



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Optimisation de maillages tridimensionnels

Eric BRIÈRE de L'ISLE
Paul-Louis GEORGE

N° 2046
Septembre 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

Optimisation de maillages tridimensionnels.

Eric Brière de l'Isle et Paul Louis George

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

RÉSUMÉ. *Les calculs effectués par la méthode des éléments finis sont d'autant meilleurs que les éléments sont de "bonne qualité". Nous nous intéressons aux maillages dont les éléments sont des tétraèdres et nous développons des outils permettant d'améliorer la "qualité" de ces maillages.*

Three-dimensional meshes optimization.

ABSTRACT. *The calculations performed via the finite element method are all the more exact if we start from "good quality" elements. We are interested in meshes where the elements are tetrahedrons and we shall develop utilities allowing us to improve the quality of these meshes.*

1 Introduction

Le but de cette étude¹ est de proposer une méthode permettant d'améliorer la qualité d'un maillage tridimensionnel composé de tétraèdres. Nous nous donnons donc le maillage d'un domaine de géométrie quelconque ne comprenant que des tétraèdres. Ce maillage est le résultat de l'application de telle ou telle méthode de génération de maillage, Delaunay-Voronoi, frontale, octree, etc ... (voir par exemple [3] sur les méthodes de création de maillages).

L'étude porte sur les trois cas suivant :

– **Cas isotrope :**

Le but dans ce cas est d'améliorer la qualité dite "en forme" des éléments du maillage.

– **Cas isotrope avec contrainte en taille :**

Nous nous donnons en plus du maillage une contrainte en taille, c'est-à-dire une fonction qui à tout point interne au maillage associe une taille au barycentre des éléments ou arêtes. Le but, ici, est d'améliorer la qualité dite "en taille" des arêtes internes au maillage, c'est-à-dire de modifier l'intérieur du maillage de façon à ce que la contrainte soit (presque) toujours respectée.

– **Cas anisotrope :**

Nous nous donnons en plus du maillage une contrainte de type champ tensoriel ce qui correspond à un contrôle en taille suivant les trois directions. Cette contrainte anisotrope se traduit par une mesure des qualités dans une métrique riemannienne, et revient donc à changer de métrique. On retrouve alors les cas précédents. Le maillage résultant est caractérisé par des arêtes de longueur (presque) constante dans la métrique déduite.

On définit en premier lieu les qualités d'un maillage et on se donne les quatre outils suivant :

- le bougé de points permettant leur repositionnement,

¹ Etude réalisée dans le cadre d'un stage de DESS de Mathématiques Appliquées des universités Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Paris Nord, sous contrat INRIA SDRC.

- la suppression d'arêtes ou de faces menant à la réécriture locale du maillage,
- la création de points permettant de casser une arête,
- la suppression de points.

La méthode d'optimisation du maillage consiste à utiliser les différents outils disponibles et d'en trouver la combinaison la plus judicieuse. Après cette première section d'introduction, nous donnerons quelques définitions dans la deuxième section, puis dans les trois sections suivantes nous étudierons les trois cas présentés ci-dessus. Dans la sixième et dernière section, nous conclurons l'ensemble de l'étude.

2 Définitions

Cette section précise quelques définitions utiles par la suite. On définit d'abord la qualité d'un maillage pour les trois cas étudiés, on introduit ensuite deux ensembles, appelés respectivement *coquille* et *boule*, ensembles qui seront utilisés par la suite dans les différentes étapes.

2.1 Qualité d'un maillage

Nous définissons ci-dessous la qualité d'un tétraèdre et la qualité d'une arête à partir desquelles nous allons définir la qualité d'un maillage pour les trois optimisations dont fait l'objet ce rapport.

- **Qualité d'un tétraèdre** : On se place dans le cas classique où la qualité d'un tétraèdre, T , est calculée comme:

$$Q_e(T) = \alpha \frac{\rho}{h}$$

où h est le diamètre du tétraèdre (i.e. la longueur de son plus grand coté), ρ le rayon de sa sphère inscrite et α un coefficient de normalisation choisi pour que la qualité d'un tétraèdre équilatéral soit 1. Par suite, une qualité est dans l'intervalle $]0,1]$, au pire proche de 0, au mieux égale à 1.

Remarque : Les tétraèdres dits "de mauvaise qualité" sont regroupés suivant trois types :

- Type I : l'une des arêtes est très courte par rapport aux autres arêtes.
- Type II : l'un des quatre sommets est proche du barycentre des deux ou des trois autres.
- Type III : les quatre sommets forment presque un carré.

On pourra consulter [1] pour plus de détails sur l'importance de la qualité d'un tétraèdre, et sur les différents types de tétraèdres plats (cf. figure 1).

- **Qualité d'une arête** : Nous définissons la qualité d'une arête, AB , comme:

$$Q_h(AB) = \min\left(\frac{l}{h}, \frac{h}{l}\right)$$

où l est la longueur de l'arête AB et h la longueur désirée (contrainte en taille). Par suite, une qualité est dans l'intervalle $]0,1]$, au pire proche de 0, au mieux égale à 1.

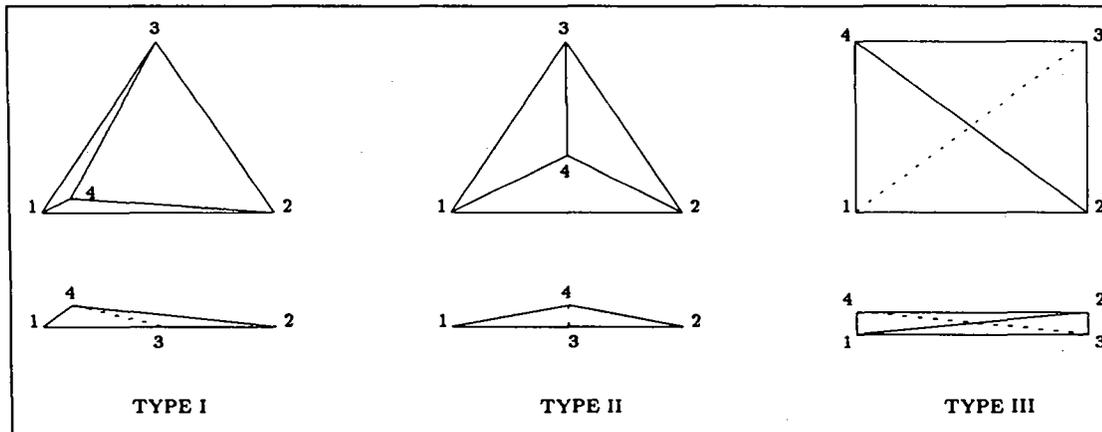


FIG. 1 - 2 vues sur 3 cas de tétraèdres "plats".

2.1.1 Qualité d'un maillage : cas isotrope (sans contrainte additionnelle)

Dans le cas isotrope, seule la qualité des tétraèdres (Q_e) est prise en compte. La qualité d'un maillage est alors appréciée au travers de :

- la qualité du plus mauvais tétraèdre de ce maillage,
- la répartition des éléments suivant leur qualité.

Le but de l'optimisation de maillage est, d'une part, d'améliorer la qualité (c'est-à-dire de faire croître Q_e vers 1) et, d'autre part, de créer des tétraèdres de qualité telle que l'histogramme reflétant la distribution de ces qualités soit "tassé" vers la valeur 1. Par ailleurs, il sera intéressant de comparer la plus mauvaise qualité obtenue avec la valeur cible calculée comme la qualité du meilleur tétraèdre constructible sur la plus mauvaise face de la surface du maillage (le maillage de la surface n'est pas modifié).

2.1.2 Qualité d'un maillage : cas isotrope avec contrainte en taille

Dans le cas isotrope avec contrainte en taille la qualité d'un maillage est évaluée via :

1. la qualité au sens d'une contrainte de taille appréciée au travers de :

- la qualité de la plus mauvaise arête libre² de ce maillage,
- la répartition des arêtes libres suivant leur qualité.

2. la qualité au sens de la forme des éléments comme définie dans le cas isotrope.

... Le but de l'optimisation de maillage est, d'une part, d'améliorer la qualité "en taille" (c'est-à-dire de faire croître Q_h vers 1) et, d'autre part, de créer des arêtes de qualité telle que l'histogramme reflétant la distribution de ces qualités soit "tassé" vers la valeur 1.

Remarque : La qualité du maillage dite "en forme" (noté Q_e) ne doit pas être négligée devant celle dite "en taille" (noté Q_h). En effet, un tétraèdre presque plat (cf. figure 1 où $Q_e \simeq 0$) peut très bien avoir une bonne qualité (cf. les types II et III où $Q_h > 1/\sqrt{2}$) au sens des longueurs d'arêtes.

²Une arête est dite libre si elle n'est pas sur la frontière du domaine, frontière que l'on s'interdit de modifier, si elle n'est pas sur une frontière interne ou encore si elle n'est pas spécifiée explicitement en tant qu'arête fixe.

2.1.3 Qualité d'un maillage : cas anisotrope

Dans le cas anisotrope la qualité d'un maillage est appréciée au travers des deux mêmes aspects que dans le cas isotrope avec contrainte.

Les mesures de qualités pour un tétraèdre et une arête ne se font plus avec la métrique euclidienne mais avec une autre métrique (cf. section 5.1) qui sera liée aux contraintes en taille suivant les directions. La longueur désirée l pour mesurer Q_h sera de 1 en tout point.

Le but de l'optimisation de maillage est, d'une part, d'améliorer les qualités (c'est-à-dire faire croître Q_h et Q_e vers 1) et, d'autre part, de créer des arêtes et des tétraèdres de qualités telles que les histogrammes reflétant la distribution de ces qualités soient "tassé" vers la valeur 1.

