



# Interfaces stationnaires pour les équations de Navier-Stokes

Frédéric Abergel, Elisabeth Rouy

► **To cite this version:**

Frédéric Abergel, Elisabeth Rouy. Interfaces stationnaires pour les équations de Navier-Stokes. [Rapport de recherche] RR-2651, INRIA. 1995, pp.45. inria-00074039

**HAL Id: inria-00074039**

**<https://hal.inria.fr/inria-00074039>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

# *Interfaces stationnaires pour les équations de Navier-Stokes*<sup>1</sup>

Frédéric Abergel<sup>2</sup> et Elisabeth Rouy

**N 2651**

septembre 1995

PROGRAMME 6

---

<sup>1</sup>. Article rédigé à la suite d'un cours donné par Frédéric Abergel à l'Inria-Lorraine de février à avril 1994.

<sup>2</sup>. Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS et Université de Paris-Sud, 91405 Orsay





## Interfaces stationnaires pour les équations de Navier-Stokes \*\*\*

Frédéric Abergel\*\*\*\* et Elisabeth Rouy

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Numath

Rapport de recherche n° 2651 — septembre 1995 — 45 pages

**Résumé :** Nous présentons une étude complète des équations de Navier-Stokes stationnaires avec conditions aux limites de surface libre. Nous donnons des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour des écoulements de liquides visqueux à surface libre. Les techniques utilisées sont décrites en détail.

**Mots-clé :** Navier-Stokes, surfaces libres, opérateurs elliptiques.

*(Abstract: pto)*

\*\*\* Article rédigé à la suite d'un cours donné par Frédéric Abergel à l'Inria-Lorraine de février à avril 1994.

\*\*\*\* Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS et Université de Paris-Sud, 91405 Orsay

Unité de recherche INRIA Lorraine  
Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY (France)  
Téléphone : (33) 83 59 30 30 – Télécopie : (33) 83 27 83 19  
Antenne de Metz, technopôle de Metz 2000, 4 rue Marconi, 55070 METZ  
Téléphone : (33) 87 20 35 00 – Télécopie : (33) 87 76 39 77

# Stationary interfaces for Navier-Stokes equations

**Abstract:** We present a comprehensive study of the stationary Navier-Stokes equations with free-surface boundary conditions. Results of existence, uniqueness and regularity are given for free-surface flows, and the basic tools are explained in detail.

**Key-words:** Navier-Stokes equations, free surfaces, elliptic operators.

# Sommaire

<b>1- Mise en équations et description de la méthode</b>	5
<b>1.1- Modélisation</b>	5
1.1.1- Description du modèle	5
1.1.2- Exemples	8
<b>1.2- Formulation mathématique du problème complet</b>	10
1.2.1- Cas de l'équilibre $u \equiv 0$	10
1.2.2- Formulation d'un problème modèle	12
<b>2- Linéarisation par rapport au domaine</b>	13
<b>2.1- Le problème auxiliaire</b>	13
2.1.1- Cas linéaire	13
2.1.2- Etude du linéarisé de $(A)$ autour d'une solution particulière	14
2.1.3- Résolution du problème auxiliaire dans un ouvert	15
<b>2.2- Variations par rapport à <math>\Sigma</math></b>	15
2.2.1- Réécriture du problème sous une forme fonctionnelle	15
2.2.2- Dérivabilité par rapport à $\rho$	18
<b>3- Etude de l'inversibilité du linéarisé</b>	22
<b>3.1- Etude naïve</b>	22
3.1.1- Etude d'un cas particulier	22
3.1.2- Discussion: outils nécessaires	25
3.1.3- Introduction au calcul de symboles	25
<b>3.2- Utilisation des opérateurs pseudodifférentiels</b>	28
3.2.1- Rappels	28
3.2.2- Calcul du symbole principal	33
<b>4- Application à des problèmes concrets</b>	40
<b>4.1- Ellipticité de <math>\mathcal{L}^\kappa</math></b>	40
<b>4.2- Enoncé d'un résultat général</b>	40
<b>4.3- Exemple et contre-exemple</b>	41
4.3.1- Cas du cylindre en rotation	41
4.3.2- Cas d'une surface non compacte	41

<b>4.4- Commentaires et conclusions</b>	41
4.4.1- Remarque générale	41
4.4.2- Remarque sur le cas “ $\kappa = 0$ ” dans $\mathbb{R}^3$	41
<b>Références</b>	42

# 1 Mise en équations et description de la méthode

## 1.1 Modélisation

On pourra consulter [23].

### 1.1.1 Description du modèle

#### A- Paramètres physiques du modèle

**La viscosité**  $\mu$  est un paramètre positif qui intervient dans la dynamique des fluides. C'est un coefficient de proportionnalité pour une force de frottement quand le fluide se déplace, et donc une mesure de la dissipation d'énergie lors du mouvement.

**Le coefficient de tension superficielle**  $\kappa$  est un coefficient de proportionnalité qui s'oppose à la déformation d'une interface. Plus  $\kappa$  est grand, plus une interface (fluide-air, par exemple) est difficile à déformer et plus la configuration est stable. Il dépend de la température et de la nature des fluides. On ne parlera pas dans ce cours des effets de surface (effets "Marangoni", voir [4]) qui se produisent lorsque les variations de température induisent un flot sur la surface.  $\kappa$  est supposé constant.

**La densité** du fluide est  $m$ . La force de gravitation est  $m\vec{g}$  où  $\vec{g}$  est orientée "vers le bas".

**La géométrie du domaine rigide** On veut pouvoir envisager tout type de récipient ou conteneur.

**Conditions aux limites sur le bord rigide** On se donne une vitesse arbitraire de déplacement du conteneur.

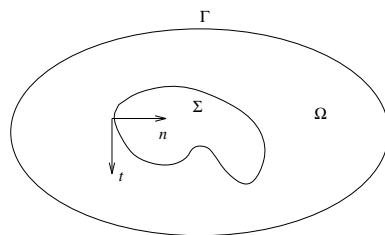


FIG. 1 -



**B- Description du problème physique** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Sa frontière  $\partial\Omega$  est la réunion de deux hypersurfaces connexes  $\Gamma$  et  $\Sigma$  du type de la sphère, disjointes et régulières ( $C^\infty$ , par exemple). La surface  $\Gamma$  est fixe tandis que  $\Sigma$  sera la surface libre.

Pour simplifier le traitement, nous supposons que le fluide est en contact avec le vide (ou encore l'air au repos). Cette limitation a pour seule fin de simplifier un peu nos calculs, et ne nous empêche pas de traiter une interface entre deux liquides visqueux par exemple.

**C- Equations modélisant l'écoulement** Les inconnues du problème sont définies sur  $\bar{\Omega}$ . Ce sont les variables

- $u$ : champ de vecteurs,
- $p$ : champ scalaire,
- $\sigma$ : champ de tenseurs symétriques. Ces fonctions satisfont les équations suivantes:

#### Loi de comportement

$$\sigma = -p\text{Id} + \mu(\nabla u + \nabla u^\top) \text{ dans } \bar{\Omega}. \quad (1)$$

Les composantes de  $\sigma$  sont donc données par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

#### Equation d'incompressibilité

$$\text{div } u = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad (2)$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

#### Conservation de la quantité de mouvement

$$m(u \cdot \nabla)u = \text{div } \sigma + F \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad (3)$$

c'est-à-dire

$$m \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + F_j \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

**Adhérence au bord rigide**

$$u = g \text{ sur } \Gamma \quad (4)$$

(on donne la vitesse de déplacement de  $\Gamma$ ).

**Conditions à l'interface**

$$u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (5)$$

où  $u \cdot \vec{n}$  est la vitesse normale, et

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ telle que } \sigma \vec{n} - \kappa H \vec{n} = C \vec{n} \text{ sur } \Sigma. \quad (6)$$

Dans cette équation vectorielle,  $H$  est la courbure moyenne de  $\Sigma$ . Par convention,  $H$  est comptée positivement là où  $\Sigma$  apparaît comme concave, vue de l'intérieur de  $\Omega$ .

**Condition sur le volume**

$$\int_{\Omega} dx = V > 0 \text{ constante donnée.} \quad (7)$$

**D- Interprétation des équations**

**Loi de comportement** Cette loi caractérise le comportement des fluides newtoniens incompressibles. Elle exprime le type de réaction du milieu. En effet, si on note  $\omega$  une sous-partie quelconque de  $\Omega$ , la résultante des forces exercées par le fluide sur  $\omega$  est donnée par  $\int_{\partial\omega} \sigma \vec{\nu} ds$ , où  $\vec{\nu}$  est la normale extérieure à  $\omega$ . On peut décomposer localement cette force en une force de pression et des forces de frottement.

**Equation d'incompressibilité** Cette condition exprime l'invariabilité du volume de  $\omega(t)$ , l'ensemble des positions, à l'instant  $t$ , des points qui étaient dans un  $\omega_0$  au temps initial. On a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} dx = \int_{\omega(t)} (\nabla \cdot u) dx = \int_{\partial\omega(t)} u \cdot \vec{\nu} ds = \text{constante}$$

et donc  $(\nabla \cdot u) = 0$ .

**Conservation de la quantité de mouvement** C'est l'expression de la relation fondamentale de la dynamique dans  $\Omega$ . L'accélération est donnée par

$$m\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = m\frac{d}{dt}u(x(t), t),$$

et la dérivée en temps de  $u$  est nulle dans le cas stationnaire.

Les forces appliquées sont d'une part les forces extérieures  $F$  (par exemple: gravitation, forces d'entraînement, forces de Coriolis, etc...) et d'autre part les forces dues aux contraintes à l'intérieur du fluide, soit  $\text{div } \sigma$ . En effet, par la formule de Green, on a

$$\int_{\partial\omega} \sigma \vec{\nu} ds = \int_{\omega} (\text{div } \sigma) dx.$$

**Adhérence au bord rigide** Contrairement aux fluides parfaits, un fluide visqueux ne glisse pas le long d'un bord rigide; il est entraîné par la paroi lorsque celle-ci est en mouvement.

**Conditions à l'interface** La première condition ( $u \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Sigma$ ) est caractéristique du cas stationnaire. L'interface doit être indépendante du temps alors que le fluide est en mouvement. Donc il ne peut y avoir sur le bord que des vitesses tangentielles.

La seconde condition traduit l'équilibre de  $\Sigma$ , en calculant la résultante des densités de forces appliquées à  $\Sigma$ . Si on projette  $\sigma \vec{n}$  suivant  $\vec{n}$  d'une part et le plan tangent à  $\Sigma$  d'autre part, on obtient le système d'équations, équivalent à (6), suivant:

$$\begin{cases} (i) & \sigma \vec{n} \cdot \vec{n} - \kappa H = C \\ (ii) & \sigma \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \quad \forall \vec{t} \text{ tangent à } \Sigma \end{cases} \quad (8)$$

qui sont les équations d'équilibre.

Le vecteur  $\sigma \vec{n}$  est la contrainte exercée par le fluide en un point de la surface libre dans la direction du vecteur normal. L'équation (8-ii) signifie donc qu'en chaque point de la surface libre le vecteur contrainte est normal.

Dans l'équation (8-i),  $-\kappa H$  représente la force à exercer pour déformer la surface. L'intensité de la contrainte exercée par le fluide sur  $\Sigma$  est la valeur scalaire  $\sigma \vec{n} \cdot \vec{n}$ . La constante  $C$  représente la pression, supposée constante, de l'autre côté de l'interface.

### 1.1.2 Exemples

#### A- Ecoulement de type Poiseuille-Nusselt (bidimensionnel)

L'écoulement de base est un flot laminaire le long d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$ . Le domaine est considéré comme infini et le profil du champ de vitesses

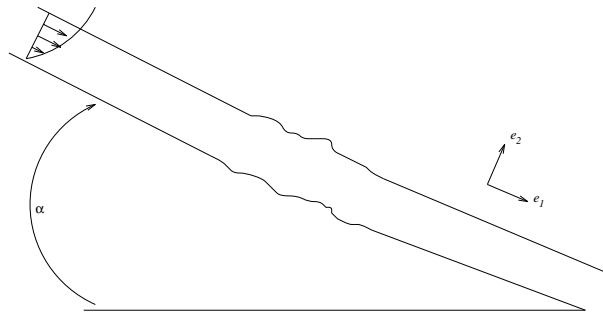


FIG. 2 -

est semi-parabolique. La vitesse  $u$  et la pression satisfont le système de Stokes:

$$-\Delta u + \nabla p = \begin{pmatrix} G \cos \alpha \\ -G \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Dans le système de coordonnées  $\{(\cos \alpha, -\sin \alpha), (\sin \alpha, \cos \alpha)\}$ , il existe une solution particulière invariante  $\vec{u} = (u(y), 0)$ , pour laquelle le terme de transport  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  est identiquement nul.

Lorsque l'on perturbe le fond, on peut montrer (voir [3]), par des méthodes locales, l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire à condition que l'angle  $\alpha$  soit suffisamment petit. Cette condition, a priori restrictive, est en fait naturelle: Benjamin a montré dans [11] qu'il existe un  $\alpha_0$  tel que si  $\alpha < \alpha_0$ , l'écoulement de base est linéairement stable alors qu'il est instable si  $\alpha > \alpha_0$  (les perturbations croissent exponentiellement). Dans ce cas, l'existence d'une solution stationnaire n'est pas évidente, et elle risque de représenter une configuration inaccessible physiquement.

