



## Contrôle optimal de Navier-Stokes parabolise

Maureen Clerc, Patrick Le Tallec, Michel Mallet

► **To cite this version:**

Maureen Clerc, Patrick Le Tallec, Michel Mallet. Contrôle optimal de Navier-Stokes parabolise. [Rapport de recherche] RR-2653, INRIA. 1995.

**HAL Id: inria-00074037**

**<https://hal.inria.fr/inria-00074037>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***CONTROLE OPTIMAL DE NAVIER-STOKES  
PARABOLISE***

Maureen Clerc , Patrick Le Tallec , Michel Mallet

**N° 2653**

Septembre 1995

PROGRAMME 6



*Rapport  
de recherche*





## CONTROLE OPTIMAL DE NAVIER-STOKES PARABOLISE

Maureen Clerc\*, Patrick Le Tallec\*\*, Michel Mallet\*\*\*

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet MENUISIN

Rapport de recherche n° 2653 — Septembre 1995 — 48 pages

**Résumé :** Le contrôle optimal d'un écoulement tridimensionnel incompressible régi par les équations de Navier-Stokes parabolisées est écrit à l'aide du problème adjoint discret. Une méthode de quasi-Newton est utilisée pour traiter un problème d'optimisation lié à la production de turbulence en couche limite.

**Mots-clé :** contrôle optimal - méthode de caractéristiques - Navier-Stokes parabolisé - problème adjoint discret - quasi-Newton

*(Abstract: pto)*

\*. INRIA Rocquencourt et Dassault Aviation  
\*\*. INRIA Rocquencourt  
\* \* \*. Dassault Aviation

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

# OPTIMAL CONTROL FOR THE PARABOLIZED NAVIER-STOKES SYSTEM

**Abstract:** Optimal control of an incompressible 3-d flow satisfying the parabolized Navier-Stokes equations is written with the help of the discrete adjoint problem. A quasi-Newton method is then used to treat an optimization problem linked to boundary layer turbulence production.

**Key-words:** characteristic method. discrete adjoint problem. optimal control. parabolized Navier-Stokes. quasi-Newton.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>L'état direct:Navier-Stokes parabolisé</b>	<b>5</b>
2.1	Notations . . . . .	5
2.2	Parabolisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	5
2.3	Domaine de calcul et conditions aux limites . . . . .	6
2.4	Discrétisation longitudinale . . . . .	8
2.5	Formulation variationnelle . . . . .	9
2.6	Algorithme de résolution . . . . .	11
2.7	Validation de PNS . . . . .	12
<b>3</b>	<b>L'état adjoint</b>	<b>14</b>
3.1	Lagrangien, cadre général . . . . .	14
3.2	Application au problème d'optimisation . . . . .	17
3.3	Ecriture du système adjoint . . . . .	18
3.4	Résolution de l'état adjoint . . . . .	20
3.5	Evaluation du gradient . . . . .	21
3.6	Validation de l'état adjoint . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Le problème de contrôle optimal</b>	<b>25</b>
4.1	Algorithme de point intérieur . . . . .	25
4.2	Cas-test étudié . . . . .	29
4.3	Résultats . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>

## 1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, les aérodynamiciens se penchent sur le problème du contrôle de couche limite, pour essayer de limiter l'apparition de la turbulence. Une couche limite laminaire a en effet une traînée plus faible qu'une couche limite turbulente, ce qui induit in fine de moindres dépenses en carburant [2].

Dans le mécanisme complexe de la transition du régime laminaire au régime turbulent, on isole un phénomène à l'échelle de la couche limite: l'apparition d'une structure cohérente formée d'une paire de vortex contra-rotatifs qui finit par se dissiper en produisant de l'énergie turbulente.

Une étude faite en laboratoire par Myose et Blackwelder [11] sur les rouleaux de Görtler contra-rotatifs, qui présentent des similitudes avec les structures cohérentes ci-dessus, montre qu'il est possible de stabiliser l'écoulement par aspiration au niveau de la paroi. Les auteurs insistent cependant sur l'importance de la localisation précise de cette aspiration: une aspiration normale uniforme le long de la paroi peut par exemple avoir l'effet contraire d'augmenter la traînée.

Afin de définir avec précision le type d'aspiration qui réduit le mieux la traînée, il est intéressant de formuler le problème en termes de contrôle optimal, c'est-à-dire, étant donné un écoulement, un coût que l'on cherche à minimiser, et un contrôle (la vitesse normale à la paroi), déterminer la position et l'intensité optimales du contrôle. Mais pour faire du contrôle optimal d'écoulements visqueux, on se heurte à l'importance de la durée de résolution numérique du système d'équations de Navier-Stokes 3-d: l'étude numérique du contrôle optimal de Navier-Stokes 3-d est encore hors de portée sur les calculateurs d'aujourd'hui.

Par contre, pour certains types d'écoulements, il est licite d'introduire une approximation qui consiste à remplacer le système de Navier-Stokes 3-d complet par les équations de Navier-Stokes parabolisées (PNS) (paragraphe 2). Grâce à cette simplification qui réduit la durée du calcul, il est désormais possible de procéder au contrôle optimal. Le calcul du gradient du coût passe par la résolution d'un problème adjoint. Une originalité de ce travail est de calculer directement l'adjoint des équations de PNS discrétisées, plutôt que de discrétiser l'adjoint des équations de PNS continues (paragraphe 3). On est alors en mesure de résoudre le problème de contrôle optimal proprement dit (paragraphe 4).

Bien qu'étant appliquée à un écoulement simplifié, cette étude permet d'éclairer l'axe de recherche important que représente l'application de la théorie du contrôle aux systèmes d'équations différentielles non linéaires, telles les équations de Navier-Stokes.

## 2 L'état direct: Navier-Stokes parabolisé

### 2.1 Notations

Les trois composantes de la vitesse sont notées :

$$(v_x, v_y, v_z), \text{ ou } (\mathbf{v}, v_z),$$

la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial z}$  est notée  $\partial_z$ .  $\nabla$  et  $\Delta$  sont des opérateurs bidimensionnels :

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)^t,$$

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

### 2.2 Parabolisation des équations de Navier-Stokes

On considère un fluide visqueux, incompressible, dont l'écoulement, supposé stationnaire, présente une direction principale. Cette direction appelée longitudinale est notée avec le suffixe  $z$ , tandis que le plan perpendiculaire à  $z$  est appelé plan transversal. Pour paraboliser les équations de Navier-Stokes, deux hypothèses sont introduites :

- La diffusion longitudinale est négligée devant la diffusion transversale, c'est-à-dire que  $\partial_{zz}$  est négligé devant  $\partial_{xx}$  et  $\partial_{yy}$ ,
- $\partial_z p$  est supposé indépendant de  $x$  et de  $y$ .

On obtient le système d'équations de PNS (parabolized Navier-Stokes) incompressible.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z v_z = 0, \\ v_z \partial_z \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ v_z \partial_z v_z + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z - \nu \Delta v_z + \partial_z p = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$



Le caractère parabolique de PNS apparaît si l'on écrit le terme d'advection comme une dérivée totale selon les directions caractéristiques de l'écoulement (voir Pironneau [12]).

Par son caractère parabolique, PNS présente une similitude avec les équations de Navier-Stokes instationnaires bidimensionnelles incompressibles :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = 0 . \end{cases} \quad (2)$$

Par analogie avec (2), la résolution de PNS est facilitée si l'on découpe le domaine de calcul en plans parallèles au plan x-y, la direction longitudinale z jouant le rôle du temps. Le transfert d'information d'un plan au suivant se fait alors par une méthode de caractéristiques selon z.

### 2.3 Domaine de calcul et conditions aux limites

**Domaine de calcul.** Le domaine physique est un cylindre dans la direction z, droit et à base rectangulaire (figure 1). Pour la résolution de PNS, il est découpé en plans espacés de  $\delta z$ , qui sont des sections rectangulaires identiques notées  $\Omega_n$ .

Le domaine de calcul est ainsi formé des  $(\Omega_n)_{n=0,N}$ . Le premier plan  $\Omega_0$  est appelé plan d'entrée, et le dernier,  $\Omega_N$ , plan de sortie. La restriction des variables au plan  $\Omega_n$  est indiquée par n :

$$v_z^n(x, y) = v_{z|\Omega_n}(x, y) .$$

Pour alléger la notation, et lorsqu'aucune confusion n'est possible, on utilisera la notation  $\Omega$  au lieu de  $\Omega_n$ .

Les bords de la section générique  $\Omega$  sont notés  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  comme l'indique la figure 2.

**Conditions aux limites.** Sur  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , on impose une condition de glissement :

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : \quad & \partial_n v_x = 0 \quad v_y = 0 \quad \partial_n v_z = 0 , \\ \Gamma_3 : \quad & v_x = 0 \quad \partial_n v_y = 0 \quad \partial_n v_z = 0 . \end{aligned} \quad (3)$$

Sur  $\Gamma_1$ , on impose une des conditions suivantes :

– adhérence :

$$v_x = 0 \quad v_y = 0 \quad v_z = 0 , \quad (4)$$

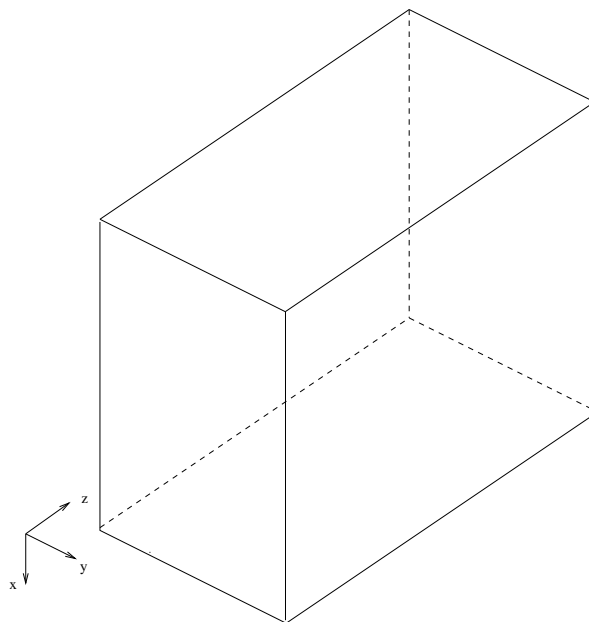


FIG. 1 - *Le domaine physique.*

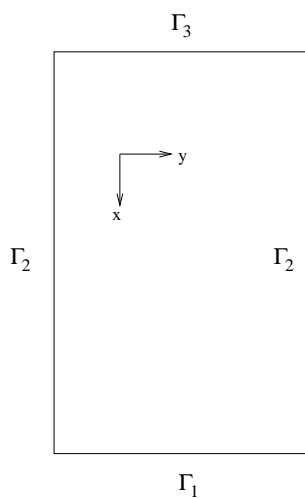


FIG. 2 - *La section générique  $\Omega$ .*

– ou contrôle frontière :

$$v_x = g \quad v_y = 0 \quad v_z = 0 . \quad (5)$$

## 2.4 Discrétisation longitudinale

Soit  $\chi = (\chi_x, \chi_y)$  la courbe caractéristique définie par

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi(x, y; \tau)}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{v}(\chi; \tau)}{v_z(\chi; \tau)} , \\ \chi(x, y; 0) = (x, y) . \end{cases} \quad (6)$$

L'advection d'une quantité  $\mathbf{u}$  s'écrit alors :

$$v_z \partial_z \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} = v_z \cdot \partial_z (\mathbf{u} \circ \chi) .$$

Les équations de PNS discrétisées selon  $z$  s'écrivent sur  $(\Omega_n)_{n=1, N}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^n + \frac{v_z^n - v_z^{n-1}}{\delta z} = 0 , \quad (7)$$

$$v_z^{n-1} \left( \frac{v_z^n - v_z^{n-1} \circ \chi(x, y; -\delta z)}{\delta z} \right) - \nu \Delta v_z^n + \partial_z p = 0 , \quad (8)$$

$$v_z^{n-1} \left( \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1} \circ \chi(x, y; -\delta z)}{\delta z} \right) - \nu \Delta \mathbf{v}^n + \nabla p = 0 . \quad (9)$$

On se place dans le cas d'un contrôle frontière: compte-tenu des conditions aux limites (3) et (5), on a par intégration de la condition d'incompressibilité (7) :

$$\int_{\Omega} \frac{v_z^{n-1} - v_z^n}{\delta z} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}^n = \int_{\partial \Omega} \mathbf{v}^n \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{n} ,$$

ce qui impose que :

$$\int_{\Omega} v_z^n = \int_{\Omega} v_z^{n-1} - \delta z \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{n} . \quad (10)$$

Les équations (7-10) constituent le système d'équations de PNS en discrétisation

longitudinale.

Le gradient longitudinal de pression  $\partial_z p$ , supposé indépendant de  $x$  et de  $y$ , est noté  $\lambda^n$  sur le plan  $n$ ; cette constante  $\lambda^n$  est le multiplicateur de Lagrange de la condition (10).

Remarque : dans la suite, la vitesse au pied de caractéristique  $v \circ \chi(x, y; -\delta z)$  sera notée  $v \circ \chi$ .

### 2.5 Formulation variationnelle

Pour la résolution du système (7-10), on utilise des éléments finis  $Q_2$  pour chaque composante de la vitesse, et  $P_1$  totalement discontinus pour la pression. Plus précisément, la vitesse bidimensionnelle  $\mathbf{v}$  est discrétisée sur les éléments finis à divergence nulle introduits par Hecht [6], ce qui a pour effet de faire disparaître le gradient transversal de pression de l'équation (9). Cependant, la condition d'incompressibilité (7) impose que l'on relève la vitesse  $\mathbf{v}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{v}^n = \bar{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{v}}^n,$$

où  $\bar{\mathbf{v}}^n$  est discrétisée sur le base à divergence nulle, et  $\hat{\mathbf{v}}^n$  discrétisée sur les éléments finis  $Q_2$  vérifie :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^n &= \frac{v_z^n - v_z^{n+1}}{\delta z} && \text{dans } \Omega, \\ \hat{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{g}^n && \text{sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Le contrôle frontière  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  est une fonction de  $Q_2 \times Q_2$  définie sur  $\Omega$ , qui vaut  $(0, 0)$  sur  $\bar{\Omega} \setminus \Gamma_1$ , et  $(g, 0)$  sur  $\Gamma_1$ .