2.2 Coquille associée à une arête

Etant donné une arête, $\alpha\beta$, la coquille $C_{\alpha\beta}$ associée à cette arête est l'ensemble des tétraèdres enroulés autour de celle-ci. La qualité "en forme" (Q_e) de la coquille $C_{\alpha\beta}$, est, selon 2.1.2, mesurée comme la qualité du plus mauvais des tétraèdres de cette coquille. La qualité "en taille" (Q_h) de la coquille $C_{\alpha\beta}$, est, toujours selon 2.1.2, mesurée comme la qualité de la plus mauvaise arête interne de cette coquille. On désigne par M_i les sommets de la coquille autres que α et β (le nombre de points d'une coquille est a priori quelconque).

La figure 2 montre l'exemple d'une coquille formée par 5 éléments. La partie gauche montre les 5 tétraèdres, $M_1\alpha M_2\beta, \dots$, tandis que la partie droite représente le "polygone" formé par les M_i , "polygone" que nous serons amenés à manipuler par la suite.

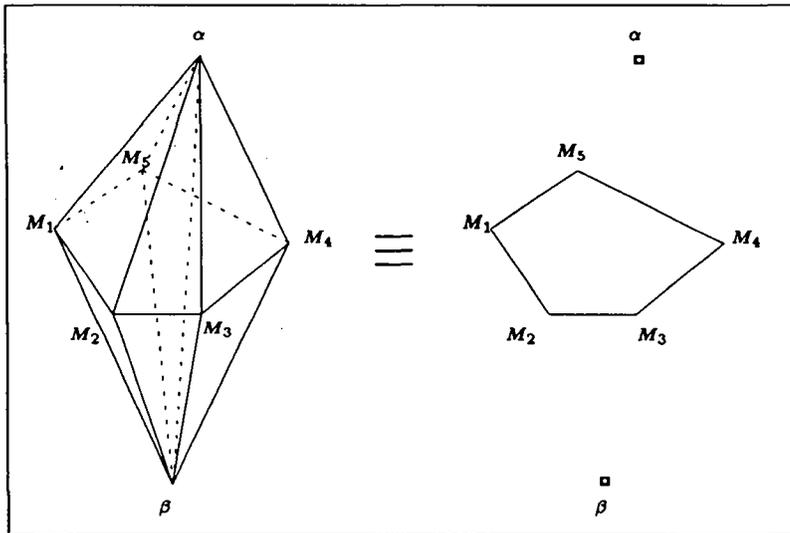


FIG. 2 - Une coquille $C_{\alpha\beta}$ composée de 5 tétraèdres.

2.3 Boule associée à un point

Etant donné un point P du maillage, la boule, B_P , associée à ce point est l'ensemble des tétraèdres ayant ce point pour sommet. La qualité "en forme" (Q_e) d'une telle boule est la qualité du plus mauvais des tétraèdres de cet ensemble. La qualité "en taille" (Q_h) est mesurée comme la qualité de la plus mauvaise arête interne de cet ensemble.

3 Optimisation dans le cas isotrope

Dans cette section, la seule qualité utilisée est celle dite "en forme".

3.1 Description des outils

3.1.1 Le bougé de points

Soit P un sommet libre³ du maillage. Le bougé du point P consiste à déplacer P pas à pas (via le coefficient α défini ci-dessous) vers un point "optimal" P_{opt} calculé à partir des tétraèdres idéaux s'appuyant sur les triangles que sont les faces externes de la boule B_P . Schématiquement, le bougé de point s'écrit comme:

$$P = P + \vec{d}$$

$$\vec{d} = \alpha P \vec{P}_{opt}$$

$$P_{opt} = \sum_{j=1}^n \beta_j P_{id,j}$$

où n est le nombre de points connectés à P (i.e. le nombre d'éléments de la boule B_P), $P_{id,j}$ est la position idéale de P pour le triangle de numéro j , position déterminée à partir des faces externes de B_P et β_j est le poids associé (avec $\sum \beta_j = 1.$) au point $P_{id,j}$.

Le point P est déplacé vers P_{opt} tant que la qualité (en forme) de B_P s'améliore, en cas contraire, le pas de déplacement α est diminué et inversé.

Divers choix pour les coefficients β_j sont possibles, les choix essayés sont les suivants:

- $\beta_j = 1$, i.e. les poids sont constants et on retrouve une méthode de barycentrage classique,
- $\beta_j = \frac{1}{Q_e(T_j)}$, i.e. le poids est inversement proportionnel à la qualité du tétraèdre j de la boule,
- $\beta_j = \frac{1}{Q_e(T_j)^2}$, i.e. le poids est inversement proportionnel au carré de la qualité du tétraèdre j de la boule,
- $\beta_j = 0$ pour tous les tétraèdres de la boule, et $\beta_j = 1$ pour le plus mauvais.

Les choix $\beta_j \neq 1$ donnent un poids relié à la qualité des éléments de la boule. Nous avons retenu $\beta_j = \frac{1}{Q_e(T_j)^2}$ comme pondération (pour respecter la condition $\sum \beta_j = 1$, on normalise le coefficient β_j par $\beta_j = \frac{\beta_j}{\sum_{j=1}^n \beta_j}$).

3.1.2 La suppression d'arêtes

Soit $\alpha\beta$ une arête libre du maillage. Nous supprimons l'arête si nous trouvons un remaillage de la coquille $C_{\alpha\beta}$ sans l'arête $\alpha\beta$, dont la qualité est meilleure que celle de la coquille initiale.

Une coquille s'écrit formellement $(M_i \alpha M_{i+1} \beta)_{i=1,n}$. Si la coquille est convexe⁴, il est possible de la remailler d'une ou de plusieurs manières différentes. Un remaillage s'écrit formellement comme: $(M_j M_k M_l \alpha)$ $(\beta M_j M_k M_l)$ pour j, k et l parcourant l'ensemble des indices de 1 à n . Un tel remaillage revient donc à retriangler le "polygone" formé par les M_i (c'est-à-dire à

³Un sommet est dit libre s'il n'est pas sur la frontière du domaine, frontière que l'on s'interdit de modifier, s'il n'est pas sur une frontière interne ou encore s'il n'est pas spécifié explicitement en tant que point fixe.

⁴Le fait qu'une coquille soit non-convexe ne fait que restreindre le nombre de réécritures possibles.

déterminer les indices j , k et l , puis à joindre ces triangles avec α d'une part et β d'autre part (voir la partie droite de la figure 2)).

Nous sommes amenés à choisir parmi un grand nombre de possibilités de remaillage de la coquille, ce qui oblige à faire le calcul d'un nombre tout aussi grand de qualités. Soit n le nombre de tétraèdres de la coquille initiale, n est également le nombre de sommets M_i . Si on désigne par N_n le nombre de manières de trianguler l'ensemble des M_i , on a, d'après [4]:

$$N_n = \sum_{i=3}^n N_{i-1} N_{n+2-i}$$

avec $N_2 = 2$ pour l'initialisation. Le nombre de triangulations possibles s'appuyant sur les M_i est donné, en fonction de n , dans le tableau 1 (voir également le tableau 3):

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

Tableau 1: *Nombre de triangulations possibles.*

Comme, d'une part, N_n croit très rapidement, et que d'autre part, dans un maillage de bonne qualité les coquilles ont en moyenne 6 éléments, nous limitons la suppression d'arête à des coquilles ayant au plus 9 éléments.

Un code d'énumération de toutes les triangulations possibles, pour un nombre de sommets n donné, a été implémenté. En sortie, ce code remplit un fichier contenant l'ensemble des triangulations possibles.

Ayant choisi comme qualité d'un ensemble de tétraèdres, la plus mauvaise qualité, dès qu'un tétraèdre est trop mauvais (c'est-à-dire de plus mauvaise qualité que celle de la coquille initiale), nous ne retenons parmi tous les remaillages possibles de la coquille que ceux où ne réapparaissent pas ce tétraèdre. Ceci permet de ne pas explorer tous les remaillages a priori possibles pour n donné. Pour cela, on tient compte du triangle $(M_j M_k M_l)$ (à partir duquel le mauvais tétraèdre a été construit) et l'on rejette toutes les triangulations comportant un triangle d'indices (jkl) . Afin de permettre cette sélection, le code ci-dessus stocke les informations suivantes:

- $t_{j,k}$ avec j variant de 1 au nombre de triangles, k variant de 1 à 3, le nombre de sommets d'un triangle,
- nf le nombre d'autres remaillages où réapparaît le triangle $t_{j,k}$,
- pos un tableau donnant les nf numéros des remaillages où réapparaît le triangle $t_{j,k}$.

Par exemple, dans le cas où $n = 5$, on a les informations listées dans le tableau 2:

Nt	t_{11}	t_{12}	t_{13}	nf	pos	t_{21}	t_{22}	t_{23}	nf	pos	t_{31}	t_{32}	t_{33}	nf	pos
1	1	2	3	1	4	1	4	5	1	2	1	3	4	0	-
2	2	3	4	1	3	1	4	5	0	-	1	2	4	0	-
3	1	2	5	1	5	2	3	4	0	-	2	4	5	0	-
4	3	4	5	1	5	1	2	3	0	-	1	3	5	0	-
5	1	2	5	0	-	3	4	5	0	-	2	3	5	0	-

Tableau 2: *Les triangulations pour $n = 5$.*

où Nt est le numéro de la triangulation des M_i , $(t_{j_1} t_{j_2} t_{j_3})$ sont les indices sur M_i du triangle j ($j = 1, 3$: il y a 3 triangles pour 5 points), nf est le nombre de fois où réapparaît ce triangle et pos est la position (ou numéro de triangulation) où le triangle réapparaît.

Ainsi (123) pour la première triangulation, réapparaît une fois ($nf = 1$) dans la quatrième triangulation ($pos = 4$) comme on peut le vérifier sur la figure 3.

Remarque: Les différentes triangulations ont été triées de manière à ce que les triangles réapparaissant le plus souvent par la suite soient les premiers observés.

