'un traitement par petites perturbations du domaine pour l'équation d'Euler instationnaire. RR-2691, INRIA. 1995. inria-00074000

HAL Id: inria-00074000

<https://inria.hal.science/inria-00074000>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Etude d'un traitement par petites perturbations
du domaine pour l'équation d'Euler
instationnaire*

Christophe Debiez

N° 2691

Octobre 1995

PROGRAMME 6



*Rapport
de recherche*



Etude d'un traitement par petites perturbations du domaine pour l'équation d'Euler instationnaire

Christophe Debiez

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet Sinus

Rapport de recherche n° 2691 — Octobre 1995 — 47 pages

Résumé : Dans ce rapport, on présente une étude comparative entre différentes méthodes pour tenter de mettre en évidence les simplifications possibles en terme de coût de calcul et de précision pour l'équation d'Euler appliquée à l'aéroélasticité. On a tenté de cerner les gains éventuels et aussi les limites pouvant résulter de la linéarisation et de la non redéfinition du maillage à chaque pas de temps pour la prise en compte du mouvement.

(Abstract: pto)

Study of a small domain perturbation's method for unsteady Euler's equations

Abstract: In this paper, we present numerical methods for unsteady aerodynamic problems and aeroelasticity. We compare several methods and attempt to bring to the fore the possible simplifications in order to save in computing cost and have correct results. In particular, we study the advantages and the limits of the linearization of the Euler's equations, which avoids a redefinition of the computational mesh.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Méthode de transpiration	4
3	Méthode de Hadamard	5
3.1	Position du problème	5
3.1.1	Repérage du domaine	5
3.1.2	Prolongement dans $H^m(\Omega)$	6
3.1.3	Techniques de calcul. Notations	6
3.2	La formule d'Hadamard appliquée à l'équation d'Euler	7
3.2.1	Equations d'Euler	7
3.2.2	Différentiation	8
3.2.3	Cas particulier	10
3.2.4	Généralisation	11
4	Le cas discret	13
4.1	Formulation des équations d'Euler dans un domaine mobile	13
4.2	Différentiation par différences divisées	14
4.3	Linéarisation des équations d'Euler	14
4.4	Méthode de perturbation	15
5	Profils soumis à un mouvement de corps rigide	16
6	Application à l'aéroélasticité	18
6.1	Modélisation	18
6.2	Couplage fluide-structure	19
6.3	Calculs aéroélastiques sur un profil d'aile	19
7	Conclusion	20
8	Remerciements	21
9	Annexe	21
10	Références	22

1 Introduction

La plupart des calculs en aérodynamique concernent des géométries fixes. Pourtant les avions sont souples et leur déformation est susceptible d'entrer en résonance aéroélastique avec l'écoulement. Pour calculer ces résonances il faudrait des maillages mobiles, mais cette technique est coûteuse, notamment à mettre en place, malgré des progrès récents très encourageants [Nko92]. Depuis fort longtemps, on cherche à remplacer le mouvement du maillage par des conditions aux bords spéciales. Depuis Hadamard, on montre par différentiation que la modification du bord d'un domaine peut être représentée dans l'équation aux dérivées partielles par un second membre supplémentaire localisé au bord de la frontière modifiée. On sait aussi que ces calculs peuvent être formalisés à l'aide de difféomorphismes (méthode des variations intérieures de Garabedian). Une première étude sur la linéarisation par Hadamard des équations d'Euler en instationnaire a été faite dans [BP94]. Une approche non linéarisée particulièrement féconde appelée transpiration a été aussi introduite par Lighthill dans les années 50 [Lig58].

Dans ce travail, on propose d'étudier la variation de la solution d'une équation aux dérivées partielles par rapport à une modification du domaine de calcul. L'idée centrale consiste à construire une "formule d'Hadamard discrète" en construisant des différences divisées de l'équation discrète. Il en résulte un terme source localisé au bord perturbé. On modifie la condition limite appliquée sur le contour du profil de manière à prendre son mouvement en compte à travers une condition aux limites spéciale. Ce procédé est évalué par rapport aux deux autres approches (maillage variable et transpiration) sur des écoulements Euler 2D autour de profils soumis à des mouvements de corps rigide.

Dans ce rapport, on rappelle tout d'abord la méthode de transpiration puis on présente le système de paramétrage utilisé pour repérer le domaine perturbé et comment on peut traiter le problème considéré, c'est à dire comment résoudre l'équation aux dérivées partielles sur un maillage fixe et sans changement de repère. On expose ensuite le traitement du problème dans le cas discret et on explique l'algorithme utilisé pour la résolution. Enfin, on applique cette méthode de petites perturbations du domaine à l'équation d'Euler et on présente les résultats de différentes expériences numériques réalisées en faisant varier le mouvement du profil et le nombre de Mach.

