

# Estimation optimale du taux de décroissance de l'énergie pour une équation des ondes avec contrôle frontière

Mohammad Cherkaoui

► **To cite this version:**

Mohammad Cherkaoui. Estimation optimale du taux de décroissance de l'énergie pour une équation des ondes avec contrôle frontière. [Rapport de recherche] RR-2328, INRIA. 1994, pp.16. inria-00074346

**HAL Id: inria-00074346**

**<https://hal.inria.fr/inria-00074346>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Estimation optimale du taux de  
décroissance de l'énergie pour une  
équation des ondes avec contrôle  
frontière*

Mohammad CHERKAOUI

N° 2328

Mai 1994

PROGRAMME 6

*R*apport  
de recherche

Les rapports de recherche de l'INRIA  
sont disponibles en format postscript sous  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp  
la forme papier peut être commandée par mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports  
are available in postscript format  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp  
we recommend ordering them by e-mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(don't forget to mention your postal address).

by mail :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

**Estimation optimale du taux de décroissance  
de l'énergie pour une équation des  
ondes avec contrôle frontière**

Mohammad CHERKAOUI (\*)

Programme 6 – Calcul Scientifique, Modélisation  
et Logiciels Numériques.

Rapport de Recherche n° RR-2328 – Mai 1994 – 16 pages

**Résumé :** On étudie une équation des ondes avec un contrôle frontière en position et vitesse. On démontre l'existence d'une base de Riesz associée à la formulation spectrale. Ainsi le taux optimal de décroissance sera donné par la plus grande partie réelle des valeurs propres. On termine par une étude qualitative de la position du spectre par rapport à son asymptote.

**Mots-clé :** équation des ondes, contrôle frontière, valeurs propres, taux optimal de décroissance, base de Riesz.

Email : Cherkaoui @ iecn. u-Nancy.fr

**Optimal energy decay estimates  
for a wave equation with  
boundary feedback**

**Abstract :** We study a wave equation with boundary feedback on position and velocity. We prove the existence of a Riesz basis associated to a spectral formulation of our problem. Then the optimal rate of decay will be given by the greatest real part of the eigenvalues. We present also a qualitative study of the position of the spectrum with respect to the asymptote.

**Key - words :** wave equation, boundary feedback, eigenvalues, optimal rate of decay, Riesz's basis.

## I - Introduction et position du problème

1- On considère d'abord l'équation des ondes étudiée dans la thèse de P. RIDEAU [4]

$$(I.1) \quad \begin{cases} y_{tt}(x, t) - y_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ y(0, t) = 0, & t > 0 \\ -y_x(1, t) = k_v y_t(1, t), & t > 0, \end{cases}$$

avec  $k_v > 0$  (pour la dissipativité).

L'espace d'énergie est  $E = V \times H$ , avec  $V = \{u \in H^1(0, 1) / u(0) = 0\}$  et  $H = L^2(0, 1)$ .

On muni  $E$  de la norme suivante

$$(I.2) \quad \|(u, v)\|_E^2 = \int_0^1 (u_x^2 + v^2) dx.$$

Le système (I.1) s'écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$(I.3) \quad \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}_t = A_0 \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$D(A_0) = \{(u, v) \in V \times V / u \in H^2(0, 1); -u_x(1) = k_v v(1)\}.$$

L'opérateur  $A_0$  est  $m$ -dissipatif sur  $E$ , donc (I.3) est bien posé au sens des semi - groupes de contractions, et on a la décroissance uniforme de l'énergie [1] i.e.

$$\exists C > 0 \quad \exists \mu > 0 \text{ t.q. } E(t) = \|(y, y_t)\|_E^2 \leq C e^{-\mu t} E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque Pour  $k_v = 1$ , l'énergie s'annule même en temps fini  $T = 2$  [4].

Par ailleurs  $A_0$  est à résolvante compacte, et pour  $k_v \neq 1$ , le problème aux valeurs propres associé admet une infinité dénombrable de solutions, zéros de la fonction entière  $(k_v + 1)e^{2z} - (k_v - 1)$  et données explicitement par :

$$(I.4) \quad \mu_n = \begin{cases} a + i(n + \frac{1}{2})\pi, & \text{si } 0 < k_v < 1 \\ a + in\pi, & \text{si } k_v > 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ avec } a = \frac{1}{2} \log \frac{|k_v - 1|}{k_v + 1}.$$

Dans les deux cas, le sous espace propre associé à  $\mu_n$  est de dimension 1, et le vecteur

$$\text{propre est défini par } e_n(x) = \begin{pmatrix} \frac{\text{sh}(\mu_n x)}{\mu_n} \\ \text{sh}(\mu_n x) \end{pmatrix}.$$

Les  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forment une base de Riesz de  $E$  [4]. On en déduit l'estimation optimale du taux de décroissance :

$$E(t) \leq C e^{2at} E(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (a < 0 \text{ et } C > 1).$$

2- On considère maintenant l'équation des ondes avec les conditions aux bords suivantes

$$(I.5) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ -u_x(1, t) = k_p u(1, t) + k_v u_t(1, t), & t > 0, \end{cases}$$

avec  $k_p > 0$  et  $k_v > 0$ , qui peut se mettre sous la forme opérationnelle suivante :

$$(I.6) \quad \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}_t = A \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$(I.7) \quad A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} \end{pmatrix},$$

et  $D(A) = \{(u, v) \in V \times V / u \in H^2(0, 1); -u_x(1) = k_p u(1) + k_v v(1)\}$ .