**B- Bulle dans un cylindre horizontal** animé d'une vitesse de rotation autour de son axe

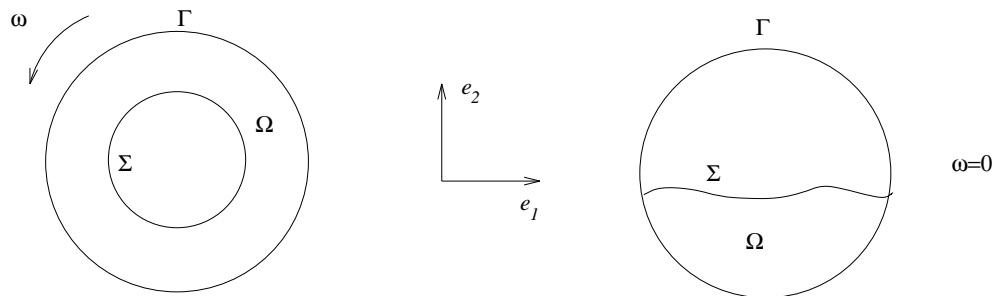


FIG. 3 - coupe du cylindre

On a deux configurations très différentes selon la vitesse angulaire  $\omega$  (voir Fig. 3).

Si la gravité est négligeable par rapport aux autres paramètres (ou de façon équivalente, si la vitesse angulaire est grande), la surface libre stationnaire est un cylindre coaxial. Dans les cas intermédiaires, où les valeurs de la gravité et de  $\omega$  sont comparables, des études expérimentales de Benjamin et Pathak [12] ont montré qu’il peut exister des solutions stationnaires multiples (formées de plusieurs bulles par exemple).

Si la gravité est prépondérante (notamment si  $\omega = 0$ ), le problème n’est plus à symétrie sphérique et il n’y a plus de solution cylindrique. Le type de la surface change (des coins apparaissent). On n’étudiera pas ici ce cas, et on renvoie à [4], [21], [38] pour les problèmes où l’interface rencontre la paroi rigide.

**C- Masse de fluide soumise à la force d’autogravitation** La masse n’est soumise ni à la gravité ni à des forces extérieures. Seuls l’effet de surface et l’attraction des particules entre elles sont à prendre en compte. Un exemple pourrait être celui d’une planète, si ce n’est que le modèle n’est pas incompressible et doit tenir compte des phénomènes magnéto-hydrodynamiques.

Dans ce cas, il n’y a pas de bord rigide (c’est-à-dire pas de contrainte du type “ $u = 0$ ”) et les isométries du plan préservent les solutions (voir [7], [9]).

## 1.2 Formulation mathématique du problème complet

### 1.2.1 Cas de l’équilibre $u \equiv 0$

On va donner, dans ce cas, la justification d’une partie du modèle, à titre d’exemple (on renvoie à [15] pour une étude détaillée).

On se place dans la configuration donnée Figure 4.

On définit d’abord l’énergie d’une configuration. L’énergie  $E$  associée à la surface est la somme de trois termes: l’énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  que l’on doit dépenser pour déplacer la masse de fluide; l’énergie de surface libre  $E_s$  proportionnelle à la taille de l’interface liquide-air; et enfin l’énergie de “mouillage”  $E_m$  proportionnelle à la taille de l’interface liquide-récipient.

On va utiliser un principe variationnel pour calculer la surface libre. C’est la frontière de l’ensemble  $\Omega$  qui minimise  $E$  sous la contrainte de volume (7).

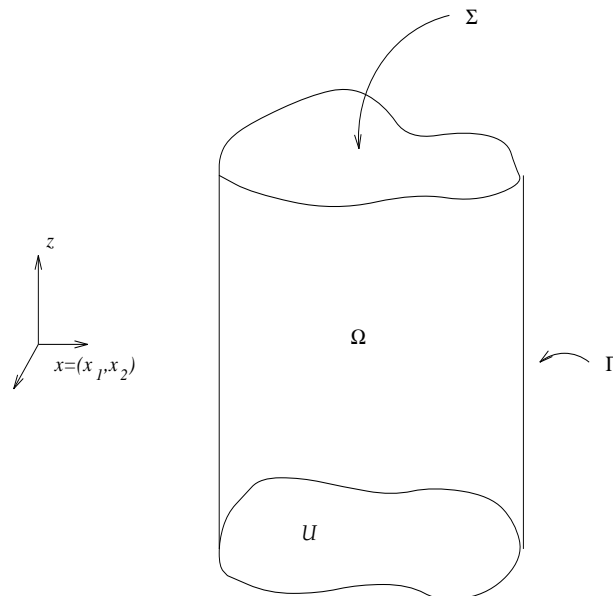


FIG. 4 -

**Variation de l'énergie totale** On suppose que  $\Sigma$  est le graphe d'une fonction  $\phi$  définie sur un ensemble  $\mathcal{U}$ . Alors

$$\begin{cases} E_p = \int_{\mathcal{U}} m\vec{g}z dv \\ E_s = \kappa \int_{\Sigma} ds \\ E_m = \beta \int_{\partial\mathcal{U}} \phi(s) ds \end{cases}$$

où  $\beta > 0$ , et

$$E = E(\phi) = \int_{\mathcal{U}} m\vec{g} \frac{\phi(x)^2}{2} dx + \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + |\nabla\phi(x)|^2} dx + \beta \int_{\partial\mathcal{U}} \phi(s) ds.$$

La variation de l'énergie s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(\phi + t\psi) - E(\phi)}{t} = \int_{\mathcal{U}} m\vec{g}\phi(x)\psi(x) dx + \int_{\mathcal{U}} \frac{\nabla\phi \cdot \nabla\psi}{\sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}} dx + \beta \int_{\partial\mathcal{U}} \psi(s) ds.$$

**Condition nécessaire sur  $\phi$**  Comme il s'agit de minimiser  $E(\psi)$  sous la contrainte de volume

$$\int_{\mathcal{U}} \psi(x) dx = V,$$

il doit exister  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\psi$  à support compact dans  $\mathcal{U}$ , on ait

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} \psi + \lambda \int_{\mathcal{U}} \psi dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ \lambda + m\vec{g}\phi - \kappa \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} \right) \right] \psi(x) dx = 0.$$

Autrement dit, on doit avoir en tout point  $x$  de  $\mathcal{U}$ ,

$$-m\vec{g}\phi(x) = -\kappa \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} \right) + \lambda,$$

où le membre de gauche est la pression hydrostatique en un point situé sur la frontière libre et le terme en facteur de  $-\kappa$  est la courbure moyenne de  $\Sigma$ . Or la pression à l'équilibre est, au signe près, le tenseur des contraintes et donc on a retrouvé l'équation (8-i).

On obtiendrait de même une condition aux limites sur  $\partial\mathcal{U}$  en enlevant la restriction sur le support de  $\psi$ .

### 1.2.2 Formulation d'un problème modèle

Si  $\Sigma$  est donnée, le système formé des équations (1) à (7) n'a pas de solution a priori; en effet, les équations (5) et (6), qui définissent les conditions sur  $\Sigma$  sont composées, si  $u$  est un vecteur à  $N$  composantes, de  $N + 1$  conditions scalaires et le système est surdéterminé. En revanche, sous des hypothèses raisonnables, le système formé des équations (1) à (5), (7) et (8-ii) admet une solution, qui dépend de  $\Sigma$ ,  $(u_\Sigma, \sigma_\Sigma, p_\Sigma)$ . Nous ferons dorénavant référence à ce système comme étant le système auxiliaire (A).

Le problème mathématique à résoudre peut alors se formuler comme la recherche d'une surface  $\Sigma$  satisfaisant l'équation

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \text{constante},$$

où

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \sigma_\Sigma \vec{n} \cdot \vec{n} - \kappa H$$

et  $(u_\Sigma, \sigma_\Sigma, p_\Sigma)$  solution du système (A).

On peut alors rechercher  $\Sigma$  par une méthode de point fixe: on se donne un  $\Sigma_0$ , on résout le problème auxiliaire; puis on calcule la valeur de  $\mathcal{F}$  pour cette surface et on itère dans la direction de  $\nabla \mathcal{F}$ .

Il convient donc avant tout de se donner un cadre fonctionnel adéquat pour définir correctement  $\mathcal{F}$  et résoudre le problème auxiliaire.

**Remarque 1** Dans la suite, pour simplifier les calculs, on posera  $\mu = m = 1$ .

## 2 Linéarisation par rapport au domaine

### 2.1 Le problème auxiliaire

On rappelle quelques résultats connus concernant le système elliptique (A) (voir [22], [35]).

#### 2.1.1 Cas linéaire

On se donne  $\Gamma$  et  $\Sigma$ , deux surfaces régulières. Dans ce cas, (A) peut s'écrire

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \sigma + F = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \Gamma \\ u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \sigma \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ sur } \Sigma, \forall \vec{t} \text{ tangent à } \Sigma \end{cases}$$

ou, plus simplement avec des conditions de Dirichlet homogènes,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \\ -\operatorname{div} \sigma = F \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \sigma \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ sur } \Sigma, \forall \vec{t} \text{ tangent à } \Sigma. \end{cases}$$

On montre l'existence d'une solution par une méthode variationnelle et en utilisant l'inégalité de Korn (voir, par exemple, [14], [29]):

quelle que soit  $\varphi$  régulière, à valeurs vectorielles et satisfaisant  $\varphi = 0$  sur une partie de  $\partial\Omega$  (par exemple sur  $\Gamma$ ), on a

$$\int_{\Omega} (|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2) dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla\varphi + \nabla\varphi^{\top}|^2 dx.$$

Cette inégalité joue le même rôle que l'inégalité de Poincaré.

Soit  $E = \{v \in H^1(\Omega) / \nabla \cdot v = 0, v|_{\Gamma} = 0, v \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Sigma\}$ . Formellement, on minimise la fonctionnelle strictement convexe  $J$  définie par

$$J(v) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla v + \nabla v^{\top}|^2 dx - \int_{\Omega} (F \cdot v) dx$$

sur  $E$ . L'inégalité de Korn implique que  $J$  est coercive et donc que  $J$  admet un point de minimum unique dans  $E$ . Et quelles que soient  $v$  et  $w$  dans  $E$ ,

$$\begin{aligned} J'(v) \cdot w &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla v + \nabla v^{\top}) \cdot (\nabla w + \nabla w^{\top}) dx - \int_{\Omega} (F \cdot w) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (-\operatorname{div} (\nabla v + \nabla v^{\top}) \cdot w - F \cdot w) + \int_{\Sigma \cup \Gamma} (\nabla v + \nabla v^{\top}) \vec{n} \cdot w d\sigma. \end{aligned}$$



Or

$$\int_{\Sigma \cup \Gamma} (\nabla v + \nabla v^\top) \vec{n} \cdot w d\sigma = \int_{\Sigma} (\nabla v + \nabla v^\top) \vec{n} \cdot \vec{t} (w \cdot \vec{t}) d\sigma,$$

et donc, en commençant par prendre des  $w$  à support compact, il vient que si  $J'(v) \cdot w = 0$  pour tout  $w$ , alors il existe  $q$  tel que

$$-\operatorname{div} (\nabla v + \nabla v^\top) - F = -\nabla q;$$

puis on trouve

$$(\nabla v + \nabla v^\top) \vec{n} \cdot \vec{t} = 0.$$

Donc, formellement, une solution du problème auxiliaire est un point critique de  $J$  et réciproquement.

### 2.1.2 Étude du linéarisé de (A) autour d'une solution particulière

On va se placer dans les espaces de Hölder. Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 3$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ . Soit  $\Sigma_0$  une surface  $C^\infty$ . On suppose (hypothèse (H)) que le problème auxiliaire linéarisé (AL) au voisinage de  $u_0$ , solution du problème auxiliaire (A) dans  $\Omega_0$ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = f_2 \text{ dans } \Omega_0 \\ v = f_3 \text{ sur } \Gamma \\ v \cdot \vec{n} = f_4 \text{ sur } \Sigma_0 \\ -\Delta v + (u_0 \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_0 = f_1 - \nabla q \text{ dans } \Omega_0 \\ \left( \frac{\nabla v + \nabla v^\top}{2} \right) \vec{n} \cdot \vec{t} = f_5 \end{cases}$$

est un problème elliptique bien posé, pour

$$\begin{cases} f_1 \in C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega}_0) \\ f_2 \in C^{m-1,\alpha}(\overline{\Omega}_0) \\ f_3 \in C^{m,\alpha}(\Gamma) \\ f_4 \in C^{m,\alpha}(\Sigma_0) \\ f_5 \in C^{m-1,\alpha}(\Sigma_0); \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que pour toutes fonctions  $f_1, \dots, f_5$  dans les espaces ci-dessus satisfaisant la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega_0} f_2 dx = \int_{\Sigma_0} f_4 ds + \int_{\Gamma} f_3 \cdot \vec{n} ds,$$

il existe un unique  $v \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$  solution du problème (AL) tel que

$$\|v\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}_0)} \leq K \|(f_1, \dots, f_5)\|.$$

Il est bien connu (voir [22], [35], [38] et [39]) que l'hypothèse (H) est raisonnable. En effet, le système (AL) vérifie l'alternative de Fredholm, car l'opérateur est elliptique et les conditions aux limites vérifient les conditions de recouvrement.