2 Méthode de transpiration

On doit appliquer des conditions aux limites de glissement sur la frontière de type paroi mobile. On impose que les composantes normales à l'obstacle de la vitesse du fluide et de la vitesse du profil coïncident: $\vec{V} \cdot \vec{n}_\gamma(t) = \vec{V}_p \cdot \vec{n}_\gamma(t)$ où \vec{V}_p et $\vec{n}_\gamma(t)$ désignent respectivement la vitesse et la normale instantanée de la surface de la paroi. En outre, dans le cas de petites déformations, on peut conserver un maillage fixe durant les calculs; les mouvements du profil sont alors pris en compte à l'aide d'une condition de soufflage à la paroi [Mor91]: $\vec{V} \cdot \vec{n}_0 = \vec{V} \cdot \vec{n}_0 + (\vec{V}_p - \vec{V}) \cdot \vec{n}_\gamma(t) = Q(t)$. On impose faiblement cette condition dans les

équations. Le flux explicite à la paroi mobile devient :

$$\Phi_{\gamma(t)}(W) = \int_{\gamma(t)} (F(W)n_0^x + G(W)n_0^y) d\sigma = Q(t)W + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_0^x \\ n_0^y \\ Q(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Implication des conditions de transpiration On linéarise le flux $\Phi_{\gamma(t)}(W)$ de la manière suivante :

$$\Phi_{\gamma(t)}(W^{n+1}) = \Phi_{\gamma(t)}(W^n) + \left\{ \frac{\partial \Phi_{\gamma(t)}}{\partial W} \right\}^n \delta W^n \quad (2)$$

On en déduit l'expression du flux implicite linéarisé sur la paroi :

$$\Phi_{\gamma(t)}^{Lin} = \Phi_{\gamma(t)}(W^n) + \delta W^n \times \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} Q(t) + \rho \frac{\partial Q(t)}{\partial p} & \rho \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho u)} & \rho \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho v)} & 0 \\ \rho u \frac{\partial Q(t)}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho} n_0^x & Q(t) + \rho u \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho u)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho u)} n_0^x & \rho u \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho v)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho v)} n_0^x & \frac{\partial p}{\partial E} n_0^x \\ \rho v \frac{\partial Q(t)}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho} n_0^y & \rho v \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho u)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho u)} n_0^y & Q(t) + \rho v \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho v)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho v)} n_0^y & \frac{\partial p}{\partial E} n_0^y \\ E \frac{\partial Q(t)}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho} Q(t) + p \frac{\partial Q(t)}{\partial \rho} & E \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho u)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho u)} Q(t) + p \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho u)} & E \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho v)} + \frac{\partial p}{\partial(\rho v)} Q(t) + p \frac{\partial Q(t)}{\partial(\rho v)} & Q(t)(1 + \frac{\partial p}{\partial E}) \end{pmatrix}$$

Cette formulation sera utilisée par la suite pour calculer des écoulements par transpiration avec de grands pas de temps.

3 Méthode de Hadamard

Cette partie est consacrée à l'étude de la linéarisation des équations d'Euler, en utilisant la formule d'Hadamard. D'abord, on rappelle brièvement le problème à résoudre, équations d'Euler instationnaires avec conditions aux bords de glissement dans un domaine à frontière mobile. Ensuite, ces équations sont linéarisées pour obtenir un système qui s'exprime sous forme d'intégrales de bord.

3.1 Position du problème

3.1.1 Repérage du domaine

Considérons un ouvert borné régulier \mathcal{O} , $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\Omega \subset \mathcal{O}$ un domaine ouvert, borné de \mathbb{R}^2 , de frontière γ non fixe représentée par $\gamma(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Le repérage est défini comme dans [Der81] et [Beu93] en considérant des perturbations du domaine au voisinage de sa frontière. On définit donc un domaine variable au voisinage du domaine Ω ; à chaque γ correspondra un sous domaine régulier Ω_γ de \mathbb{R}^2 . Pour repérer le domaine Ω_γ , on se donne sur $\partial\Omega$ un champ de vecteurs \vec{V} unitaire de \mathbb{R}^2 , qui décrit les variations de la frontière $\partial\Omega_\gamma$ $\vec{V} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Figure 1). La frontière perturbée a pour expression :

$$\partial\Omega_\gamma = \{x + \delta\gamma(x)\vec{V}(x), x \in \partial\Omega\}$$

Dans la suite, on confondra $\partial\Omega_\gamma$ et γ , et on choisira en pratique $\vec{V} = \vec{n}$.

Remarque 1 C'est Ω qui constitue le support du repérage puisque le domaine variable Ω_γ est défini au voisinage et à partir du domaine Ω supposé fixe.

Remarque 2 La courbe $\partial\Omega_\gamma$ est suffisamment régulière pour pouvoir construire un difféomorphisme T_γ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui transforme $\partial\Omega$ en $\partial\Omega_\gamma$.

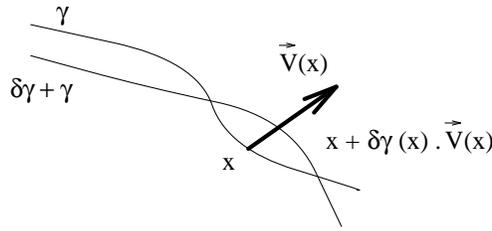


FIG. 1 – Paramétrage du domaine

A chaque domaine Ω_γ correspond un état $W(\gamma)$ qui est la solution d'une équation aux dérivées partielles modélisant l'écoulement dans le domaine Ω_γ : $\Psi(\gamma, W(\gamma)) = 0, \forall \gamma$

3.1.2 Prolongement dans $H^m(\Omega)$

Soit un ouvert Ω tel que $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Définition 1 L'ouvert Ω est dit très régulier si sa frontière Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul côté de Γ .

Proposition 1 On suppose que Ω est très régulier. Alors, quel que soit m , il existe un opérateur P de k -prolongement (relativement à Ω) pour $0 \leq k \leq m$, c'est à dire un opérateur \mathcal{P} linéaire continu de $H^m(\Omega) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathcal{P}u = u$ p.p sur Ω pour tout $u \in H^m(\Omega)$.