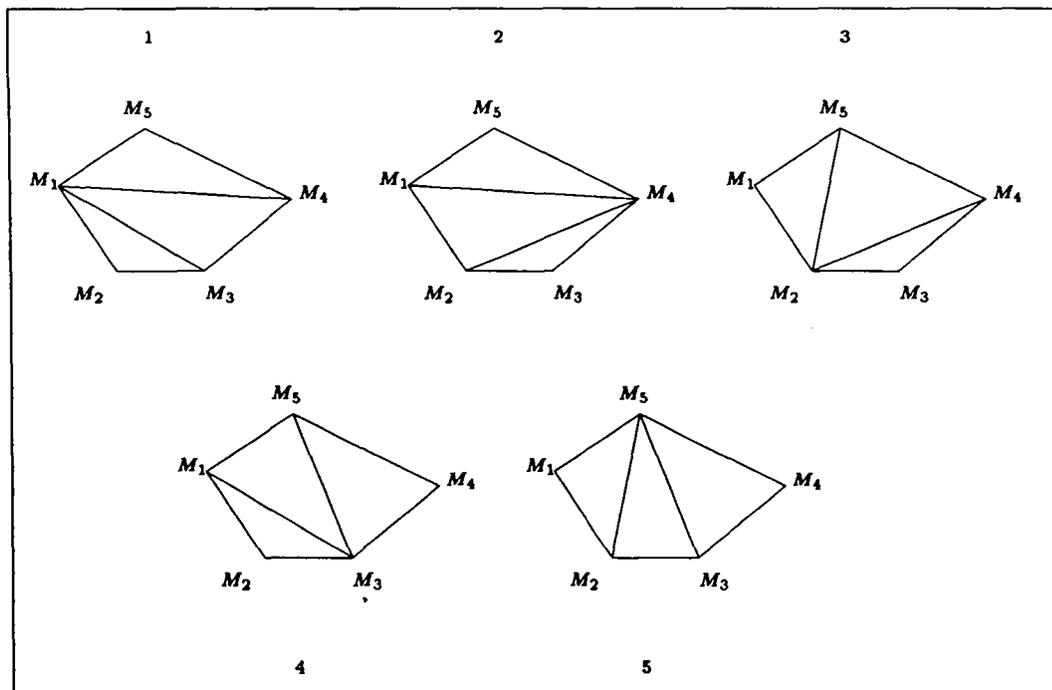


FIG. 3 - Les 5 triangulations pour 5 points.

Pour un nombre n de points M_i donné, le nombre de triangles différents constructibles, noté NT_n , croît seulement en n^3 :

$$NT_n = n(n-1)(n-2)/6$$

d'où pour différents n , le tableau 3:

n	NT_n	N_n	n	NT_n	N_n
3	1	1	11	165	4862
4	4	2	12	220	16796
5	10	5	13	286	58786
6	20	14	14	364	208012
7	35	42	15	455	742900
8	56	132	16	560	2674440
9	84	429	17	680	9694845
10	120	1430	18	816	35357670

Tableau 3: Nombre de triangles et de triangulations.

NT_n croît beaucoup moins vite que N_n , certains triangles réapparaissent très souvent. Pour ne calculer qu'une fois la qualité d'un couple $(M_j M_k M_l \alpha)$ et $(\beta M_j M_k M_l)$ de tétraèdres s'appuyant sur le triangle $(M_j M_k M_l)$, on stocke cette qualité en mémoire lors de la réécriture de la coquille $C_{\alpha\beta}$ donnée.

3.1.3 La suppression de faces

Soit $\alpha\beta\gamma$ une face libre⁵ du maillage. La suppression d'une face (ou insertion d'une arête) est possible si les 2 tétraèdres adjacents par cette face forment un polyèdre convexe. Le remaillage de ce polyèdre comprend alors 3 tétraèdres (cf. [6] et voir la figure 4). Nous supprimons la face si nous trouvons que le remaillage des 2 tétraèdres initiaux en ces 3 nouveaux tétraèdres a une qualité meilleure que la qualité initiale.

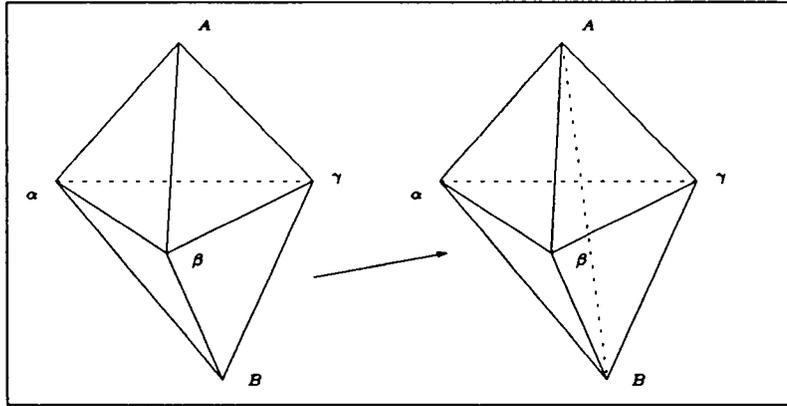


FIG. 4 - Suppression d'une face.

3.1.4 L'insertion de points pour casser une arête

Soit $\alpha\beta$ une arête libre du maillage, le maillage de $C_{\alpha\beta}$, la coquille associée, s'écrit formellement (cf. ci-dessus) comme $(M_i\alpha M_{i+1}\beta)_{i=1,n}$ où n désigne le nombre de tétraèdres de cet ensemble. Quelque soit la coquille (convexe ou non), il est possible de créer un point P sur l'arête $\alpha\beta$ et de former un nouveau maillage valide du polyèdre correspondant. Ce remaillage s'écrit formellement comme l'ensemble des éléments $(M_i\alpha M_{i+1}P)_{i=1,n}$ et $(M_i P M_{i+1}\beta)_{i=1,n}$.

Cette opération sera tentée dans le cas où les outils précédents ne donnent pas le résultat escompté et dans le cas où l'arête $\alpha\beta$ est jugée trop longue par rapport aux autres arêtes de la coquille. En pratique, le point P est initialement positionné au milieu de l'arête $\alpha\beta$ puis le bougé de points est appliqué à P . En examinant l'évolution de la qualité des éléments initiaux et du remaillage créé, on décide ou non d'effectuer la modification locale du maillage.

3.1.5 La suppression de points

Soit P un sommet libre du maillage. Dans le cas, très exceptionnel, où la boule B_P associée à P , n'est composée que de 4 tétraèdres, nous supprimons ce point.

3.1.6 Précisions sur les outils

Pour l'utilisation de la "suppression d'arêtes", nous avons besoin de connaître toutes les triangulations possibles d'un polyèdre de n sommets. Le programme de génération automatique de toutes ces triangulations les trie avant de les stocker dans un fichier nommé "triann.dat".

L'utilisation des outils précédents pour l'optimisation locale comprend, en fait, deux phases:

- une première phase qui consiste à simuler les différentes réécritures de la coquille,

⁵Une face est dite libre si elle n'est pas sur la frontière du domaine, frontière que l'on s'interdit de modifier, si elle n'est pas sur une frontière interne ou encore si elle n'est pas spécifiée explicitement en tant que face fixe.

- une deuxième phase de modification décidée après comparaison de la qualité initiale et de celle obtenue pour la meilleure simulation.

3.2 L'algorithme

1. Lecture des données du maillage,
2. Recherche des voisins (tétraèdres adjacents par face) pour chaque tétraèdre,
3. Examen des arêtes permettant de :
 - (a) trouver les arêtes libres,
 - (b) trouver les sommets libres,
 - (c) trouver, pour chaque sommet, un tétraèdre le contenant,
 - (d) calculer la qualité visée à partir des faces non-libres.
4. Optimisation proprement dite : utilisation des divers outils tant que cela améliore la qualité de manière significative :
 - (a) suppression d'arêtes pour toutes les arêtes libres,
 - (b) insertion de points pour toutes les arêtes libres,
 - (c) suppression de faces pour toutes les faces libres,
 - (d) suppression des points libres pour les boules de 4 tétraèdres,
 - (e) bougé de points pour tous les sommets libres,
 - (f) calcul de l'histogramme et de l'évolution de la qualité du maillage.
5. Sauvegarde des données du maillage dans un nouveau fichier.

3.3 Exemples d'application

Nous donnons ci-après quelques exemples de maillages sur lesquels a été appliquée la méthode d'optimisation de la qualité. Pour chacun d'entre eux, nous montrons le maillage surfacique et nous donnons les informations suivantes :

- le nombre d'éléments, le nombre de sommets et la qualité du maillage avant et après optimisation,
- les histogrammes de la répartition des éléments suivant leur qualité avant et après optimisation. Dans ces histogrammes nous donnons pour chaque plage de qualité le pourcentage (%) et le nombre d'éléments (n).
- le nombre d'itérations de la méthode (phase 4 de l'algorithme),
- le nombre d'éléments de qualité plus mauvaise que la qualité visée ou cible (cf. 2.1.1) après optimisation,
- le temps CPU total utilisé (avec comme machine une H.P. 715.50).

Remarque : Certains des maillages fournis en entrée sont volontairement "mauvais".

3.3.1 Exemple 1

Il s'agit du maillage de l'intérieur d'une bielle (données fournies par Matra-Datavision).

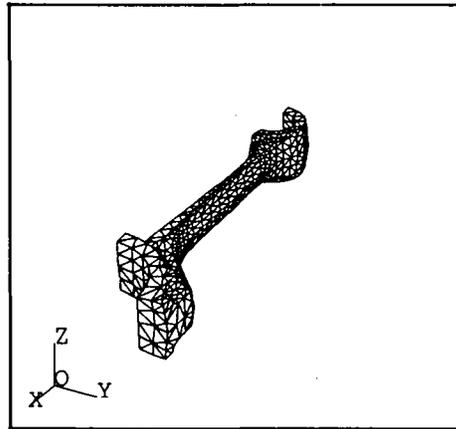


FIG. 5 - Maillage de "bielle".