On montre que  $A$  est  $m$ -dissipatif à résolvante compacte sur  $E$  pour la norme

$$\|(u, v)\|_E^2 = \int_0^1 (u_x^2 + v^2) dx + k_p u^2(1), \text{ donc (I.6) est bien posé au sens des semi-groupes}$$

de contractions et on montre la décroissance uniforme de l'énergie [1].

Le but de ce papier est d'étendre au problème (I.5), les résultats précédents concernant l'existence d'une base de Riesz associée à la formulation spectrale de notre problème lorsque  $k_v \neq 1$ . Ainsi le taux optimal de décroissance sera donné par la plus grande partie réelle des valeurs propres. Ensuite on étudiera la position des valeurs propres par rapport

à l'axe  $x = a = \frac{1}{2} \log \frac{|k_v - 1|}{k_v + 1}$  afin de déterminer qualitativement l'influence de

l'introduction du terme supplémentaire  $k_p$  sur la vitesse de stabilisation.

On va donc étudier le problème aux valeurs propres suivant :

$$(I.8) \quad A\left(\frac{u}{v}\right) = \lambda \left(\frac{u}{v}\right), \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ et } A \text{ est défini par (I.7).}$$

## II - Existence d'une infinité dénombrable de valeurs propres

Résoudre (I.8) revient à résoudre

$$(II.1) \quad \begin{cases} u_{xx} = \lambda^2 u, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ -u_x(1) = (k_p + \lambda k_v)u(1), \end{cases}$$

avec  $k_p, k_v > 0$ , puis à prendre  $v = \lambda u$ .

La solution générale de (II.1) est de la forme  $u(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ , avec  $A, B \in \mathbb{C}$ .

La condition  $u(0) = 0$  implique  $A = -B$ , donc  $u(x) = 2A \operatorname{sh}(\lambda x)$ . On en déduit que les valeurs propres sont géométriquement simples.

L'autre condition au bord  $-u_x(1) = (k_p + \lambda k_v)u(1)$  implique que  $\lambda$  est un zéro de

$$(II.2) \quad f(z) = (z(k_v + 1) + k_p)e^{2z} - z(k_v - 1) - k_p.$$

### Théorème II.1

On suppose  $k_p > 0, k_v > 0, k_v \neq 1$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est infini dénombrable. Chaque valeur propre  $\lambda$  est de multiplicité géométrique 1. Elle est aussi de multiplicité algébrique 1.

#### Preuve:

D'abord, il est facile de voir que toute solution non nulle de l'équation caractéristique  $f(z) = 0$  est valeur propre de  $A$ . D'autre part  $f(z)$  est entière d'ordre 1 (pour la définition de l'ordre d'une fonction entière, cf [5, p. 339]).

On applique le théorème de factorisation de Hadamard [6, Th. de Hadamard p. 251] :

$f(z) = z^k P(z)e^{g(z)}$ , avec  $k$  ordre du zéro 0 de  $f$ . Ici  $k = 1$ , et  $g$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à l'ordre de  $f$ , soit 1.

$P(z)$  est le produit canonique d'ordre inférieur ou égal à 1:

$$P(z) = \prod_{a_n \neq 0} E\left(\frac{z}{a_n}\right) \text{ où } E(z) = (1 - z)e^{\alpha'z}, \text{ avec } \alpha' = 0 \text{ ou } 1, \text{ donc}$$

$$(II.3) \quad f(z) = ze^{\alpha z + \beta} \prod_{a_n \neq 0} E\left(\frac{z}{a_n}\right).$$



Les  $a_n$  sont les zéros non nuls de  $f$  (répétés selon leur ordre de multiplicité).

On raisonne alors par l'absurde en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de zéros.

Alors (II.3) devient

$$(II.4) \quad f(z) = e^{az+b} [b_m z^m + \dots + b_1 z], \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ , on en déduit  $a = 2$  (avec  $z = iy$ , on a d'abord  $a \in \mathbb{R}$ , puis avec  $z \in \mathbb{R}$ ,  $a = 2$ ), donc

$$(II.5) \quad f(z) = e^{2z} [b_m z^m + \dots + b_1 z] \quad (\text{en changeant les } b_j).$$

Grâce à deux dérivations dans (II.5), on montre que  $b_m z^m + \dots + b_1 z = b_1 z$ , et par identification, on en déduit que  $k_p = 0$ , ce qui est absurde.

Donc  $f(z)$  admet une infinité dénombrable de zéros.