**Définition 1** - *Etant donnée une triangulation  $\mathcal{K}$  de  $\Omega$ , formée d'éléments rectangulaires  $T$ , on définit les espaces de discrétisation :*

$$\mathbf{V}(\Omega) = \left\{ \varphi; \varphi \in (H^1(\Omega))^2; \forall T \in \mathcal{K}, \varphi|_T \in (Q_2)^2; \varphi|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}; \right\},$$

$$\mathbf{V}_{div}(\Omega) = \mathbf{V}(\Omega) \cap \left\{ \varphi; \forall P \in \mathbf{P}_1, \int_T P \nabla \cdot \varphi = 0 \right\},$$

$$\mathbf{V}^{\mathbf{g}}(\Omega) = \left\{ \varphi; \varphi \in (H^1(\Omega))^2; \forall T \in \mathcal{K}, \varphi|_T \in (Q_2)^2; \varphi|_{\Gamma_1} = \mathbf{g} \right\},$$

$$V_z(\Omega) = \left\{ \varphi_z; \varphi_z \in H^1(\Omega); \forall T \in \mathcal{K}, \varphi_z|_T \in Q_2; \varphi_z|_{\Gamma_1} = 0 \right\},$$

$$V_p(\Omega) = \left\{ \mu; \mu|_T \in \mathbf{P}_1; \forall T \in \mathcal{K}, \mu|_{\Gamma_1} = 0 \right\}.$$

Le problème de PNS avec contrôle frontière sous formulation variationnelle discrétisée est le suivant :

Chercher  $(\mathbf{v}^n, v_z^n) \in \mathbf{V}^{\mathbf{g}}(\Omega_n) \times V_z(\Omega_n)$  vérifiant les conditions aux limites (3) et (5), et  $(p^n, \lambda^n) \in V_p(\Omega_n) \times \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall (\varphi^n, \varphi_z^n) \in \mathbf{V}(\Omega_n) \times V_z(\Omega_n), \forall q^n \in \mathbb{R}, \forall \mu^n \in V_p(\Omega_n),$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \left[ v_z^{n-1} \cdot (v_z^n - v_z^{n-1} \circ \chi) + \delta z \lambda^n \right] \varphi_z^n + \nu \delta z \nabla v_z^n \nabla \varphi_z^n &= 0, \\ \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \left[ v_z^{n-1} \cdot (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1} \circ \chi) \right] \varphi^n - \delta z p^n \nabla \cdot \varphi^n + \nu \delta z \nabla \mathbf{v}^n \nabla \varphi^n &= 0, \\ \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \left[ \delta z \nabla \cdot \mathbf{v}^n + v_z^n - v_z^{n-1} \right] \mu^n &= 0, \\ \sum_{n=1}^N q^n \left[ \int_{\Omega_n} v_z^n - \int_{\Omega_n} v_z^{n-1} + \delta z \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}^n \cdot n \right] &= 0. \end{aligned}$$

Pour le problème d'optimisation, ce système sera noté sous la forme condensée :

$$\alpha_1((\mathbf{v}, v_z, \lambda), \varphi_z) = 0 ,$$

$$\alpha_2((\mathbf{v}, v_z, p), \varphi) = 0 ,$$

$$\alpha_3((\mathbf{v}, v_z), \mu) = 0 ,$$

$$\alpha_4((\mathbf{g}, v_z), q) = 0 .$$

## 2.6 Algorithme de résolution

On se donne un écoulement d'entrée  $(\mathbf{v}^0, v_z^0)$  défini sur  $\Omega_0$ . Pour  $n \geq 1$ , le profil de vitesses du plan  $\Omega_n$  se déduit de celui du plan  $\Omega_{n-1}$  selon l'algorithme suivant :

– Calcul de caractéristique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi^n(x, y; \tau)}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{v}^{n-1}(\chi^n; \tau)}{v_z^{n-1}(\chi^n; \tau)} , \\ \chi^n(x, y; 0) = (x, y) . \end{array} \right.$$

– Calcul de  $v_z^n$  par la résolution dans  $V_z(\Omega_n)$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} v_z^{n-1} v_z^n \varphi_z + \nu \delta z \int_{\Omega} \nabla v_z^n \nabla \varphi_z = \int_{\Omega} v_z^{n-1} (v_z^{n-1} \circ \chi^n) \varphi_z - \delta z \lambda^n \int_{\Omega} \varphi_z, \forall \varphi_z \in V_z(\Omega) , \\ \int_{\Omega} v_z^n = \int_{\Omega} v_z^{n-1} - \delta z \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{n} . \end{array} \right.$$

– Relèvement de  $\mathbf{v}^n$ , par le calcul de  $\hat{\mathbf{v}}^n \in \mathbf{V}^{\mathbf{g}}(\Omega)$  vérifiant

$$\forall \varphi_p \in V_p(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^n \varphi_p = \int_{\Omega} \frac{v_z^{n-1} - v_z^n}{\delta z} \varphi_p .$$

– Calcul de  $\mathbf{v}^n$  :

$$\mathbf{v}^n = \bar{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{v}}^n ,$$

où  $\bar{\mathbf{v}}^n \in \mathbf{V}_{div}(\Omega)$  vérifie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_z^{n-1} \bar{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla \varphi + \nu \delta z \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla \varphi = \\ \int_{\Omega} v_z^{n-1} (\mathbf{v}^{n-1} \circ \chi^n) \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega} v_z^{n-1} \hat{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla \varphi - \nu \delta z \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla \varphi, \\ \forall \varphi \in \mathbf{V}_{div}(\Omega) . \end{aligned}$$

– Calcul optionnel de la pression :

$$\int_{\Omega} p^n \nabla \cdot \phi = \frac{1}{\delta z} \int_{\Omega} v_z^{n-1} (\mathbf{v}^{n-1} \circ \chi^n \cdot \phi - \mathbf{v}^n \cdot \phi) - \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^n \cdot \nabla \phi , \\ \forall \phi \in \mathbf{V}(\Omega) .$$

La pression tridimensionnelle est alors donnée à une constante près par

$$p_{totale}^n = p^n(x, y) + \Lambda^n(z), \text{ avec } \Lambda^n(z) = \lambda^n(z) .$$

## 2.7 Validation de PNS

### 1. Gradient longitudinal de pression

Par hypothèse, dans PNS, le gradient longitudinal de pression  $\partial_z p$  est supposé invariant selon  $x$  et  $y$ . Cette hypothèse est validée par une méthode de point fixe.

Sur le plan  $\Omega_n$ , on note  $P_n(x, y)$  la pression corrigée grâce à l'algorithme suivant :

– Initialisation du calcul de validation

$$P_1(x, y) = p_1(x, y) \text{ issu du premier plan de calcul PNS.}$$

– Passage de  $P_{n-1}(x, y)$  à  $P_n(x, y)$ : méthode de point fixe

– Initialisation :

$$P_n^o(x, y) = p_n(x, y) \text{ issu d'un calcul de PNS.}$$

– Passage de  $P_n^{m-1}(x, y)$  à  $P_n^m(x, y)$ :

$P_n^m(x, y)$  est la pression issue d'un calcul PNS modifié, où

$$\frac{P_n^{m-1}(x, y) - P_{n-1}(x, y)}{\delta z}$$

dépendant de  $x$  et de  $y$  est injecté en second membre du calcul de  $v_z^n$ .

– Convergence de  $P_n^m(x, y)$  vers  $P_n(x, y)$  atteinte lorsque

$$\sup_{x, y} |P_n^m(x, y) - P_n^{m-1}(x, y)| < \varepsilon ,$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre fixé.

Résultat : une fois la convergence sur chaque plan  $\Omega_n$  atteinte, les variables physiques ont subi une variation très faible (de l'ordre de  $10^{-4}$  en valeur relative) ; l'hypothèse est donc maintenue.

## 2. Coefficient de frottement ( $C_f$ ) de la plaque plane

Par définition,  $C_f = -\nu(\partial_x v_z)_{x=0} = -\nu \partial_n v_z|_{\Gamma_1}$ .

Ce terme peut être calculé à partir de la formulation variationnelle de PNS. En effet, dans l'équation de conservation de quantité de mouvement pour  $v_z$ , le terme de diffusion intégré contre une fonction-test  $\varphi$  s'écrit :

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta v_z \varphi = \nu \int_{\Omega} \nabla v_z \nabla \varphi - \nu \int_{\partial\Omega} \partial_n v_z \varphi .$$

Dans la formulation variationnelle de PNS, l'intégrale sur  $\partial\Omega$  disparaît car les fonctions tests considérées s'annulent sur  $\partial\Omega$ .

Mais si  $\varphi = 0$  sur  $\partial\Omega_n \setminus \Gamma_1^n$  et  $\varphi = 1$  sur  $\Gamma_1^n$ , alors :

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Gamma_1^n} \partial_x v_z^n &= -\nu \int_{\Gamma_1^n} \partial_n v_z^n \varphi \\ &= -\frac{1}{\delta z} \int_{\Omega_n} v_z^{n-1} v_z^n \varphi - \nu \int_{\Omega_n} \nabla v_z^n \nabla \varphi + \int_{\Omega_n} v_z^{n-1} [v_z^{n-1} \sigma \chi^{n-1}] \varphi - \lambda^n \varphi . \end{aligned}$$



On calcule ainsi pour chaque plan  $\Omega_n$  la moyenne du  $C_f$  sur le segment  $\Gamma_1$ .

Le calcul est effectué pour un écoulement de Blasius, pour lequel le  $C_f$  est connu analytiquement :

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} , \text{ où } Re_x = \frac{U.x}{\nu} = Re.x .$$

Les  $C_f$  théorique, et issu du calcul PNS, sont représentés sur la figure 3. Les deux courbes ont une bonne concordance, sauf pour les premiers plans du calcul PNS. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'initialisation de l'écoulement de Blasius sur  $\Omega_0$  impose une vitesse verticale  $v_x$  nulle, ce qui n'est pas le cas dans l'écoulement physique de Blasius : au bout de quelques plans, la vitesse verticale retrouve des valeurs plus réalistes.

### 3 L'état adjoint

#### 3.1 Lagrangien, cadre général

Cette partie est consacrée à des résultats classiques d'optimisation que l'on peut trouver dans les ouvrages de Céa [3] ou Larrouturou-Lions [8]. Considérons le problème général de contrôle optimal ( $\mathcal{P}_0$ ) :

Trouver le contrôle  $g$  minimisant le coût  $J(g, \mathcal{V})$  sous la contrainte

$$\mathcal{A}(g, \mathcal{V}) = 0.$$

**Définition 2** - On appelle **Lagrangien** du problème ( $\mathcal{P}_0$ ) la quantité :

$$\mathcal{L}(g, \mathcal{V}, p) = J(g, \mathcal{V}) + \langle p, \mathcal{A}(g, \mathcal{V}) \rangle ,$$

et on appelle **variable adjointe** la variable  $p$ .

**Proposition 1** - Une condition nécessaire pour que  $g$  soit solution du problème ( $\mathcal{P}_0$ ) est qu'il existe un couple  $(\mathcal{V}, p)$  tel que  $(g, \mathcal{V}, p)$  soit point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$ .

*Démonstration* : Une condition nécessaire pour que  $g$  soit solution de ( $\mathcal{P}_0$ ) est que

$$\frac{dJ}{dg}(g, \mathcal{V}) = 0 .$$

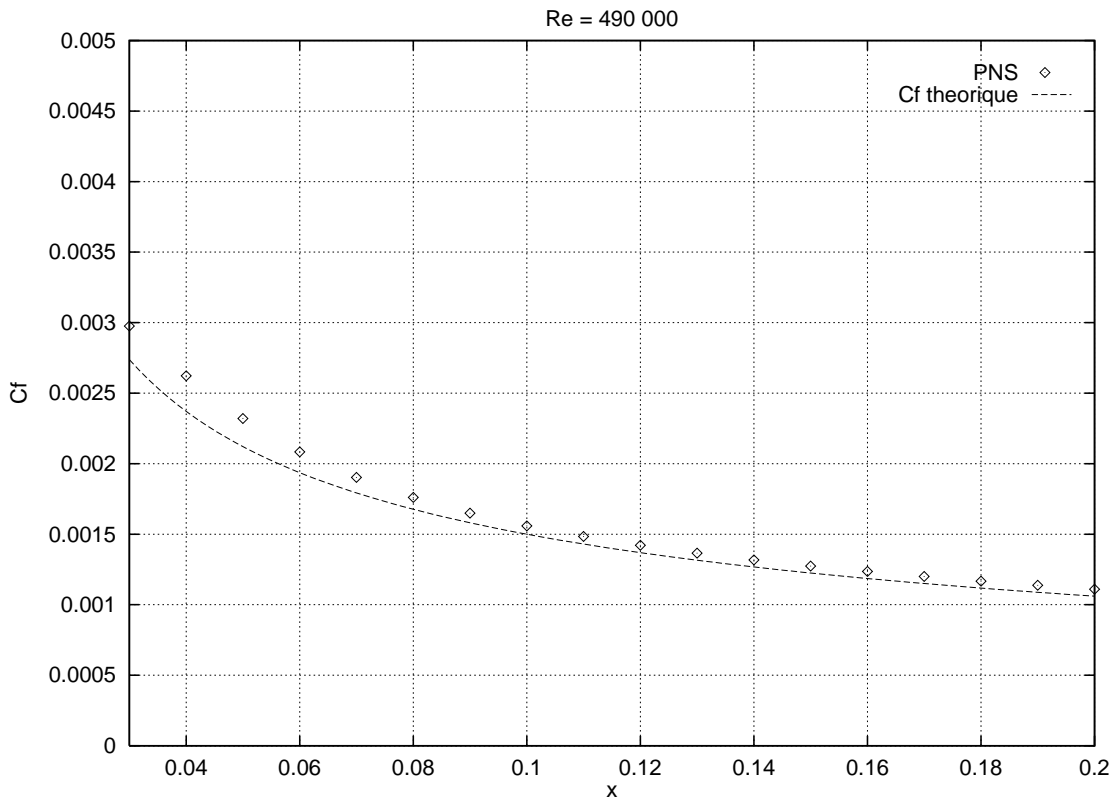


FIG. 3 -  $C_f$  calculé par PNS, et  $C_f$  théorique pour un écoulement de Blasius à  $Re = 400000$ , avec un intervalle  $\delta z = 10^{-2}$  entre deux plans successifs.

Montrons que cette condition équivaut à :

$$\exists (\mathcal{V}, p), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{V}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = 0 .$$

Soit  $\mathcal{V}$  vérifiant  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0$  , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) = 0 , \quad (11)$$

et soit  $p$  vérifiant  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{V}} = 0$  , c'est-à-dire

$$\left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathcal{V}} \right)^t p = - \frac{\partial J}{\partial \mathcal{V}} . \quad (12)$$

On a  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) : + \langle p, \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) \rangle$  .