Si on a une unique solution pour  $(f_1, \dots, f_5) = (0, \dots, 0)$  alors l'hypothèse (H) est satisfaite.

### 2.1.3 Résolution du problème auxiliaire dans un ouvert

On suppose que le bord rigide  $\Gamma$  est  $C^\infty$  et que la frontière libre  $\Sigma$  est de classe  $C^{m,\alpha}$  pour  $m \geq 3$ . On considère le système

$$(A) \begin{cases} -\operatorname{div} \sigma + (u \cdot \nabla)u = F \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \Gamma \\ u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \sigma \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

où  $g \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma$ .

**Théorème 1** *Soit  $\Sigma_0$  donnée et soit  $u_0$  une solution de (A). Supposons (H) satisfaite. Alors, il existe un voisinage de  $u_0$  et un voisinage de l'ensemble des paramètres  $\Gamma$ ,  $\Sigma_0$ ,  $(\mu)$ ,  $\kappa$ ,  $g$  et  $V$  tel que si les données sont choisies dans ce second voisinage, alors (A) admet une unique solution dans le voisinage de  $u_0$ .*

**Démonstration** L'existence et l'unicité d'une solution proche d'un  $u_0$  donné sont obtenues par un théorème des fonctions implicites qui utilise l'hypothèse (H) faite précédemment. ■

**Remarque 2** *La solution  $u$  a un degré de régularité de moins que le domaine (c'est-à-dire que  $\Sigma$ ). En effet, l'équation  $u \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Sigma$  entraîne que  $u$  ne peut pas être plus régulière que le champ tangent ou normal à  $\Sigma$ .*

**Remarque 3** *La pression est définie à une constante près dans le problème auxiliaire.*

## 2.2 Variations par rapport à $\Sigma$

### 2.2.1 Réécriture du problème sous une forme fonctionnelle

**Formulation du problème complet** On cherche à résoudre l'équation  $\mathcal{F}(\Sigma) = \text{cte}$  où  $\mathcal{F}$  est définie par

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \sigma \vec{n} \cdot \vec{n} - \kappa H$$

et  $(\sigma, u, p)$  est solution du problème auxiliaire.

On se donne  $\Omega_0$  un domaine borné par  $\Gamma_0$  et  $\Sigma_0$  régulières. On va choisir une classe de surfaces qui sont dans un voisinage de  $\Sigma_0$ .

**Cadre fonctionnel** On écrira une surface  $\Sigma$  assez proche de  $\Sigma_0$  sous la forme d'une variation normale de  $\Sigma_0$ :

$$\Sigma_\rho = \Sigma_0 + \rho \vec{n}_0 \quad (9)$$

où  $\rho$  est une fonction définie sur  $\Sigma_0$  à norme  $L^\infty$  petite et  $\vec{n}_0$  est la normale à  $\Sigma_0$ .

Ce choix s'explique heuristiquement par la proposition ci-dessous (voir aussi [19]).

**Proposition 1** *Il existe un voisinage de  $\Sigma_0$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  tel que tout point  $M$  de ce voisinage s'écrive de manière unique*

$$M = M_0 + \lambda \vec{n}_0(M_0). \quad (10)$$

**Démonstration** On définit l'origine d'un repère en un point de  $\Sigma_0$ . On oriente ce repère de sorte que  $\Sigma_0$  ait comme plan tangent le plan  $z = 0$  et soit le graphe d'une fonction  $\phi$ . Soit alors  $M$  un point de coordonnées  $(x, z)$  dans ce repère tel que  $x$  soit dans le domaine de définition de  $\phi$ . On cherche un point  $M_0 = (x_0, \phi(x_0))$  de  $\Sigma_0$  et un réel  $\lambda$  tels que  $M$  satisfasse l'égalité (10). Alors  $M_0$  est le point qui satisfait

$$d(M, M_0)^2 = d(M, \Sigma_0)^2 = \lambda^2.$$

En effet (voir par exemple [13], [28]), on minimise la quantité  $|x - y|^2 + |z - \phi(y)|^2$  en la variable  $y$  sur le domaine de définition de  $\phi$ . Le minimum doit satisfaire

$$x - y + \nabla \phi(y)(z - \phi(y)) = 0,$$

c'est-à-dire que le vecteur  $(x - y, z - \phi(y))$  doit être normal à  $\Sigma_0$ .

On pose  $G(M, y) = x - y + \nabla \phi(y)(z - \phi(y))$ ; alors  $G(0, 0) = 0$  et on va utiliser le théorème des fonctions implicites pour montrer qu'il existe une solution unique de  $G(z, y) = 0$  quand  $M$  est au voisinage de 0, c'est-à-dire de la courbe. On a:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\text{Id} + (z - \phi(y)) \nabla^2 \phi(y) - (\nabla \phi \otimes \nabla \phi)(y).$$

Cet endomorphisme est inversible si l'on est assez proche de  $(0, 0)$ . En effet, il peut s'écrire comme la somme d'un terme dominant,  $-\text{Id} + z \nabla^2 \phi(y)$  et d'un terme qui ne dépend que de la taille du voisinage de  $y$  que l'on considère et que l'on peut donc rendre arbitrairement petit. Le déterminant de cet endomorphisme s'écrit comme la somme de  $1 - z \text{Tr}(\nabla^2 \phi(y))$  et de termes petits; le premier terme sera non nul si

$$|z| < \left| \frac{1}{\text{Tr}(\nabla^2 \phi(y))} \right| = \left| \frac{1}{H} \right|$$

où  $H$  est la courbure moyenne. Comme  $\Sigma_0$  est de classe  $C^{m,\alpha}$  pour  $m \geq 2$ , sa courbure est uniformément bornée: on a donc une solution unique à notre problème. ■

Pour  $\rho$  assez petit, on va construire un difféomorphisme aussi régulier que  $\rho$  qui envoie  $\Omega_\rho$  sur le domaine fixe  $\Omega_0$  (voir [3], [21] et [32]). On le choisit de telle sorte qu'il envoie  $\Sigma_0$  sur  $\Sigma_\rho$ , qu'il soit égal à l'identité loin de  $\Sigma_0$  et  $C^\infty$  hors d'un voisinage de  $\Sigma_0$ . On se donne donc les trois ensembles suivants:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = \{M \in \mathbb{R}^N / d(M, \Sigma_0) < \frac{\varepsilon}{2}\} \\ \mathcal{U}_2 = \{M \in \mathbb{R}^N / \frac{\varepsilon}{2} \leq d(M, \Sigma_0) \leq \varepsilon\} \\ \mathcal{U}_3 = \Omega \cap \{M \in \mathbb{R}^N / d(M, \Sigma_0) > \varepsilon\} \end{cases}$$

où  $\varepsilon > 0$  est choisi de telle sorte que  $\Sigma_\rho \subset \mathcal{U}_1$  et

$$d(M, \Sigma_0) < 2\varepsilon \Rightarrow \exists!(M_0, \lambda) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}_+ \text{ tel que } M = M_0 + \lambda \vec{n}_0.$$

Un difféomorphisme possible est alors la fonction  $\phi_\rho$  définie comme suit: si  $x \in \mathcal{U}_3$ , alors  $\phi_\rho(x) = x$ ; pour les autres points, on définit, dans chaque carte locale, la transformation  $\varphi_\rho$  qui envoie la courbe  $\{z = \rho(x)\}$  sur la droite  $\{z = 0\}$  et laisse invariante les droites  $\{z = -\frac{\varepsilon}{2}\}$  et  $\{z = \frac{\varepsilon}{2}\}$ . C'est-à-dire que l'on définit dans chaque carte un système de nouvelles coordonnées  $(\hat{x}, \hat{z})$  par

$$\begin{cases} \hat{x} = x \\ \hat{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \end{cases}$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  satisfait

$$\begin{cases} \frac{\alpha\varepsilon/2 + \beta}{\gamma\varepsilon/2 + \delta} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \alpha\rho(x) + \beta = 0 \\ \frac{-\alpha\varepsilon/2 + \beta}{-\gamma\varepsilon/2 + \delta} = -\frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Ce système admet des solutions; on peut choisir, par exemple,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\rho(x)$  et en déduire  $\gamma$  et  $\delta$ . On a ainsi défini une transformation  $(x, z) \rightarrow (\hat{x}, \hat{z})$  aussi régulière que  $\rho$ . Alors, pour  $x \in \mathcal{U}$ ,

$$\phi_\rho(x) = \varphi(d(x, \Sigma_0))\varphi_\rho(x) + (1 - \varphi(d(x, \Sigma_0)))x$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}_+)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  qui vaut 1 entre 0 et  $\varepsilon/2$  et 0 au-delà de  $\varepsilon$ . Finalement,  $\phi_\rho$  est un difféomorphisme de même régularité que  $\rho$ , c'est-à-dire  $C^{m,\alpha}$  et l'application  $\rho \mapsto \phi_\rho$  est de classe  $C^1$  ainsi que  $\rho \mapsto \phi_\rho^{-1}$  (voir [3]).

### 2.2.2 Dérivabilité par rapport à $\rho$

On va maintenant étudier l'application qui à  $\rho \in C^\infty(\Sigma_0)$  associe  $\mathcal{G}(\rho)$  définie par

$$\mathcal{G}(\rho) = (\sigma \vec{n} \cdot \vec{n} - \kappa H)|_{\Sigma_\rho}$$

où  $(\sigma, u, p)$  est solution du problème auxiliaire sur le domaine  $\Omega_\rho$  limité par les surfaces  $\Gamma$  et  $\Sigma_\rho = \Sigma_0 + \rho \vec{n}_0$ .

**Régularité de  $\mathcal{G}$**  Pour tout  $m \geq 3$ ,  $\mathcal{G}$  est définie d'un voisinage de 0 dans  $C^{m,\alpha}(\Sigma_0)$  à valeur dans  $C^{m-2,\alpha}(\Sigma_0)$ . On va montrer que  $\mathcal{G}$  est continue et différentiable. Essentiellement, on va prouver la différentiabilité du terme non local

$$\mathcal{G}_0 : \rho \mapsto \sigma \vec{n} \cdot \vec{n}|_{\Sigma_\rho};$$

la différentiabilité de la courbure ne pose pas de problème majeur. Pour cela, on fera, par une première méthode, la preuve de la différentiabilité de  $\mathcal{G}_0$  puis, par une seconde méthode, on calculera sa différentielle.

L'application  $\rho \mapsto \mathcal{G}_0(\rho)$  peut s'exprimer en fonction de la solution d'un problème auxiliaire transporté sur  $\Omega_0$ . On va tout d'abord transporter le problème auxiliaire sur  $\Omega_0$  en utilisant le difféomorphisme précédemment défini. On définit les fonctions  $\hat{u}$  et  $\hat{p}$  par les identités

$$\begin{cases} \hat{u}(\hat{x}) = u(x) \\ \hat{p}(\hat{x}) = p(x). \end{cases}$$

Ces fonctions sont solutions d'un problème aux limites dans  $\Omega_0$ :

$$\mathcal{A}(\rho, \hat{u}, \hat{p}) = B(\rho)$$

où  $\mathcal{A}(\rho, \hat{u}, \hat{p})$  est le transporté de

$$(-\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p, \nabla \cdot u, u|_\Gamma, u \cdot \vec{n}|_\Sigma, \sigma \vec{n} \cdot \vec{t}|_\Sigma)$$

par  $\phi_\rho$  et  $B(\rho)$  est le transporté des seconds membres.

**Régularité des coefficients de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $\rho$**  Remarquons que  $\mathcal{A}(0, \dots)$  est le système de Navier-Stokes auxiliaire originel. On peut montrer que l'application qui à  $\rho$  associe les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{A}(\rho, \dots)$  est de classe  $C^1$  de  $C^{m,\alpha}(\Sigma_0)$  à valeurs dans  $C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega}_0) \times C^{m-1,\alpha}(\overline{\Omega}_0) \times C^{m,\alpha}(\Gamma) \times C^{m-1,\alpha}(\Sigma_0) \times C^{m-1,\alpha}(\Sigma_0)$ . Les coefficients de  $\mathcal{A}(\rho)$  sont de la forme  $f(\rho, \nabla \rho, D^2 \rho)$  où  $f$  est une fonction  $C^\infty$ ; il s'agit de montrer qu'ils sont différentiables comme fonction de  $\rho$  (voir [3], [27], [33] et [34]).