#### Détermination de la multiplicité algébrique

Montrons d'abord que  $\lambda$ , valeur propre de  $A$ , est de multiplicité algébrique 1 si et seulement si  $\lambda$  n'est pas zéro de :

$$(II.6) \quad h(z) = z^2(k_v^2 - 1) + 2k_p k_v z + k_p(k_p + 1).$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ .

$$\text{On a } \text{Ker}(A - \lambda I) = \left\{ \left( \frac{\text{sh}(\lambda x)}{\lambda}, \text{sh}(\lambda x) \right) \right\}.$$

Supposons qu'il existe  $(u, v) \in \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \setminus \text{Ker}(A - \lambda I)$ , alors  $(u, v)$  est solution de

$$(II.7) \quad A(u, v) = \lambda(u, v) + \left( \frac{\text{sh}(\lambda x)}{\lambda}, \text{sh}(\lambda x) \right) \Rightarrow \begin{cases} v = \lambda u + \frac{\text{sh}(\lambda x)}{\lambda} \\ u_{xx} = \lambda v + \text{sh}(\lambda x) \\ -u_x(1) = k_p u(1) + k_v v(1) \end{cases}$$

On en déduit que  $u$  est solution de

$$(II.8) \quad \begin{cases} u_{xx} = \lambda^2 u + 2\text{sh}\lambda x \\ u(0) = 0 \\ -u_x(1) = (k_p + \lambda k_v)u(1) + k_v \frac{\text{sh}(\lambda)}{\lambda} \end{cases}.$$

Une solution de (II.8) est la somme de la solution générale de l'équation homogène

$u_{xx} = \lambda^2 u$ , soit  $u_1(x) = A \text{ch}\lambda x + B \text{sh}\lambda x$ , et d'une solution particulière de (II.8),

$$u_2(x) = x \frac{\text{ch}(\lambda x)}{\lambda}, \quad \text{soit } u(x) = A \text{ch}\lambda x + B \text{sh}\lambda x + x \frac{\text{ch}(\lambda x)}{\lambda}.$$

La condition au bord  $u(0) = 0$  implique que  $A = 0$ , donc  $u(x) = B \operatorname{sh} \lambda x + x \frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\lambda}$ .

D'après (II.1),  $\lambda$  est solution de :

$$(II.9) \quad -u_{1x}(1) = (k_p + \lambda k_v) u_1(1),$$

ce qui implique que  $\lambda$  est solution de

$$(II.10) \quad \operatorname{th} \lambda = \frac{-\lambda}{k_p + k_v \lambda}.$$

D'après (II.8),  $\lambda$  est aussi solution de :

$$(II.11) \quad -u_{2x}(1) = (k_p + \lambda k_v) u_2(1) + k_v \frac{\operatorname{sh}(\lambda)}{\lambda}, \text{ et donc } \lambda \text{ est solution de}$$

$$(II.12) \quad \operatorname{th} \lambda = \frac{-(1 + k_p + \lambda k_v)}{k_v + \lambda}.$$

Les relations (II.10) et (II.12) impliquent que  $\lambda$  est un zéro de (II.6). Par suite, si la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est au moins 2, alors  $\lambda$  est zéro de (II.6).

Un simple retour en arrière nous permet de montrer l'implication inverse.

Montrons maintenant que la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est exactement 1.

On vérifie facilement que  $\lambda$  est solution de :

$$(II.13) \quad 1 + k_p \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^2} = \frac{h(z)}{h(z) - k_p} \text{ où } h(z) \text{ est donnée par (II.6).}$$

Si  $k_v \leq \sqrt{1 + k_p}$ , les zéros de  $h(z)$  seront réels, et donc si  $\lambda$  était zéro de  $h(z)$ , on obtiendrait  $1 + k_p \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda^2} = 0$ , ce qui est absurde, donc la multiplicité algébrique est 1.

Si  $k_v > \sqrt{1 + k_p}$ , supposons que la multiplicité algébrique est strictement supérieure à 1. Alors  $\lambda$  est zéro de  $h(z)$ , et de  $1 + k_p \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^2}$ .

$$\text{Soit } \lambda = \alpha + i\beta = \frac{-k_p k_v}{k_v^2 - 1} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1} \text{ un zéro de } h(z)$$

( $\Delta = 4\Delta'$  est le discriminant de  $h(z)$ ).

$$1 + k_p \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow (II.14) \quad \begin{cases} 1 + k_p \operatorname{Re} \left( \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda^2} \right) = 0 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Puisque  $\text{Im}\left(\frac{\text{sh}^2\lambda}{\lambda^2}\right) = 2\text{Re}\left(\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda}\right)\text{Im}\left(\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda}\right)$ , on a évidemment  $\text{Im}\left(\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda}\right) \neq 0$ , sinon  $1 + k_p \frac{\text{sh}^2\lambda}{\lambda^2}$  serait strictement positif.

$$\text{Donc (II.14)} \Rightarrow \text{(II.15)} \quad \begin{cases} 1 + k_p \text{Re}\left(\frac{\text{sh}^2\lambda}{\lambda^2}\right) = 0 \\ \text{Re}\left(\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Or  $\lambda$  est solution de  $\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda} = \frac{-1}{k_p}(\text{ch}\lambda + k_v \text{sh}\lambda)$ .

