Gestion de maillages triangulaires déformables

Benoit Duval, Hervé Guillard

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Gestion de maillages triangulaires déformables

Benoît Duval, Hervé Guillard

N° 2272

Juillet 1994

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,

modélisation

et logiciel numérique

Rapport de recherche

1994

ISSN 0249-6399

Gestion de maillages triangulaires déformables

Benoît Duval, Hervé Guillard

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 2272 — Juillet 1994 — 25 pages

Résumé :
On présente un algorithme permettant à la fois de contrôler et d'améliorer le maillage d'une géométrie déformable au cours du temps. Un critère géométrique portant sur la déformation des éléments triangulaires permet de mesurer, de façons locale et globale, la qualité du maillage. La première étape consiste en une régularisation par retournement d'arêtes tant que cela est possible. Il convient ensuite de regrouper les éventuels triangles restant afin de constituer des zones que l'on remaillera grâce à un algorithme de voronoï 2D après avoir créé un (des) trou(s) dans le maillage. Cette présentation est illustrée par des exemples appliqués au moteur automobile.

Mots-clé : Maillages déformables, Eléments finis, Triangulations

(Abstract: pto)

Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : (33) 93 65 77 77 – Télécopie : (33) 93 65 77 65

Optimisation of finite element mesh in 2-D moving boundary domains.

Abstract:
This paper presents a contribution to the development of algorithms improving the quality of unstructured meshes in moving boundary domains. The motion of the nodes induces stretching or compression on the triangles, such as the accuracy of the results is affected. In order to solve these problems we choose to develop an algorithm in two parts. Firstly, we caracterize all the elements of the mesh with a criteria based on shape datas. For each of these triangles, we tried a very simple and powerful operation consisting of the diagonal swapping with an adjacent element . Secondly we gather "bad elements" in order to form zones. Then the inside nodes of the zones are deleted and we remesh the zones with a Voronoï-algorithm. This presentation is illustrated by applications to motor engine.

Key-words: Unstructured mesh, Moving domain, Triangulation

Table des matières

1 Introduction

Dans le cadre de la simulation des écoulements dans des domaines déformables, cette étude s'intéresse plus particulièrement au problème de l'amélioration de la qualité d'un maillage subissant des déformations par suite du mouvement de la frontière du domaine géométrique considéré. Les maillages 2D utilisés sont non-structurés et formés par un ensemble de triangles. Le mouvement des noeuds, induit par le déplacement des frontières, a été calculé à partir de la résolution d'une équation de Poisson, en prenant comme conditions limites les mouvements des différentes parois. Les mouvements dus aux frontières mobiles imposent un déplacement des noeuds donnant lieu à des étirements ou au contraire à des compressions des éléments. La précision des grandeurs que l'on veut approcher s'en ressent alors fortement [1]. On se propose ici de décrire une méthode permettant d'améliorer la qualité du maillage à chaque fois que cela est nécessaire. Pour cela, il a d'abord été indispensable de définir un critère géométrique permettant de caractériser la qualité de chaque élément. Par la suite, la première partie de l'algorithme est constituée d'une régularisation de chaque triangle dont la déformation est trop importante. Nous verrons que cette optimisation est à la fois très efficace et particulièrement rapide. Cependant, il s'avère que ceci est loin de régler tous les problèmes relatifs aux parois mobiles; aussi, nous avons choisi de localiser les éléments pour lesquels une simple régularisation ne permettait pas d'améliorer leur forme. On s'aperçoit que ceci est principalement dû à la qualité des voisins de chaque triangle; nous avons décidé de porter nos efforts sur la création de zones à l'intérieur du maillage en regroupant les éléments qui restaient "mauvais". En remaillant localement chacune de ces parties ainsi formées, nous montrerons de quelle façon cette méthode permet de résoudre les problèmes d'étirement ou de compression des maillages de géométries à parois mobiles. L'intérêt de cette approche est de baser la régularisation du maillage sur des opérations essentiellement **locales**. Il en résulte une grande simplification des procédures d'interpolations (en particulier conservatives).