Cf par exemple [Lio].

Conséquence 1 Lorsque Ω est très régulier, l'étude des éléments de $H^m(\Omega)$ se ramène à ceux de $H^m(\mathbb{R}^n)$.

3.1.3 Techniques de calcul. Notations

Soit Ω_0 ($\Omega_0 \equiv \Omega_{\gamma_0}$) un ouvert de \mathbb{R}^2 ; à tout Ω_0 , on sait faire correspondre un domaine Ω_γ et $W(\gamma)$ une solution de l'équation à résoudre. Puisque $W(\gamma)$ est dans un domaine qui dépend de γ , on comprend qu'il est difficile de traiter ce problème tel quel. On se propose de ramener

le problème sur un domaine fixe et de calculer la solution sur ce domaine. On notera $W(\gamma)$ la solution de l'équation calculée directement sur le maillage déformé et $W_{df}(\gamma)$ la solution approchée obtenue sur le maillage fixe : $W_{df}(\gamma) = W(\gamma_0) + \delta W_{df}(\gamma)$. Pour se ramener sur un domaine fixe, on transporte la fonction $W_{df}(\gamma)$ en posant : $\tilde{W}_{df}(\gamma) = W_{df}(\gamma) \circ T_\gamma(\gamma_0, \gamma)$ où T_γ est un difféomorphisme tel que $T_\gamma(\gamma_0, \gamma)(\Omega_0) = \Omega_\gamma$.

Remarque: $W_{df}(\gamma)$ ne dépend que de $T_\gamma(\gamma_0, \gamma)$, c'est à dire que de la déformation de la frontière γ_0 . Même si $T_{\gamma'}(\gamma_0, \gamma') \neq T_\gamma(\gamma_0, \gamma)$, $W_{df}(\gamma') = W_{df}(\gamma)$ pourvu que $\Omega_{\gamma'} = \Omega_\gamma$. On définit ainsi une classe d'équivalence des difféomorphismes définissant le même domaine Ω_γ . La fonction $\tilde{W}_{df}(\gamma)$ vérifie l'équation transportée de l'équation (3.1.1) dont $W_{df}(\gamma)$ est solution. Or on recherche une solution à l'équation initiale et dans le domaine fixe. C'est pourquoi on cherche un prolongement $\mathcal{P}\tilde{W}_{df}(\gamma)$ de $\tilde{W}_{df}(\gamma)$ tel que $\mathcal{P}\tilde{W}_{df}(\gamma) = \tilde{W}_{df}(\gamma)$ p.p. dans Ω_γ . La proposition (1) appliquée dans Ω_0 nous assure l'existence du prolongement linéaire $\mathcal{P}\tilde{W}_{df}(\gamma)$ dans \mathbb{R}^2 de $\tilde{W}_{df}(\gamma)$. On pose : $\bar{W}_{df}(\gamma) = \mathcal{P}\tilde{W}_{df}(\gamma) \circ T_\gamma(\gamma, \gamma_0)$. Dans la suite, on cherchera à calculer $\bar{W}_{df}(\gamma)$.

3.2 La formule d'Hadamard appliquée à l'équation d'Euler

3.2.1 Equations d'Euler

Le système des équations d'Euler instationnaires en deux dimensions d'espace s'écrit en formulation conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0, \forall (x, y) \in \Omega_\gamma(t) \quad (4)$$

$W(x, y, t)$ est une fonctionnelle de \mathbb{R}^4 définie par : $W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t$ où ρ désigne la masse volumique, u et v sont les composantes du vecteur vitesse \vec{U} et E représente l'énergie totale par unité de volume. $F(W)$ et $G(W)$ sont les fonctions de flux convectifs, donnés par :

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (E + p) u \end{pmatrix} \text{ et } G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p) v \end{pmatrix} \quad (5)$$

où p est la pression donnée par la loi d'état des gaz parfaits : $p = (\varpi - 1)(E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2))$. où ϖ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Les conditions limites On considère ici un écoulement glissant sur la paroi. On imposera donc une vitesse perpendiculaire à la normale à la paroi. On a :

1. Condition initiale : $W(x, 0) = W^0(x)$, $\forall x \in \Omega_\gamma$
2. Condition aux bords : $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$ où \vec{n} est le vecteur normal unitaire à γ , dirigé vers l'extérieur de Ω_γ .

On peut aussi formuler ce problème sous la forme suivante: $\Psi(\gamma, W(\gamma)) = 0$ où Ψ est définie de manière intégrale par :

$$\begin{aligned} \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &\in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \langle \Psi(\gamma, W(\gamma)), \varphi \rangle &= \int_0^t \int_{\Omega(t)} (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \varphi_1 dx dy dt \\ &+ \int_0^t \int_{\gamma(t)} (\vec{U} \cdot \vec{n}) \varphi_2 d\sigma dt + \int_{t=0} \int_{\Omega(t)} (W - W^0) \varphi_3 dx dy dt \end{aligned} \quad (6)$$

3.2.2 Différentiation

Pour pouvoir linéariser les équations d'Euler, on s'intéresse aux dérivées de Ψ . Par différenciation de (3.2.1),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial W}(\gamma, W(\gamma)) \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma = - \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \delta \gamma \quad (7)$$