**Dérivabilité de  $(\hat{u}, \hat{p})$  solution de  $\mathcal{A}(\rho, \hat{u}, \hat{p}) = B(\rho)$**  On utilise le théorème des fonctions implicites pour l'équation  $\mathcal{A}(\rho, v, q) - B(\rho) = 0$  avec, comme paramètre, la fonction  $\rho$ . On sait qu'il existe  $(u_0, p_0)$  tel que  $\mathcal{A}(0, u_0, p_0) - B(0) = 0$ . Pour pouvoir exprimer  $v$  et  $q$  comme des fonctions de  $\rho$  et pour connaître la régularité de ces fonctions par rapport à  $\rho$ , on étudie

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial (v, q)}(0, u_0, p_0).$$

Si c'est un isomorphisme, alors pour  $\rho$  assez petit, il existe une unique solution  $(\hat{u}, \hat{p})$  qui dépend de  $\rho$  de façon continûment différentiable. Alors la fonction qui à  $\rho$  associe la solution  $(\hat{u}, \hat{p})$  du problème auxiliaire transporté sur  $\Omega_0$  est continûment différentiable de  $C^{m, \alpha}(\Sigma_0)$  dans  $C^{m-1, \alpha}(\overline{\Omega}_0) \times C^{m-1, \alpha}(\overline{\Omega}_0)$ . Mais comme  $\rho \mapsto \mathcal{G}_0(\rho)$  peut s'exprimer en fonction de  $\hat{u}, \hat{p}$ , et de fonctions explicites de  $\rho$ , on peut conclure à sa différentiabilité dans un voisinage de 0; de plus, la fonction

$$\rho \mapsto \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial \rho}(\rho)$$

est continue de  $C^{m, \alpha}(\Sigma_0)$  dans  $C^{m-2, \alpha}(\Sigma_0)$ .

La dépendance régulière du difféomorphisme  $\phi_\rho$  en fonction de  $\rho$  est ici cruciale, car on doit composer l'application  $\rho \mapsto \hat{u}$  avec le changement de coordonnées  $x \mapsto \hat{x}$ .

**Méthode de calcul du problème linéarisé** On va calculer les dérivées de  $\mathcal{G}_0$  par une méthode directe (voir, par exemple, [19]). On pourrait tout aussi bien différentier sur le domaine fixe, mais les calculs sont beaucoup plus complexes et masquent l'expression de la dérivée locale. Ici, on va calculer la dérivée directement sur  $\Omega_\rho$ .

La dérivée de  $\mathcal{G}_0$  en 0 est

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_0(t\rho) - \mathcal{G}_0(0)}{t}.$$

On note  $(u_{t\rho}, p_{t\rho})$  la solution du problème (A) sur  $\Omega_{t\rho}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_0(t\rho) - \mathcal{G}_0(0)}{t} &= \frac{\sigma_{t\rho} \vec{n}_{t\rho} \cdot \vec{n}_{t\rho}(M_0 + t\rho \vec{n}_0) - \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0)}{t} \\ &= \frac{\sigma_{t\rho} \vec{n}_{t\rho} \cdot \vec{n}_{t\rho}(M_0 + t\rho \vec{n}_0) - \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0 + t\rho \vec{n}_0)}{t} \\ &\quad + \frac{\sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0 + t\rho \vec{n}_0) - \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0)}{t}. \end{aligned}$$

Pour calculer la valeur de  $\sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$  au point  $M_0 + t\rho \vec{n}_0$  il faut effectuer un prolongement des fonctions  $u_0$  et  $p_0$  à un voisinage de  $\overline{\Omega}_0$ . On commence par envoyer localement la frontière  $\Sigma_0$  sur la droite  $\{z = 0\}$  et  $\Omega_0$  dans le demi-plan  $\{z < 0\}$  et on appelle  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{p}_0$  les transportés de  $u_0$  et  $p_0$ . On cherche à

prolonger  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{p}_0$  au demi-plan  $\{z > 0\}$ . Pour cela, on choisit  $N > n$  et on pose

$$\tilde{u}_0^{prol}(x, z) = \sum_{i=1}^N C_i \tilde{u}_0(x, -\frac{z}{i})$$

avec la condition que  $\tilde{u}_0^{prol}$  et  $\tilde{u}_0$  et leurs dérivées coïncident jusqu'à l'ordre  $N$  sur la droite  $\{z = 0\}$ , c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^N (-1)^k \frac{C_i}{i^k} = 1 \text{ pour tout } k = 0 \text{ à } N - 1.$$

On procède de la même façon pour  $\tilde{p}_0$ . D'autre part, ce prolongement (voir [18]) est un opérateur de  $C^{m, \alpha}$  dans lui-même.

Ceci nous permet de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0 + t\rho \vec{n}_0) - \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0(M_0)}{t} = \rho \frac{\partial \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0}{\partial \vec{n}_0}(M_0).$$

Pour l'autre terme de la dérivée de  $\mathcal{G}_0$ , on doit tenir compte de la variation de la normale. On récrit ce terme

$$\frac{(\sigma_{t\rho} - \sigma_0) \vec{n}_{t\rho} \cdot \vec{n}_{t\rho}}{t} + \frac{\sigma_0 (\vec{n}_{t\rho} - \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_{t\rho}}{t} + \frac{\sigma_0 \vec{n}_0 (\vec{n}_{t\rho} - \vec{n}_0)}{t},$$

le tout évalué au point  $M_{t\rho} = M_0 + t\rho \vec{n}_0(M_0)$ . Le vecteur normal à  $\Sigma_{t\rho}$ ,  $\vec{n}_{t\rho}$ , peut s'exprimer comme la somme de  $\vec{n}_0$ , d'une combinaison linéaire des vecteurs tangents à  $\Sigma_0$  et d'un terme en  $o(t)$ . Pour simplifier, faisons les calculs en dimension 2 uniquement. Alors  $\Sigma_0$  est une courbe et on note  $s$  l'abscisse curviligne sur  $\Sigma_0$ . Alors

$$M_{t\rho}(s) = M_0(s) + t\rho(s) \vec{n}_0(s)$$

où, par convention,  $\rho(s) = \rho(M_0(s))$  et  $\vec{n}_0(s) = \vec{n}_0(M_0(s))$ . Le vecteur tangent à  $\Sigma_{t\rho}$  au point  $M_{t\rho}(s)$ ,  $\vec{t}_{t\rho}(s)$ , est colinéaire à

$$\frac{d}{ds} M_{t\rho}(s) = \vec{t}_0(s) + t\rho'(s) \vec{n}_0(s) - t\rho(s) H_0(s) \vec{t}_0(s)$$

et donc

$$\begin{aligned} \vec{n}_{t\rho}(s) &= \frac{(1 - t\rho(s)H_0(s))\vec{n}_0(s) - t\rho'(s)\vec{t}_0(s)}{\sqrt{1 - 2t\rho(s)H_0(s) + t^2(\rho'(s)^2 + \rho(s)^2H_0(s)^2)}} \\ &= [(1 - t\rho(s)H_0(s))\vec{n}_0(s) - t\rho'(s)\vec{t}_0(s)](1 + t\rho(s)H_0(s) + o(t)) \\ &= \vec{n}_0(s) - t\rho'(s)\vec{t}_0(s) + o(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\sigma_0(\vec{n}_{t\rho} - \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_{t\rho}}{t} + \frac{\sigma_0 \vec{n}_0(\vec{n}_{t\rho} - \vec{n}_0)}{t} = \frac{-t\rho' \sigma_0 \vec{t}_0 \vec{n}_{t\rho} + o(t)}{t} + \frac{-t\rho' \sigma_0 \vec{n}_0 \vec{t}_0 + o(t)}{t}$$

$$\rightarrow 0$$

quand  $t$  tend vers 0, puisque  $\sigma_0$  est symétrique et qu'on a, sur  $\Sigma_0$ , la condition  $\sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = 0$ .

Reste à évaluer le terme

$$\frac{(\sigma_{t\rho} - \sigma_0) \vec{n}_{t\rho} \cdot \vec{n}_{t\rho}}{t}$$

au point  $M_{t\rho}$ . Pour cela, on introduit la notion de dérivée locale par rapport à un domaine (voir [33], [34]). En un point de  $\Omega_{t\rho} \cap \Omega_0$ , c'est-à-dire où  $\sigma_0$  et  $\sigma_{t\rho}$  sont définis, on a:

$$-\operatorname{div} \sigma_{t\rho} + (u_{t\rho} \cdot \nabla) u_{t\rho} = F \text{ et } -\operatorname{div} \sigma_0 + (u_0 \cdot \nabla) u_0 = F.$$

En faisant la différence de ces deux égalités, on obtient le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (\sigma_{t\rho} - \sigma_0) + (u_{t\rho} \cdot \nabla) u_{t\rho} - (u_0 \cdot \nabla) u_0 = 0 \\ \operatorname{div} (u_{t\rho} - u_0) = 0 \\ u_{t\rho} - u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma; \end{cases}$$

puis, en divisant par  $t$ , en faisant tendre  $t$  vers 0 et en posant

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{t\rho} - u_0}{t}, \quad q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{t\rho} - p_0}{t} \text{ et } T = (\nabla v + \nabla v^T) - p \operatorname{Id},$$

on obtient

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T + (u_0 \cdot \nabla) v + (v \cdot \nabla) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega_0 \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega_0 \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma; \end{cases}$$

on tire les conditions aux limites sur  $\Sigma_0$  en procédant de la même façon. Il vient

$$\begin{cases} v \cdot \vec{n}_0 = \rho' u_0 \cdot \vec{t}_0 - \rho \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}_0} \cdot \vec{n}_0 \\ T \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 + \rho' (\sigma_0 \vec{t}_0 \cdot \vec{t}_0 - \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0). \end{cases}$$

Pour la dimension supérieure, il faut utiliser des coordonnées locales sur  $\Sigma_0$  et on trouve

$$\vec{n}_{t\rho} = \vec{n}_0 - t \nabla \rho.$$

Nous résumons ces calculs dans le théorème suivant (voir [1]).

**Théorème 2** *Le linéarisé de l'application*

$$\rho \mapsto \mathcal{G}_0(\rho) = \sigma \vec{n} \cdot \vec{n}|_{\Sigma_\rho}$$



est l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par

$$\mathcal{L}\rho = \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$$

où  $\tau$  est la solution de :

$$\begin{cases} \tau = (\nabla v + \nabla v^T) - q \text{Id} \\ -\text{div } \tau + (u_0 \cdot \nabla) v + (v \cdot \nabla) u_0 = 0 \\ \text{div } v = 0 \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \\ v \cdot \vec{n}_0 = \frac{d}{ds}(\rho u_0) \text{ sur } \Sigma_0 \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 + \rho'(-\sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \sigma_0 \vec{t}_0 \cdot \vec{t}_0) \text{ sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

en dimension 2.

En dimension 3, les deux dernières équations sont remplacée par le système

$$\begin{cases} v \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial}{\partial t_0^1}(\rho u_0^1) + \frac{\partial}{\partial t_0^2}(\rho u_0^2) \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^1 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^1 - \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{t}_0^1 \cdot \vec{t}_0^1 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{t}_0^1 \cdot \vec{t}_0^2 \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^2 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^2 - \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{t}_0^2 \cdot \vec{t}_0^1 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{t}_0^2 \cdot \vec{t}_0^2. \end{cases}$$

où  $u_0 = u_0^1 \vec{t}_0^1 + u_0^2 \vec{t}_0^2$  et  $(\vec{t}_0^1, \vec{t}_0^2)$  est le repère local tangent à la surface.

### 3 Etude de l'inversibilité du linéarisé

Pour étudier l'équation  $\mathcal{G}(\rho) = \text{cte}$ , nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites dans le cadre fonctionnel défini précédemment. Il est donc indispensable d'étudier le linéarisé de l'application non linéaire  $\mathcal{G}$ .

#### 3.1 Etude naïve

##### 3.1.1 Etude d'un cas particulier

On considère le cas d'un écoulement dans un cylindre horizontal infiniment long en rotation autour de son axe. Dans le système de coordonnées décrit Figure 5, la force appliqué est  $-G\vec{e}_2$  et la vitesse au bord  $\omega(-y, x)$ . Il existe une solution particulière dans le cas où la vitesse angulaire est infiniment grande ou bien le paramètre  $G$  infiniment petit (c'est-à-dire lorsque " $G/\omega = 0$ "). Dans ce cas, toute la masse de fluide effectue une rotation de corps solide,  $\Sigma_0$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $r_0$  défini par  $\pi(1 - r_0^2) = r_0$  et la solution est donnée par  $u_0(x, y) = \omega(-y, x)$  dans  $\Omega_0$ .

Maintenant, on perturbe le système.