-	avant	après
Nombre d'éléments	3514	3820
Nombre de sommets	946	1064
Qualité du maillage	1/755.39	1/9.15

Maillage avant et après optimisation de la qualité.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	63%	2224	72%	2784
$2 \leq 1/Q_e < 3$	22%	780	21%	824
$3 \leq 1/Q_e < 4$	5%	177	3%	136
$4 \leq 1/Q_e < 5$	2%	80	1%	50
$5 \leq 1/Q_e < 6$	1%	58	0%	13
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	35	0%	7
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	18	0%	2
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	16	0%	2
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	14	0%	2
$1 \leq 1/Q_e < 10$	96%	3402	100%	3820
$10 \leq 1/Q_e < 100$	2%	98	-	-
$100 \leq 1/Q_e < 1000$	0%	14	-	-

Histogramme du maillage avant et après optimisation de la qualité.

Après 4 itérations (effectuées en 22 secondes), nous n'avons plus que 5 éléments plus mauvais que la qualité visée (1/7.93).

3.3.2 Exemple 2

Le deuxième exemple est le maillage d'une pièce mécanique (données fournies par S.D.R.C.).

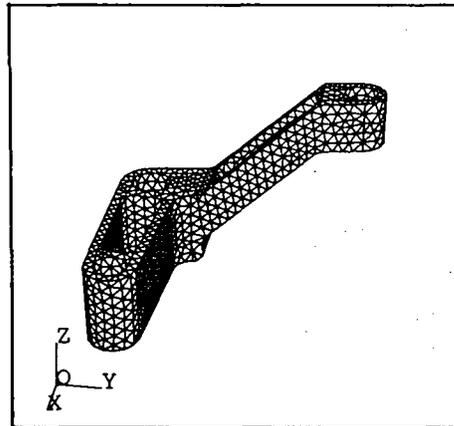


FIG. 6 - Maillage de "biellette".

-	avant	après
Nombre d'éléments	7331	7418
Nombre de sommets	1981	2083
Qualité du maillage	1/56.15	1/3.44

Maillage avant et après optimisation de la qualité.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	88%	6520	97%	7247
$2 \leq 1/Q_e < 3$	7%	561	2%	165
$3 \leq 1/Q_e < 4$	1%	101	0%	6
$4 \leq 1/Q_e < 5$	0%	44	-	-
$5 \leq 1/Q_e < 6$	0%	34	-	-
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	17	-	-
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	17	-	-
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	7	-	-
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	3	-	-
$1 \leq 1/Q_e < 10$	99%	7304	100%	7418
$10 \leq 1/Q_e < 100$	0%	27	-	-

Histogramme du maillage avant et après optimisation de la qualité.

Après 5 itérations (effectuées en 35 secondes), nous n'avons plus que 25 éléments plus mauvais que la qualité visée (1/2.49).

3.3.3 Exemple 3

Le troisième exemple est le maillage construit sur une Peugeot 405 (données fournies par P.S.A.).

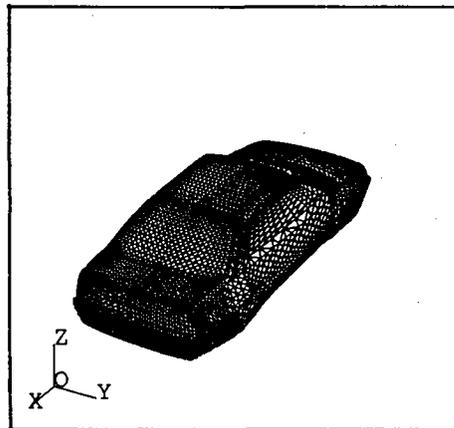


FIG. 7 - Maillage de "peugeot".

-	avant	après
Nombre d'éléments	63305	74670
Nombre de sommets	11931	15081
Qualité du maillage	1/9316.3	1/11.62

Maillage avant et après optimisation de la qualité.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	73%	46534	86%	64359
$2 \leq 1/Q_e < 3$	13%	8747	11%	8576
$3 \leq 1/Q_e < 4$	3%	2342	1%	1265
$4 \leq 1/Q_e < 5$	1%	1135	0%	332
$5 \leq 1/Q_e < 6$	1%	737	0%	78
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	535	0%	32
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	393	0%	9
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	277	0%	10
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	264	0%	7
$1 \leq 1/Q_e < 10$	96%	60964	99%	74668
$10 \leq 1/Q_e < 100$	2%	1850	0%	2
$100 \leq 1/Q_e < 1000$	0%	444	-	-
$1000 \leq 1/Q_e < 10000$	0%	47	-	-

Histogramme du maillage avant et après optimisation de la qualité.

Après 13 itérations (effectuées en 25 minutes), nous n'avons plus que 2 éléments plus mauvais que la qualité visée (1/10.98).

3.3.4 Exemple 4

Le quatrième exemple est le maillage d'une pièce mécanique (données fournies par S.D.R.C.).

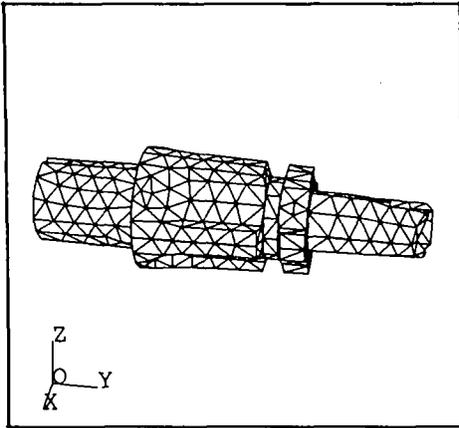


FIG. 8 - Vue sur la pièce.

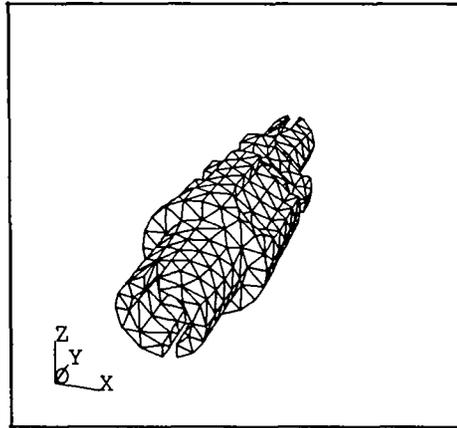


FIG. 9 - Autre vue sur la pièce.

-	avant	après
Nombre d'éléments	1755	2004
Nombre de sommets	597	648
Qualité du maillage	1/296.7	1/7.28

Maillage avant et après optimisation de la qualité.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	80%	1408	84%	1690
$2 \leq 1/Q_e < 3$	15%	267	12%	254
$3 \leq 1/Q_e < 4$	1%	34	0%	12
$4 \leq 1/Q_e < 5$	0%	11	1%	22
$5 \leq 1/Q_e < 6$	0%	9	1%	22
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	3	0%	3
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	7	0%	1
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	3	-	-
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	2	-	-
$1 \leq 1/Q_e < 10$	99%	1744	100%	2004
$10 \leq 1/Q_e < 100$	0%	10	-	-
$100 \leq 1/Q_e < 1000$	0%	1	-	-

Histogramme du maillage avant et après optimisation de la qualité.

Après 4 itérations (effectuées en 10 secondes), nous n'avons plus que 20 éléments plus mauvais que la qualité visée (1/5.22).

3.3.5 Exemple 5

Le cinquième exemple est le maillage d'une pièce mécanique (données fournies par S.D.R.C.).

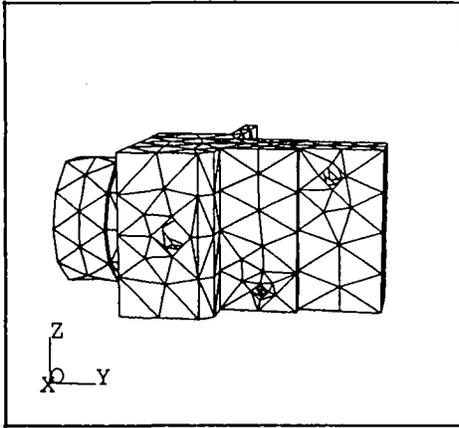


FIG. 10 - Vue sur la pièce.

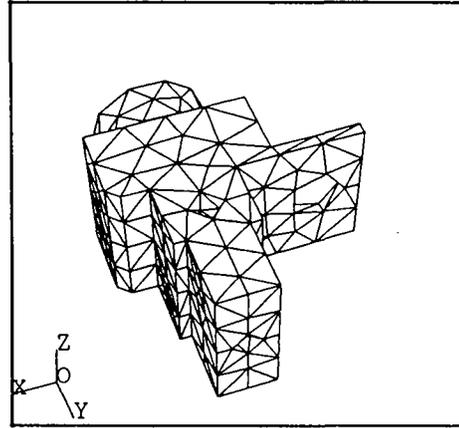


FIG. 11 - Autre vue sur la pièce.

-	avant	après
Nombre d'éléments	1409	1566
Nombre de sommets	446	477
Qualité du maillage	1/26.0	1/6.30

Maillage avant et après optimisation de la qualité.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	65%	917	72%	1139
$2 \leq 1/Q_e < 3$	26%	371	24%	381
$3 \leq 1/Q_e < 4$	5%	75	2%	33
$4 \leq 1/Q_e < 5$	1%	23	0%	11
$5 \leq 1/Q_e < 6$	0%	9	-	-
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	2	0%	2
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	0	-	-
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	5	-	-
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	1	-	-
$1 \leq 1/Q_e < 10$	99%	1403	100%	1566
$10 \leq 1/Q_e < 100$	0%	6	-	-

Histogramme du maillage avant et après optimisation de la qualité.