Or, par différentiation de (11),

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) = - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathcal{V}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{g}} ,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) - \langle p, \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathcal{V}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{g}} \rangle \\ &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) + \langle \frac{\partial J}{\partial \mathcal{V}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}), \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{g}} \rangle \text{ par (12)} \\ &= \frac{dJ}{d\mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) , \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

On a de plus démontré le résultat important suivant :

**Proposition 2** - Si  $\mathcal{L}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = J(\mathbf{g}, \mathcal{V}) + \langle p, \mathcal{A}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) \rangle$  , et si  $\mathbf{g}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $p$  vérifient

$$\mathcal{A}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) = 0, \text{ et } \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathcal{V}} \right)^t p = - \frac{\partial J}{\partial \mathcal{V}} ,$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}, p) = \frac{dJ}{d\mathbf{g}}(\mathbf{g}, \mathcal{V}) .$$

### 3.2 Application au problème d'optimisation

Le problème d'optimisation  $(\mathcal{P}_1)$  à résoudre est le suivant :

Trouver le contrôle frontière  $g$  tel que :

le coût  $J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_N} |\nabla \wedge \mathbf{v}|^2$  soit minimum,  
 $\mathbf{v}$  étant la vitesse transversale de l'écoulement régi par les équations de PNS, avec contrôle frontière normal sur  $\Gamma_1$  égal à  $g$ .

**Définition 3** - Le Lagrangien du problème  $(\mathcal{P}_1)$  est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g, (\mathbf{v}, v_z, \lambda, p), (\varphi, \varphi_z, \mu, q)) &= J(\mathbf{v}) \\ &- \alpha_1((\mathbf{v}, v_z, \lambda), \varphi_z) - \alpha_2((\mathbf{v}, v_z, p), \varphi) \\ &- \alpha_3((\mathbf{v}, v_z), \mu) - \alpha_4((g, v_z), q) , \end{aligned}$$

où les  $\alpha_i$  sont définis à la section 2.5.

**Proposition 3** - Une condition nécessaire pour que  $g$  soit solution de  $(\mathcal{P}_1)$  est qu'il existe  $((\mathbf{v}, v_z, \lambda, p), (\varphi, \varphi_z, \mu, q))$  tel que  $(g, (\mathbf{v}, v_z, \lambda, p), (\varphi, \varphi_z, \mu, q))$  soit point-selle du Lagrangien  $\mathcal{L}$  défini ci-dessus.

*Démonstration*: Application directe de la Proposition 1 au problème  $(\mathcal{P}_1)$ .  $\square$

**Interprétation.** La recherche d'un contrôle optimal passe donc par la résolution de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 ,$$

qui n'est autre que le système d'équations de PNS en formulation variationnelle vu à la section 2.5,

et de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0 ,$$

c'est-à-dire le problème adjoint, que nous allons expliciter dans la prochaine section.

**Remarque.** Le gradient du coût, que l'on cherche à annuler, est donné par

$$\frac{dJ}{dg}(\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g}(g, (\mathbf{v}, v_z, \lambda, p), (\varphi, \varphi_z, \mu, q)) ,$$

comme le montre la Proposition 2.

### 3.3 Ecriture du système adjoint

**Notation.** Pour alléger l'écriture un peu lourde du système adjoint, les variables prises aux pieds de caractéristiques sont notées avec un chapeau ; typiquement,  $\delta \hat{v}_z^n = \delta v_z^n \circ \chi$ .

**Proposition 4** - *Le problème adjoint de  $(\mathcal{P}_1)$  s'écrit :*

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , trouver  $(\varphi^n, \varphi_z^n) \in V(\Omega_n) \times V_z(\Omega_n)$  vérifiant les conditions aux limites (3) et (4), et  $(\mu^n, q^n) \in V_p(\Omega_n) \times \mathbb{R}$ , tels que :

pour tout  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} (v_z^{n-1} \varphi_z^n + q^n - q^{n+1}) \delta v_z + \nu \delta z \nabla \varphi_z^n \nabla \delta v_z &= \\ \int_{\Omega_n} v_z^n \varphi_z^{n+1} \delta \hat{v}_z + \left[ (-v_z^{n+1} + \hat{v}_z^n + \frac{\mathbf{v}}{v_z^n} \delta z \nabla \hat{v}_z^n) \varphi_z^{n+1} \right. \\ \left. + \varphi^{n+1} (-\mathbf{v}^{n+1} + \hat{\mathbf{v}}^n + \frac{\mathbf{v}}{v_z^n} \delta z \nabla \hat{\mathbf{v}}^n) + (\mu^{n+1} - \mu^n) \right] \delta v_z, & \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} v_z^{n-1} \varphi^n \delta \mathbf{v} + \nu \delta z \nabla \varphi^n \nabla \delta \mathbf{v} + \delta z \mu^n \nabla \cdot \delta \mathbf{v} &= \\ \int_{\Omega_n} v_z^n \varphi^{n+1} \delta \hat{\mathbf{v}} - \delta z (\nabla \hat{v}_z^n \varphi_z^{n+1} + \nabla \hat{\mathbf{v}}^n \varphi^{n+1}) \delta \mathbf{v}, & \quad (14) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_n} \nabla \cdot \varphi^n \delta p = 0, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega_n} \varphi_z^n \delta \lambda = 0, \quad (16)$$

et pour  $n=N$  :

$$\int_{\Omega_N} (v_z^{N-1} \varphi_z^N + \mu^N + q^N) \delta v_z + \nu \delta z \nabla \varphi_z^N \nabla \delta v_z = 0, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega_N} v_z^{N-1} \varphi^N \delta \mathbf{v} + \nu \delta z \nabla \varphi^N \nabla \delta \mathbf{v} + \delta z \mu^N \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\Omega_N} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}^N) \delta \mathbf{v}, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega_N} \nabla \cdot \varphi^N \delta p = 0, \quad (19)$$

$$\int_{\Omega_N} \varphi_z^N \delta \lambda = 0, \quad (20)$$

où dans chaque plan  $\Omega_n$ ,  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\delta v_z$ ,  $\delta p$ , et  $\delta \lambda$  sont des fonctions-tests de

$$V(\Omega_n), V_z(\Omega_n), V_p(\Omega_n),$$

et  $\mathbb{R}$ , respectivement.

*Démonstration*: Nous allons seulement montrer comment on obtient les équations (13) et (17), le calcul des autres équations étant similaire.

Partons de l'expression du Lagrangien donnée dans la Définition 3.

Posons  $\delta v_z = (\delta v_z^n)_{n=1,N}$ , où les  $\delta v_z^n$  sont des fonctions-tests de  $V_z(\Omega_n)$ .

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v_z = 0$  s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial \alpha_2}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial \alpha_3}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial \alpha_4}{\partial v_z} \delta v_z = 0 .$$

Pour différencier les termes qui font intervenir les pieds de caractéristiques, on introduit l'approximation suivante :

au premier ordre, on a

$$\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{v_z} \delta z ,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial v_z} \delta v_z &= \delta v_z \circ \chi + (\nabla v_z) \circ \chi \frac{\partial \chi}{\partial v_z} \delta v_z \\ &= \delta \hat{v}_z + \nabla \hat{v}_z \frac{\mathbf{v}}{(v_z)^2} \delta v_z , \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial v_z} \delta v_z = \nabla \hat{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{v}}{(v_z)^2} \delta v_z .$$

On est alors en mesure de calculer les  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_z} \delta v_z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v_z} \delta v_z &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left[ \delta v_z^n (v_z^{n+1} - \hat{v}_z^n) + v_z^n (\delta v_z^{n+1} - \delta \hat{v}_z^n - \nabla \hat{v}_z^n \frac{\delta v_z^n}{(v_z^n)^2} \mathbf{v}^n \delta z) \right] \varphi^{n+1} \\ &\quad + \nu \delta z \nabla \delta v_z^{n+1} \nabla \varphi^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega_n} \delta v_z^n \left[ (v_z^{n+1} - \hat{v}_z^n - \frac{\mathbf{v} \delta z}{v_z^n} \nabla \hat{v}_z^n) \varphi^{n+1} + v_z^{n-1} \varphi^n \right] - \delta \hat{v}_z^n v_z^n \varphi^{n+1} \\
&\quad + \nu \delta z \nabla \delta v_z^n \nabla \varphi^n \\
&\quad + \int_{\Omega_N} v_z^{N-1} \varphi^N \delta v_z^N + \nu \delta z \nabla \delta v_z^N \nabla \varphi^N . \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial v_z} \delta v_z &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega_n} \delta v_z^n \left[ \mathbf{v}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}^n - \nabla \hat{\mathbf{v}}^n \frac{\mathbf{v}^n \delta z}{v_z^n} \right] \varphi^{n+1} . \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial v_z} \delta v_z &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega_n} (\delta v_z^{n+1} - \delta v_z^n) \mu^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega_n} \delta v_z^n (\mu^n - \mu^{n+1}) + \int_{\Omega_N} \mu^N \delta v_z^N . \\
\frac{\partial \alpha_4}{\partial v_z} \delta v_z &= \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} \int_{\Omega_n} (\delta v_z^{n+1} - \delta v_z^n) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega_n} \delta v_z^n (q^n - q^{n+1}) + \int_{\Omega_N} \delta v_z^N q^N .
\end{aligned}$$

Il suffit d'écrire que la somme de ces quatre termes est nulle pour toute fonction-test  $\delta v_z$  pour obtenir les équations (13) et (17).  $\square$

### 3.4 Résolution de l'état adjoint

Les variables physiques ainsi que les pieds de caractéristiques sont stockés sur tous les plans  $(\Omega_n)_{n=0,N}$  lors du calcul de l'état direct PNS. Puis la résolution de l'état adjoint se fait de manière rétrograde, du plan de sortie  $N$  au plan 1.

Sur chaque plan, on procède au calcul de  $\varphi$  en résolvant (14) dans la base à divergence nulle afin de tenir compte de (15). Puis on résout (13) pour  $\varphi_z$ , et  $q$  apparaît comme le multiplicateur de la contrainte d'incompressibilité sur  $\varphi_z$  (16). Enfin, le calcul de  $\mu$  se fait, comme pour la pression dans PNS, en résolvant (14) pour des fonctions tests non plus dans  $V_{div}(\Omega)$  mais dans  $V(\Omega)$ .

Le temps nécessaire pour effectuer un calcul PNS de 10 plans, avec évaluation de l'état adjoint, est d'environ 4 minutes sur HP735.

### 3.5 Evaluation du gradient

L'intérêt de l'état adjoint est qu'il permet d'obtenir une expression directe du gradient du coût.

**Proposition 5** - *Le gradient du coût pour le problème  $(\mathcal{P}_1)$  s'écrit :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}} \delta \mathbf{g} = & - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega_n} \left[ \nabla \hat{v}_z^n \varphi_z^{n+1} \delta z + v_z^{n-1} \varphi^n + \delta z \nabla \hat{v}^{n+1} \varphi^{n+1} \right] \delta g^n \\ & - v_z^n \varphi^{n+1} \delta \hat{g}^n + \nu \delta z \nabla \varphi^n \nabla \delta g^n + \delta z \mu^n \nabla \cdot \delta g^n \\ & - \delta z \int_{\Gamma_1^n} \delta g^n q^n . \end{aligned} \quad (21)$$

*Démonstration :* il suffit d'appliquer la technique de la démonstration précédente.  $\square$

**Remarque.** Le passage d'une fonction coût à une autre est très facile avec cette méthode. En effet, tant que  $J$  reste une fonction de la seule variable  $\mathbf{v}$ , seul le second membre de (18) est modifié.

### 3.6 Validation de l'état adjoint

Les variables adjointes n'ayant aucune signification physique, on ne peut valider l'adjoint que par l'évaluation du gradient du coût (21) faisant intervenir les variables adjointes.

La validation de ce gradient se fait par comparaison avec un gradient obtenu par différences finies centrées.

Au premier ordre, on doit avoir

$$J'(\mathbf{g}) \approx \frac{J(\mathbf{g} + \varepsilon) - J(\mathbf{g} - \varepsilon)}{2\varepsilon} .$$

Pour une validation au second ordre, on remarque que

$$J'(\mathbf{g}) - \frac{J(\mathbf{g} + \varepsilon) - J(\mathbf{g})}{\varepsilon} \approx \varepsilon H(\mathbf{g}) ,$$



où  $H$  est la matrice hessienne.

**Cas-tests étudiés :**

- 1 Profil d'entrée: Poiseuille,  $Re=400\ 000$   
coût: trainée 2D (norme  $L^2$  de  $\nabla \mathbf{v}$  sur le plan de sortie)
- 2 Profil d'entrée: Blasius avec tourbillons contra-rotatifs  
 $Re=400\ 000$   
coût: vorticité 2D (norme  $L^2$  de  $\nabla \wedge \mathbf{v}$  sur le plan de sortie)

Le premier cas-test est validé au second ordre (figure 4), et le second, au premier ordre (figure 5). La limite de cette méthode de validation est que, le calcul de l'adjoint par différences finies n'étant lui-même pas d'une grande exactitude, on ne peut rien conclure sur la précision du calcul du gradient par l'adjoint.

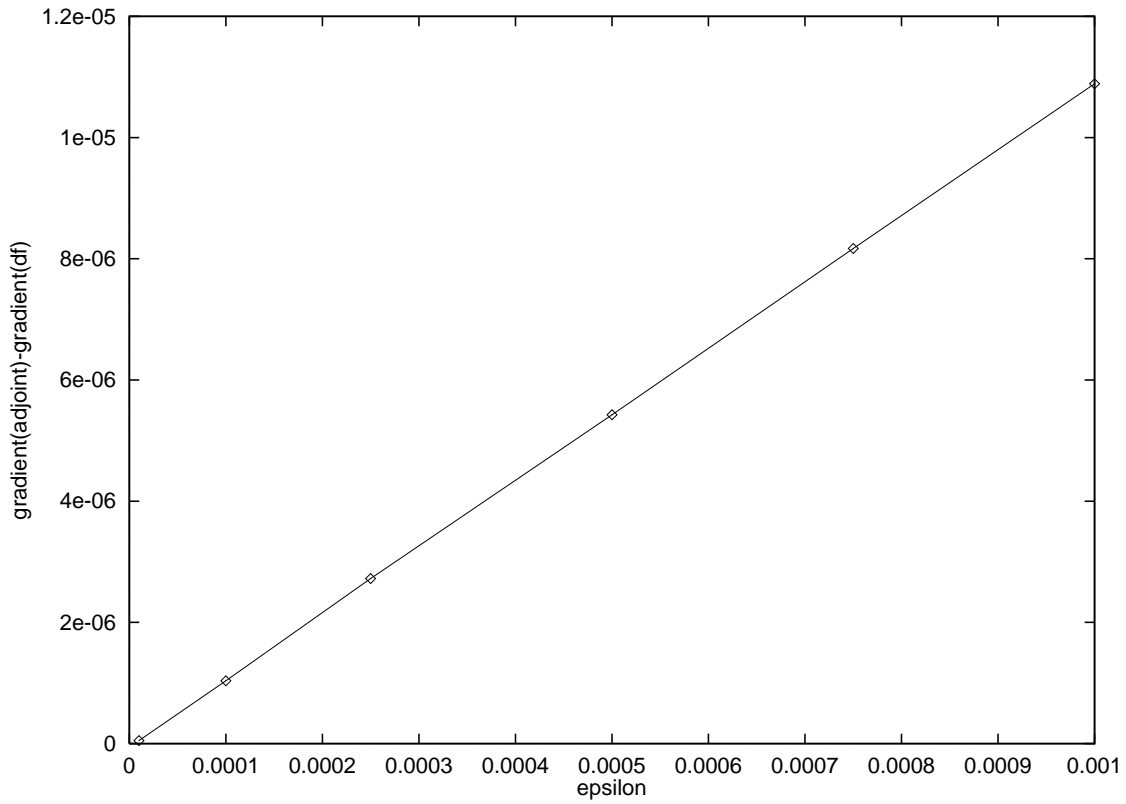


FIG. 4 - Premier cas-test : validation du gradient par l'adjoint au second ordre; on observe bien une variation linéaire en  $\varepsilon$  de  $J'_{adjoint} - \frac{J(\mathbf{g} + \varepsilon) - J(\mathbf{g})}{\varepsilon}$ . Ici,  $\mathbf{g}=0.001$ , et le maximum de  $v_z$  vaut 1.