2 Comment définir la qualité d'un maillage

La résolution des problèmes physiques par la méthode des éléments finis nécessite la réalisation d'un maillage du domaine où se déroulent les phénomènes physiques étudiés. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\overline{\Omega}$ le domaine polygonal correspondant dont la frontière est la frontière discrète de Ω constituée de segments. On décompose $\overline{\Omega}$ en une triangulation T_h composée de triangles K verifiant :

- $\star$ $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$
- $\star$ $\forall\, K,\ \forall\, K' \ \in T_h \quad (K' \neq K) \qquad K \cap K' = \ \emptyset,$ *un sommet*, *ou une* arête

Le maillage est alors dit “conforme”.
Un maillage d'une géométrie déformable doit au cours du temps tenir compte du mouvement de chacune des frontières mobiles. Il est donc nécessaire de déterminer à chaque instant le déplacement des noeuds du maillage. Dans le cadre de cette étude, on a simplement utilisé la résolution d'une équation de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet et Neumann données par le déplacement des noeuds frontières. Le mouvement des noeuds entraîne une modification des éléments qui peuvent se retrouver très étirés ou au contraire compressés suivant l'endroit de la géométrie où ils se trouvent. Du point de vue théorique, la forme des triangles doit s'approcher du triangle équilatéral, si l'on se base sur un estimateur a priori de l'erreur d'interpolation [1]. Le calcul effectué sur un maillage déformé peut donc s'avérer assez peu précis et une bonne stratégie consiste alors à le régulariser. Notons cependant que les estimateurs d'erreur a priori ne font pas intervenir la solution des équations considérées. Nombre d'études ont montré qu'il pouvait être particulièrement intéressant d'avoir des triangles très étirés dans des zones de la géométrie où des phénomènes physiques fortement directionnels avaient lieu, telles que les ondes de chocs ou les couches limites en mécanique des fluides [5].
Nous ne cherchons pas ici à évaluer la forme optimale des éléments en fonction de la solution à obtenir, ce qui conduirait à une technique de maillage adaptatif, mais plus modestement à gérer les problèmes qui se posent lorsque le mouvement des frontières impose de grands changements de topologie. Il s'agit donc ici d'une étude purement géométrique propre à régler des problèmes

particuliers rencontrés dans les domaines déformables. Il faut noter cependant que les techniques mises en oeuvre ici pourraient tout à fait s'appliquer pour construire une méthode de maillage adaptatif. Pour cela il suffirait d'utiliser un critère basé sur la solution, permettant de juger de la qualité de la triangulation . Ici, nous avons simplement employé un critère géométrique afin de pouvoir localiser les éléments présentant une déformation importante : c'est le rapport entre les rayons des cercles inscrit **r** et circonscrit **R** à chaque élément (Figure 1).

$$\boxed{CRIT \;=\; r \,/\, R} \tag{1}$$

On rappelle que le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection entre les bissectrices des angles et que le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection entre les médiatrices de chaque côté. Les rayons respectifs **r** et **R** de ces cercles peuvent être calculés de la façon suivante :

- Soient A,B,C les trois sommets du triangle et a,b,c les longueurs des trois côtés, on a :

$$r = 2\ .\ Aire(ABC)\ /\text{Périmètre(ABC)}$$

et

$$R = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}$$

Du point de vue de la théorie classique de l'interpolation, le triangle optimal est le triangle équilatéral. Un triangle est d'autant plus proche du triangle équilatéral que la valeur du rapport r/R est proche de $\frac{1}{2}$. Inversement, un élément très déformé sera caractérisé par un rapport r/R tendant vers 0. Le rapport r/R nous servira donc à évaluer la qualité des triangles et on décidera qu'un triangle est "mauvais" si l'on a : $CRIT < \epsilon$ (nous avons choisi $\epsilon = \frac{1}{5}$).