On se propose maintenant d'expliciter les 2 membres de cette équation. On considère d'abord le membre de droite. On peut ramener la fonctionnelle Ψ à une intégrale sur le domaine Ω . En utilisant la formule de Green, il vient :

$$\int_0^t \int_{\gamma(t)} (\vec{U} \cdot \vec{n}) \varphi_2 d\sigma dt = \int_0^t \int_{\Omega(t)} \text{div}(\vec{U} \varphi_2) dx dy dt \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &\in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \langle \Psi(\gamma, W(\gamma)), \varphi \rangle &= \int_0^t \int_{\Omega(t)} (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \varphi_1 dx dy dt \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega(t)} \text{div}(\vec{U} \varphi_2) dx dy dt \\ &+ \int_{t=0} \int_{\Omega(t)} (W - W^0) \varphi_3 dx dy dt \end{aligned} \quad (9)$$

On peut alors calculer la différentielle de la fonctionnelle Ψ par rapport à γ en utilisant les lemmes de Mécanique rappelés en annexe; on a :

$$\begin{aligned} \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &\in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \langle \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \delta \gamma, \varphi \rangle &= \int_0^t \int_{\gamma(t)} \left\{ (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \varphi_1 \right. \\ &+ \left. \text{div}(\vec{U} \varphi_2) \right\} \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma d\sigma dt \\ &+ \int_{t=0} \int_{\gamma(t)} (W - W^0) \varphi_3 \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma d\sigma dt \end{aligned} \quad (10)$$

On remarque enfin que la première intégrale du membre de droite est nulle d'après l'équation (4), ainsi que le troisième terme d'après la condition initiale. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \delta \gamma, \varphi \right\rangle = \int_0^t \int_{\gamma(t)} \left\{ \operatorname{div} \vec{U} \varphi_2 + \vec{U} \operatorname{grad} \varphi_2 \right\} \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \, dt \end{aligned} \quad (11)$$

La différentielle de Ψ par rapport à γ peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma, \varphi \right\rangle = \int_0^t \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \gamma} (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \varphi_1 \delta \gamma \, dx \, dy \, dt \\ + \int_0^t \int_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma n_x \\ \frac{\partial v}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma n_y \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_2 \, d\sigma \, dt \\ + \int_{t=0} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \gamma} (W - W^0) \varphi_3 \delta \gamma \, dx \, dy \, dt \end{aligned} \quad (12)$$

n_x et n_y représentent les composantes de la normale \vec{n} à γ . Finalement, on arrive à :

$$\begin{aligned} \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in ((\mathcal{D}(\Omega_\gamma))^4)^3, \\ \int_0^t \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial W} (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \varphi_1 \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma \, dx \, dy \, dt \\ + \int_0^t \int_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial W} n_x \\ \frac{\partial v}{\partial W} n_y \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_2 \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma \, d\sigma \, dt \\ + \int_{t=0} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial W} (W - W^0) \varphi_3 \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma \, dx \, dy \, dt \\ = \\ - \int_0^t \int_{\gamma(t)} \left\{ \operatorname{div} \vec{U} \varphi_2 + \vec{U} \operatorname{grad} \varphi_2 \right\} \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \, dt \end{aligned} \quad (13)$$

On remarque que dans l'équation précédente apparaît le terme $\operatorname{grad} \varphi_2$. On va donc transformer l'équation précédente dans le cas de l'étude autour d'un profil NACA0012.

3.2.3 Cas particulier

On suppose qu'on étudie l'écoulement autour d'un profil NACA0012. On introduit le paramétrage suivant : On se place dans un système de coordonnées polaires (\vec{e}_r, \vec{e}_n) de paramètre θ . Ainsi, tout point du profil est complètement déterminé par la donnée de θ et on a :

$$\begin{cases} \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], & \gamma(\theta) \geq 0 \\ \partial\Omega_\gamma = \{ (\gamma(\cos \theta) \cos \theta, \gamma(\cos \theta) \sin \theta) \} & \text{où } \gamma(\theta) \text{ est donnée en Annexe} \end{cases}$$

On posera : $\vec{V} = \vec{e}_r$

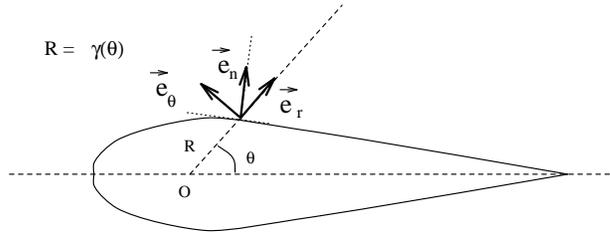


FIG. 2 - Profil NACA 0012

$$\int_{\gamma(t)} \vec{U} \text{grad} \varphi_2 \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma d\sigma = \int_0^{2\pi} \vec{U} \frac{1}{\gamma(\theta)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \sqrt{[\gamma(\theta)]^2 + [\gamma'(\theta)]^2} \delta \gamma d\theta$$

en posant $\Sigma(\theta) = \frac{\sqrt{[\gamma(\theta)]^2 + [\gamma'(\theta)]^2}}{\gamma(\theta)}$, il vient :

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \Sigma(\theta) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \langle \vec{U}, \vec{e}_\theta \rangle \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \delta \gamma d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Sigma(\theta) \langle \vec{U}, \vec{e}_\theta \rangle \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \delta \gamma \right) \varphi_2 d\theta \\ &\quad + \left[\Sigma(\theta) \langle \vec{U}, \vec{e}_\theta \rangle \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \delta \gamma \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