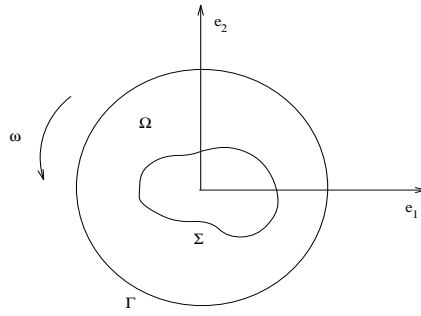


FIG. 5 -

**Problème linéarisé** Dans cette situation, l'opérateur linéarisé  $\mathcal{L}$  donné par le Théorème 2 a pour expression  $\mathcal{L}\rho = \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$  où  $(v, q)$  est solution du système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \tau + \omega \left( \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \nabla \right) v + \omega \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \\ v \cdot \vec{n}_0 = \omega \frac{d\rho}{d\theta} \text{ sur } \Sigma_0 \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = 0 \text{ sur } \Sigma_0. \end{cases}$$

**Propriétés de l'opérateur  $\mathcal{L}$**  Comme les coefficients sont indépendants de  $\theta$ , l'opérateur  $\partial_\theta$  commute avec les équations du système précédent. On peut écrire:

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} d_\theta \text{ avec } \mathcal{M}\rho = T \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$$

où  $T = \varepsilon(V) - QId = (\nabla V + \nabla V^T)/2 - QId$  et  $(V, T)$  est solution du système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T + \omega \left( \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \nabla \right) V + \omega \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{div} V = 0 \\ V = 0 \text{ sur } \Gamma \\ V \cdot \vec{n}_0 = \omega \rho \text{ sur } \Sigma_0 \\ T \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = 0 \text{ sur } \Sigma_0. \end{cases}$$

$\mathcal{M}$  est un opérateur du type Poincaré-Steklov et il a de bonnes propriétés; en effet  $\mathcal{M}$  est positif (pour le produit scalaire dans  $L^2$ ) et envoie  $C_{per}^{m,\alpha}$  dans  $C_{per}^{m-1,\alpha}$  (ou  $H_{per}^s$  dans  $H_{per}^{s-1}$ ). En fait, on a l'estimation a priori suivante

$$\int_{\Sigma_0} \mathcal{M}\rho \cdot \rho ds \geq C |\rho|_{H^{1/2}(\Sigma_0)}^2, \quad \forall \rho \text{ régulière.}$$

Pour la montrer, on utilise la formule de Green:

$$\int_{\Sigma_0} (T \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0)(V \cdot \vec{n}_0) ds + \int_{\Gamma_0} (T \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0)(V \cdot \vec{n}_0) ds = \int_{\Omega_0} |\varepsilon(V)|^2 dx dy.$$

Cette formule se prouve en écrivant

$$\int_{\Omega_0} [-\operatorname{div} T + (u_0 \cdot \nabla)V + (V \cdot \nabla)u_0] V dx dy = 0$$

puis en intégrant par parties avec:

$$\omega \int_{\Omega} \partial_{\theta} V \cdot V = \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \partial_{\theta} \frac{V^2}{2} = 0$$

et en remarquant que

$$\int_{\Gamma_0 \cup \Sigma_0} T \vec{n}_0 \cdot V = \int_{\Sigma_0} (T \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0)(V \cdot \vec{n}_0), \quad V = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } T \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = 0.$$

Donc

$$\int_{\Sigma_0} \mathcal{M} \rho \cdot \rho = \int_{\Omega_0} |\varepsilon(V)|^2 dx dy,$$

que l'on minore par

$$C|V|_{H^1(\Omega)}^2$$

grâce à l'inégalité de Korn. La continuité de l'injection de  $H^1$  dans  $H^{1/2}(\Sigma_0)$  (théorème de trace) nous donne enfin la propriété:

$$\exists C > 0 / \forall \rho \in H_{per}^{1/2}(\Sigma_0), \quad \langle \mathcal{M} \rho, \rho \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \geq C |\rho|_{H^{1/2}}^2.$$

Nous obtenons donc une première estimation:

$$|\rho|_{H^{1/2}} \leq C |\mathcal{M} \rho|_{H^{-1/2}}$$

et donc  $\mathcal{M}$  s'étend à un isomorphisme de  $H^{1/2}$  sur  $H^{-1/2}$ .

Pour généraliser ces estimations aux espaces  $H^s$ , on utilise la méthode des translations, qui marche ici facilement parce que  $\mathcal{M}$  commute avec  $d_{\theta}$ . En fait, on a plutôt besoin d'inverser  $\mathcal{M}$  de  $C^{m-1, \alpha}$  dans  $C^{m, \alpha}$ ; ceci est possible, c'est une conséquence de la théorie elliptique appliquée au système linéarisé de Navier-Stokes.

Considérons en effet  $(v, \tau)$  comme solution du système de type Neumann:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \tau + (u_0 \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_0 = 0 \\ \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\Gamma} = 0 \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = f_1, \quad \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0 = 0. \end{cases}$$

On a l'estimation a priori

$$|v|_{C^{m, \alpha}(\bar{\Omega}_0)} \leq C |f_1|_{C^{m-1, \alpha}(\Sigma_0)}$$

pour  $m \geq 2$ , d'où on déduit aisément

$$|\rho|_{C^{m, \alpha}(\Sigma_0)} \leq C |\mathcal{M} \rho|_{C^{m-1, \alpha}(\Sigma_0)}.$$

On peut utiliser directement ce résultat pour prouver l'existence d'une interface stationnaire au voisinage de cette solution particulière, lorsque  $G/\omega$  est petit et  $\kappa = 0$ .

### 3.1.2 Discussion: outils nécessaires

On conserve la géométrie précédente sans supposer que la tension superficielle est nulle. Alors il s'agit d'étudier l'opérateur

$$\mathcal{L}^\kappa = \mathcal{L} - \kappa \frac{\partial H}{\partial \rho}(0).$$

où  $\kappa$  est a priori différent de 0. On voit que  $\mathcal{L}$  est antisymétrique alors que

$$\rho \rightarrow \frac{\partial H}{\partial \rho}(0) \cdot \rho = \frac{1}{r_0^2} \partial_\theta^2 \rho + \frac{1}{r_0^2} \rho$$

est auto-adjoint. On peut montrer que  $\mathcal{L}^\kappa$  est injectif mais l'étude directe de son inversibilité dans les espaces de Hölder est plus délicate. Pour mener à bien cette étude, on peut par exemple calculer la décomposition de Fourier de  $\mathcal{L}^\kappa \rho$  en fonction des coefficients de Fourier de  $\rho$ ; on obtient

$$(\mathcal{L}^\kappa \rho)_k = \left( \frac{i\omega}{r_0} |k|k + \kappa \frac{k^2}{r_0^2} + \lambda_k \right) \rho_k$$

où  $|\lambda_k| \leq C|k|$ . Sous cette forme, il apparaît clairement que  $(\mathcal{L}^\kappa \rho)_k$  est non nul au moins pour  $|k|$  assez grand. On peut ensuite utiliser les résultats de régularité sur les séries trigonométriques pour conclure à l'inversibilité de  $\mathcal{L}^\kappa$  dans les espaces de Hölder.

Dans des géométries plus compliquées, on doit utiliser des outils plus généraux, pour étudier l'inversibilité de cet opérateur. La section suivante est une introduction à ces techniques.

### 3.1.3 Introduction au calcul de symboles

On se place dans le cas d'un écoulement de Poiseuille-Nusselt (voir Figure 2).

$$\begin{cases} u_0 = (G \sin \alpha (y_0 y - \frac{y^2}{2}), 0) \\ P_0 = G \cos \alpha (y_0 - y), \end{cases}$$

$G > 0$ .

L'application qui à  $\rho$  associe  $\sigma \vec{n} \cdot \vec{n}$  est différentiable de  $C_{exp}^{m,\alpha}$  dans  $C_{exp}^{m-2,\alpha}$  où  $C_{exp}^{m,\alpha}$  désigne un espace de fonctions ayant une décroissance exponentielle à l'infini convenable (voir [3], [30]). On va, comme précédemment, étudier le linéarisé de  $\mathcal{L}$  en profitant, encore une fois, de l'invariance par translation dans la direction  $\vec{e}_1$ .

On a  $\mathcal{L}\rho = (G \cos \alpha)\rho + \tau \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$  où

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \tau + (G \cos \alpha (y_0 - y) v_2) + G \cos \alpha (y_0 - y - \frac{y^2}{2}) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \operatorname{div} v = 0, v|_{y=0} = 0 \\ v_2 = G \frac{\sin \alpha y_0^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \tau \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0. \end{cases}$$

On prend la transformée de Fourier en  $x$  (dans la direction d'invariance  $\vec{e}_1$ ) sur un problème simplifié, dans lequel la première équation est remplacée par  $-\operatorname{div} T = 0$ . On note  $\tilde{\mathcal{L}}$  l'opérateur qui à  $\rho$  associe  $T \vec{n} \cdot \vec{n}$  où  $T$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta V_1 + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\Delta V_2 + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \\ V_2 = G \sin \alpha \frac{y^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \text{ en } y = 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in [0, +\infty[$ . On peut voir que  $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + B$  où  $B$  est continu de  $C^{m,\alpha}$  dans  $C^{m-1,\alpha}$ . En effet, cette transformation revient à négliger les terme d'ordre 1 dans les équations à l'intérieur du domaine pour  $\mathcal{L}$ , à remplacer la condition sur le bord rigide par une condition en  $-\infty$  et finalement à translater le domaine de  $y_0$  vers le bas. On peut alors calculer explicitement  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

En effectuant une transformée de Fourier en  $x$ , on obtient

$$\begin{cases} (\partial_y^2 \hat{V}_1 - |\xi|^2 \hat{V}_1) - i\xi \hat{p} = 0 \\ (\partial_y^2 \hat{V}_2 - |\xi|^2 \hat{V}_2) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ i\xi \hat{V}_1 + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial y} = 0 \\ \hat{V}_2 = iG \sin \alpha \frac{y_0^2}{2} \xi \hat{\rho} \text{ en } y = 0 \\ \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial y} + i\xi \hat{V}_2 = 0 \text{ en } y = 0, \end{cases}$$

et on doit calculer  $\tau \widehat{\vec{e}_2} \cdot \vec{e}_2 = \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial y} - \hat{p}$ . Or  $(\partial_y^2 - |\xi|^2)^2 \hat{V}_2 = 0$ , donc  $\hat{V}_2(\xi, y) = (A + By)e^{-|\xi|y}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Grâce aux conditions aux limites, on obtient

$$B = G \sin \alpha \frac{y_0^2}{2} i\xi \cdot \hat{\rho} \text{ et } -\frac{\partial^2 \hat{V}_2}{\partial y^2} - |\xi|^2 \hat{V}_2 = 0 \text{ en } y = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial y} = e^{-|\xi|y}(A - |\xi|B - A|\xi|y) \\ \frac{\partial^2 \hat{V}_2}{\partial y^2} = e^{-|\xi|y}(-2A|\xi| + |\xi|^2B + A|\xi|^2y). \end{cases}$$

Il vient

$$|\xi|^2B - 2A|\xi| + |\xi|^2B = 0 \implies A = |\xi|B.$$

Donc

$$\hat{V}_2(\xi, y) = G \sin \alpha \frac{y_0^2}{2} i\xi \cdot \hat{\rho}(1 + |\xi|y)e^{-|\xi|y} \text{ et } \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

On calcule maintenant la pression. On a

$$-\xi^2 \hat{p} = (\partial_y^2 - |\xi|^2) \left( -\frac{\partial \hat{V}_2}{\partial y} \right)$$

d'où

$$\hat{p} = \frac{\partial_y(\partial_y^2 - |\xi|^2)\hat{V}_2}{\xi^2},$$

et

$$\hat{p}(\xi, 0) = 2A = iG \sin \alpha y_0^2 \xi |\xi| \hat{\rho}.$$

On obtient finalement pour  $\hat{\mathcal{L}}$ :

$$\widehat{\mathcal{L}}\rho = -iG \sin \alpha y_0^2 \xi |\xi| \hat{\rho}(\xi),$$

ce qui donne pour  $\mathcal{L}$ :

$$\widehat{\mathcal{L}}\rho = -iG \sin \alpha y_0^2 \xi |\xi| \hat{\rho}(\xi) + \lambda(\xi)\hat{\rho}(\xi),$$

où  $|\lambda(\xi)| \leq C|\xi|$ .

Pour  $|\xi|$  assez grand, le symbole de  $\mathcal{L}$ , soit  $-iG \sin \alpha y_0^2 \xi |\xi| + \lambda(\xi)$ , est non nul et on retrouve bien un comportement asymptotique en fréquences similaire au cas du cylindre.

Si on considère  $\mathcal{L}^\kappa$ , on a

$$\frac{\partial H}{\partial \rho}(0) \cdot \rho = \rho''$$

et donc

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \rho}(0) \cdot \rho = -|\xi|^2 \hat{\rho}.$$

Il vient

$$\mathcal{L} - \kappa \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \rho}(0) \rho = \left( -Ci\xi|\xi| + \kappa|\xi|^2 \right) \hat{\rho} + \lambda(\xi)\hat{\rho}.$$

Il est clair que le symbole de  $\mathcal{L}^\kappa$  est non nul pour  $|\xi|$  grand et ce, pour toute valeur de  $\kappa$ : cette propriété sera typique de la dimension 2.

Si maintenant on considère l'écoulement sur un plan incliné en trois dimensions, le même calcul nous conduit à l'expression ci-dessous pour le symbole de  $\mathcal{L}^\kappa$ :

$$\widehat{\mathcal{L}^\kappa \rho}(\xi) = -i(G \sin \alpha y_0^2 \xi_1)(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} \hat{\rho} + \kappa(\xi_1^2 + \xi_2^2) \hat{\rho}.$$

il apparaît donc clairement que les cas  $\kappa = 0$  et  $\kappa \neq 0$  conduisent à des situations mathématiquement différentes. En effet, dans le cas  $\kappa = 0$ , le symbole de  $\mathcal{L}^\kappa$  s'annule sur des ensembles non bornés (sur  $\xi_1 = 0$ ).

Nous allons préciser ces remarques élémentaires grâce aux opérateurs pseudodifférentiels.

## 3.2 Utilisation des opérateurs pseudodifférentiels

### 3.2.1 Rappels

Pour plus de détails, on renvoie à [5] et [41].

**Notions élémentaires sur les opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$**

**Définition 1** (i) Soit  $a(x, \xi)$  une fonction de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  à valeurs complexes; l'opérateur  $A$  qui à  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  associe

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

est appelé l'opérateur pseudodifférentiel de symbole  $a$ .