Après 3 itérations (effectuées en 7 secondes), nous n'avons plus que 2 éléments plus mauvais que la qualité visée (1/5.79).

4 Optimisation dans le cas isotrope avec contrainte en taille

Dans cette section nous avons redéfini des outils ne prenant en compte que la qualité "en taille" (Q_h). Les outils communs avec le cas précédent ne sont pas décrits à nouveau.

4.1 Description des outils

Nous décrivons ci-dessous les quatre outils nécessaires à l'optimisation du maillage suivant le champ de contraintes, mais nous utiliserons aussi le bougé de point et la suppression d'arêtes définis dans le cas isotrope (pour ne pas négliger la qualité "en forme").

4.1.1 La suppression d'arêtes

Nous avons repris l'outil défini dans le cas isotrope (sans contrainte) avec comme nouvelle mesure de la qualité d'une coquille celle dite "en taille", c'est-à-dire la qualité de sa plus mauvaise arête interne. On remarque qu'il revient au même de prendre pour qualité d'une coquille celle du plus mauvais de ses tétraèdres, avec comme qualité (en taille) d'un tétraèdre la plus mauvaise qualité de ses arêtes internes à la coquille. Cela nous permet de réutiliser la "suppression d'arêtes" définie dans le cas isotrope.

4.1.2 Le bougé de points

Soit P un sommet libre du maillage. Le bougé du point P consiste à déplacer P vers un point "optimal" P_{opt} calculé à partir des points idéaux P_{id_j} s'appuyant sur les sommets externes P_j de la boule B_P . Schématiquement, dans ce cas le bougé de point s'écrit, dans ce cas, comme:

$$P = P + \vec{d}$$

$$\vec{d} = \alpha P \vec{P}_{opt}$$

$$P_{opt} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{l_j}{h_j} P_{id_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{l_j}{h_j}}$$

où n est le nombre de sommets externes de la boule B_P , l_j est la distance de P_j à P , P_{id_j} est la position idéale de P sur l'axe initial ($P_j P$) et h_j la taille de l'arête souhaitée au barycentre de ces deux sommets. Le point P est replacé en P_{opt} si la qualité (Q_h) s'améliore et si le maillage reste juste⁶, sinon il est déplacé vers P_{opt} (via le coefficient α , égal à 1, puis 1/2, 1/4 ...) avec les mêmes conditions et à la condition que le pas soit significatif. On remarque dans [5] une formule du type de celle permettant le calcul de P_{opt} .

4.1.3 L'insertion de points pour casser une arête

Nous avons repris l'outil défini pour le cas isotrope (sans contraintes), mais nous ne prenons en compte que la qualité "en taille" (Q_h). Cette opération sera tentée dans le cas où les outils précédents ne donnent pas le résultat escompté et dans le cas où l'arête $\alpha\beta$ est jugée trop longue par rapport à la taille désirée. En pratique, le point P est initialement positionné au milieu de l'arête $\alpha\beta$ puis le bougé de points (où $Q_h \nearrow$) est appliqué à P . En examinant l'évolution de la qualité (Q_h) des arêtes internes de la boule associée à P , on décide ou non d'effectuer la modification locale du maillage.

⁶Un maillage est dit juste si tous les volumes des tétraèdres sont positifs et si les intersections de 2 éléments sont réduites soit à l'ensemble vide, soit à un point, soit à une arête, soit à une face.

4.1.4 La suppression de points

Soit $\alpha\beta$ une arête (de longueur l) libre du maillage, jugée trop petite par rapport à la taille h souhaitée (c'est-à-dire lorsque l'on a : $l < h/\sqrt{2}$). Nous avons alors deux possibilités :

- la méthode de substitution (dite de "collapsing", décrite ci-dessous) des deux sommets α et β en un seul sommet donne un maillage juste,
- la substitution ne fonctionne pas.

Ces opérations ne seront tentées que si les outils précédents ne donnent pas le résultat escompté et si l'un des deux sommets au moins est libre. Nous présentons ci-dessous les deux méthodes associées aux deux cas :

- Le "collapsing" :

La première méthode (dite de "collapsing" des 2 extrémités d'une arête), est la plus rapide car la plus simple. Elle consiste à essayer de placer le premier sommet libre :

- soit au centre de l'arête $\alpha\beta$ si les deux sommets sont libres,
- soit à la place du sommet non-libre.

La substitution est effectuée si le maillage final est juste (cf. par exemple la figure 12). Remarque : la qualité "en taille" (Q_h) du maillage peut diminuer.

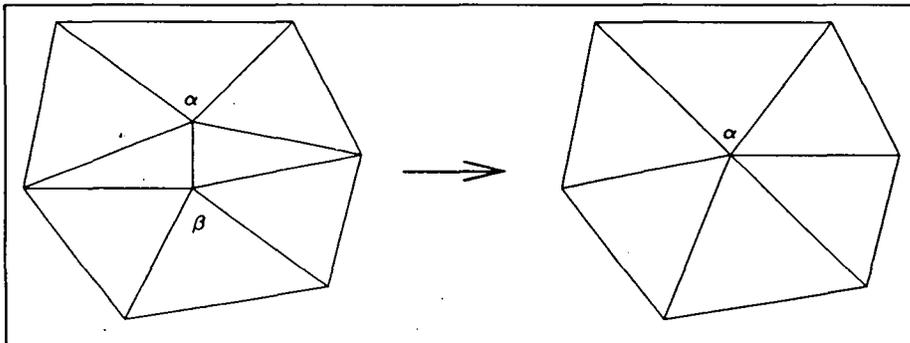


FIG. 12 - "Collapsing" de 2 sommets en bidimensionnel.

- Le "swapping" autour d'un sommet :

Soit α un point libre que l'on tente de supprimer. La méthode consiste à tenter de supprimer toutes les arêtes internes de la boule B_α associée à α . S'il ne reste plus que 4 arêtes à la fin, on peut alors supprimer le sommet qui est au centre d'un tétraèdre dont les quatre sommets sont les sommets externes de la boule B_α . Sinon, c'est un échec et la qualité "en taille" du maillage a probablement diminué.

En pratique la suppression sera tentée pour les deux sommets s'ils sont tous les deux libres. La suppression d'arêtes fait appel à l'outil de "suppression d'arêtes" précédemment défini, pour lequel on doit tolérer une diminution de la qualité. Les appels répétés à "suppression d'arêtes" sont coûteux en opérations et donc en temps. Le dessin de la figure 13 montre ce processus en dimension 2, cas dans lequel on cherche à n'obtenir plus que trois arêtes incidentes sur α .

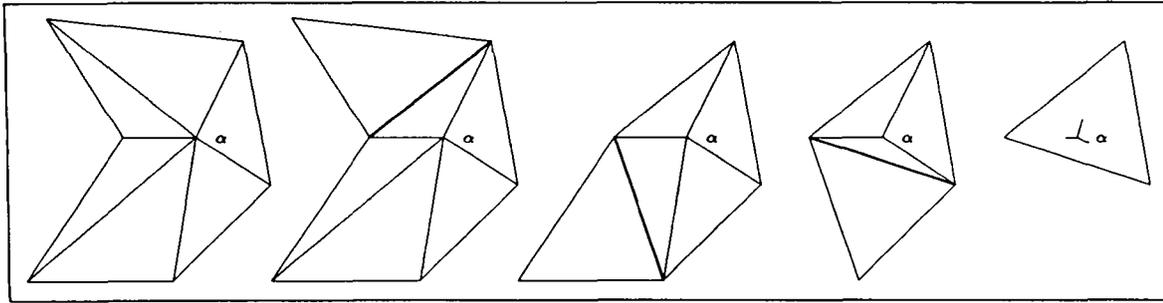


FIG. 13 - Suppression de α par des "swapping".

4.1.5 Précisions sur les outils

Nous disposons donc des quatre outils décrits ci-dessus (le bougé de points, la suppression d'arêtes, l'insertion de points et la suppression de points) avec comme mesure de la qualité celle "en taille" (Q_h). Ces outils permettent d'améliorer la qualité "en taille", mais c'est souvent au détriment de la qualité "en forme" (Q_e). C'est pourquoi nous avons repris du cas isotrope (sans contrainte) le bougé de points et la suppression d'arêtes.

4.2 L'algorithme

1. Lecture des données du maillage,
2. Recherche des voisins (tétraèdres adjacents par face) pour chaque tétraèdre,
3. Examen des arêtes permettant de :
 - (a) trouver les arêtes libres,
 - (b) trouver les sommets libres,
 - (c) trouver, pour chaque sommet, un tétraèdre le contenant,
4. Optimisation proprement dite : utilisation des divers outils tant que cela améliore les qualités de manière significative:
 - (a) Optimisation de la qualité (Q_h) en terme de longueur d'arête, tant que cela l'améliore de manière significative:
 - i. pour toutes les arêtes libres, on utilise les outils suivant:
 - suppression de l'arête si elle est de qualité suffisamment mauvaise,
 - insertion de points si l'arête est trop grande (c'est-à-dire si $h\sqrt{2} < l$),
 - suppression d'un point libre si l'arête est trop petite (c'est-à-dire si $h > l\sqrt{2}$).
 - ii. bougé de points pour tous les sommets libres ($Q_h \nearrow$),
 - iii. calcul de l'histogramme et de l'évolution de la "qualité en taille" du maillage.
 - (b) Optimisation de la qualité (Q_e) en terme de forme des éléments, tant que cela l'améliore de manière significative:
 - i. suppression d'arêtes pour toutes les arêtes libres ($Q_e \nearrow$),
 - ii. bougé de points pour tous les sommets libres ($Q_e \nearrow$),
 - iii. calcul de l'histogramme et de l'évolution de la "qualité en forme" du maillage.
5. Sauvegarde des données du maillage dans un nouveau fichier.