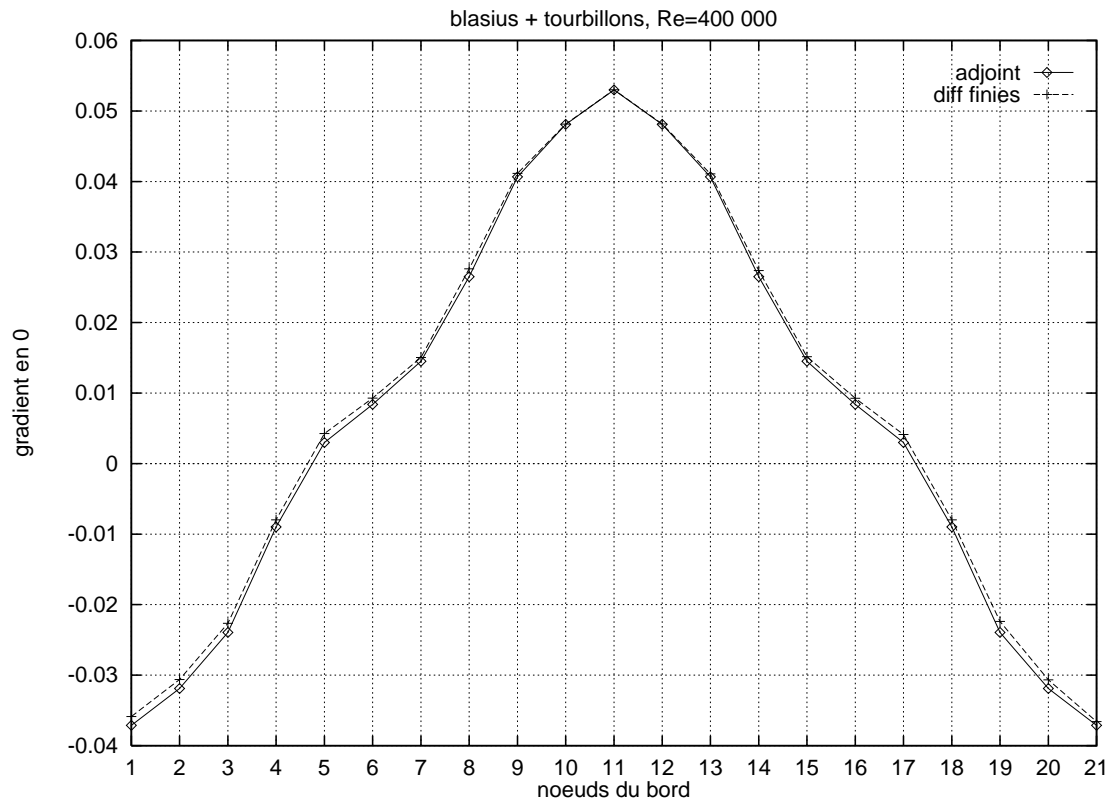


FIG. 5 - *Second cas-test : validation du gradient autour de  $g=0$ , au premier ordre.*

## 4 Le problème de contrôle optimal

### 4.1 Algorithme de point intérieur

**Principe.** L'algorithme de point intérieur de Herskovits [7] permet de résoudre des problèmes de minimisation avec contraintes quelconques :

$$(\mathcal{P}_c) - \text{Minimiser } f(x), \text{ sous la contrainte } g(x) \leq 0.$$

On note  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$  l'ensemble des points admissibles. L'algorithme de point intérieur a la propriété de générer une suite minimisante pour  $f$ , qui reste contenue dans  $\Omega$ . Ceci est particulièrement intéressant dans des cas où la fonction coût ainsi que son gradient sont coûteuses à calculer, ce qui est le cas pour notre problème.

Pour résoudre  $(\mathcal{P}_c)$ , il faut satisfaire les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker du premier ordre, soit :

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda &= 0, \\ G(x)\lambda &= 0, \\ \lambda &\geq 0, \\ g(x) &\leq 0, \end{aligned}$$

où  $G(x)$  est la matrice diagonale formée des  $\{g_i(x), i = 1, n\}$ ; on note  $\Lambda$  la matrice formée des  $\{\lambda_i, i = 1, n\}$ .

Soit  $S^k$ , une matrice symétrique, définie positive, approximation de la matrice hessienne  $H(x, \lambda)$ . Dans une itération de quasi-Newton, la direction de descente  $d^{k+1} = x^{k+1} - x^k$  satisfait le système

$$\begin{aligned} S^k d^{k+1} + \nabla g(x^k)\lambda^{k+1} &= -\nabla f(x^k), \\ \Lambda^k \nabla g^t(x^k)d^{k+1} + G(x^k)\lambda^{k+1} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

On peut montrer que  $d$  est une direction de descente de  $f$ . Par contre,  $d$  n'est pas nécessairement une direction admissible. En effet, d'après l'équation (22), lorsqu'une contrainte tend vers 0,  $d^{k+1}$  tend vers une direction tangente à  $\Omega$ , ce qui va a tendance à faire sortir  $x^{k+1}$  de  $\Omega$ .

Une solution pour éviter ce phénomène est de perturber l'équation (22) :

$$\Lambda^k \nabla g^t(x^k)d^{k+1} + G(x^k)\lambda^{k+1} = -\rho^k \lambda^{k+1}, \tag{23}$$

avec  $\rho^k > 0$ .

On a alors  $\nabla g_i^t(x^k)d^{k+1} < 0$  pour les contraintes actives ( $g_i(x^k) = 0$ ), donc  $d^{k+1}$

est une direction admissible.  $\rho^k$  doit être choisi suffisamment petit pour que, malgré la déflexion,  $d^{k+1}$  reste une direction de descente.

### Description de l'algorithme.

Initialisation :  $x \in \Omega$  et  $S$  matrice symétrique définie positive.

- Etape 1 : Calcul de la direction de descente  $d$  selon le principe exposé ci-dessus
- Etape 2 : Recherche du pas  $t$  satisfaisant le critère d'Armijo, et tel que

$$\begin{aligned} g_i(x + td) &< 0 \quad \text{si } \lambda_i \geq 0, \\ g_i(x + td) &\leq g_i(x) \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

- Etape 3 : Mise à jour :  $x = x + td$ , et définition d'une nouvelle matrice  $S$  symétrique définie positive.  
Retour à l'Etape 1.

### Remarques.

1. Le critère d'Armijo pour la recherche du pas  $t$  est une recherche linéaire "inexacte" dans le sens où on ne cherche pas le  $t$  qui minimise  $f(x + td)$ , mais un  $t$  qui assure une décroissance suffisante de cette quantité.
2. La matrice  $S$  est mise à jour selon la formule de Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno (BFGS):

$$S^{k+1} = S^k + \frac{\gamma\gamma^t}{\delta^t\gamma} - \frac{S^k\delta\delta^t S^k}{\delta^t S^k \delta},$$

où  $\delta = x^{k+1} - x^k$  et  $\gamma = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$ . Si  $S^k$  est définie positive,  $S^{k+1}$  sera définie positive si  $\delta^t\gamma > 0$ .

**Validation de l'algorithme.** Pour un écoulement de Poiseuille (parabolique selon  $x$ , avec condition d'adhérence en haut et en bas du domaine), la minimisation de la traînée transversale a une solution simple ( $g=0$ ), pour laquelle la traînée est nulle. Pour la validation de l'algorithme d'optimisation, on vérifie qu'en partant d'un contrôle initial non nul, l'algorithme fait bien converger  $g$  ainsi que la traînée vers 0.

Le coût est donné par la traînée transversale :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_N} |\nabla \mathbf{v}|^2$$

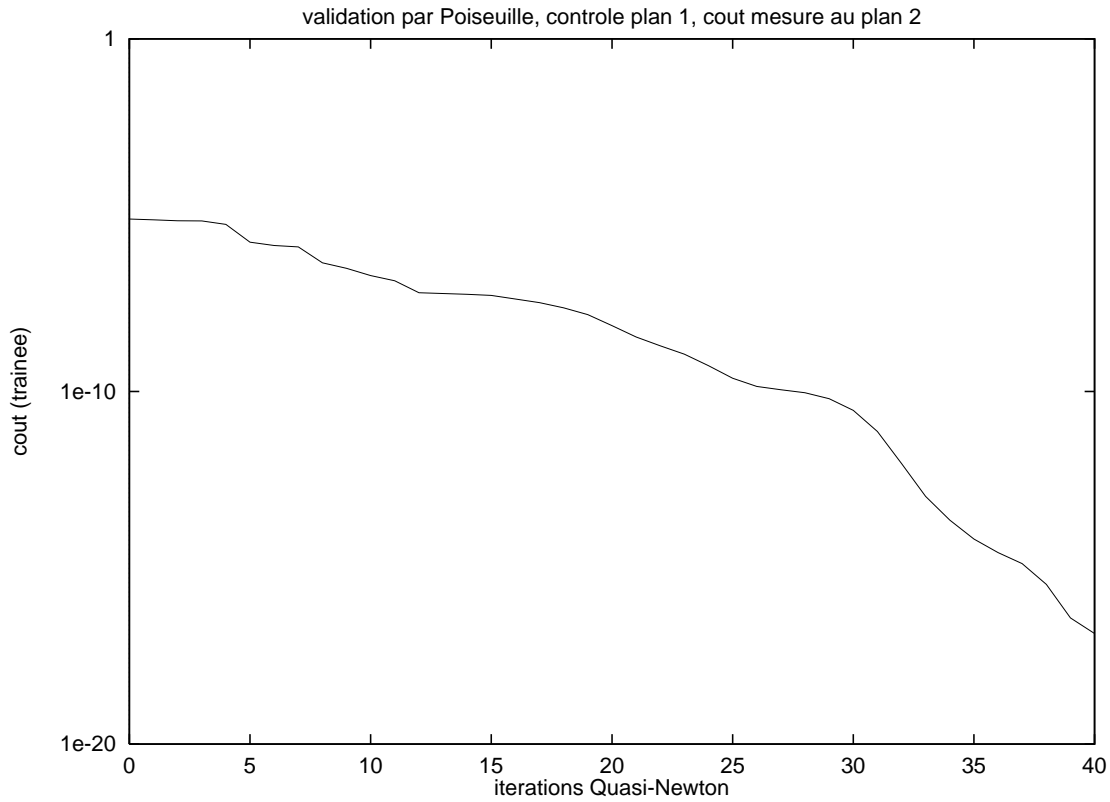


FIG. 6 - Evolution de la traînée lors de la minimisation par l'algorithme de point intérieur. On observe une convergence linéaire vers 0 avec un taux inférieur à 0.8.

Reynolds = 400 000  
 $\delta z$  = 0.0025  
 plan de contrôle : plan no. 1  
 plan de mesure du coût : plan no. 2  
 contrôle initial : 0.001 uniforme

Les résultats de la validation sont représentés sur les figures 6 et 7. Ils montrent une bonne convergence de l'algorithme de minimisation, ce qui permet également une deuxième validation du calcul du gradient par l'adjoint.

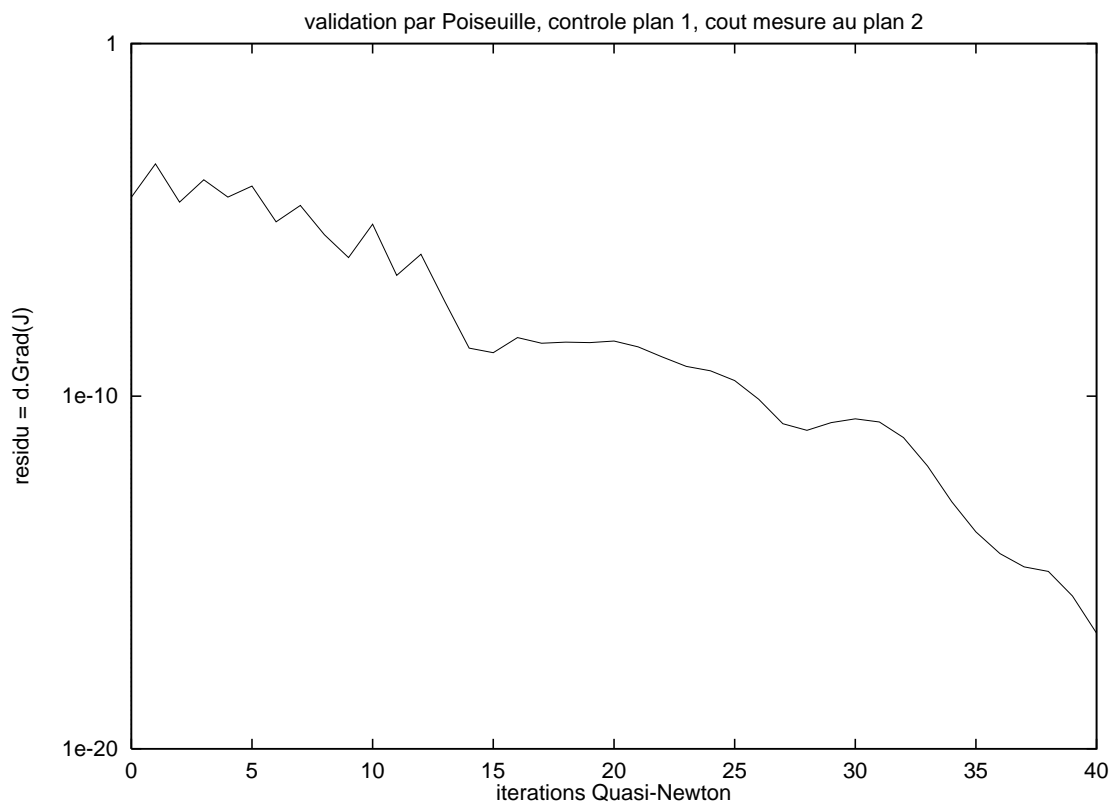


FIG. 7 - Evolution du résidu du calcul d'optimisation. On observe une convergence exponentielle vers 0.