(ii) On dit que  $a$  est dans la classe de symboles  $S^m$ , pour  $m \in \mathbb{N}$  si et seulement si  $a$  vérifie les estimations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous } \alpha, \beta \text{ multi-indices, il existe une constante } K \text{ telle que} \\ \forall x, \xi, \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq K(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}. \end{array} \right.$$

Alors  $A$  est défini et continu de l'ensemble des fonctions à décroissance rapide  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  dans lui-même.

### Exemples élémentaires

**A-** Opérateurs différentiels à coefficients constants:  $A = \sum a_\alpha D^\alpha$ . Si  $\alpha$  est un multi-indice, on note  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_N^{\alpha_N}$ . Alors

$$Af = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha D_x^\alpha f = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\alpha \in J} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

$A$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole

$$a(\xi) = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha (i\xi)^\alpha$$

et si  $m = \max_{\alpha \in J} |\alpha|$ , alors  $A \in S^m$  car

$$\begin{cases} |a(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^m \\ |D_\xi^p a(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^{m-p}. \end{cases}$$

**B-**  $Bf(x) = m(x)f(x)$  où  $m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Donc

$$Bf(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} m(x) \hat{f}(x) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

$B$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole  $m(x)$  et

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \exists K, |m(x)| \leq K(1 + |\xi|)^p$$

et on note  $m \in S^0$ .

**C-** On pose

$$Cf(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Alors  $C$  a pour symbole  $\varphi(\xi)$ , appelé le multiplicateur de Fourier. Et si  $\varphi$  satisfait

$$\forall \alpha, \exists K, |D_\xi^\alpha \varphi| \leq K(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

alors  $\varphi \in S^m$ . Si  $\varphi$  est à support compact, alors  $\varphi \in S^{-\infty}$  et  $C$  est un opérateur régularisant.

## Propriétés simples

**A-**

$$\begin{aligned} (A\partial_{x_k} - \partial_{x_k}A) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \left[ a(x, \xi) i\xi_k \hat{f}(\xi) - \left( \frac{\partial a}{\partial x_k}(x, \xi) + a(x, \xi) i\xi_k \right) \hat{f}(\xi) \right] e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^N} \int \frac{\partial a}{\partial x_k}(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = Bf(x) \end{aligned}$$

où le symbole de  $B$  est  $-\frac{\partial a}{\partial x_k}$ .



**B-**

$$\begin{aligned} [(Ax_k - x_k A) f](x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int [a(x, \xi) \widehat{x_k f}(\xi) - x_k a(x, \xi) \hat{f}(\xi)] e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int a(x, \xi) i \partial_{\xi_k} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi - \frac{1}{(2\pi)^N} \int x_k a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \end{aligned}$$

car  $\widehat{x_k f} = i \partial_{\xi_k} \hat{f}$  et donc

$$\begin{aligned} [(Ax_k - x_k A) f](x) &= \frac{x_k}{(2\pi)^N} \int a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi - \frac{i}{(2\pi)^N} \int \partial_{\xi_k} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^N} \int x_k a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^N} \int \partial_{\xi_k} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = -i C f(x), \end{aligned}$$

où le symbole de  $C$  est  $\partial_{\xi_k} a$ .

**Remarque 4** On pourra se contenter de supposer que  $a(x, \xi)$  régulier en  $(x_0, \xi_0)$  pour  $\xi_0 \neq 0$ .

**Cas particulier: les symboles homogènes** On sous-entend que ces symboles sont homogènes en  $\xi$ , c'est-à-dire que

$$a(x, t\xi) = t^p a(x, \xi) \text{ pour } |\xi| \geq 1, \forall t > 0.$$

Dans ce cas, si  $a(x, \omega)$  (où  $|\omega| = 1$ ) est régulier, alors  $a \in S^p$  car  $a(x, \xi) = |\xi|^p a(x, \frac{\xi}{|\xi|})$  et on obtient les estimations désirées.

**Remarque 5** En général, on effectue un développement des symboles en ordre décroissant.

**Définition 2** On dit qu'un symbole  $a(x, \xi) \in S^m$  est équivalent à  $\sum_0^\infty a_j$  où  $a_j \in S^{m_j}$ , avec  $m_0 = m$ ,  $m_j < m_{j-1}$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} m_j = -\infty$ , si et seulement si,

$$\forall j_0, a - \sum_0^{j_0} a_j \in S^{m_{j_0+1}}.$$

**Remarque 6** Si  $a \sim \sum a_j$  où les  $a_j$  sont homogènes en  $\xi$ , alors on dit que  $a$  est un symbole classique.

**Exemple de symbole homogène**

$$\rho \mapsto \int_{\mathbb{R}} i\xi |\xi| \hat{\rho}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Le symbole est  $i\xi |\xi| \in S^2$  homogène de degré 2.

**Construction d'un symbole**  $a \sim \sum a_j$  où les  $a_j$  sont donnés dans  $S^{m_j}$  et  $m_j \searrow -\infty$ .

On utilise la construction du

**Lemme 1** (de Borel)

Soit  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite réelle (ou complexe); il existe une fonction  $f \in C^\infty$  à valeurs réelles telle que

$$\forall k, f^{(k)}(0) = b_k.$$

Le principe de la construction est le suivant: on écrit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!} \chi(\lambda_j x)$$

où  $\chi$  est une fonction à support dans  $[0, 1[$  qui vaut 1 entre 0 et  $1/2$  et  $(\lambda_j)_j$  est une suite à choisir qui converge vers l'infini. On étudie alors la convergence normale de la série des dérivées. La convergence simple est triviale puisque  $\lambda_j \rightarrow \infty$ . En effet, pour  $x = 0$ ,  $f(0) = b_0$  et pour  $x \neq 0$  fixé, la série ne comporte qu'un nombre fini de termes et donc les séries des dérivées converge.

D'autre part, chaque terme a pour dérivée  $k$ -ième une expression obtenue par la formule de Leibnitz:

$$\sum_{p=0}^k C_p^k b_j \frac{x^{j-p}}{(j-p)!} \partial^{(k-p)} \chi(\lambda_j x) \lambda_j^{k-p}.$$

Le terme en facteur de  $C_p^k b_j \lambda_j^{k-p}$  est borné indépendamment de  $p$  par une constante multipliée par  $\lambda_j^{p-j}/(j-p)!$ , et donc la dérivée  $k$ -ième du terme général est majorée par

$$C |b_j| \lambda_j^{k-j} \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{(j-p)!}.$$

On fixe alors  $k$  et on regarde la queue de la série, pour  $j \geq k+1$ . Ce terme est majoré par

$$\frac{C |b_j|}{\lambda_j (j-k)!} \sum_{p=0}^k C_p^k = \frac{C |b_j|}{\lambda_j (j-k)!} 2^k$$

et donc on a la convergence normale pour  $\lambda_j > 1 + |b_j|$ .

**Proposition 2** Si les  $a_j$  sont donnés dans  $S^{m_j}$  où  $m_j \searrow -\infty$ , alors il existe  $a \in S^{m_0}$  tel que  $a \sim \sum a_j$ .

La construction de  $a$  se fait de la même façon que ci-dessus; on écrit  $a(x, \xi) = \sum a_j(x, \xi) \chi(\varepsilon_j \xi)$  où la fonction  $\chi$  est à support dans  $R_*^N$ , vaut 1 pour  $|\xi| \geq 1$  et  $(\varepsilon_j)_j$  est une suite décroissant vers 0 à choisir de sorte à obtenir des estimations pour que les séries des dérivées soient normalement convergentes. A  $\xi$  fixé,  $\varepsilon_j \xi$  converge vers 0 et donc la série définie ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes. A  $j$  fixé et quand  $|\xi|$  tend vers l'infini,  $\chi$  tend vers 1 (et donc les termes de la série ont le même comportement que les  $a_j$  à l'infini).

### Résultat sur le calcul symbolique des opérateurs pseudodifférentiels

Il s'agit de la composition des opérateurs.

**Proposition 3** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs de symboles  $a \in S^{m_1}$  et  $b \in S^{m_2}$ . Alors  $AB$  est un opérateur pseudodifférentiel et son symbole s'écrit  $p = ab + q$  où  $q$  est d'ordre inférieur à  $ab$  ( $q \in S^{m_1+m_2-1}$ ).*

**Définition 3** *Si  $a \sim \sum_{-\infty}^{j_0} a_j$  alors  $a_{j_0}$  est appelé le symbole principal de l'opérateur associé à  $a$ .*

**Remarque 7**  *$AB$  a pour symbole principal le produit des symboles principaux de  $A$  et  $B$ .*

### Opérateurs elliptiques

**Définition 4** *Soit  $A$  un opérateur de symbole  $a \in S^m$ ;  $A$  est elliptique si et seulement si  $a(x, \xi) \neq 0$  pour  $|\xi|$  assez grand (pour  $|\xi| \geq 1$ , par exemple).*

**Remarque 8** *Dans la pratique, il suffit de vérifier la propriété ci-dessus pour le seul symbole principal.*

**Proposition 4** *Si  $A$  est elliptique, on peut l'inverser modulo un opérateur régularisant, c'est-à-dire qu'il existe  $B$  de symbole  $b \in S^{-m}$  tel que  $(BA - I) \in S^{-\infty}$ . On dit que  $B$  est une paramétrix de  $A$ , c'est-à-dire un inverse approché de  $A$ .*

**Construction de  $B$**  On construit des  $b_j$  par récurrence puis on relève par équivalence.

Soit  $F(z) = 1/z$  pour  $|z| \geq 1$ ,  $F \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ . On pose

$$\tilde{b}_{-m}(x, \xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{-\frac{m}{2}} F\left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{-\frac{m}{2}} a(x, \xi)\right).$$

On vérifie que

$$\begin{cases} \tilde{b}_{-m}(x, \xi) = \frac{1}{a(x, \xi)} \text{ pour } |\xi| \geq 1 \\ \tilde{b}_{-m}(x, \xi) \in S^{-m}. \end{cases}$$

Car si  $a < C|\xi|^m$ ,  $(1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} a(x, \xi) \in S^0$  et  $F \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  donc  $F \left( (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} a(x, \xi) \right) \in S^0$  également. Donc  $\tilde{b}_{-m} \in S^{-m}$  et pour  $|\xi|$  assez grand, on a  $\tilde{b}_{-m}(x, \xi) = 1/a(x, \xi)$ . Soit  $\tilde{B}_{-m}$  l'opérateur associé au symbole  $\tilde{b}_{-m}$ ; alors  $\tilde{B}_{-m}A$  a pour symbole  $\tilde{b}_{-m}a = 1 + \chi(x, \xi)$  où  $\chi$  est à support compact en la variable  $\xi$  et  $\chi \in S^{-\infty}$ . Donc  $\tilde{B}_{-m}A$  a pour symbole principal 1. On note  $\tilde{B}_{-m}A = I + R_{-1}$  où  $R_{-1}$  a pour symbole  $r_{-1}(x, \xi) \in S^{-1}$ . Pour procéder par récurrence, écrivons:

$$B^{(1)} = \tilde{B}_{-m} + C^{(1)}.$$

Alors  $(B^{(1)}A - I) = R_{-1} + C^{(1)}A$ .

Si  $C^{(1)}$  a pour symbole principal  $-\tilde{b}_{-m}(x, \xi)r_{-1}(x, \xi)$ , l'opérateur  $(C^{(1)}A + R_{-1})$  a pour symbole

$$r_{-1}(x, \xi)[1 - a(x, \xi)\tilde{b}_{-m}(x, \xi)] + r_{-2}(x, \xi),$$

avec  $r_{-2} \in S^{-2}$ ; comme  $a\tilde{b}_{-m} = 1$  pour  $|\xi| \geq 1$ , on obtient bien que  $(C^{(1)}A + R_{-1})$  a un symbole dans  $S^{-2}$ . On construit alors une suite  $B^{(k)}$  par récurrence telle que  $(B^{(k)}A - I)$  a un symbole dans  $S^{-k-1}$ .

On trouve enfin un opérateur équivalent à  $B^{(j)}$ . La régularisation est valide à droite et à gauche, en fait, car on ne regarde que les symboles principaux.

**Proposition 5** (*continuité des opérateurs pseudodifférentiels sur les espaces fonctionnels; voir [5] et [41]*) Si  $a \in S^m$  alors l'opérateur  $A$  associé est continu de  $H^s$  dans  $H^{s-m}$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Ici,  $H^s$  est l'espace de Sobolev sur  $L^2$  d'ordre  $s$  et on note  $A \in \mathcal{L}(H^s, H^{s-m})$ .

En général, on n'a pas la même propriété pour les espaces de Hölder, c'est-à-dire que

$$A \notin \mathcal{L}(C^{s,\alpha}, C^{s-m,\alpha})$$

même si  $s > m$ ; il y a en effet un problème de comportement à l'infini. On a seulement la régularité locale.

On va maintenant appliquer cette théorie à l'étude du linéarisé de  $\mathcal{G}$ .