4.3 Exemples d'application

Nous donnons ci-après les résultats pour l'un des exemples de maillages sur lesquels a été appliquée la méthode d'optimisation des qualités dans le cas isotrope avec contrainte en taille. Pour chacune des contraintes, nous montrons une coupe suivant un même plan du maillage avant et après optimisation et nous donnons les informations suivantes :

- le nombre d'éléments, le nombre de sommets et les qualités en "taille" (Q_h) et en "forme" (Q_e) du maillage avant et après optimisation,
- les histogrammes de la répartition des éléments suivant leur qualité avant et après optimisation. Dans ces histogrammes nous donnons pour chaque plage de qualité le pourcentage (%) et le nombre d'éléments (n).
- les nombres d'itérations de la méthode (phase 4 de l'algorithme),
- le temps CPU total utilisé (avec comme machine une H.P. 715.50).

Nous nous donnons un maillage construit à partir d'une boule de rayon 1 centrée en l'origine. Nous nous donnons trois fonctions de taille définies en tout point du maillage, dépendant d'un paramètre t que l'on prend égal à la taille moyenne des arêtes de la peau:

1. $tailleh1(X, Y, Z, t) = t$

2. $tailleh2(X, Y, Z, t) = t * \min(1, \max(0.5, 3(X^2 + Y^2 + Z^2)))$

3. $tailleh3(X, Y, Z, t) = t * (1 + (\min(1, 0.1 + 25(roz - 2)^2) - 1) * \max(0, 1 - 4r^2))$
avec $r^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2)$ et $roz = \sqrt{(X + 2)^2 + Y^2}$

"tailleh" est donc la longueur désirée au point X, Y, Z et $t = 0.29$ pour le maillage présenté.

Voici une description des éléments respectant au mieux les différentes contraintes en taille, autrement dit voici ce que l'on cherche :

- *tailleh1* : Les éléments doivent être de taille constante et égale à t .
- *tailleh2* : Les éléments doivent être deux fois plus petits dans la boule de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en l'origine que dans le reste du maillage où la taille doit être constante et égale à t .
- *tailleh3* : Les éléments doivent être dix fois plus petit près d'une surface courbe que dans le reste du maillage. Nous avons pris comme surface une partie d'un cylindre d'axe k passant par le point $(-2, 0, 0)$ et de rayon 2.

4.3.1 Exemple 1 : icosaèdre avec "taille2" comme contrainte.

Nous optimisons le maillage de l'icosaèdre (cf. figure 14) avec une contrainte en taille variable (au minimum, la taille demandé vaut la moitié de la taille moyenne t) et nous obtenons le maillage optimisé (cf. figure 15) de qualités décrites ci-dessous.

-	avant	après
Nombre d'éléments	12340	18037
Nombre de sommets	2322	3408
Qualité en taille	1/2.98	1/1.68
Qualité en forme	1/21.1	1/2.22

Maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1.0 \leq 1/Q_h < 1.1$	17%	1910	32%	6644
$1.1 \leq 1/Q_h < 1.2$	25%	3420	32%	6462
$1.2 \leq 1/Q_h < 1.3$	20%	2752	26%	5249
$1.3 \leq 1/Q_h < 1.4$	17%	2330	8%	1640
$1.4 \leq 1/Q_h < 1.5$	11%	1494	0%	128
$1.5 \leq 1/Q_h < 1.6$	1%	161	0%	36
$1.6 \leq 1/Q_h < 1.7$	0%	106	0%	5
$1.7 \leq 1/Q_h < 1.8$	1%	176	-	-
$1.8 \leq 1/Q_h < 1.9$	0%	133	-	-
$1.9 \leq 1/Q_h < 2.0$	1%	139	-	-
$1 \leq 1/Q_h < 2$	94%	12621	100%	20164
$2 \leq 1/Q_h < 3$	5%	760	-	-

Histogramme des arêtes internes du maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	92%	11380	99%	18026
$2 \leq 1/Q_e < 3$	5%	689	0%	11
$3 \leq 1/Q_e < 4$	1%	152	-	-
$4 \leq 1/Q_e < 5$	0%	70	-	-
$5 \leq 1/Q_e < 6$	0%	10	-	-
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	4	-	-
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	9	-	-
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	4	-	-
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	1	-	-
$1 \leq 1/Q_e < 10$	99%	12319	100%	18037
$10 \leq 1/Q_e < 100$	0%	21	-	-

Histogramme des tétraèdres du maillage avant et après optimisation des qualités.

Après respectivement 10 et 7 itérations d'optimisations de "taille" et de "forme" (effectuées en 6 minutes), nous obtenons un maillage dont plus de 99% des arêtes internes ont une qualité meilleure que $1/\sqrt{2}$.

4.3.2 Exemple 2 : icosaèdre déjà optimisé avec "taille1" comme contrainte.

Nous avons pris comme maillage initial le résultat de l'exemple 1 (cf. figure 15), c'est-à-dire un maillage où nous voulons supprimer beaucoup de sommets pour respecter la nouvelle contrainte. Nous obtenons le maillage optimisé (cf. figure 16) de qualités décrites ci-dessous.

-	avant	après
Nombre d'éléments	18037	10584
Nombre de sommets	3408	2135
Qualité en taille	1/2.93	1/1.68
Qualité en forme	1/2.22	1/2.21

Maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1.0 \leq 1/Q_h < 1.1$	16%	3424	34%	3891
$1.1 \leq 1/Q_h < 1.2$	16%	3424	32%	3756
$1.2 \leq 1/Q_h < 1.3$	15%	3126	25%	2929
$1.3 \leq 1/Q_h < 1.4$	6%	1221	6%	781
$1.4 \leq 1/Q_h < 1.5$	3%	655	0%	68
$1.5 \leq 1/Q_h < 1.6$	5%	1033	0%	12
$1.6 \leq 1/Q_h < 1.7$	6%	1290	0%	1
$1.7 \leq 1/Q_h < 1.8$	6%	1262	-	-
$1.8 \leq 1/Q_h < 1.9$	5%	1072	-	-
$1.9 \leq 1/Q_h < 2.0$	4%	867	-	-
$1 \leq 1/Q_h < 2$	86%	17374	100%	11438
$2 \leq 1/Q_h < 3$	13%	2790	-	-

Histogramme des arêtes internes du maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	99%	18026	99%	10581
$2 \leq 1/Q_e < 3$	0%	11	0%	3

Histogramme des tétraèdres du maillage avant et après optimisation des qualités.

Après respectivement 11 et 6 itérations d'optimisations de "taille" et de "forme" (effectuées en moins de 12 minutes), nous obtenons un maillage dont plus de 99% des arêtes internes ont une qualité meilleure que $1/\sqrt{2}$.

4.3.3 Exemple 3 : icosaèdre avec "tailleh3" comme contrainte.

Nous optimisons le maillage de l'icosaèdre (cf. figure 14) avec une contrainte en taille variable (au minimum, la taille demandé vaut le dixième de la taille moyenne t) et nous obtenons le maillage optimisé (cf. figure 17) de qualités décrites ci-dessous.

-	avant	après
Nombre d'éléments	12340	75658
Nombre de sommets	2322	13255
Qualité en taille	1/13.1	1/1.73
Qualité en forme	1/21.1	1/2.54

Maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1.0 \leq 1/Q_h < 1.1$	17%	2370	36%	31612
$1.1 \leq 1/Q_h < 1.2$	25%	3357	32%	28525
$1.2 \leq 1/Q_h < 1.3$	19%	2603	24%	21115
$1.3 \leq 1/Q_h < 1.4$	19%	2574	6%	5800
$1.4 \leq 1/Q_h < 1.5$	8%	1163	0%	484
$1.5 \leq 1/Q_h < 1.6$	0%	128	0%	80
$1.6 \leq 1/Q_h < 1.7$	0%	101	0%	15
$1.7 \leq 1/Q_h < 1.8$	0%	77	0%	1
$1.8 \leq 1/Q_h < 1.9$	0%	66	-	-
$1.9 \leq 1/Q_h < 2.0$	0%	59	-	-
$1 \leq 1/Q_h < 2$	93%	12498	100%	87632
$2 \leq 1/Q_h < 10$	6%	883	-	-
$10 \leq 1/Q_h < 100$	0%	15	-	-

Histogramme des arêtes internes du maillage avant et après optimisation des qualités.

1/Qualité	%	n	%	n
$1 \leq 1/Q_e < 2$	92%	11380	99%	75492
$2 \leq 1/Q_e < 3$	5%	689	0%	166
$3 \leq 1/Q_e < 4$	1%	152	-	-
$4 \leq 1/Q_e < 5$	0%	70	-	-
$5 \leq 1/Q_e < 6$	0%	10	-	-
$6 \leq 1/Q_e < 7$	0%	4	-	-
$7 \leq 1/Q_e < 8$	0%	9	-	-
$8 \leq 1/Q_e < 9$	0%	4	-	-
$9 \leq 1/Q_e < 10$	0%	1	-	-
$1 \leq 1/Q_e < 10$	99%	12319	100%	75658
$10 \leq 1/Q_e < 100$	0%	21	-	-

Histogramme des tétraèdres du maillage avant et après optimisation des qualités.

Après respectivement 11 et 8 itérations d'optimisations de "taille" et de "forme" (effectuées en 42 minutes), nous obtenons un maillage dont plus de 99% des arêtes internes ont une qualité meilleure que $1/\sqrt{2}$.