On note que le deuxième terme est nul par continuité des applications Σ et \vec{U} . On peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2 *Dans le cas de l'écoulement autour d'un profil NACA 0012, lorsqu'on fait varier la frontière γ de $\delta\gamma$, la variation δW de W est solution du système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial W} (W_t + F_x(W) + G_y(W)) \delta W = 0 \\ \delta \vec{U} \cdot \vec{e}_n = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Sigma(\theta) \langle \vec{U}, \vec{e}_\theta \rangle \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \delta\gamma \right) \text{ où } \text{grad}_\theta \vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ -\Sigma(\theta) \langle \text{grad}_\theta \vec{U}, \vec{e}_\theta \rangle \langle \vec{e}_n, \vec{e}_r \rangle \delta\gamma \\ \delta W(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

3.2.4 Généralisation

On se propose ici de montrer que les résultats obtenus précédemment sont identiques à ceux obtenus par Pironneau [BP94] :

Lemme 1 *la variation de \vec{n} autour de γ_0 est : $\delta \vec{n} = -\vec{\tau} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$ avec $\alpha = \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle$.*

Démonstration: Soit \vec{U}_0 un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 , qui ne varie pas dans le sens normal près de $\delta\gamma_0$; on décompose \vec{U}_0 dans la base $(\vec{n}_0, \vec{\tau}_0)$ où $\vec{n}_0 \perp \vec{\tau}_0$ et $\|\vec{\tau}_0\| = 1$.

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} U_0^{n_0} \\ U_0^{\tau_0} \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{pmatrix} U_0^{n_0} \\ U_0^{\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{arbitraire périodique sur } \gamma_0 \end{pmatrix}$$

On supposera en outre : $\frac{\partial (\vec{U}_0 \vec{n})}{\partial \vec{n}_0} = 0$ et $\frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{n}_0} = 0$. De (2), on a :

$$\int_{\gamma(t)} \vec{U}_0 \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega(t)} \text{div } \vec{U}_0 dx dy$$

On différencie par rapport à γ respectivement chacun des deux membres de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\int_{\gamma(t)} \vec{U}_0 \vec{n} d\sigma \right] \delta\gamma &= \int_{\gamma(t)} \frac{\partial \vec{U}_0 \vec{n}}{\partial \gamma} \delta\gamma d\sigma \\ &+ \int_{\gamma(t)} \left[\text{grad}(\vec{U}_0 \vec{n}) \vec{n} + H \vec{U}_0 \vec{n} \right] \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta\gamma d\sigma \end{aligned} \quad (14)$$

où H représente la courbure de γ et $\vec{V} = \vec{n}_0$. Avec les hypothèses faites sur \vec{U}_0 , la deuxième intégrale est nulle et on a :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\int_{\gamma(t)} \vec{U}_0 \vec{n} d\sigma \right] \delta\gamma = \int_{\gamma(t)} \frac{\partial \vec{U}_0 \vec{n}}{\partial \gamma} \delta\gamma d\sigma \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \vec{U}_0 \, dx \, dy \right] \delta \gamma = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\operatorname{div} \vec{U}_0) \delta \gamma \, d\sigma + \int_{\gamma(t)} \operatorname{div} \vec{U}_0 \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \quad (16)$$

$$= \int_{\gamma(t)} \left[\frac{\partial U_0^{n_0}}{\partial n_0} + \frac{\partial U_0^{\tau_0}}{\partial \tau_0} \right] \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \quad (17)$$

$$= \int_{\gamma(t)} \frac{\partial U_0^{\tau_0}}{\partial \tau_0} \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \quad (18)$$

$$= - \int_{\gamma(t)} U_0^{\tau_0} \frac{\partial}{\partial \tau_0} (\langle \vec{n}, \vec{V} \rangle) \delta \gamma \, d\sigma \quad (19)$$

$$= - \int_{\gamma(t)} U_0^{\tau_0} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \delta \gamma \, d\sigma \quad (20)$$

en posant : $\alpha = \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle$ Finalement, $\forall \vec{U}_0$ tel que $U_0^{n_0} = 0$ et $\frac{\partial (\vec{U}_0 \vec{n})}{\partial n_0} = 0$

$$\int_{\gamma(t)} \frac{\partial \vec{U}_0 \vec{n}}{\partial \gamma} \delta \gamma \, d\sigma = - \int_{\gamma(t)} U_0^{\tau_0} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \delta \gamma \, d\sigma \quad (21)$$

En conclusion,

$$\delta \vec{n} = - \vec{\tau} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

Proposition 3 *L'accroissement $\delta \vec{U}$ de \vec{U} solution de (4) en γ_0 est égale sur γ_0 à :*

$$\delta \vec{U} \cdot \vec{n}_0 = U^{\tau_0} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_0} - \alpha \frac{\partial U^{n_0}}{\partial n_0} \quad (22)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(t)} \left\{ \operatorname{div} \vec{U} \varphi_2 + \vec{U} \operatorname{grad} \varphi_2 \right\} \langle \vec{n}_0, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \\ = & \int_{\gamma(t)} \left\{ \left(\frac{\partial U^{n_0}}{\partial n_0} + \frac{\partial U^{\tau_0}}{\partial \tau_0} \right) \varphi_2 + U^{\tau_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_0} + U^{n_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_0} \right\} \langle \vec{n}_0, \vec{V} \rangle \delta \gamma \, d\sigma \end{aligned} \quad (23)$$

On pose : $\alpha = \langle \vec{n}, \vec{V} \rangle \delta \gamma$. On remarque que le dernier terme est nul. D'où

$$= \int_{\gamma(t)} \left(\frac{\partial U^{n_0}}{\partial n_0} + \frac{\partial U^{\tau_0}}{\partial \tau_0} \right) \alpha \varphi_2 \, d\sigma - \int_{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial \tau_0} (U^{\tau_0} \alpha) \varphi_2 \, d\sigma \quad (24)$$

$$= \int_{\gamma(t)} \left(\alpha \frac{\partial U^{n_0}}{\partial n_0} - U^{\tau_0} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_0} \right) \varphi_2 \, d\sigma \quad (25)$$

(13) nous permet de conclure.