## 4.2 Cas-test étudié

Nous nous intéressons au contrôle d'une paire de vortex contra-rotatifs, le but étant de les faire disparaître au moyen d'un contrôle par soufflage et/ou aspiration.

L'écoulement de base est un Blasius, c'est-à-dire un écoulement de couche limite sur une plaque plane représentée par  $\Gamma_1$ , et avec  $v_z = 1$  sur  $\Gamma_3$ , en haut du domaine. Le Reynolds est de 400 000, avec une longueur de référence égale à 1. On superpose à cet écoulement de base, sur le plan d'entrée, un couple de vortex contra-rotatifs, dont la vitesse maximale est de l'ordre de 0.01 (figure 8). Le plan d'entrée est situé à  $z=0.02$ , et on choisit un espacement entre deux plans successifs suffisamment faible ( $\delta z = 0.0001$ ) pour assurer la persistance des vortex pendant un nombre suffisant de plans, lorsqu'il n'y a pas de contrôle.

Le contrôle frontière est donné par  $\mathbf{g} = (g_x, 0)$  sur  $\Gamma_1$  ( $x$  étant orienté vers le bas,  $g_x > 0$  signifie une aspiration normale, et  $g_x < 0$  un soufflage normal).

La fonction coût doit refléter la présence des vortex. On choisit donc

$$J(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_N} |\nabla \wedge \mathbf{v}|^2$$

c'est-à-dire la norme  $L^2$  de la vorticité transversale.

La discrétisation transversale du domaine est un maillage quadrangulaire formé de 400 éléments  $Q_2$  (40 en  $x$  et 10 en  $y$ ), avec raffinement selon  $x$  au voisinage de  $\Gamma_1$  pour bien discrétiser la couche limite.

## 4.3 Résultats

Les données numériques ayant été fixées, il ne reste plus qu'à déterminer le nombre de plans sur lesquels on va résoudre le problème, en particulier, quels seront ceux sur lesquels on va appliquer un contrôle, et quels seront ceux sur lesquels on va mesurer le coût.

**Premier test.** Le calcul est effectué sur 10 plans  $(\Omega_n)_{n=1,10}$ .

Le contrôle est appliqué sur le bord  $\Gamma_1$  des 9 premiers plans sous la forme d'une condition Dirichlet non homogène sur la vitesse  $v_x$ . Sur chaque plan, les valeurs du contrôle sont imposées sur les 21 nœuds de  $\Gamma_1$  correspondant à la discrétisation  $Q_2$ .



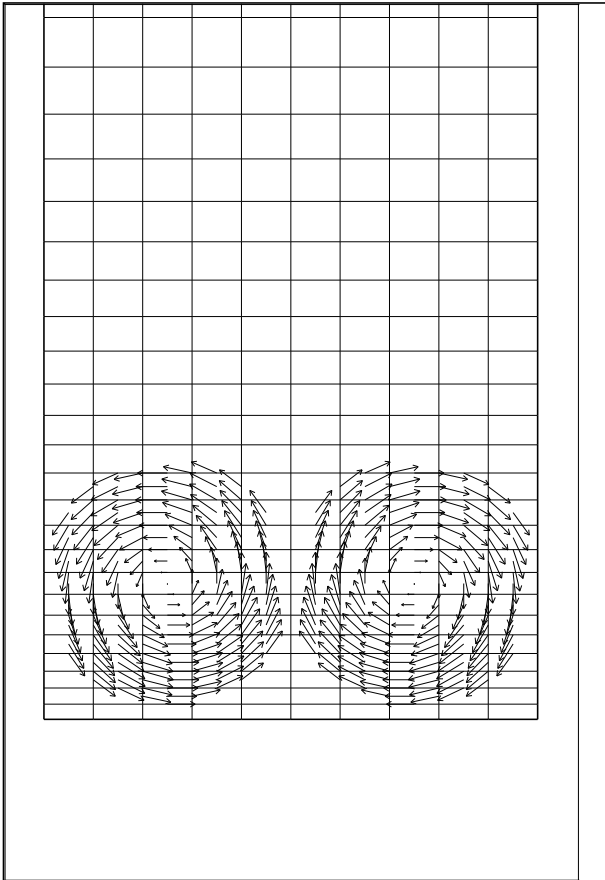


FIG. 8 - *Vitesse transversale sur le plan d'entrée  $\Omega_0$  : les tourbillons contra-rotatifs. Leur intensité maximale est de l'ordre de 1% de la valeur de l'écoulement longitudinal en dehors de la couche limite*

Le nombre total de degrés de liberté est donc  $9 \times 21 = 189$ .

Le coût est mesuré sur le plan de sortie  $\Omega_{10}$ .

Les figures 9 et 10 montrent le comportement du coût et du résidu au cours des itérations quasi-Newton. Le coût décroît de 9,37% au bout de 34 itérations, mais le résidu, après avoir décréu pendant 15 itérations, se met à augmenter. Ceci signifie que l'algorithme d'optimisation ne converge pas vers une solution optimale, dans le sens où  $\nabla J(\mathbf{g})$  ne converge pas vers 0.

Observons les valeurs du contrôle  $\mathbf{g}_{34}$  trouvé par l'algorithme au bout de 34 itérations (figure 21). On constate un comportement très oscillant, qui se renforce lorsqu'on augmente le nombre de degrés de liberté dans chaque plan (figure 22). Une solution pour essayer d'éliminer ce phénomène d'instabilité serait d'introduire dans le problème une régularisation de la variable de contrôle. En ajoutant par exemple au coût un terme faisant intervenir le contrôle

$$J(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_N} |\nabla \wedge \mathbf{v}|^2 + \|\mathbf{g}\|_{H^1} ,$$

$J$  deviendrait coercive par rapport à  $\mathbf{g}$ , ce qui pourrait améliorer le comportement de la solution. Si on applique le contrôle  $\mathbf{g}_{34}$  correspondant à la plus grande diminution du coût, on observe la quasi-disparition des vortex sur le plan  $\Omega_{10}$ , c'est-à-dire l'objectif souhaité. Cependant, en poursuivant le calcul PNS plusieurs plans plus loin, avec toujours le contrôle  $\mathbf{g}_{34}$  sur les 9 premiers plans, on observe sur les plans  $\Omega_{11}$  et  $\Omega_{12}$  la réapparition des vortex qui avaient disparu au plan  $\Omega_{10}$ .

**Second test.** Pour éviter la réapparition des vortex sur le plan  $\Omega_{11}$ , le coût est cette fois la somme des vorticités transversales mesurées sur le plan  $\Omega_{10}$  et sur le plan  $\Omega_{11}$ . Le contrôle est toujours appliqué aux 9 premiers plans, de la même façon que pour le premier test.

L'observation du champ de vitesses montre la disparition des vortex sur les plans  $\Omega_{10}$  et  $\Omega_{11}$ , puis leur réapparition sur les plans  $\Omega_{12}$  et  $\Omega_{13}$ .

Il convient donc de mesurer le coût sur tous les plans où l'on souhaite voir disparaître les vortex.

Les figures 11 et 12 montrent la norme  $L^2$  de la vortacité transversale sur 13 plans de calcul PNS, pour chacun des deux tests effectués. Chaque figure comporte deux courbes, l'une représentant le cas sans contrôle, et l'autre le cas avec contrôle. Les figures 13 à 20 montrent le champ de vitesse transversale dans le cas du second test. Les figures 13 à 15 représentent les plans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_6$  et  $\Omega_9$ , qui font partie des 9 plans sur

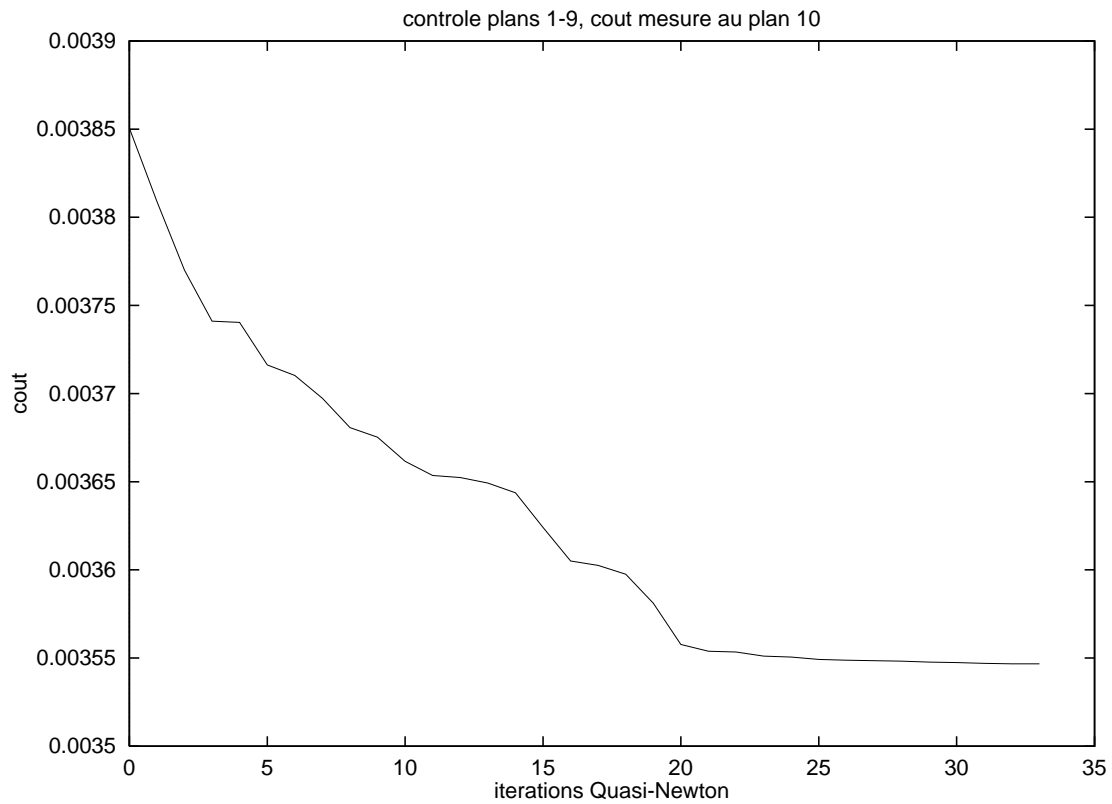


FIG. 9 - Evolution de la vorticité transverse mesurée sur le plan de sortie  $\Omega_{10}$  au cours des itérations quasi-Newton. Le contrôle est imposé sur les plans  $\Omega_1$  à  $\Omega_9$ . On observe une diminution du coût de 9,37% au bout de 34 itérations.

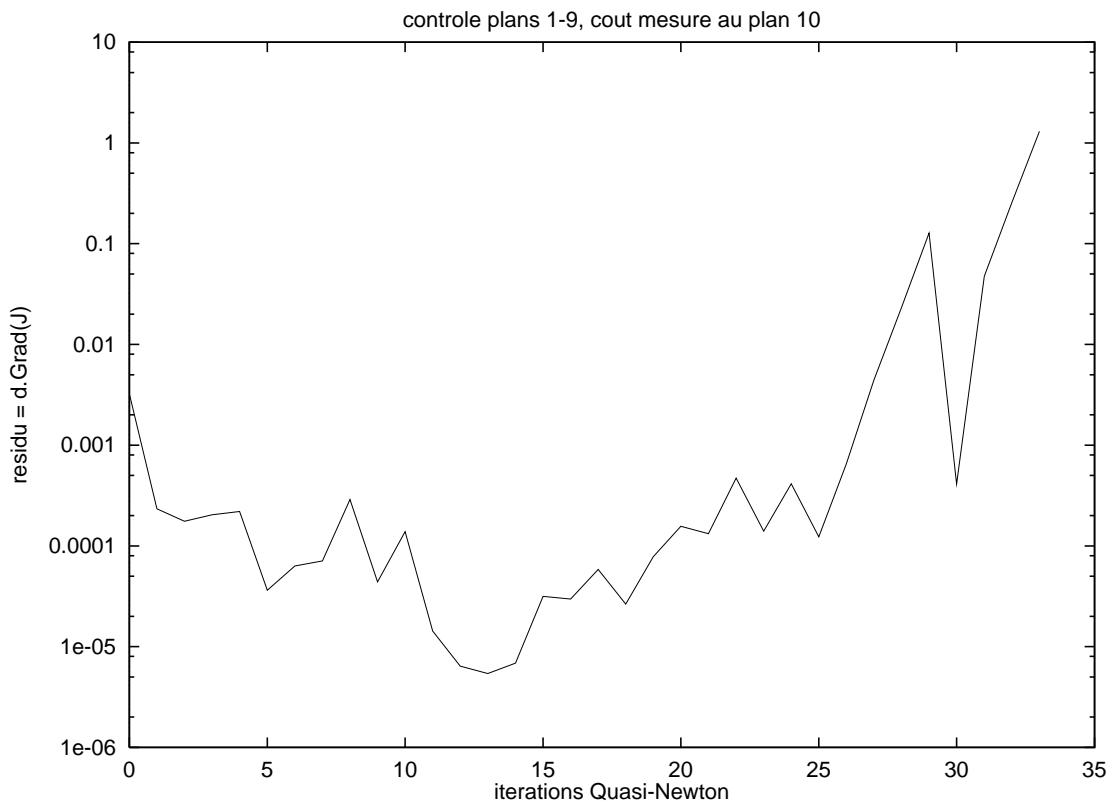


FIG. 10 - Evolution du résidu de l'algorithme d'optimisation. On observe une bonne décroissance pendant les 15 premières itérations, mais ensuite un mauvais comportement.