Ce qui, avec l'équation  $\text{Re}\left(\frac{\text{sh}\lambda}{\lambda}\right) = 0$  implique alors :

$$\text{(II.16)} \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad \alpha \text{sh}\alpha \cos\beta + \beta \text{ch}\alpha \sin\beta = 0 \\ \text{(ii)} \quad (\text{ch}\alpha + k_v \text{sh}\alpha) \cos\beta = 0. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que  $|\beta| < 1$ , on a alors  $\cos\beta \neq 0$ , sinon on aurait  $\beta = 0$ , et par suite  $1 + k_p \frac{\text{sh}^2\lambda}{\lambda^2} > 0$ , absurde.

$$\text{Alors (II.16) (ii)} \Rightarrow \text{(II.17)} \quad \text{sh}\alpha = \frac{-1}{\sqrt{k_v^2 - 1}} \quad \text{et} \quad \text{ch}\alpha = \frac{k_v}{\sqrt{k_v^2 - 1}}$$

expressions qu'on injecte dans (II.16) (i), pour obtenir :

$$\text{(II.18)} \quad k_p k_v \cos\beta \pm k_v \sqrt{-\Delta'} \sin\beta = 0, \quad \text{avec} \quad \beta = \pm \frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1}.$$

Pour  $k_v > \sqrt{1 + k_p}$ , on a (II.18) est équivalent à

$$\text{(II.19)} \quad k_p k_v \cos\left[\frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1}\right] + k_v \sqrt{-\Delta'} \sin\left[\frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1}\right] = 0.$$

Or  $\cos\left[\frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1}\right]$  et  $\sin\left[\frac{\sqrt{-\Delta'}}{k_v^2 - 1}\right]$  sont strictement positifs, et par suite (II.19) n'aura de solutions que si  $k_v = 0$ , ce qui est absurde.

Donc, la multiplicité algébrique est égale à 1, pour tout  $k_p, k_v > 0$  et  $k_v \neq 1$ .

Ceci achève la preuve du théorème II.1.

Dans la suite, on supposera que la numérotation des valeurs propres deux à deux conjugués  $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ , est telle que :  $m \geq 0, \operatorname{Im} \lambda_m \geq 0, m > 0, \operatorname{Im} \lambda_{-m} < 0$ , les applications  $m \rightarrow |\lambda_m|$  et  $|\lambda_{-m}|$  étant croissantes.

### III. Construction d'une bijection entre les v. p. de A et celles de A<sub>0</sub>

Soient  $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ , les zéros non nuls de la fonction entière  $f(z) = (z(k_v + 1) + k_p)e^{2z} - z(k_v - 1) - k_p$ , et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , les zéros de la fonction entière  $k(z) = (k_v + 1)e^{2z} - (k_v - 1)$ .

#### Théorème III.1

On suppose  $k_p > 0, k_v > 0, k_v \neq 1$ . Soit  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

i)  $\forall n \in \mathbb{Z}, |n|$  assez grand: il existe un unique zéro  $\lambda$  de  $f$ , tel que  $\lambda \in D(\mu_n; R_n)$  disque de centre  $\mu_n$  et de rayon  $R_n$ , avec  $R_n = |n|^{-\alpha}$ .

ii)  $|\lambda_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  à la vitesse (au moins)  $|n|^{1-\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$ ; les  $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  admettent

l'axe  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \log \frac{|k_v - 1|}{k_v + 1}$  pour asymptote.

iii) Pour  $m \in \mathbb{Z}, |m|$  assez grand, tous les zéros  $\lambda_m$  de  $f$  sont dans des boules de centre  $\mu_n(m)$  ( $\mu_n(m)$  unique) et de rayon  $|m|^{-\alpha}$ .

#### Preuve

On vérifie d'abord que tout zéro de  $f(z)$  est aussi zéro de  $f_1(z) = k(z) - \frac{2k_p}{z(k_v + 1) + k_p}$ , et réciproquement. On pose  $l(z) = \frac{2k_p}{z(k_v + 1) + k_p}$ .

i) Soit  $z \in D(\mu_n; R_n)$ , alors  $|l(z)| \leq \frac{C_1}{|n|}$  ( $C_1$  indépendante de  $n$ ) pour  $|n|$  assez grand,

car  $|\mu_n| \geq C|n|$  ( $C > 0$ ).

Si on arrive à montrer que  $|l(z)| < |k(z)|$  sur  $\partial D(\mu_n; R_n)$  pour  $|n|$  assez grand, on aura alors, par application du théorème de Rouché [5, Théorème 10.43 p. 243], un unique zéro de  $f_1(z)$  dans le disque  $D(\mu_n; R_n)$ .

Tout  $z$  dans  $D(\mu_n; R_n)$  peut s'écrire sous la forme paramétrée suivante:

$z = \gamma_n(r) = \mu_n + r(z_0 - \mu_n)$ ,  $z_0 \in \partial D(\mu_n; R_n)$  et  $|z_0 - \mu_n| = R_n$ , d'où

$$k(z_0) - k(\mu_n) = \int_0^1 k'(\gamma_n(r)) dr \cdot (z_0 - \mu_n).$$

Comme  $k(\mu_n) = 0$ , on a  $|k(z_0)| = R_n \left| \int_0^1 k'(\gamma_n(r)) dr \right|$ .

Posons  $\gamma_n = \int_0^1 k'(\gamma_n(r)) dr$ .