4 Le cas discret

4.1 Formulation des équations d'Euler dans un domaine mobile

On considère ici une méthode utilisant les volumes finis développée dans [Nko92] pour approcher des écoulements dans un domaine à frontière mobile. Elle est basée sur la méthode de Godunov étendu au cas non structuré. On rappelle les équations discrètes obtenues dans le cas explicite :

On considère une décomposition du domaine en cellules polygonales C_i^n à l'instant $t = t^n$. Pour chaque cellule C_i^n , on note ∂C_{ij}^n l'ensemble des segments définissant sa frontière ∂C_i^n . Soit S_{ij} la surface balayée par le segment ∂C_{ij} entre les instants $t = t^n$ et $t = t^{n+1}$ et V_i le volume balayé par la cellule C_i entre les mêmes instants.

$$\int \int_{C_i^{n+1}} W dl - \int \int_{C_i^n} W dl + \sum_{j=1}^{n(i)} \left\{ \int \int_{S_{ij}} (WN_t + FN_x + GN_y) dl \right\} = 0 \quad (26)$$

où $\vec{N} = (N_x, N_y, N_t)$ est la normale unitaire extérieure à V_i .

$$a_i^{n+1} W_i^{n+1} - a_i^n W_i^n + \Delta t \sum_{j=1}^{n(i)} \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W^n) = 0 \quad (27)$$

où W^{n+1} et W^n désignent respectivement la valeur moyenne de W sur les cellules C_i^{n+1}, C_i^n . Les a_i^{n+1} et a_i^n représentent respectivement les aires des cellules et $n(i)$ est le nombre de voisins du noeud i . On peut aussi écrire l'équation (27) sous la forme suivante (δ -schéma) :

$$[a_i^{n+1} + \Delta t \sum_{j=1}^{n(i)} \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W^n)] \delta W_i = -(a_i^{n+1} - a_i^n) W_i^n - \Delta t \sum_{j=1}^{n(i)} \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W^n) \quad (28)$$

avec $\delta W = W^{n+1} - W^n$.

Finalement, l'équation à résoudre s'écrit :

$$[a_i^{n+1} + \Delta t^n \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial W}(X^n, X^{n+1}, W^n)] (W^{n+1} - W^n) = -(a_i^{n+1} - a_i^n) W^n - \Delta t^n \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W^n) \quad (29)$$

et on notera :

$$\Psi(X^{n+1}, W^{n+1}) = [a_i^{n+1} + \Delta t^n \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial W}(X^n, X^{n+1}, W^n)] (W^{n+1} - W^n) + (a_i^{n+1} - a_i^n) W^n + \Delta t^n \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W^n) \quad (30)$$

4.2 Différentiation par différences divisées

On rappelle qu'on veut calculer la solution d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine soumis à de petites perturbations, c'est à dire que l'on veut résoudre l'équation :

$$(\Psi(\gamma, W(\gamma)), \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\gamma) \quad (31)$$

Dans le cas discret, l'équation (31) dans le domaine perturbé s'écrit :

$$\Psi(\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}, \mathbf{W}) = 0 \quad (32)$$

où ϵ est un paramètre de contrôle de la déformation. Le domaine fixe est désormais noté \vec{x} , le déformé $\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}$. Ainsi, $\mathbb{T}(\vec{x}) = \vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}$ où \mathbb{T} est le difféomorphisme défini dans (3.1.3). On cherche une solution \mathbf{W} sous la forme $\mathbf{W}(\vec{x} + \delta \vec{x}) = \mathbf{W}(\vec{x}) + \delta \mathbf{W}(\vec{x})$. Un développement de Taylor de Ψ par rapport à une variation de la solution s'écrit :

$$\Psi(\vec{x}, \mathbf{W} + \delta \mathbf{W}) = \Psi(\vec{x}, \mathbf{W}) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{W}}(\vec{x}, \mathbf{W}) \delta \mathbf{W} + o(\delta \mathbf{W}) \quad (33)$$

On en déduit : $\Psi(\vec{x}, \mathbf{W} + \delta \mathbf{W}) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \mathbf{W}) \delta \vec{x} + o(\delta \mathbf{W})$. Un développement de Taylor de Ψ autour de \vec{x} donne :

$$\Psi(\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}, \mathbf{W}) = \Psi(\vec{x}, \mathbf{W}) + \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \mathbf{W}) \delta \vec{x} + o(\epsilon) \quad (34)$$

Finalement, $\Psi(\vec{x}, \tilde{\mathbf{W}}) = -\frac{1}{\epsilon} \Psi(\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}, \mathbf{W}) + o(1)$

On peut formuler le lemme suivant :