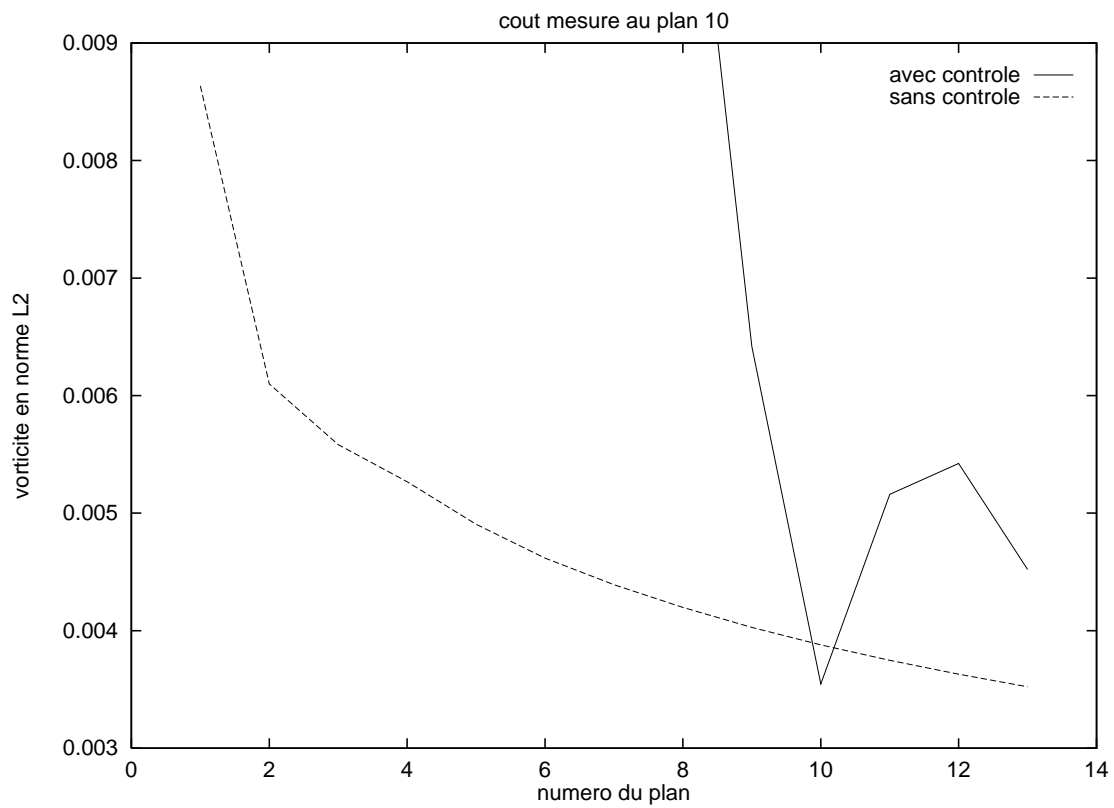


FIG. 11 - Vorticité transverse sur les plans  $\Omega_1$  à  $\Omega_{13}$ . Le coût est mesuré sur le plan  $\Omega_{10}$ , où il subit une réduction par rapport au cas sans contrôle. A partir du plan  $\Omega_{11}$ , le coût devient plus élevé que le cas sans contrôle.

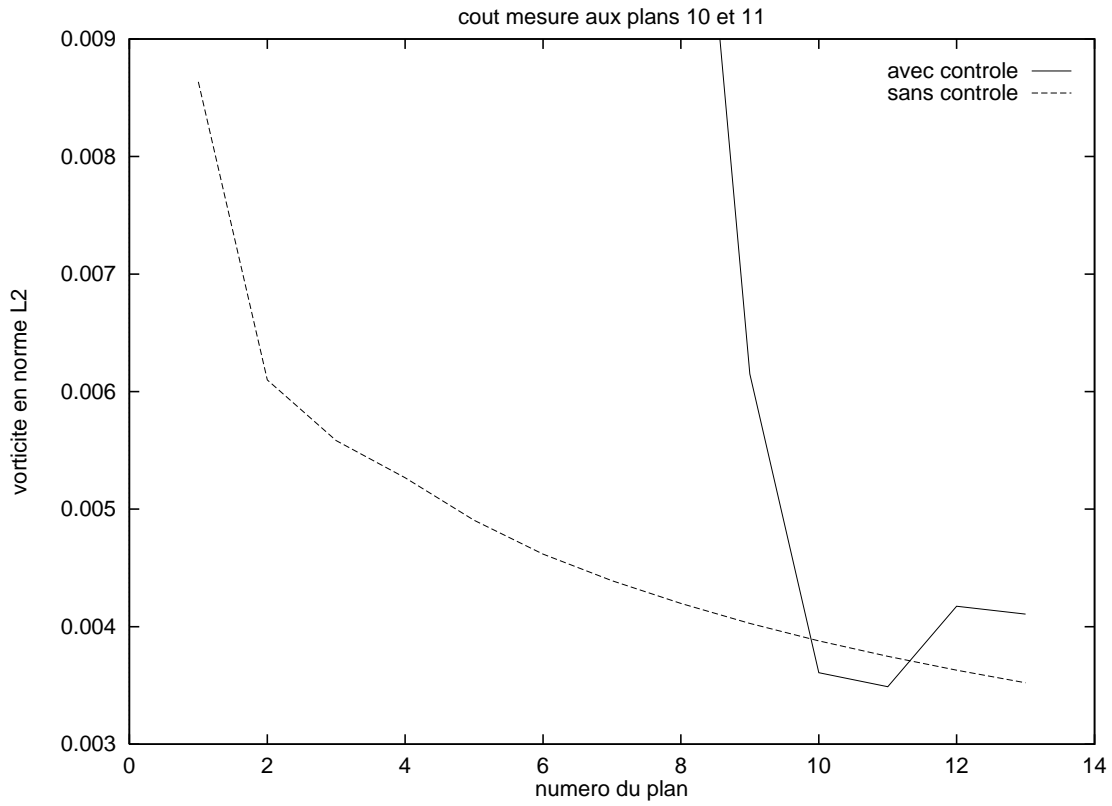


FIG. 12 - Vorticité transverse sur les plans  $\Omega_1$  à  $\Omega_{13}$ . Ici, le coût est mesuré sur les plans  $\Omega_{10}$  et  $\Omega_{11}$ . On observe en effet une réduction du coût sur ces deux plans par rapport au cas sans contrôle.

lesquels est appliqué le contrôle, que l'on aperçoit sur le bord inférieur  $\Gamma_1$  de chacun de ces plans. Les figures 16 et 17 représentent le champ de vitesse transversale sur les plans  $\Omega_{10}$  et  $\Omega_{11}$ , où le coût est mesuré: on observe la quasi-disparition des vortex. La variation de  $v_x$  (vitesse verticale) selon la direction horizontale est pratiquement nulle, mais il subsiste une variation de  $v_y$  selon  $x$ . Pour comparaison, la figure 18 montre le plan  $\Omega_{10}$  dans le cas où aucun contrôle n'est appliqué sur les 9 premiers plans. Enfin, on constate sur les figures 19 et 20 la réapparition des vortex sur les plans  $\Omega_{12}$  et  $\Omega_{13}$ , où le coût n'est plus mesuré.

## 5 Conclusion

La méthode de calcul du gradient par l'adjoint que nous avons présentée ici est une méthode souple qui permet par exemple de changer facilement de fonction coût. Elle est très précise numériquement, car le calcul de l'adjoint est fait à partir des équations de PNS discrétisées, avec une seule approximation dans le calcul de la différentiation des caractéristiques.

Les résultats obtenus pour la minimisation de la vorticité bidimensionnelle d'un couple de vortex contra-rotatifs montrent une diminution certaine du c t, qui se manifeste sur le champ de vitesse transversale par la quasi-disparition des vortex sur les plans où le c t est mesuré. Cependant, le fait que le résidu ne converge pas vers 0 indique que la solution vers laquelle l'algorithme d'optimisation a convergé n'est pas optimale, le contrôle-solution présente une forte irrégularité. Une étude plus poussée du problème de contrôle optimal posé s'avère donc nécessaire, afin de régulariser le contrôle.

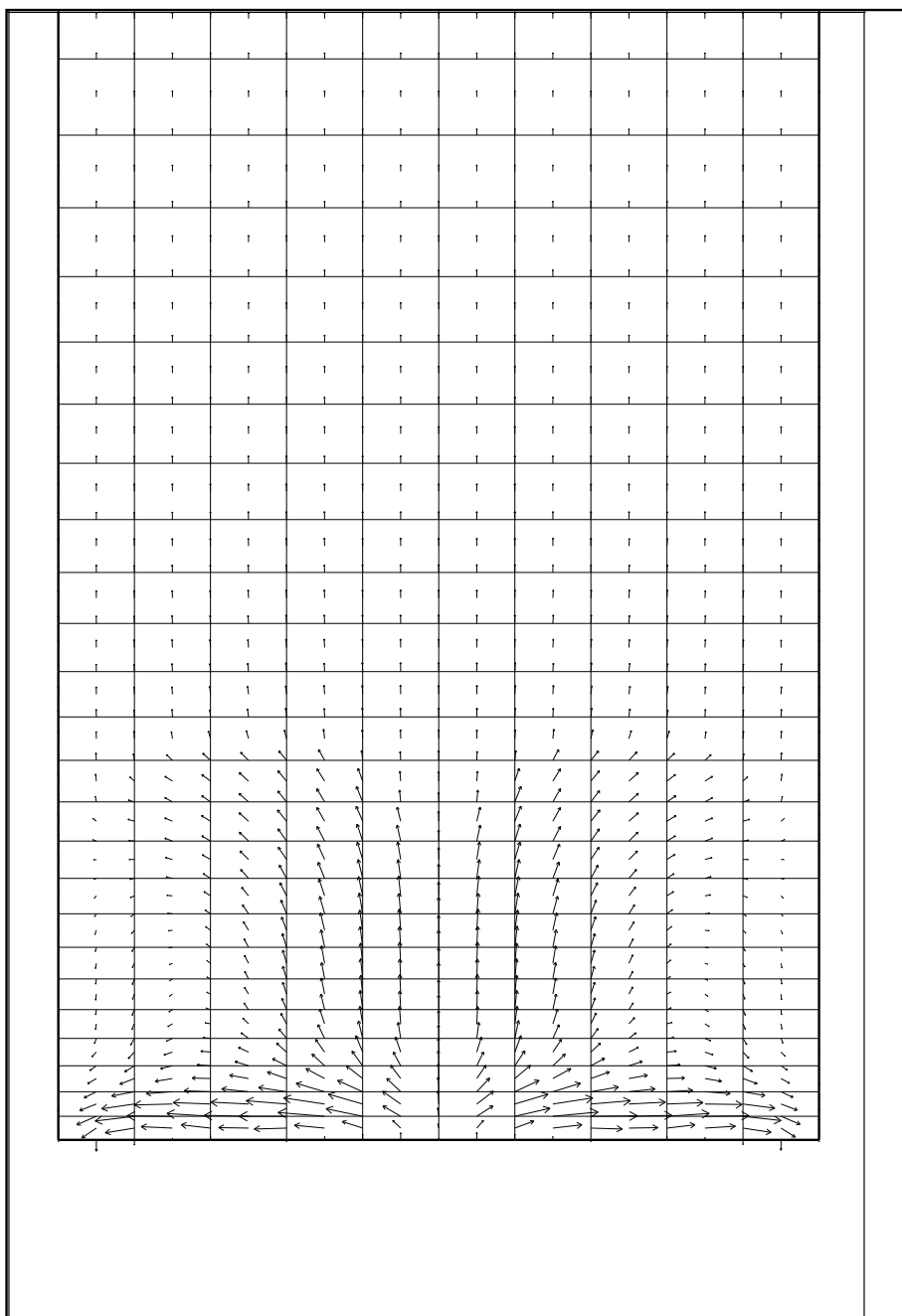
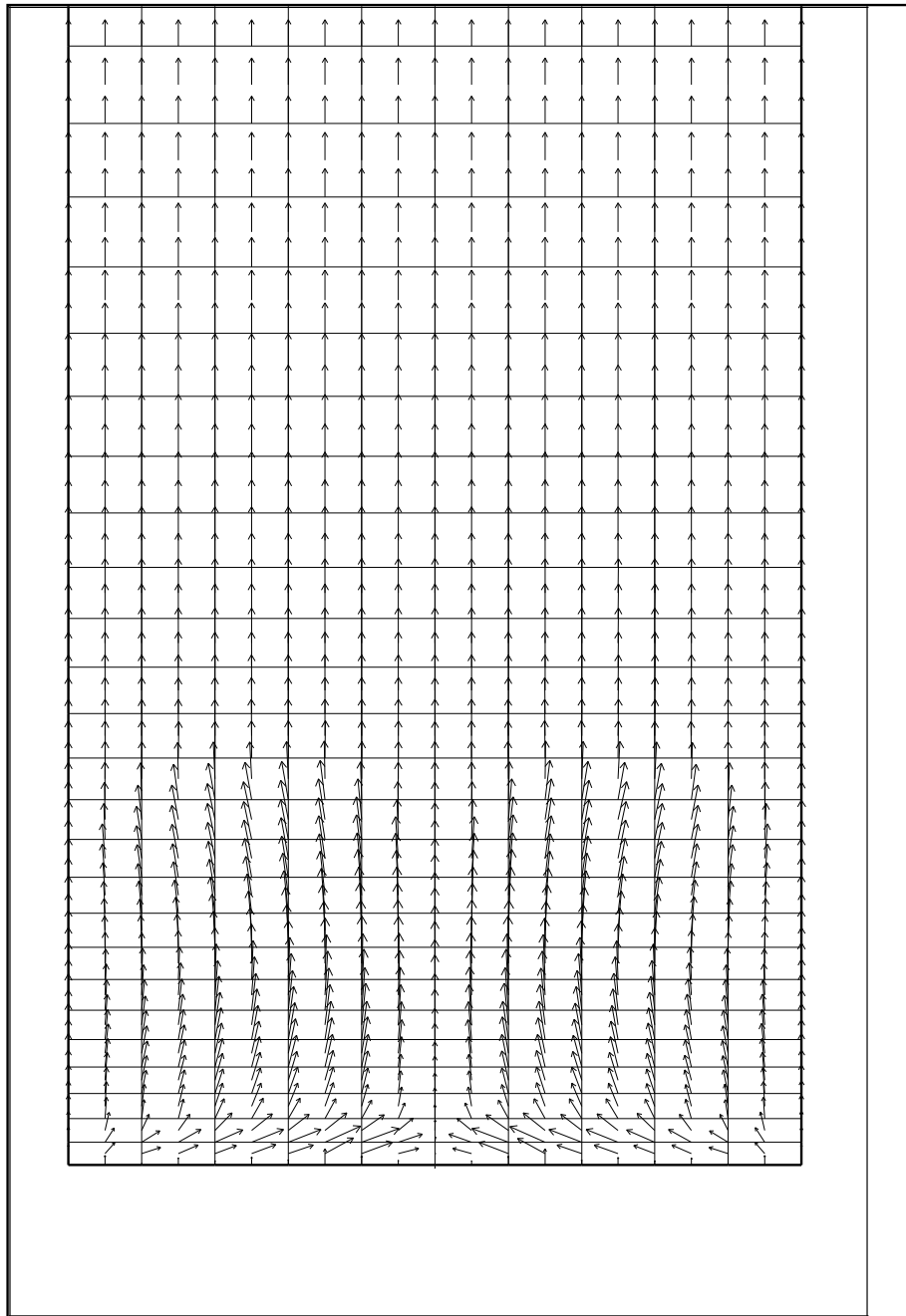