On a  $k'(z) = 2(k_v + 1) e^{2z}$ . En écrivant que  $\mu_n$  est un zéro de  $k$  on obtient alors

$$k'(\gamma_n(r)) = 2(k_v - 1)e^{2r(z_0 - \mu_n)}, \text{ et par suite}$$

$$\int_0^1 k'(\gamma_n(r)) dr = \frac{(k_v - 1)[e^{2(z_0 - \mu_n)} - 1]}{z_0 - \mu_n}.$$

Mais  $e^{2(z_0 - \mu_n)} - 1$  est équivalent à  $2(z_0 - \mu_n)$  pour  $z_0 - \mu_n$  petit, et donc  $|k(z_0)|$  est équivalent à  $2|k_v - 1|R_n$ . Comme  $k_v \neq 1$ , il existe  $C_2 > 0$  t. q.

$$|k(z_0)| \geq \frac{C_2}{|n|^\alpha} > \frac{C_1}{|n|} \geq |l(z_0)|, \text{ pour tout } \alpha < 1 \text{ fixé, } |n| \text{ assez grand.}$$

Notons que  $C_2$  est indépendante de  $z_0 \in \partial D(\mu_n; R_n)$  et de  $n$ .

ii) On peut facilement montrer que  $f(z)$  s'écrit  $2(k_p + 1) z d(z)$ ,

$$\text{avec } d(z) = \begin{cases} \frac{1}{2(k_p + 1)} [k(z) + k_p \frac{(e^{2z} - 1)}{z}] & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

On note que  $d(z)$  est une fonction entière, et que ses zéros sont les zéros non nuls de  $f$ . Soient  $\lambda_{-n_2}, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_{n_1}$ , les zéros de  $d(z)$  dans  $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$ , et supposons que  $|\lambda_{-n_2}| < |\lambda_{n_1}|$ .

On applique la formule de Jensen [5, Th. 15.18, p. 330] pour  $d(z)$ . Soient  $\lambda_{-(n_2+m_2)}, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_{n_1+m_1}$ , les zéros de  $d(z)$  dans  $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 2R\}$ . On a donc :

$$(III.1) \quad \sum_{i=-(n_2+m_2)}^{n_1+m_1} \log \frac{2R}{|\lambda_i|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |d(2Re^{i\theta})| d\theta$$

ce qui implique

$$(III.2) \quad \sum_{i=1}^{n_1} \log \frac{2R}{|\lambda_i|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |d(2Re^{i\theta})| d\theta.$$

Mais  $|\lambda_i| \leq R$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) et par suite (III.2) implique

$$(III.3) \quad n_1 \log 2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |d(2Re^{i\theta})| d\theta.$$

On sait aussi que  $|d(z)| \leq \exp(|z|^{1+\varepsilon})$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  pour  $|z| = R$  assez grand (car  $d$  est une fonction entière d'ordre 1), et donc  $n_1 \log 2 \leq |2R|^{1+\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , ce qui implique que  $2R \geq (\log 2)^{(1+\varepsilon)^{-1}} n_1^{(1+\varepsilon)^{-1}}$ , soit  $R \geq C n_1^\gamma$ ,  $\gamma < 1$ .

Finalement, on fait tendre  $R$  vers  $|\lambda_{n_1}|$ , et on obtient  $|\lambda_{n_1}| \geq C n_1^{1-\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Puisqu'on n'a qu'un nombre fini de zéros réels de  $f$ , on aura  $\lambda_{-n_2} = \bar{\lambda}_{n_1 - N}$ , et donc

$|\lambda_{-n_2}| \geq C n_2^{1-\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Par conséquent  $|\lambda_n|$  tend vers l'infini à la vitesse (au moins)  $|n|^{1-\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Puisque  $\lambda_n$  est solution de  $e^{2z} = \frac{z(k_v - 1) + k_p}{z(k_v + 1) + k_p}$ , et que  $|\lambda_n| \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} +\infty$ , on en déduit que  $e^{2\lambda_n}$  tend vers  $\frac{k_v - 1}{k_v + 1}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Par suite les  $(\lambda_n)$  admettent l'axe  $\text{Re } z = a = \frac{1}{2} \log \frac{|k_v - 1|}{k_v + 1}$  pour asymptote.

iii) Montrons maintenant qu'à partir d'un rang  $m$ ,  $|m|$  assez grand, tous les zéros  $\lambda_m$  de  $f$  sont dans des boules de centre  $\mu_n(m)$  ( $\mu_n(m)$  unique) et de rayon  $|m|^{-\alpha}$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

Soit  $z \in D(\lambda_m; R_m)$ . Si on arrive à montrer que  $|l(z)| < |f_1(z)|$  sur  $\partial D(\lambda_m; R_m)$ , le théorème de Rouché [5, p. 243], nous donnera un zéro de  $f_1 + l = k$  dans  $D(\lambda_m; R_m)$ .

Vu l'équidistance des zéros consécutifs de  $k$ , égale à  $\pi$ , dans  $D(\lambda_m; R_m)$ , on ne peut avoir qu'un seul zéro de  $k$  dans le disque  $D(\lambda_m; R_m)$ .

Soit  $z_0 \in \partial D(\lambda_m; R_m)$ . On considère le chemin de  $D(\lambda_m; R_m)$  :  $\delta_m(r) = \lambda_m + r(z_0 - \lambda_m)$ ,  $0 < r < 1$ . On a

$$f_1(z_0) - f_1(\lambda_m) = \int_0^1 f_1'(\delta_m(r)) dr \cdot (z_0 - \lambda_m).$$

Comme  $f_1(\lambda_m) = 0$ , on a  $|f_1(z_0)| = \left| \int_0^1 f_1'(\delta_m(r)) dr \right| R_m$ .

$$\text{Posons } \delta_m = \int_0^1 f_1'(\delta_m(r)) dr.$$

Estimation de  $\delta_m$

$$\text{On a } f_1'(z) = 2(k_v + 1)e^{2z} + \frac{2k_p(k_v + 1)}{(z(k_v + 1) + k_p)^2}.$$

Par une intégration par rapport à  $r$  sur  $]0, 1[$ , on obtient :

$$\delta_m = \delta_{1,m} + \delta_{2,m} = \frac{(k_v + 1)e^{2\lambda m}}{(z_0 - \lambda m)} [e^{2(z_0 - \lambda m)} - 1] + \frac{2k_p(k_v + 1)}{A_m[A_m + (k_v + 1)(z_0 - \lambda m)]},$$

avec  $A_m = \lambda_m(k_v + 1) + k_p$ .