4.3.4 Vues de coupes des maillages

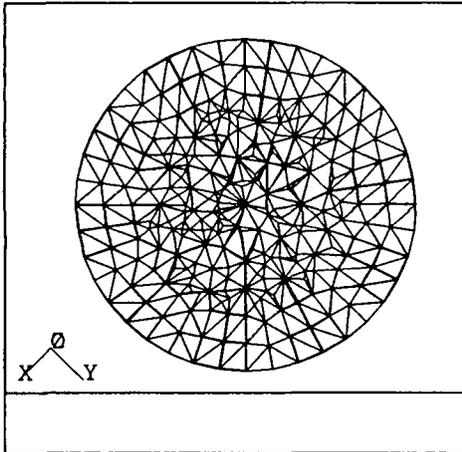


FIG. 14 - *Maillage initial.*

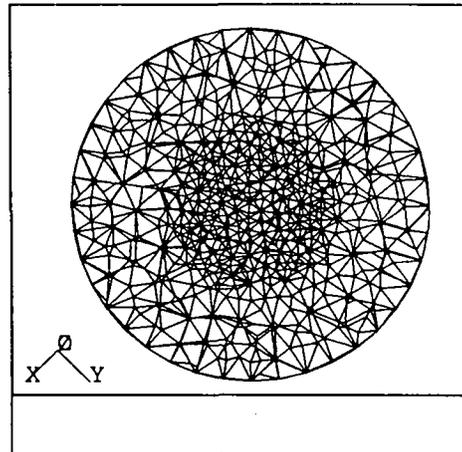


FIG. 15 - *Avec "tailleh2".*

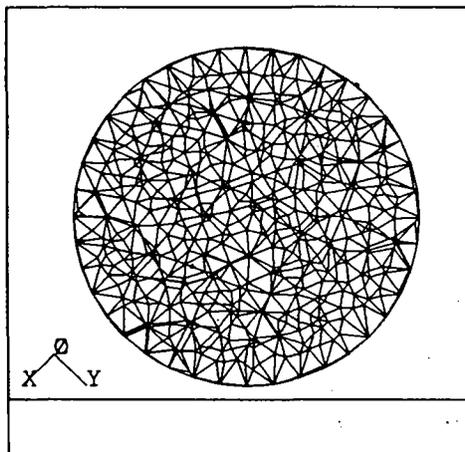


FIG. 16 - *Avec "tailleh1".*

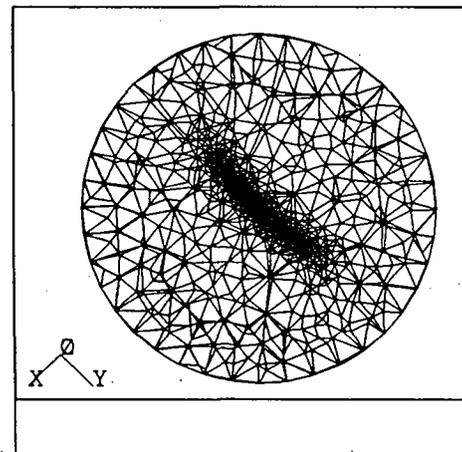


FIG. 17 - *Avec "tailleh3".*

5 Optimisation dans le cas anisotrope

Dans cette section, nous avons redéfini des outils qui tiennent compte des deux mesures de qualité (Q_h et Q_e). Ces mesures ne sont plus faites dans la métrique euclidienne, mais dans une autre que nous introduisons ci-dessous.

5.1 Changement de métrique

La donnée d'une contrainte de type tensoriel en tout point du maillage permet de contrôler la taille et la forme des tétraèdres en chacun de ces points. En effet, pour certaines applications numériques, il peut être nécessaire d'avoir un maillage plus raffiné à certains endroits et plus grossier à d'autres. De plus, il peut être souhaitable que dans certaines régions, les éléments soient allongés dans une direction privilégiée (par exemple suivant une onde de choc en aérodynamique ou une couche limite en mécanique des fluides). Pour plus de détails, on se référera à [7] qui traite du cas bidimensionnel.

On s'efforcera d'avoir des arêtes de longueurs 1 et des tétraèdres de forme aussi proche que possible du tétraèdre équilatéral, avec non plus la métrique euclidienne, mais la métrique riemannienne M associée à la contrainte. Les seules métriques considérées ici sont celles induites par un produit scalaire (noté $(.,.)_M$). Nous avons donc M une matrice définie positive. Dans le plan, l'ensemble des points à une distance 1 de l'origine forme un cercle pour la métrique habituelle, mais avec une autre métrique il forme une ellipse (cf. figure 18). Dans l'espace, cela se traduit par la transformation de la sphère unité en un ellipsoïde.

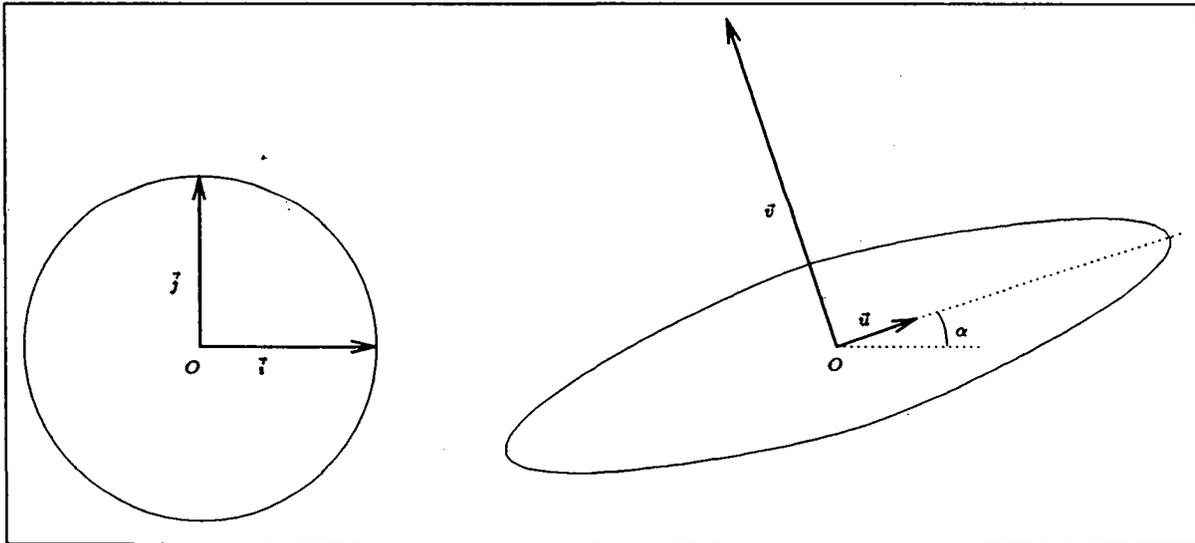


FIG. 18 - *Le cercle unité dans la métrique habituelle et une différente, dans le plan.*

On remarque dans le plan pour une métrique donnée que des triangles équilatéraux ont en commun leur taille (même aire) et leur étirement mais que leurs angles diffèrent (cf. 19). Ceci explique qu'un contrôle assuré par une métrique n'impose pas, a priori, de contrainte d'angle.

On note :

- \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} les vecteurs propres de la matrice M ,
- λ_1 , λ_2 et λ_3 les valeurs propres de la matrice M .

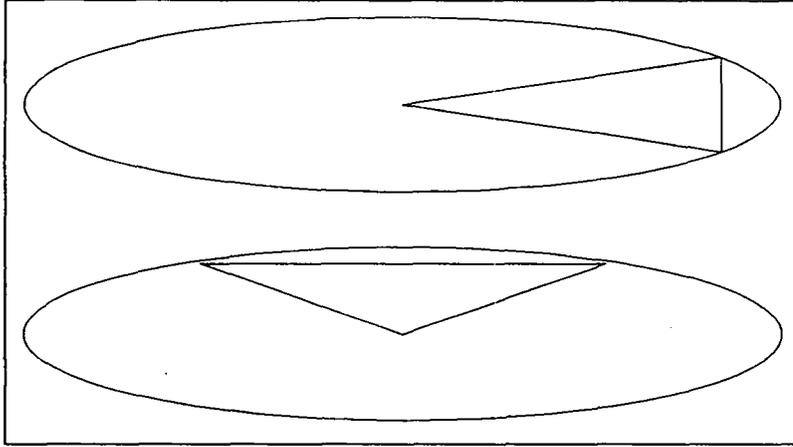


FIG. 19 - Deux triangles équilatéraux dans une même métrique.

On choisit les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que :

$$- |\vec{u}| = \sqrt{\lambda_1}$$

$$- |\vec{v}| = \sqrt{\lambda_2}$$

$$- |\vec{w}| = \sqrt{\lambda_3}$$

On a ainsi $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère habituel, et $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (noté \mathfrak{R}_M) le nouveau repère associé à la métrique M .

On remarque que la contrainte en taille (h) du cas isotrope avec contrainte peut être vu comme un cas particulier. Il suffit de remarquer que l'application

$$M(x) = \frac{1}{h^3(x)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

(où Ω est le domaine du maillage) définit une métrique riemannienne sur Ω et qu'un tétraèdre équilatéral de côté 1 dans cette métrique est un tétraèdre équilatéral de côté h dans la métrique euclidienne canonique (dite habituelle).

On note : $(\vec{AB})_M = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})^t \vec{AB}$, la projection du vecteur \vec{AB} dans le repère \mathfrak{R}_M . La distance (AB) dans la métrique M est alors définie par :

$$d_M(AB) = \sqrt{(\vec{AB}, \vec{AB})_M} = \sqrt{\vec{AB}_M \cdot \vec{AB}_M} = |\vec{AB}_M|$$

la surface d'un triangle (A, B, C) par :

$$\text{aire}_M(A, B, C) = \frac{1}{2} |\vec{AB}_M \otimes \vec{AC}_M|$$

et le volume d'un tétraèdre T par :

$$\text{volume}_M(T) = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \text{volume}_E(T)$$

où volume_E est le volume euclidien.

5.2 Description des outils

Nous décrivons ci-dessous les quatre outils nécessaires à l'optimisation du maillage suivant la contrainte.