### 3.2.2 Calcul du symbole principal

On rappelle l'expression du linéarisé de  $\mathcal{G}_0$ :

$$\mathcal{L} : \rho \mapsto \tau \vec{n} \cdot \vec{n} + \rho \left( \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 \right)$$

où  $(\tau, v)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = (\nabla v + \nabla v^T) - q \text{Id} \\ -\text{div } \tau + (u_0 \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_0 = 0 \\ \text{div } v = 0 \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \\ v \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial}{\partial t_0^1}(\rho u_0^1) + \frac{\partial}{\partial t_0^2}(\rho u_0^2) \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^1 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^1 - \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{t}_0^1 \cdot \vec{t}_0^1 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{t}_0^1 \cdot \vec{t}_0^2 \\ \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^2 = -\rho \frac{\partial \sigma_0}{\partial \vec{n}_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{t}_0^2 - \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^1} \sigma_0 \vec{t}_0^2 \cdot \vec{t}_0^1 + \frac{\partial \rho}{\partial t_0^2} \sigma_0 \vec{t}_0^2 \cdot \vec{t}_0^2. \end{array} \right. \quad (11)$$

$\mathcal{L}$  est un opérateur pseudodifférentiel sur la variété  $\Sigma$ , ce qui veut dire que dans toutes les cartes locales, l'opérateur transporté est pseudodifférentiel sur  $\mathbb{R}^2$  (voir [5]). On peut calculer son symbole principal qui est défini de manière intrinsèque.

On a vu que:  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall x \in \bar{\Omega}_0$ ,

$$d(x, \Sigma_0) < \varepsilon \implies \exists!(M, \lambda) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}_-, \quad x = M + \lambda \vec{n}_0(M).$$

On définit un recouvrement de  $\bar{\Omega}_0$ :

$$\bar{\Omega}_0 \subset \bigcup_{j=0}^N \omega_j \quad \text{où } \omega_0 = \{x \in \bar{\Omega}_0 / d(x, \Sigma_0) \geq \varepsilon/4\}$$

et les  $\omega_j$ , pour  $j = 1$  à  $N$ , sont des boules centrées en des points de  $\Sigma_0$  et de rayon  $r = \varepsilon/2$ .

On construit des fonctions  $\varphi_j$  telles que  $\text{supp } \varphi_j$  est relativement compact dans  $\omega_j$  et telles que  $\sum \varphi_j = 1$ . Pour ce faire, on construit d'abord les fonctions  $\tilde{\varphi}_j$  à support relativement compact dans les  $\omega_j$  qui sont  $C^\infty$  et qui valent 1 à l'intérieur et 0 à l'extérieur. On pose ensuite

$$\varphi_j = \frac{\tilde{\varphi}_j}{\sum_{j=0}^N \tilde{\varphi}_j}.$$

Alors  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ ,  $\sum \varphi_j = 1$  et  $\text{supp } \varphi_j \subset \text{supp } \tilde{\varphi}_j \subset \subset \omega_j$ . On a ainsi créé une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Si  $v$  est une solution du problème linéarisé (11), alors  $v = \sum_{j=0}^N v \varphi_j = \sum_{j=0}^N v_j$  où  $v_j$  est à support compact dans  $\omega_j$  et  $\rho \mapsto (\tau_j \vec{n} \cdot \vec{n})$  où  $\tau_j = (\nabla v_j + \nabla v_j^T) - p_j \text{Id}$  est une décomposition de l'opérateur  $\rho \mapsto (\tau \vec{n} \cdot \vec{n})$ .

Dans chaque  $\omega_j$ , pour  $j \geq 1$ , on va utiliser les coordonnées spéciales  $x \rightarrow (M, \lambda)$  définies par projection sur  $\Sigma_0$  et récrire les équations pour  $v_j$  dans ces coordonnées.

On définit un paramétrage local sur la surface:  $(u, v) \mapsto M(u, v) \in \Sigma_0$ , et on définit les fonctions  $\phi_j$  sur  $\bar{\Omega}_0$  par  $\phi_j(x) = \phi_j(u, v, \lambda)$  où  $x \in \omega_j$  et  $x = M(u, v) + \lambda \vec{n}_0$ . A  $j \geq 1$  fixé (le cas  $j = 0$  est trivial), on associe à  $v_j(x)$ , la fonction  $\tilde{v}_j(u, v, \lambda)$  définie par l'identification et à  $\tau_j \vec{n} \cdot \vec{n}|_{\Sigma_0}$ , on associe  $T_{j|_{\lambda=0}}$  dans les coordonnées  $(u, v)$ . L'opérateur  $\rho \mapsto T_{j|_{\lambda=0}}$  est linéaire en  $\rho$ . Le symbole principal de  $\rho \mapsto \tau \vec{n} \cdot \vec{n}$  est la fonction qui dans ces cartes locales a pour expression le symbole de l'opérateur  $\rho \mapsto T_{j|_{\lambda=0}}$ .

On va choisir un paramétrage de  $\Sigma_0$  qui permettra de définir le symbole principal le plus simplement possible.

On va faire ici une remarque importante pour la suite des calculs.

Appelons  $\mathcal{M}$  (voir l'exemple Section 1.3.1) l'opérateur défini par

$$\mathcal{M}h = T\vec{n} \cdot \vec{n}$$

où  $(V, Q, T)$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T = 0 \text{ dans } \Omega_0 \\ \operatorname{div} V = 0 \text{ dans } \Omega_0 \\ V = 0 \text{ sur } \Gamma \\ V \cdot \vec{n} = h \text{ sur } \Sigma_0 \\ T\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \quad \forall \vec{t} \text{ tangent à } \Sigma_0. \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{L}\rho = \mathcal{M}(\nabla(\rho u_0)) + \mathcal{N}\rho$  où  $\mathcal{N}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 (c'est-à-dire  $\mathcal{N} \in S^1$ ). En particulier, le symbole principal de  $\mathcal{L}$  est égal à  $i\xi \cdot u_0(x)m(x, \xi)$  où  $m(x, \xi)$  est le symbole principal de  $\mathcal{M}$ . Il suffit pour s'en convaincre de former la différence  $\mathcal{L}\rho - \mathcal{M}(\nabla(\rho u_0))$  et d'étudier la régularité des seconds membres du système de type Stokes qui la définit.

Donc, finalement, on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} -\Delta V + \nabla Q = 0 \\ \operatorname{div} V = 0 \\ V \cdot \vec{n} = h \text{ sur } \Sigma_0 \\ T\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \end{cases} \quad (12)$$

où  $h$  est une fonction de  $C^\infty(\Sigma_0)$ . C'est le symbole principal de l'opérateur  $h \mapsto \mathcal{M}h$  qu'il faut calculer.

**Remarque 9** *Grâce à la linéarité des opérateurs étudiés, on pourra négliger systématiquement les dérivées qui ne sont pas d'ordre le plus élevé dans les équations, et ce parce qu'on s'intéresse uniquement au symbole principal de  $\mathcal{L}$ .*



et utilisons un développement de Taylor de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  pour les seconds membres, par exemple:

$$A(x_1, x_2, \lambda) - A(x_1, x_2, 0) = \lambda \tilde{A},$$

où  $\tilde{A}$  est un opérateur différentiel à coefficients réguliers.

Donc les seconds membres de (13) sont de la forme  $\lambda F_i$ , où  $(F_1, F_2, 0, F_4) \in C^{m-2, \alpha} \times C^{m-1, \alpha} \times C^{m, \alpha} \times C^{m-1, \alpha}$ .

On appelle  $(\tilde{V}, \tilde{Q})$  la solution de (13) obtenue pour  $\lambda = 1$ . Alors

$$(V - W, Q - P) = \lambda(\tilde{V}, \tilde{Q}) + \text{reste}$$

et on vérifie facilement que ce reste est plus régulier que  $(V, Q)$ . Le facteur  $\lambda$  devant  $(\tilde{V}, \tilde{Q})$  montre que, à des termes plus réguliers près,  $(V, Q)$  et  $(W, P)$  ont même contrainte normale.

**Calcul des termes pertinents** On rappelle la définition du laplacien et de la divergence:

$$\Delta = \text{div}(\nabla) \text{ et } \text{div} = \text{tr}(\nabla).$$

Ceci permet d'avoir des définitions intrinsèques des quantités  $\Delta u$ ,  $\nabla \cdot u$  et  $\nabla p$ . Le gradient, quant à lui, est donné par définition de la façon suivante: si  $q$  est une fonction scalaire, on peut écrire  $dq = (\text{grad } q, d\vec{M})$  où  $\text{grad}$  est une forme linéaire sur  $d\vec{M}$  et  $d\vec{M}$  est la différentielle de l'application qui à  $(x_1, x_2, \lambda)$  associe  $M(x_1, x_2, \lambda)$ . Lorsqu'on a muni  $\Sigma_0$  d'une métrique riemannienne,  $\text{grad } q$  est associé à un vecteur tangent à  $\Sigma_0$ .

Plus généralement, pour un champ de vecteurs  $U$ :  $dU = (\text{grad } U, d\vec{M})$ . C'est un opérateur linéaire appliqué à  $d\vec{M}$ . La matrice de  $\text{grad } U$  dans la base locale est notée  $\nabla U$ . Pour un champ de tenseurs d'ordre 2 (matrice), on a la même définition.

$$\text{Pour } M(x_1, x_2, \lambda) = \overline{M}(x_1, x_2) + \lambda \vec{n}(\overline{M}),$$

$$d\vec{M} = E\vec{e}_1 dx_1 + E\vec{e}_2 dx_2 + \vec{n} d\lambda + \lambda d\vec{n}.$$

Si  $q$  est la pression dans le tenseur des contraintes,  $\nabla q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{n}$  avec

$$\begin{cases} a = \frac{1}{E} \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ b = \frac{1}{E} \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ c = \frac{\partial q}{\partial \lambda}. \end{cases}$$



En écrivant  $dV = (\text{grad } V, d\vec{M})$ , on trouve après calculs

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \frac{\partial V^1}{\partial x_1} & \frac{1}{E} \frac{\partial V^1}{\partial x_2} & \frac{\partial V^1}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{E} \frac{\partial V^2}{\partial x_1} & \frac{1}{E} \frac{\partial V^2}{\partial x_2} & \frac{\partial V^2}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{E} \frac{\partial V^3}{\partial x_1} & \frac{1}{E} \frac{\partial V^3}{\partial x_2} & \frac{\partial V^3}{\partial \lambda} \end{pmatrix} + \lambda(\dots) + (\text{termes sans dérivée de } V).$$

Et, de même, on trouve

$$\Delta V = \begin{pmatrix} \frac{1}{E^2} \left( \frac{\partial^2 V^1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V^1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 V^1}{\partial \lambda^2} \\ \frac{1}{E^2} \left( \frac{\partial^2 V^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 V^2}{\partial \lambda^2} \\ \frac{1}{E^2} \left( \frac{\partial^2 V^3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V^3}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 V^3}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} + \lambda(\dots) + (\text{dérivées d'ordre inférieur à 1}).$$

On peut maintenant récrire l'équation pour  $(V, Q)$  dans les coordonnées locales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{1}{E^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] V + \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{1}{E} \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial V^1}{\partial x_1} + \frac{\partial V^2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial V^3}{\partial \lambda} = 0 \\ V^3 = g \\ \frac{\partial V^1}{\partial \lambda} + \frac{1}{E} \frac{\partial V^3}{\partial x_1} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial V^2}{\partial \lambda} + \frac{1}{E} \frac{\partial V^3}{\partial x_2} \Big|_{\lambda=0} = 0 \end{array} \right.$$

(les dernières équations signifient  $(\nabla V + \nabla V^T)\vec{n} \cdot \vec{e}_i = 0$  pour  $i = 1, 2$ ). Rappelons qu'on cherche à calculer  $(\nabla V + \nabla V^T)\vec{n} \cdot \vec{n} = \mathcal{M}g$ . On a

$$\mathcal{M}g = \frac{\partial V^3}{\partial \lambda} - Q.$$

On effectue le changement de variable suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 \\ x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 \\ \lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{E} \end{array} \right.$$

et on pose  $\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\lambda}) = V(x_1, x_2, \lambda)$  et  $\tilde{Q}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\lambda}) = Q(x_1, x_2, \lambda)$ .

On remarque par exemple que, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \right)$$

et donc les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$  coïncident pour  $\lambda = 0$ .

Finalement,  $\mathcal{M}$  a pour symbole principal celui de l'opérateur

$$g \mapsto \frac{1}{E} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\lambda}} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} - \tilde{Q} \Big|_{\tilde{\lambda}=0}$$

où

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{V} + \nabla \tilde{Q} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{V} = 0 \\ \tilde{V}^3 = g \\ \frac{\partial \tilde{V}^3}{\partial \tilde{x}_1} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} + \frac{\partial \tilde{V}^1}{\partial \tilde{\lambda}} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} = \frac{\partial \tilde{V}^3}{\partial \tilde{x}_2} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} + \frac{\partial \tilde{V}^2}{\partial \tilde{\lambda}} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} = 0 \end{cases}$$

dont on peut calculer le symbole principal explicitement (voir exemple Section 3.1.3).