Consequences : Pour  $m$  assez grand

1)  $A_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$ , d'où  $\delta_{2,m}$  tend vers 0 uniformément par rapport à  $z_0$ .

2) D'après la propriété asymptotique, on a  $|e^{2\lambda m} - \frac{k_v - 1}{k_v + 1}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ .

3) Soit  $\alpha < 1$  quelconque. On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\alpha < 1 - \varepsilon$ .

Pour  $R_m$  assez petit,  $\frac{e^{2(z_0 - \lambda m)} - 1}{(z_0 - \lambda m)}$  est équivalent à 2 uniformément par rapport à  $z_0$ .

Donc  $\delta_m$  est équivalent à  $2(k_v - 1)$ , et ceci bien sûr pour  $|m|$  assez grand.

Conclusion : il existe  $D_1, D_2 > 0$  tels que

$$|f_1(z_0)| \geq D_2 |k_v - 1| |m|^{-\alpha} > D_1 |m|^{-(1-\varepsilon)} \geq |l(z)|,$$

avec  $D_1, D_2$  indépendantes de  $z_0 \in \partial D(\lambda_m; R_m)$ . Ceci achève la preuve de iii), et celle du théorème III.1.

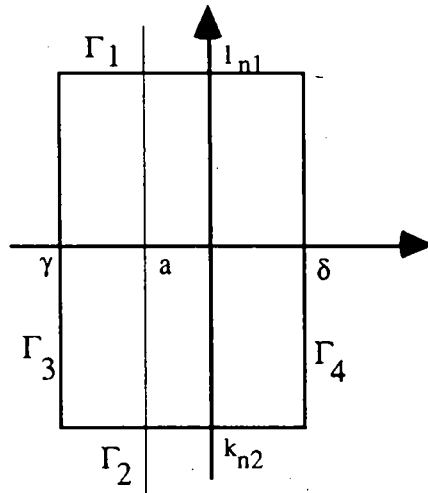
Remarque L'idée d'utiliser le théorème de Rouché dans i) et iii) a été inspirée de [3].

### **Théorème III.2**

*Dans un rectangle assez grand de cotés parallèles aux axes des coordonnées,  $f(z)$  et  $zk(z)$  ont le même nombre de zéros.*

#### Preuve

Soit  $D_{n_1, n_2}$  un rectangle défini par la réunion des  $\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$ , comme indiqué sur la figure ci - après



On choisit  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $l_{n_1}$  et  $k_{n_2}$  de manière qu'il n'y ait pas de zéro de  $f(z)$  et de  $zk(z)$  sur  $\partial D_{n_1, n_2}$ . On prend d'abord  $\gamma$  assez grand négatif,  $\delta > 0$ ,  $l_{n_1}$  et  $k_{n_2}$  assez grands, et vérifiant d'autres conditions précisées ci - dessous.

Pour montrer que  $f(z)$  et  $zk(z)$  ont le même nombre de zéros dans  $D_{n_1, n_2}$ , il suffit, par application du théorème de Rouché [5, p. 243], de montrer que :

$$(III.4) \quad |q(z)| < |zk(z)|, \quad \forall z \in \partial D_{n_1, n_2}, \text{ où } q(z) = f(z) - zk(z) = k_p(e^{2z} - 1).$$

Sur  $\Gamma_1$  :  $z = \alpha + il_{n_1}$ ,  $\alpha \in [\gamma, \delta]$ , et on choisit  $l_{n_1} = (n_1 + c)\pi$  avec  $0 < c < \frac{1}{2}$ . Alors

$$zk(z) = (\alpha + il_{n_1})[(k_v + 1)e^{2\alpha} \cos 2l_{n_1} - (k_v - 1) + i(k_v + 1)e^{2\alpha} \sin 2l_{n_1}],$$

et donc

$$|zk(z)|^2 = (\alpha^2 + l_{n_1}^2) [((k_v + 1)e^{2\alpha} - (k_v - 1)\cos 2l_{n_1})^2 + ((k_v + 1)\sin 2l_{n_1})^2].$$

On en déduit que

$$|zk(z)| \geq |l_{n_1}(k_v - 1)\sin 2c\pi|.$$

Par conséquent, pour  $l_{n_1}$  (i.e.  $n_1$ ) assez grand

$$|zk(z)| > k_p(e^{2\delta} + 1) \geq |q(z)| \quad \forall z \in \Gamma_1.$$

De façon analogue, on aura la même inégalité sur  $\Gamma_2$ .