Lemme 2 *La solution $\tilde{\mathbf{W}}_{\text{df}}$ de $\Psi(\vec{x}, \tilde{\mathbf{W}}_{\text{df}}) = -\frac{1}{\epsilon} \Psi(\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}, \mathbf{W})$ est un vecteur approchant de $\tilde{\mathbf{W}}$; On a $\tilde{\mathbf{W}}_{\text{df}} = \tilde{\mathbf{W}} + o(1)$*

Corollaire 1 *Le couple $(\vec{x}, \tilde{\mathbf{W}}_{\text{df}})$ approche la fonction $\tilde{\mathbf{W}}$.*

Corollaire 2 *Le couple $(\vec{x} + \epsilon \delta \vec{x}, \tilde{\mathbf{W}})$ approche la fonction $\mathbf{W} + \delta \mathbf{W}$.*

4.3 Linéarisation des équations d'Euler

A présent, on cherche à linéariser le flux (30) en utilisant le lemme (2) :

$$\Psi(X_0, W_0 + \delta W) = -\Psi(X_0 + \delta X, W_0) \quad (35)$$

en développant, on aboutit à :

$$\begin{aligned} & [a_i^0 + \Delta t^n \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial W}(X_0, X_0, W_{df}^n)] (W_{df}^{n+1} - W_{df}^n) = \\ & -(a_i^{n+1} - a_i^n) W^0 - \Delta t^n \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_{df}^n) - \Delta t^n \Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W_0) \end{aligned} \quad (36)$$

On pose ensuite: $X_\epsilon^n = X_0 + \epsilon(X^n - X^0)$ et $X_\epsilon^{n+1} = X_0 + \epsilon(X^{n+1} - X^0)$ où ϵ est un paramètre.

On note: $a_i^0 = a_i(X_0)$, $a_i^n = a_i(X^n)$ et $a_i^{n+1} = a_i(X_{n+1})$. En faisant des développements de Taylor autour de X_0 et de W_0 , on a :

$$a(X^n) = a(X_0) + \frac{a(X_\epsilon^n) - a(X_0)}{\epsilon} \quad (37)$$

De même :

$$a(X^{n+1}) = a(X_0) + \frac{a(X_\epsilon^{n+1}) - a(X_0)}{\epsilon} \quad (38)$$

et ,

$$\Phi_{ij}(X^n, X^{n+1}, W_0) = \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0) + \frac{\Phi_{ij}(X_\epsilon^n, X_\epsilon^{n+1}, W_0) - \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0)}{\epsilon} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_{df}^n) &= \Phi_{ij}(X^0, X^0, W^0) \\ &+ \frac{\Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0 + \epsilon(W_{df}^n - W_0)) - \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (40)$$

L'équation (29) linéarisée se met donc sous la forme :

$$\begin{aligned} [a(X_0) - \Delta t^n \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial W}(X_0, X_0, W_0)](W_{df}^{n+1} - W_{df}^n) &= \\ -\frac{1}{\epsilon}(a(X_\epsilon^{n+1}) - a(X_\epsilon^n))W_0 & \\ -\frac{\Delta t^n}{\epsilon} \Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0 + \epsilon(W_{df}^n - W_0)) & \\ -\frac{\Delta t^n}{\epsilon} \Phi_{ij}(X_\epsilon^n, X_\epsilon^{n+1}, W_0) & \\ -2\Delta t^n(1 - \frac{1}{\epsilon})\Phi_{ij}(X_0, X_0, W_0) & \end{aligned} \quad (41)$$

L'équation obtenue est une approximation à l'ordre un de l'équation (29) (erreur en $O(\delta W, \delta X)$).

4.4 Méthode de perturbation

On cherche à calculer W_{df} solution d'une équation aux dérivées partielles sur le domaine Ω_0 . Pour ce faire, on doit résoudre un problème non homogène. En utilisant des formules d'accroissements finis, on s'est ramené en effet à la résolution de (42). On cherche \tilde{W}_{df}^ϵ dans Ω_0 tel que

$$\Psi(\vec{x}, \tilde{W}_{df}^\epsilon) = -\Psi(\vec{x} + \delta\vec{x}, W_0(\gamma_0)) \quad (42)$$

La technique de calcul est la suivante :

1. Résolution de (42) dans Ω_0 . Au préalable, on aura calculé le second membre, c'est à dire un flux sur le domaine déformé en W_0 et un flux sur le domaine non déformé en W^n . On remarque aussi qu'on peut calculer une seule fois la matrice et la stocker. A chaque pas de temps, seul le second membre est à calculer .
2. On transporte $\tilde{W}_{df}^\epsilon(\vec{x})$ sur le maillage déformé $\Omega_0 + \delta\Omega$ pour obtenir $W_{df}^\epsilon(\vec{x})$.
3. On construit \bar{W}_{df}^ϵ en prolongeant W_{df}^ϵ à tout le domaine Ω_0 . On compare ensuite les résultats obtenus en faisant les calculs sur les "vrais" domaines et les domaines prolongés. L'utilité du prolongement est de permettre cette comparaison, puisqu'il permet de construire une image de la fonction sur le même domaine.

Remarques:

- On a utilisé un difféomorphisme égal à l'identité sauf au voisinage de la frontière γ .
- Les résultats obtenus à l'issus de la dernière étape donnent une réponse similaire à celle que l'on obtiendrait en utilisant la formule d'Hadamard [BP94].