Tous calculs faits, on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}^3}{\partial \tilde{\lambda}} \Big|_{\tilde{\lambda}=0} = 0 \\ \hat{Q}(\xi_1, \xi_2, 0) = -2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} \hat{g}(\xi_1, \xi_2). \end{cases}$$

**Proposition 6** *On considère l'application  $\mathcal{M} : g \mapsto \tau \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$  où  $\tau = (\nabla v + \nabla v^T) - pId$  et  $v$  vérifie le système complet linéaire*

$$\begin{cases} -\Delta v + (u_0 \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u_0 + \nabla p = 0 \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v \cdot \vec{n} = g \\ \tau \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \quad \forall \vec{t} \text{ tangent à la surface.} \end{cases}$$

L'opérateur  $\mathcal{M}$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal  $m(x, \xi) = -2|\xi|$ , défini indépendamment de la métrique.

### Application au problème linéarisé de Navier-Stokes

**Théorème 3** *L'application  $\rho \mapsto \mathcal{L}\rho$ , où  $\mathcal{L}$  est le linéarisé par rapport au domaine de la contrainte normale, est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal  $\varphi(x, \xi) = -\frac{2i}{E}|\xi|(u_0 \cdot \xi)$ .*

**Théorème 4** *Soit  $\mathcal{F}(\rho) = \sigma \vec{n} \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_\rho} - \kappa H$ . Alors le linéarisé de  $\mathcal{F}$  en  $\rho = 0$ , soit  $\mathcal{L}^\kappa$ , est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal*

$$\psi(x, \xi) = -2\frac{i|\xi|}{E}(u_0(x) \cdot \xi) + \kappa|\xi|^2 F(x_1, x_2)$$

où  $F$  est une fonction  $C^\infty$  minorée par une constante strictement positive.

## 4 Application à des problèmes concrets

### 4.1 Ellipticité de $\mathcal{L}^\kappa$

Quand  $\kappa \neq 0$ , c'est-à-dire en présence de tension superficielle,  $\kappa|\xi|^2$  ne s'annule pas;  $\mathcal{L}^\kappa$  est elliptique d'ordre 2 avec  $|\psi(x, \xi)| \geq C|\xi|^2$  où  $C$  est une constante strictement positive dès que  $\Sigma_0$  est une variété compacte. Donc c'est un opérateur elliptique.

Si  $\kappa = 0$ , il y a deux cas de figure.

- Dans le cas de la dimension 3, il existe toujours une direction de fréquence (normale à  $u_0(x)$ ) dans laquelle le symbole principal s'annule. D'autre part, si  $\Sigma_0$  est du type de la sphère alors, d'après le théorème de Poincaré, il existe au moins deux points en lesquels  $u_0$  s'annule. Donc  $\mathcal{L}^0$  n'est pas elliptique.
- En dimension 2, en revanche, on a

$$|\psi(x, \xi)| = |-2i|\xi|u_0(x)\xi| \geq C|\xi|^2$$

lorsque  $\Sigma_0$  est une courbe de Jordan sur laquelle  $u_0$  ne s'annule pas. Alors  $\mathcal{L}^0$  est elliptique.

On obtient ainsi (voir [2]):

**Théorème 5** *L'opérateur  $\mathcal{L}^\kappa$  est elliptique d'ordre 2 si et seulement si l'alternative suivante est satisfaite:*

- (i)  $\kappa \neq 0$
- (ii)  $\kappa = 0$ ,  $\Sigma_0$  courbe de Jordan de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u_0 \neq 0$  sur  $\Sigma_0$ .

### 4.2 Enoncé d'un résultat général

On se donne  $\Gamma_0, V_0, g_0$  et  $F_0$  correspondant à une interface stationnaire  $\Sigma_0$  connue. Pour  $(\Gamma, V, g, F)$  proche de  $(\Gamma_0, V_0, g_0, F_0)$ , l'équation

$$\sigma \vec{n} \cdot \vec{n} - \kappa H = C \text{ sur } \Sigma \text{ avec } \int_{\Omega} dx dy = V$$

aura une solution  $(\Sigma, C)$  dès que le problème linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\kappa \rho = f_1 + c \\ \int_{\Sigma_0} \rho ds = f_2 \end{cases} \quad (14)$$

aura une solution unique  $(\rho, c) \in C^{m,\alpha} \times \mathbb{R}$  pour tout  $(f_1, f_2) \in C^{m-2,\alpha} \times \mathbb{R}$ . C'est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

En particulier dans le cas elliptique, il suffira de montrer que le système

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\kappa \rho = c \\ \int_{\Sigma_0} \rho ds = 0 \end{cases} \quad (15)$$

a pour unique solution  $\rho \equiv 0$ ,  $c = 0$  (alternative de Fredholm).

### 4.3 Exemple et contre-exemple

#### 4.3.1 Cas du cylindre en rotation

En reprenant les calculs des parties 3.1.1 et 3.1.2, on montre directement que le système (15) admet seulement la solution nulle. Comme on est dans le cas elliptique, on conclut à l'existence de surfaces libres stationnaires lorsque  $\omega/G$  est grand. En particulier, lorsque  $\kappa = 0$ , on voit que la solution stationnaire persiste.

#### 4.3.2 Cas d'une surface non compacte

On reprend l'exemple du flot le long d'un plan incliné de la section 3.1.3. L'alternative de Fredholm n'est plus vraie ici (l'injectivité n'est pas suffisante); dans le cas elliptique, les estimations locales restent vraies:

$$\mathcal{L}\rho = f \in C^{1,\alpha} \implies \rho \in C_{loc}^{3,\alpha}.$$

On doit par contre imposer une certaine décroissance à l'infini pour résoudre (14) (voir [3]), et les estimations concernant la pression sont délicates.

### 4.4 Commentaires et conclusions

#### 4.4.1 Remarque générale

La méthode utilisée repose essentiellement sur l'ellipticité de l'opérateur linéarisé. On prouve ainsi l'existence de surfaces libres régulières. On remarque une différence fondamentale entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ : dans  $\mathbb{R}^2$ , la viscosité du fluide suffit à assurer l'ellipticité de l'opérateur, alors que dans  $\mathbb{R}^3$ , la tension superficielle est indispensable.

#### 4.4.2 Remarque sur le cas " $\kappa = 0$ " dans $\mathbb{R}^3$

Dans ce cas, l'inversibilité de  $\mathcal{L}^0$  est délicate et il est nécessaire d'avoir des informations précises sur le champ des vitesses  $u_0$ ; ceci pour étudier les termes d'ordre inférieur dans le symbole de  $\mathcal{L}^0$ .

Même alors, on devra avoir recours à un théorème de type Nash-Moser pour conclure à l'existence d'une interface stationnaire.

## Références

- [1] F. Abergel: *A geometric approach to the study of stationary free surface flows for viscous liquids* Proc. Royal Soc. Edinburgh 123A, 209-229, 1993
- [2] F. Abergel: *Some recent results on the stationary Navier-Stokes flows with a free surface* Mémoire présenté pour le diplôme d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris-Sud, 1992
- [3] F. Abergel, J. Bona: *A mathematical theory for a viscous, free-surface flow over a perturbed plane* Arch. Rational Mech. Anal. 118, 71-93, 1992
- [4] F. Abergel, C. Dupaix: *Existence of smooth, stationary interfaces for Marangoni-type flows* à paraître dans Nonlinear Analysis T.M.A.
- [5] S. Alinhac, P. Gérard: *Opérateurs pseudodifférentiels et théorème de Nash-Moser* Publications Universitaires Scientifiques, Université de Paris-Sud, 1989
- [6] G. Allain: *Rôle de la tension superficielle dans la convection de Bénard* Math. Modelling Numerical Anal. 24, 153-176, 1990
- [7] J.F.G. Auchmuty: *Existence of axisymmetric equilibrium figures* Arch. Rational Mech. Anal. 65, 248-261, 1977
- [8] J. Bemelmans: *Liquid drop in a viscous fluid under the influence of gravity and surface tension* Manuscripta Math. 36, 105-123, 1981
- [9] J. Bemelmans: *Gleichgewichtsfiguren zäher Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung* Analysis 1, 241-282, 1981
- [10] J. Bemelmans, A. Friedman: *Analyticity for the Navier-Stokes equations governed by surface tension on the boundary*, J. Differential Equations 55, 135-150, 1984
- [11] T.B. Benjamin: *Wave formation in laminar flow down an inclined plane* J. of Fluid Mech. 2, 554-574, 1957
- [12] T.B. Benjamin, S.K. Pathak: *Cellular flows of a viscous liquid that partly fills a horizontal rotating cylinder* J. Fluid Mechanics 183, 399-420, 1987
- [13] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko: *GÉOMÉTRIE CONTEMPORAINE, MÉTHODES ET APPLICATIONS* vol. 1, Moscou, ed. Mir, 1982
- [14] G. Duvaut, J.L. Lions: *LES INÉQUATIONS EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE* Dunod, 1972

- [15] R. Finn: EQUILIBRIUM CAPILLARY SURFACES Berlin, ed. Springer, 1986
- [16] R.L. Fosdick, D.D. Joseph: *The free surface of a liquid between cylinders rotating at different speeds* Arch. Rational Mech. Anal. 49, 321-401, 1973
- [17] C. Gerhardt: *Boundary value problems for surfaces of prescribed mean curvature* J. Math. Pures et Appl. 58, 75-109, 1979
- [18] D. Gilbarg, N. Trudinger: ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER New York, ed. Springer, 1977
- [19] J. Hadamard: MÉMOIRE SUR LE PROBLÈME D'ANALYSE RELATIF À L'ÉQUILIBRE DES PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES 1907, Œuvres de J. Hadamard, vol. 2, Paris, ed. du CNRS, 1968
- [20] E.B. Hansen, V.A. Solonnikov: *An existence theorem for Poiseuille flow with surface tension in an open channel* Math. Methods Appl. Sci. 13, n° 1, 23-30, 1990
- [21] M. Jean: *Free surface of the steady flow of a Newtonian fluid in a finite channel* Arch. Rational Mech. Anal. 62, 1-52, 1980
- [22] O.A. Ladyzhenskaya et N.N. Uraltseva: EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE TYPE ELLIPTIQUE Dunod, Paris, 1968
- [23] L. Landau, L. Lifchitz: PHYSIQUE THÉORIQUE: MÉCANIQUE DES FLUIDES Moscou, ed. Mir, 1971
- [24] J.L. Lions, E. Magenes: PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES ET APPLICATIONS vol. 1, Paris, ed. Dunod, 1968
- [25] V.G. Maz'ya, B.A. Plamenevski: *Weighted spaces with nonhomogenous norms and boundary value problems in domains with conical points* AMS Translations 123, 89-108, 1984
- [26] T.A. McCready: *The interior Neumann problem for stationary solutions to the Navier-Stokes equations* Dissertation, Stanford University, 1968
- [27] F. Murat, J. Simon: *Sur le contrôle par un domaine géométrique* Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 1976
- [28] J.C.C. Nitsche: LECTURES ON MINIMAL SURFACES, VOL I Cambridge University Press, Cambridge, 1989
- [29] O. Oleinik, V.A. Kondrat'ev: *Hardy's and Korn's type inequalities and their applications* Rend. Nat. Appl. (7) 10, n° 3, 641-666, 1990

- [30] K.I. Piletskas, M. Spekovius-Noigebauer: *Solvability of a problem with free non compact boundary for the stationary Navier-Stokes system* Litovsk. Mat. Sb. 29, n° 3, 532-547, 1989 (part I) (trad. Lithuanian Math. J. 29, n° 3, 281-292, 1990) et n° 4, 773-784, 1989 (part II)
- [31] D.H. Sattinger: *On the free surface of a viscous fluid motion* Proc. Royal Soc. London A 349, 183-204, 1976
- [32] J.F. Scheid: *Etude théorique et numérique de l'évolution morphologique d'interfaces* Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1994
- [33] J. Simon: *Differentiation with respect to the domain in boundary-value problems* Numerical Functional Analysis and Applications 2, n° 7-8, 649-687, 1980
- [34] J. Simon: *Variations with respect to domain for Neumann conditions* Proc. of the 1986 IFAC Congress on Control of distributed parameter systems, Pasadena
- [35] V.A. Solonnikov: *General boundary value problem for Douglas-Nirenberg elliptic systems II* Proc. Steklov. Inst. Math. 92, 1966, Providence, RI, ed. AMS, 1968
- [36] V.A. Solonnikov: *Solvability of a problem on the motion of a viscous, incompressible fluid bounded by a free surface* Math. USSR Izvestija 11, 1323-1358, 1977
- [37] V.A. Solonnikov: *Solvability of a problem on plane motion of a heavy viscous incompressible capillary liquid partially filling a container* Math. USSR Izvestija 14, 193-221, 1980
- [38] V.A. Solonnikov: *On the Stokes equations in domains with non smooth boundaries and on viscous incompressible flows with a free surface* Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, vol. III, Séminaire du Collège de France 1980-1981, eds H. Brézis, J.L. Lions, Research Notes in Mathematics 70, 340-423, Boston, ed. Pitman, 1982
- [39] V.A. Solonnikov: *Stokes and Navier-Stokes equations in domain with non compact boundaries* Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, vol. IV, Séminaire du Collège de France 1981-1982, eds H. Brézis, J.L. Lions, Research Notes in Mathematics 84, 240-349, Boston, ed. Pitman, 1983
- [40] V.A. Solonnikov: *Solvability of the problem of effluence of a viscous incompressible fluid into an infinite open basin* Proc. Steklov. Inst. Math. 179, 192-225, 1989

- [41] M. Taylor: PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS Princeton, NJ, ed. Princeton University Press, 1981





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irsa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399