Sur  $\Gamma_3$  :  $z$  s'écrit  $\gamma + i\beta$ , où  $\beta \in [k_{n_2}, l_{n_1}]$ , donc

$zk(z) = (\gamma + i\beta)[(k_v + 1)e^{2\gamma} e^{2i\beta} - (k_v - 1)]$ , et donc, pour  $\gamma$  assez grand, on a

$$|zk(z)| \geq |\gamma| |(k_v + 1)e^{2\gamma} - |k_v - 1|| > k_p(e^{2\gamma} + 1) \geq |q(z)| \quad \forall z \in \Gamma_3.$$

De façon analogue, on aura la même inégalité sur  $\Gamma_4$ ; d'où (III.4).



Remarque Grâce aux théorèmes III.1 et III.2, on construit une bijection entre les valeurs propres de  $A$  et celles de  $A_0$ , bijection qu'on peut prendre égale à l'identité, avec

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ et } n \text{ assez grand; estimation essentielle pour la suite car}$$

elle impliquera l'une des hypothèses à vérifier du Théorème principale.

#### IV Base de Riesz associée à $A$

On note  $f_n(x) = \left( \frac{\text{sh}(\lambda_n x)}{\lambda_n}; \text{sh}(\lambda_n x) \right)$ , le vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ , et  $e_n(x) = \left( \frac{\text{sh}(\mu_n x)}{\mu_n}; \text{sh}(\mu_n x) \right)$  le vecteur propre de  $A_0$  associé à  $\mu_n$  (cf((I.4)).

#### Théorème principal

(i) La famille de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est quadratiquement proche de  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $E$ , i. e.

$$(IV.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|f_n - e_n\|_E^2 < +\infty.$$

(ii)  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est  $\omega$ -indépendante dans  $E$ , i. e.

$$(IV.2) \quad \forall (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f_n = 0 \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $E$ .

Remarque D'après ce théorème, on en déduit que le taux optimal de décroissance exponentielle de l'énergie associée à (I.5) est donné par la plus grande partie réelle des valeurs propres  $\lambda_n$ .

#### Preuve du Théorème principal

(i) D'après le théorème III.1, pour  $n$  assez grand :

$$(IV.3) \quad |\lambda_n - \mu_n| \leq CR_n = C|n|^{-\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Or les parties réelles des valeurs propres  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  sont bornées. Donc pour  $n$  assez grand, et pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a

$$(IV.4) \quad \begin{aligned} |\text{ch}\lambda_n x - \text{ch}\mu_n x| &= |2\text{sh}(\lambda_n - \mu_n)x \cdot \text{sh}(\lambda_n + \mu)x| \\ &\leq C_1 |\lambda_n - \mu_n| \leq CC_1 |n|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on a :

$$(IV.5) \quad |\text{sh}\lambda_n x - \text{sh}\mu_n x| \leq C_2 |\lambda_n - \mu_n| \leq CC_2 |n|^{-\alpha}.$$

Et donc, pour  $n$  assez grand, on a

$$(IV.6) \quad \|f_n - e_n\|_E^2 \leq A \left[ \int_0^1 |ch\lambda_n x - ch\mu_n x|^2 + |sh\lambda_n x - sh\mu_n x|^2 dx \right] \leq C_3 |n|^{-2\alpha}.$$

Comme  $|n|^{-2\alpha}$  est le terme d'une série convergente, on a (IV.1), et donc  $(f_n)_{n \in Z}$  est quadratiquement proche de  $(e_n)_{n \in Z}$  dans  $E$ .

(ii) On considère la famille de fonctions  $(g_m(x))_{m \in Z}$  définie par  $g_m(x) = \begin{pmatrix} \frac{sh(\bar{\lambda}_m x)}{\bar{\lambda}_m} \\ -sh(\bar{\lambda}_m x) \end{pmatrix}$

La famille  $(g_m)_{m \in Z}$  est biorthogonale à  $(f_n)_{n \in Z}$ ; en effet, on considère le produit scalaire complexe sur  $E$  défini par :

$$(IV.7) \quad \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)_E = (u_1 x, \bar{u}_2 x)_H + (v_1, \bar{v}_2)_H + k_p u_1(1) \bar{u}_2(1).$$

Pour tous  $m, n \in Z$ ,  $m \neq n$ , on a

$$(f_n, \bar{g}_m)_E = (ch\lambda_n x, ch\lambda_m x)_H - (sh\lambda_n x, sh\lambda_m x)_H + k_p \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n \lambda_m}$$

$$\begin{aligned} (f_n, \bar{g}_m)_E &= \int_0^1 ch(\lambda_n - \lambda_m) x dx + k_p \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n \lambda_m} = \frac{sh(\lambda_n - \lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} + k_p \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n \lambda_m} \\ &= \frac{sh\lambda_n ch\lambda_m - ch\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n - \lambda_m} + k_p \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n \lambda_m}. \end{aligned}$$

Or  $\lambda$  est solution de  $ch\lambda = -\left(k_p + \frac{k_p}{\lambda}\right)sh\lambda$ , donc

$$(f_n, \bar{g}_m)_E = \left[ \frac{k_p}{\lambda_n} - \frac{k_p}{\lambda_m} \right] \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n - \lambda_m} + k_p \frac{sh\lambda_n sh\lambda_m}{\lambda_n \lambda_m} = 0.$$

Pour  $m = n$ ,  $(f_n, \bar{g}_m)_E = 1 + k_p \frac{sh^2 \lambda_n}{\lambda_n^2} = \frac{h(\lambda_n)}{h(\lambda_n) - k_p}$  d'après (II.13), où  $h(z)$  est

donnée par (II.6), et on a vu dans le théorème II.1 que  $h(\lambda_n) \neq 0 \forall \lambda_n$ , car  $\lambda_n$  est algébriquement simple. Par suite  $(g_m)_{m \in Z}$  est biorthogonale à  $(f_n)_{n \in Z}$ . Donc  $(f_n)_{n \in Z}$  est  $\omega$ -indépendante dans  $E$ .