5 Profils soumis à un mouvement de corps rigide

On s'intéresse à la simulation d'écoulements externes autour d'un profil d'aile 2D NACA0012 animé de mouvements. Il s'agit ici de mouvements de rotation (oscillations forcées) du profil régis par des lois sinusoïdales :

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_A \sin(\omega t + \epsilon)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_0 & \text{est la position moyenne du profil} \\ \theta_A & \text{est l'amplitude de l'oscillation} \\ \omega & \text{est la pulsation} \\ \epsilon & \text{est l'angle de déphasage} \end{array} \right.$$

La période de la loi oscillatoire est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{43}$$

Les calculs portent en général sur plusieurs périodes de la loi oscillatoire. Les conditions initiales sont données par l'écoulement stationnaire à incidence fixe θ_0 . Plusieurs cas tests ont été définis en faisant varier le nombre de Mach et les oscillations de tangage du profil de manière à couvrir l'ensemble des régimes [Aga82],[AS89].

- cas test 1 :

On simule un mouvement de tangage du profil. Le centre de rotation est fixé au quart avant de la corde du profil. Ce cas test correspond à l'Agard CT1 [Aga82].

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\infty} = 0.6 \\ \theta_0 = 2.89^{\circ} \\ \theta_A = 2.41^{\circ} \\ \omega = 0.1616 \end{array} \right.$$

- cas test 2 :

Les oscillations de tangage se font autour d'un axe situé au quart avant de la corde du profil en régime transsonique avec des chocs assez forts (cas test Agard CT5 [Aga82]).

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\infty} = 0.755 \\ \theta_0 = 0.016^{\circ} \\ \theta_A = 2.51^{\circ} \\ \omega = 0.1628 \end{array} \right.$$

- cas test 3 :

On considère ici un cas test supersonique. On simule un mouvement de tangage du profil, fixé au bord de fuite.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\infty} = 1.2 \\ \theta_0 = 0.0^{\circ} \\ \theta_A = 0.5^{\circ} \\ \omega = 1. \end{array} \right.$$

- cas test 4 :

On considère un autre cas transsonique avec faibles déplacements de chocs et à basse fréquence pour mieux illustrer la pertinence de l'approche linéarisée.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\infty} = 0.8 \\ \theta_0 = 0.0^{\circ} \\ \theta_A = 0.2^{\circ} \\ \omega = 1. \end{array} \right.$$

Tous les calculs présentés ont été effectués sur un maillage 10496 noeuds. Pour chaque cas test, on présente d'abord les solutions stationnaires; elles sont illustrées par des planches de lignes isomach et isobares, ainsi que par des distributions de C_p (Figures 4,5 et 6). Dans le cas instationnaire, on compare les résultats obtenus avec les différentes méthodes. Pour chacun des cas tests, on présente les lignes isomach et isobares aux incidences de 0,90 et 180 degrés obtenues en utilisant soit la méthode de perturbation locale (Figures 8,14 et 20), soit la méthode de transpiration (Figures 9,15 et 21) et on les compare à celles obtenues par un calcul en déformable qui sert de référence (Figures 7,13 et 19). On compare aussi pour chaque cas test les distributions de pression obtenues avec les différentes méthodes; les résultats obtenus par un calcul en déformable sont illustrés sur les figures 10, 16 et 22, ceux

obtenus par la méthode de perturbation locale et par transpiration sur les figures 11, 17 et 23 respectivement à droite et à gauche. Enfin, on présente une comparaison des courbes de portance sur les figures 12, 18 et 24. On présente tous les résultats à l'instant $5T$, le pas de temps Δt étant pris égal à $\frac{T}{80}$.

Analyse des résultats :

On constate que la majorité des résultats mettent en évidence une déviation notable mais raisonnable des résultats obtenus par perturbation frontière par rapport aux résultats en modèle complet et repère variable. En particulier, les courbes de C_p instantanées reproduisent bien la tendance de la pression mais les calculs linéarisés ne détectent pas les chocs (subsonique et transsonique). En général, la méthode de transpiration se comporte aussi assez bien. Dans certains cas (notamment en transsonique), on observe que l'erreur entre un calcul non linéaire et un calcul linéarisé ne prenant en compte qu'une déformation de la première maille n'est pas négligeable. Néanmoins, on peut rendre cette méthode de linéarisation plus précise en considérant non pas seulement une déformation d'une seule maille mais une déformation globale du maillage. Sur les figures 25 et 26, on compare les courbes de portance et les distributions de C_p instationnaires du cas test 4 obtenues par un calcul en déformable, un calcul linéarisé en déformation frontière et un calcul linéarisé en déformation globale. Enfin, un calcul utilisant la méthode de perturbation globale a été réalisé aussi pour le cas test 2 qui est un cas test très sévère. On observe figure 27 une nette amélioration des résultats en particulier pour la courbe de portance qui est identique à celle obtenue par un calcul complet en déformable (Figure 18); les chocs sont toujours aussi mal capturés. Néanmoins, on observe dans les résultats du cas test 4 légèrement transsonique et dont l'amplitude des oscillations est faible une bonne représentation du choc avec la méthode de perturbation globale, comparable à celle obtenue par un calcul en déformable (Figure 26). D'autre part, les mesures de temps de calcul ont montré un gain de l'ordre de 10% en utilisant la méthode de linéarisation qui permet en implicite de ne pas recalculer la matrice à chaque pas de temps.

6 Application à l'aéroélasticité

6.1 Modélisation

On s'intéresse ici au mouvement d'un profil d'aile soumis à deux degrés de liberté (figure 3). Le mouvement est défini par une translation suivant l'axe vertical et une rotation d'angle α autour du centre d'élasticité.