FIG. 13 - *plan de contrôle*  $\Omega_3$



FIG. 14 - *plan de contrôle*  $\Omega_6$

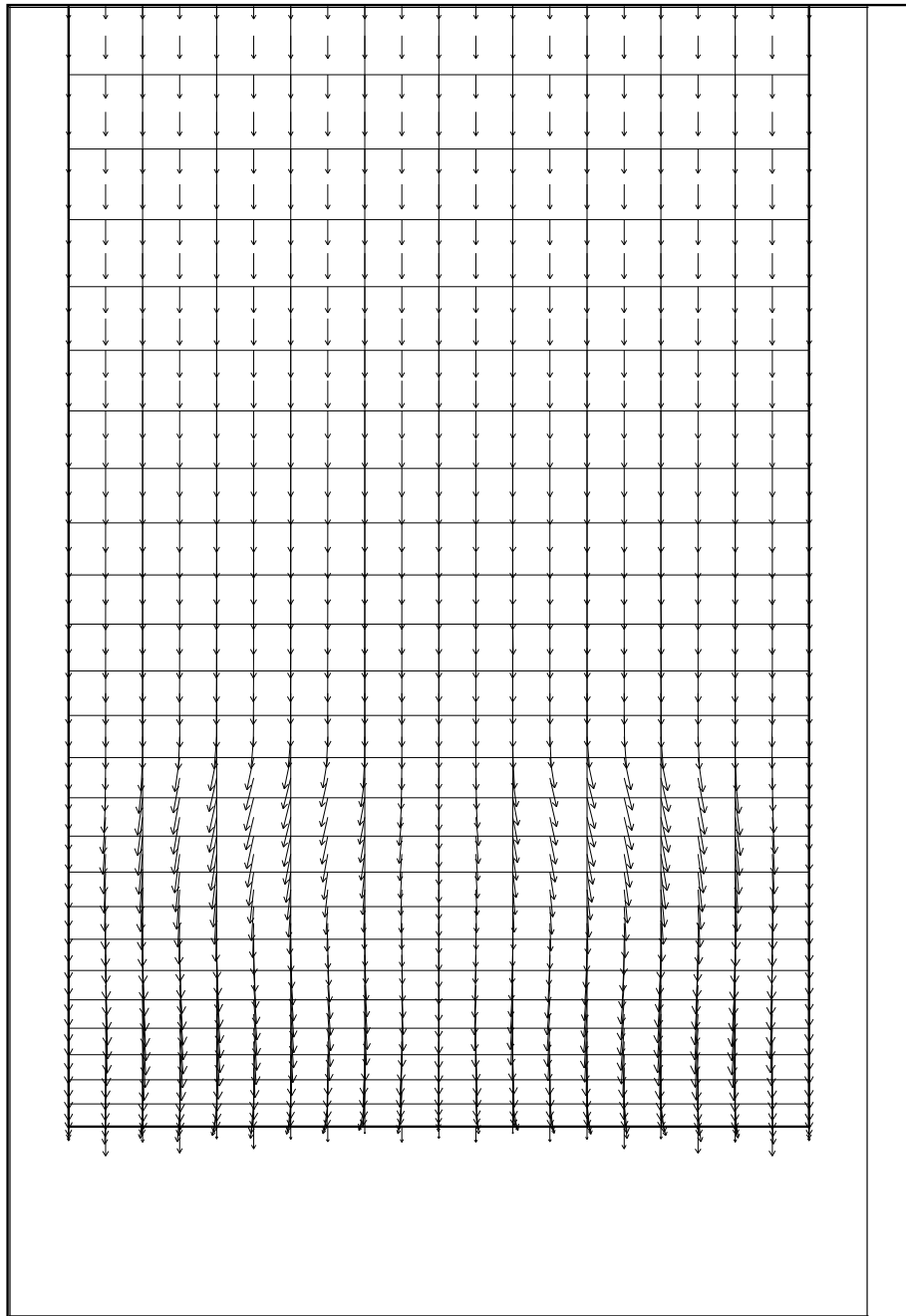
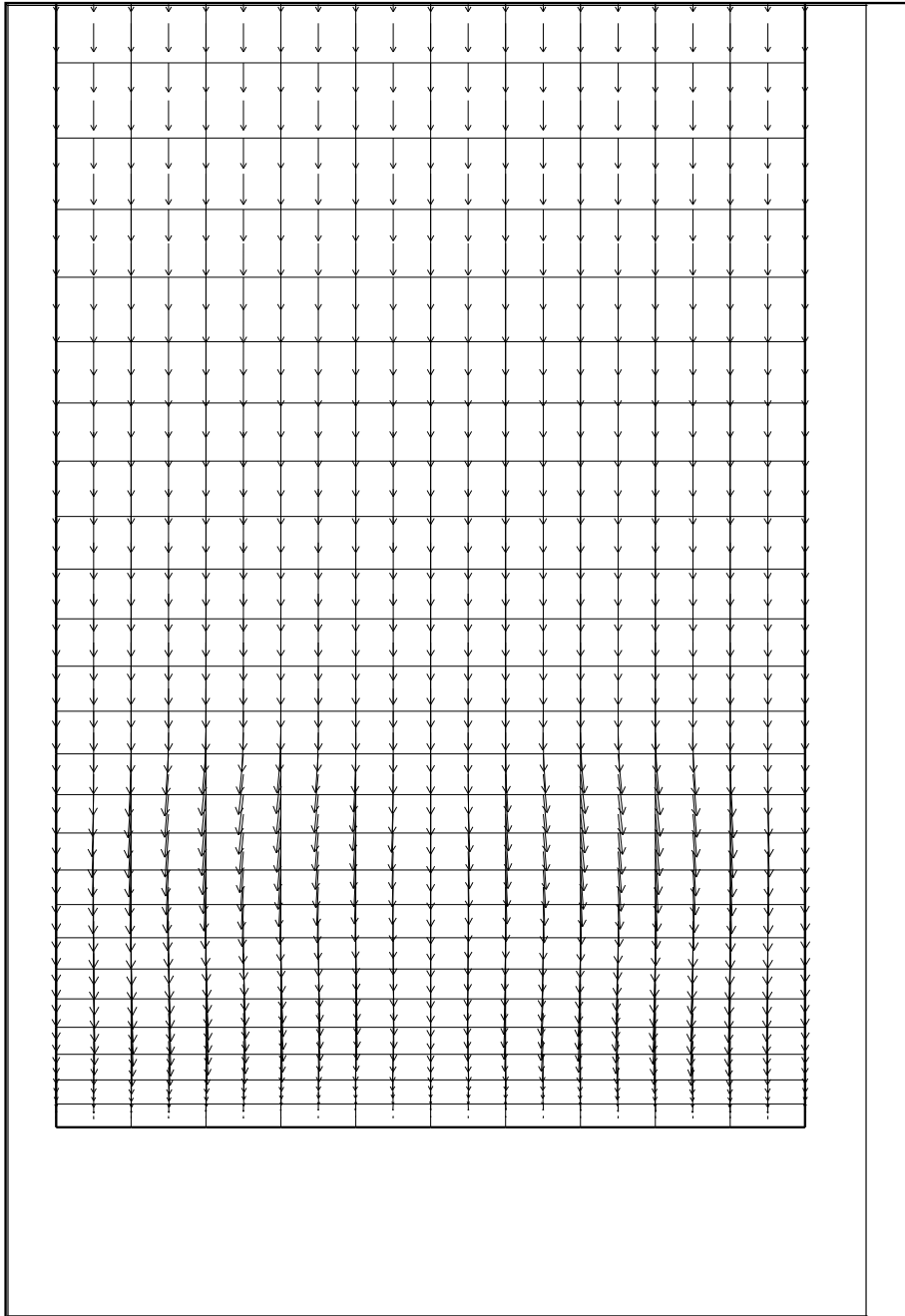


FIG. 15 - *plan de contrôle*  $\Omega_9$

FIG. 16 - *plan  $\Omega_{10}$ , premier plan de mesure du coût*

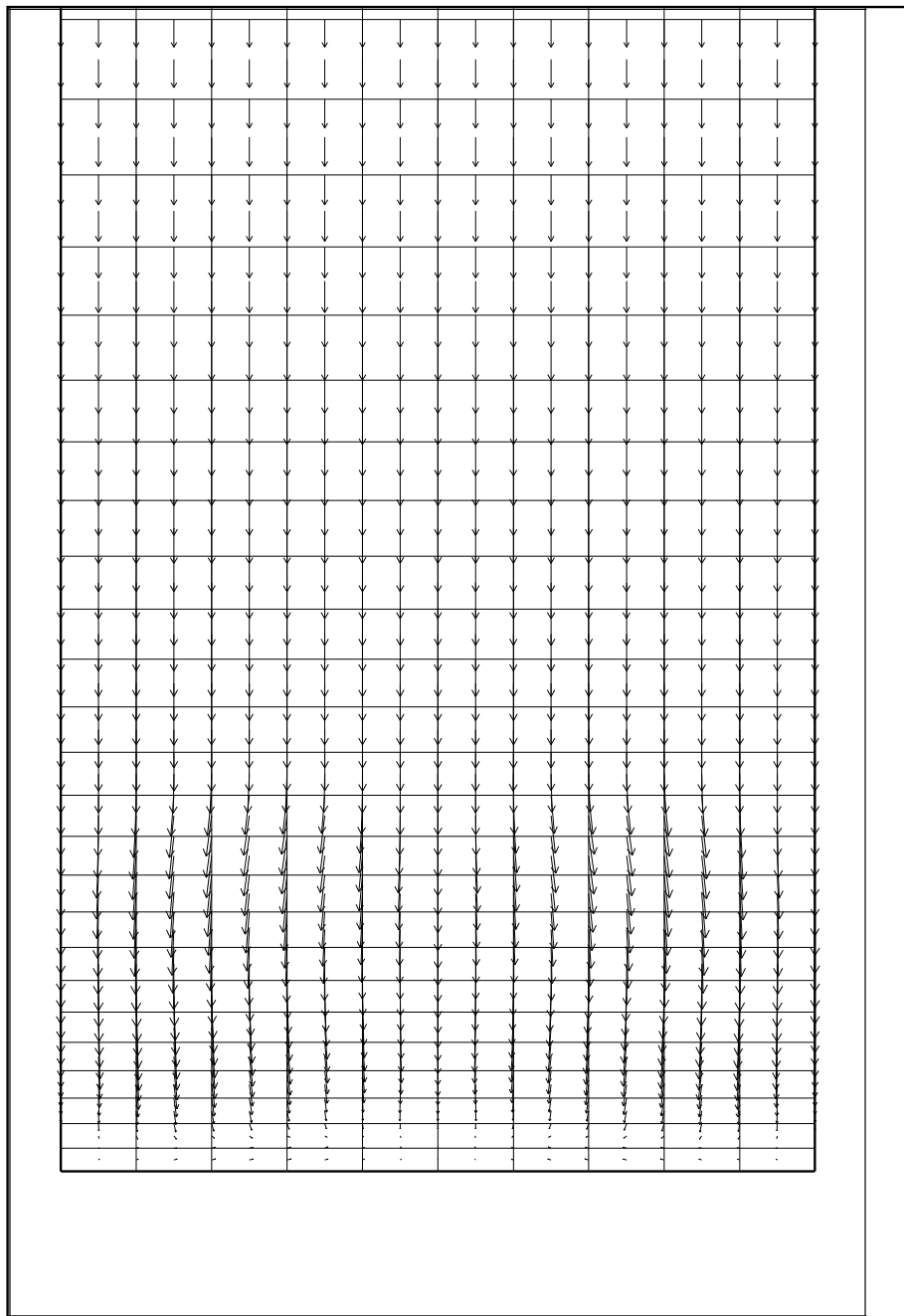
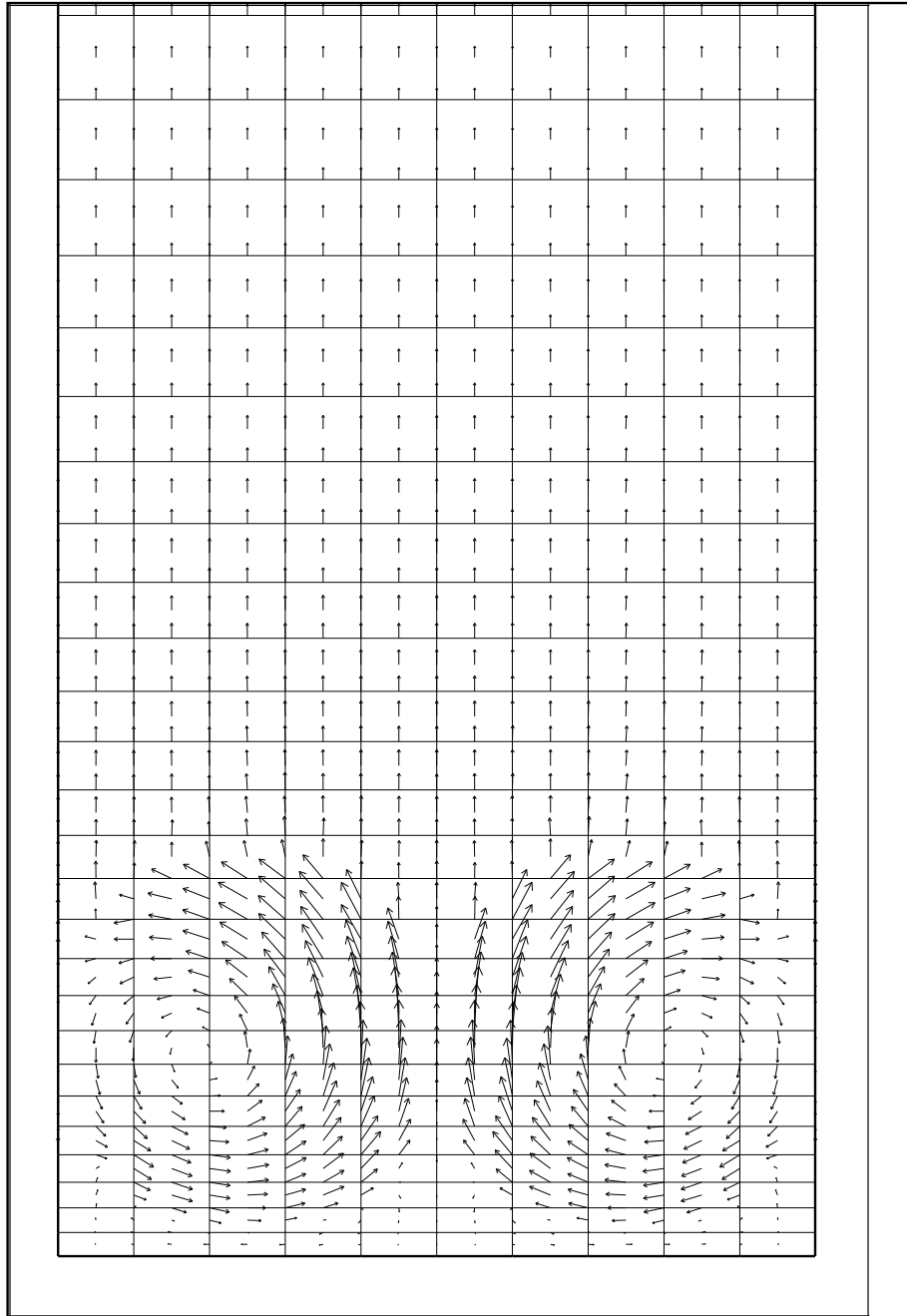