De (i) et (ii), on conclut d'après un théorème de Bari [2, Théorème 2.3 p. 317], que  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $E$ , ce qui achève la preuve du théorème principal.

**Remarque** La fonction  $g_m(x)$  est un vecteur propre de  $A^*$ , adjoint de  $A$ , associé à la valeur propre  $\bar{\lambda}_m$ .

### V. Etude de la position du spectre de A

Le but de cette dernière partie, est d'étudier la position des valeurs propres  $\lambda_m$  de  $A$  par rapport à l'axe  $\text{Re } z = a = \frac{1}{2} \log \frac{|k_v - 1|}{k_v + 1}$ , axe contenant les valeurs propres  $\mu_n$  de  $A_0$ , afin de déterminer qualitativement l'influence de l'introduction du terme supplémentaire  $k_p$  sur la vitesse de stabilisation.

On sait que  $\lambda = \alpha + i\beta$  est solution de  $e^{2z} = \rho(z) = \frac{z(k_v - 1) + k_p}{z(k_v + 1) + k_p}$ ,  $k_p \neq 0$ .

Puisque le système étudié est exponentiellement stable,  $\alpha = \text{Re } \lambda = \frac{1}{2} \log |\rho(z)| < 0$ .

Etudier le signe de  $(\alpha - a)$  revient à étudier le signe de  $A = |\rho(z)|^2 (k_v + 1)^2 - (k_v - 1)^2$ .

On a  $A = \frac{B}{|\lambda(k_v + 1) + k_p|^2}$ .

Tous calculs faits on obtient  $B = 4k_p[k_p k_v + (k_v^2 - 1)\alpha]$ .

Comme  $k_p \neq 0$ , on a

$$(V.1) \quad \text{signe}(\alpha - a) = \text{signe}(k_p k_v + (k_v^2 - 1)\alpha).$$

Si  $0 < k_v \leq 1$ , on aura  $k_p k_v + (k_v^2 - 1)\alpha > 0$  car  $\alpha < 0$ , donc les valeurs propres seront à droite de l'axe  $\text{Re } z = a$ .

Conclusion : On détériore le taux de décroissance du problème (I.1), si on perturbe la loi de commande en feedback par  $k_p y(1)$ .

Si  $k_v \geq 1$ , posons  $X = \alpha - a$  et  $G_{k_p}(k_v) = k_p k_v + (k_v^2 - 1)a$ . Alors (V.1) implique

$$(V.2) \quad \text{signe}(X) = \text{signe}(G_{k_p}(k_v) + (k_v^2 - 1)X), \text{ et donc on a}$$

$$(V.3) \quad (k_v^2 - 1)X^2 + G_{k_p}(k_v)X \geq 0.$$

1)  $k_p \geq 1$ : Une étude de la fonction  $G_{k_p}(k_v)$  nous permet de conclure que  $G_{k_p}(k_v) > 0$  pour tout  $k_v > 1$ , et donc (V.3) implique que

$$(V.4) \quad X = \text{Re } \lambda - a \in ] -\infty, \frac{-G_{k_p}(k_v)}{k_v^2 - 1}] \cup [0, +\infty[.$$

De (V.4), on en déduit qu'asymptotiquement, les valeurs propres vont être à droite de l'axe  $\text{Re } z = a$ , car à gauche, elles devraient être au moins à une certaine distance qui est  $\frac{-G_{kp}(k_v)}{k_v^2 - 1}$  de l'axe  $\text{Re } z = a$ , ce qui est absurde.

2)  $k_p \leq 1$ : La fonction  $G_{kp}(k_v)$  s'annule en un point  $k_{v0} > 1$ .

i) Sur  $] 1, k_{v0}[$ ,  $G_{kp}(k_v) > 0$ , on aura la même conclusion que celle de 1).

ii) Sur  $] k_{v0}, +\infty[$ ,  $G_{kp}(k_v) < 0$ , et d'après (V.3), on a

$$(V.5) \quad X = \text{Re } \lambda - a \in ] -\infty, 0] \cup \left[ \frac{-G_{kp}(k_v)}{k_v^2 - 1}, +\infty[.$$

Donc, asymptotiquement les valeurs propres vont être à gauche de l'axe  $\text{Re } z = a$ .

### Références

- [1] G. Chen, Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain, J. Math. Pures Appl., 58(1979), pp. 249 -274.
- [2] I. C. Gohberg and M. G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. Translations of Mathematical Monographs, 1969.
- [3] W. Littman and L. Markus, Stabilisation of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1988. ser. IV. 152, pp. 281- 330.
- [4] P. Rideau, Contrôle d'un assemblage de poudres flexibles par des capteurs actionneurs ponctuels : étude du spectre du système, Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia - Antipolis, France, Novembre 1985.
- [5] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Second Edition, McGraw-Hill (1974).
- [6] S. Saks et A. Zygmund, Fonctions Analytiques, Masson (1970).



---

Unité de recherche INRIA Lorraine  
Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes - 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