FIG. 17 - *plan  $\Omega_{11}$ , second plan de mesure du coût*

FIG. 18 - *plan  $\Omega_{10}$  sans contrôle*

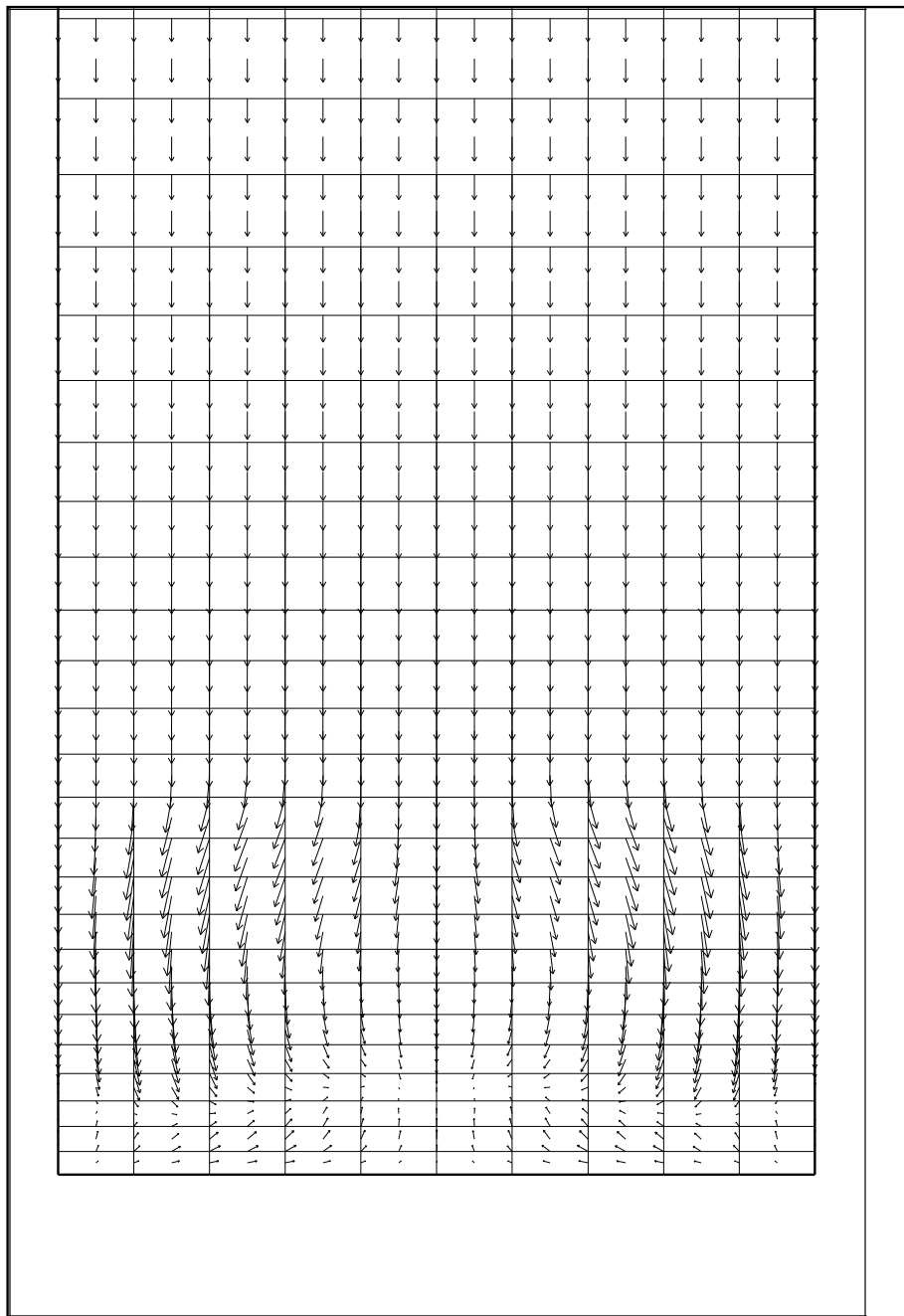
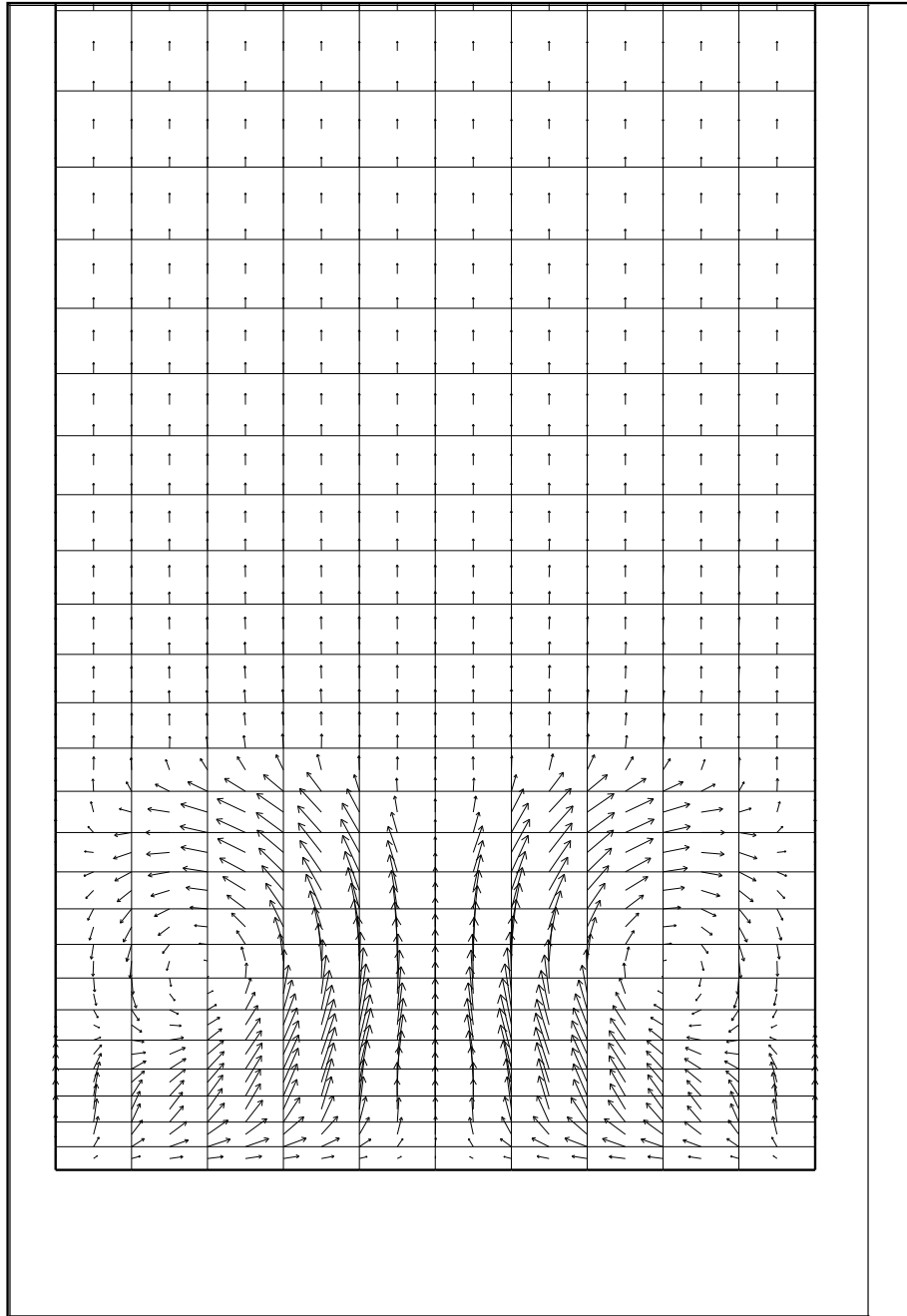


FIG. 19 - *plan  $\Omega_{12}$  : après le contrôle*

FIG. 20 - *plan  $\Omega_{13}$  : après le contrôle*

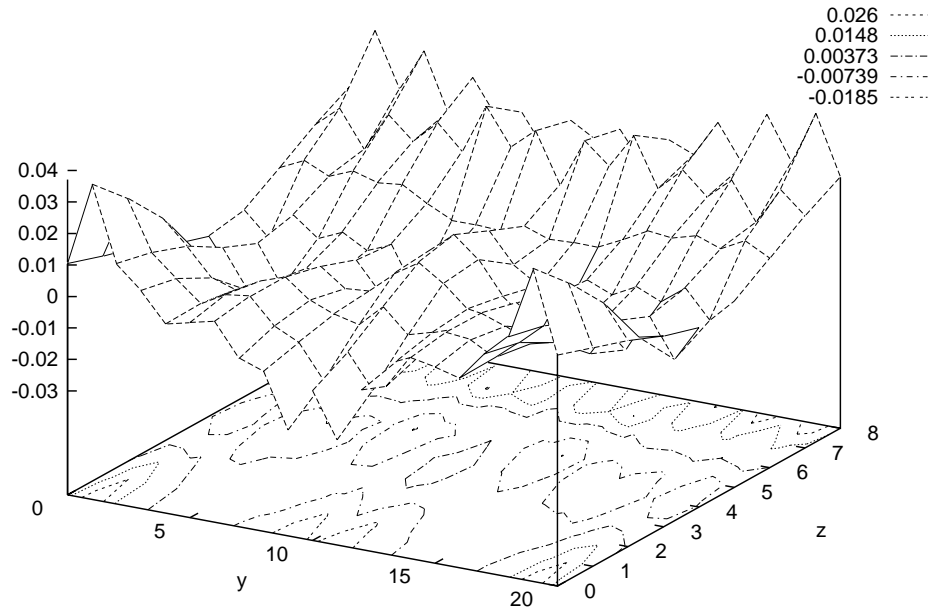


FIG. 21 - Valeurs du contrôle (aspiration  $> 0$ , soufflage  $< 0$ ). L'axe des  $y$  représente les 21 degrés de liberté du contrôle sur chaque plan  $\Omega$ , et l'axe des  $z$  représente les plans de contrôle  $(\Omega_n)_{n=1,9}$ . Le contrôle a en effet 21 degrés de liberté sur chaque plan, qui correspondent aux valeurs de la vitesse normale aux 21 nœuds du bord inférieur ( $\Gamma_1$ ) du domaine.



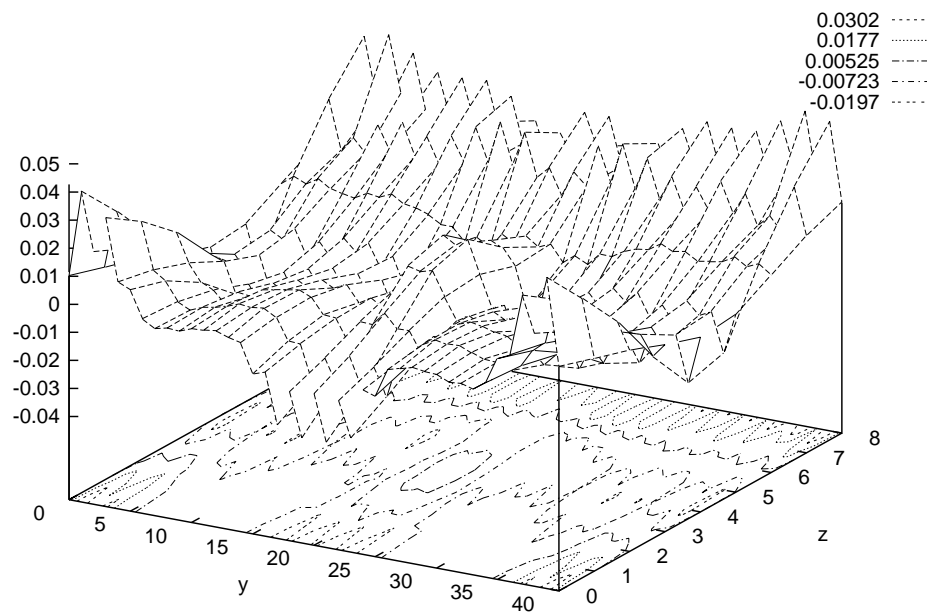


FIG. 22 - Valeurs du contrôle, avec 41 degrés de liberté par plan (maillage transverse deux fois plus fin).

## Références

- [1] ABERGEL, TEMAM (1990). On some control problems in fluid mechanics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics 1990, vol. 1, pp. 303-325, Springer Verlag.*
- [2] BUSHNELL, D.M., MCGINLEY, C.B. (1989). Turbulence control in wall flows. *Ann. Rev. Fluid Mech. 1989, vol. 21, pp. 1-20.*
- [3] CEA, J. (1971). Optimisation, théorie et algorithmes. *Dunod*
- [4] GUNZBURGER, M.D., HOU, L., SVOBODNY, T.P. (1992). Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction. *SIAM J. Control and Optimization, vol. 30, no. 1, pp. 167-181.*
- [5] GILL, P., MURRAY, W., WRIGHT, M. (1981). Practical optimization. *Academic Press.*
- [6] HECHT, F. (1983). Ecoulement laminaire derrière une marche: utilisation de base à divergence nulle en éléments finis. *Proceedings of the workshop on numerical analysis of laminar flow over a step, Bièvre, jan. 83.*
- [7] HERSKOVITS, J. (1992). An interior point method for non-linear optimization. *Rapport de recherche INRIA no. 1808.*
- [8] LARROUTUROU, B., LIONS, P.-L. (1994). Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur: Optimisation et analyse numérique. *Cours de l'Ecole Polytechnique.*
- [9] METCALFE, R.W. (1994). Boundary layer control: a brief review. *CFD '94 conference, Wiley and Sons New York, 1994.*
- [10] GAD-EL-HAK, M. (1994). Interactive control of turbulent boundary layers: a futuristic overview. *AIAA 93-3268.*
- [11] MYOSE, R.Y., BLACKWELDER, R.F., (1994). Selective suction for controlling the breakdown of streamwise vortices on concave walls. *AIAA 94-2216.*
- [12] PIRONNEAU, O. (1982). On the transport-diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations. *Num. Math. vol. 39, pp. 309-332, Springer Verlag.*

- [13] SWEARINGEN, J.D., BLACKWELDER R.F. (1987). The growth and breakdown of streamwise vortices in presence of a wall. *Journal of Fluid Mech.*, vol. 182, pp. 255-290.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399