5.2.1 La suppression d'arêtes

Nous avons repris l'outil défini dans le cas isotrope avec une nouvelle mesure de la qualité d'un tétraèdre propre à cet outil. On prend comme mesure de la qualité d'un tétraèdre, une combinaison (notée C_{amel} et définie ci-dessous) de la qualité "en forme" et de la qualité "en taille" de ses arêtes qui sont internes à la coquille. Cela nous permet de réutiliser la "suppression d'arêtes" définie pour le cas isotrope avec un minimum de changements.

5.2.2 Le bougé de points

Nous avons repris l'outil défini dans le cas isotrope avec comme nouvelle métrique celle que la contrainte nous impose localement. La position idéale de P pour le triangle de numéro j , P_{id_j} , est déterminée à partir des faces externes de B_P en tenant compte de la métrique locale.

5.2.3 L'insertion de points pour casser une arête

Nous avons repris l'outil défini pour le cas isotrope, mais nous prenons en compte la qualité "en taille" (Q_h) et la qualité "en forme" (Q_e). Cette opération sera tentée dans le cas où l'arête $\alpha\beta$ est jugée trop longue ($d_M(AB) > \sqrt{2}$) dans la métrique M associée à son milieu. En pratique, le point P est initialement positionné au milieu de l'arête $\alpha\beta$ puis le bougé de points est appliqué à P . En examinant l'évolution de la qualité des arêtes internes et des tétraèdres de la boule associée à P , on décide ou non d'effectuer la modification locale du maillage.

5.2.4 La suppression de points

Nous avons repris l'outil défini pour le cas isotrope avec contrainte et dit de "collapsing" des 2 extrémités d'une arête. La substitution est effectuée si le maillage final est juste (cf. par exemple la figure 12), et si la qualité "en forme" ne s'est pas trop dégradée (un paramètre en permet le contrôle).

5.2.5 Précisions sur les outils

Nous disposons donc des quatre outils décrits ci-dessus (le bougé de points, la suppression d'arêtes, l'insertion de points et la suppression de points) avec les deux mesures de qualités (Q_h et Q_e).

L'utilisation des outils précédents pour l'optimisation locale comprend, en fait, deux phases:

- une première phase qui consiste à simuler les différentes réécritures de la coquille,
- une deuxième phase de modification décidée après comparaison des qualités initiales et de celles obtenues pour la meilleure simulation.

Pour la suppression d'arêtes par swapping ainsi que pour l'insertion de point, nous définissons un coefficient d'amélioration des qualités (noté C_{amel}) à partir des deux qualités du sous ensemble observé:

$$C_{amel} = \alpha \left(\frac{1}{Q_{h_{ini}}} - \frac{1}{Q_h} \right) Q_{h_{ini}} + \beta \left(\frac{1}{Q_{e_{ini}}} - \frac{1}{Q_e} \right) Q_{e_{ini}}$$

où l'extension "ini" désigne une qualité initiale, α et β sont des coefficients tels que $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\alpha + \beta = 1$.

C_{amel} se devant d'être supérieur à un certain seuil, et la qualité en forme (Q_e) toujours strictement positive pour garantir que le maillage reste juste.

La méthode pour supprimer un point est celle dite de "collapsing" où un point est substitué par un autre.

5.3 L'algorithme

1. Lecture des données du maillage,
2. Recherche des voisins (tétraèdres adjacents par face) pour chaque tétraèdre,
3. Examen des arêtes permettant de:
 - (a) trouver les arêtes libres,
 - (b) trouver les sommets libres,
 - (c) trouver, pour chaque sommet, un tétraèdre le contenant,
4. Optimisation proprement dite : utilisation des divers outils tant que cela améliore les qualités de manière significative:
 - (a) pour toutes les arêtes libres (AB), on utilise les outils suivants :
 - suppression d'un point libre si l'arête est jugée trop petite ($d_M(AB) < 1/\sqrt{2}$),
 - insertion de points si l'arête est trop grande ($d_M(AB) > \sqrt{2}$),
 - suppression de l'arête par swapping.
 - (b) bougé de points pour tous les sommets libres ($Q_e \nearrow$),
 - (c) calcul de l'histogramme et de l'évolution de la "qualité en taille" du maillage.
5. Sauvegarde des données du maillage dans un nouveau fichier.

5.4 Exemples d'application

Nous présentons les résultats obtenus pour trois métriques appliquées au maillage initial (déjà utilisé dans la section 4.3). Voici une description des éléments respectant au mieux les différentes métriques :

- **1^{ère} métrique** : Les éléments doivent être allongés le long d'un segment centré en l'origine de vecteur directeur \vec{k} . Les arêtes doivent être de longueur constante suivant la direction \vec{k} , et décroître dans les autres directions quand on se rapproche du segment.
- **2^{ème} métrique** : Les éléments doivent être allongés le long d'un cercle (dans un tore pour être plus précis). Nous avons pris un cercle dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) de rayon 0.5, centré en l'origine. Les arêtes doivent être de longueur constante suivant la direction tangente au cercle, et décroître dans les deux autres directions quand on se rapproche du cercle.
- **3^{ème} métrique** : Les éléments doivent être aplatis le long d'une surface courbe. Nous avons pris comme surface une partie d'un cylindre d'axe \vec{k} passant par le point $(-1,0,0)$ et de rayon 1. Les arêtes doivent être de longueur constante suivant les directions tangentes au cylindre, et décroître suivant la normal quand on se rapproche du cylindre.

Nous présentons ci-dessous deux à trois coupes, suivant des plans orthogonaux, pour les différents maillages obtenus après optimisation. Nous donnerons ensuite les résultats numériques qui leurs sont liés (histogramme, nombre d'éléments ...).

5.4.1 1^{ère} métrique

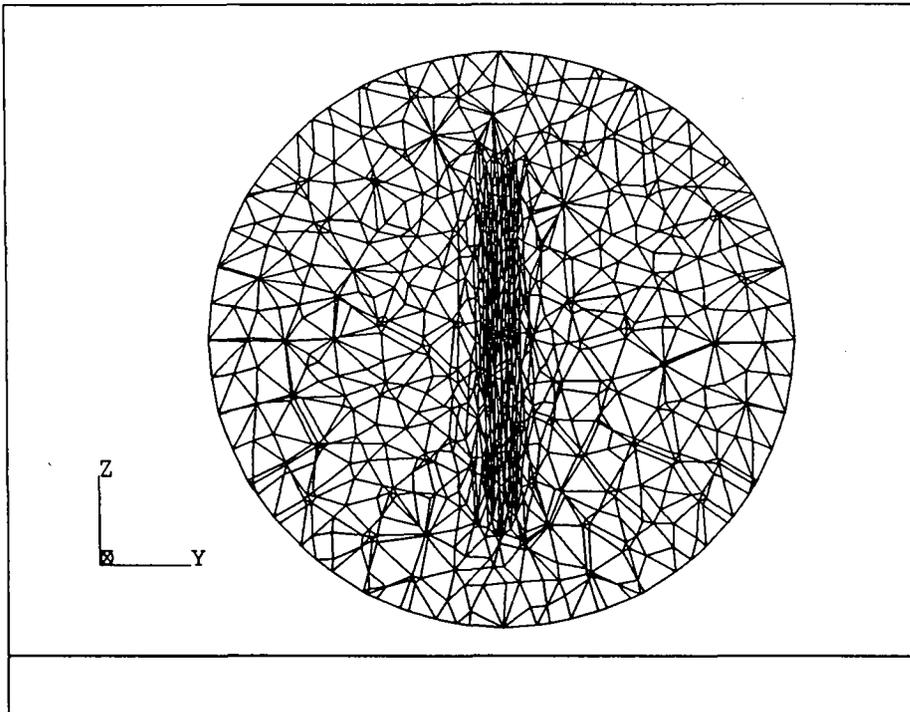


FIG. 20 - Coupe suivant le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) .

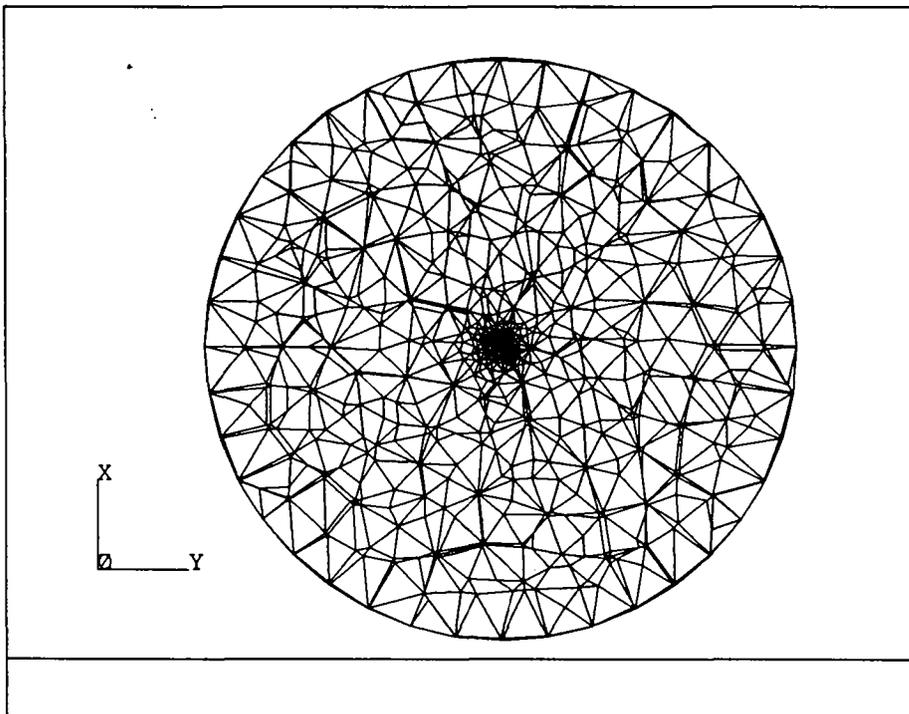


FIG. 21 - Coupe suivant le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5.4.2 2^{eme} métrique

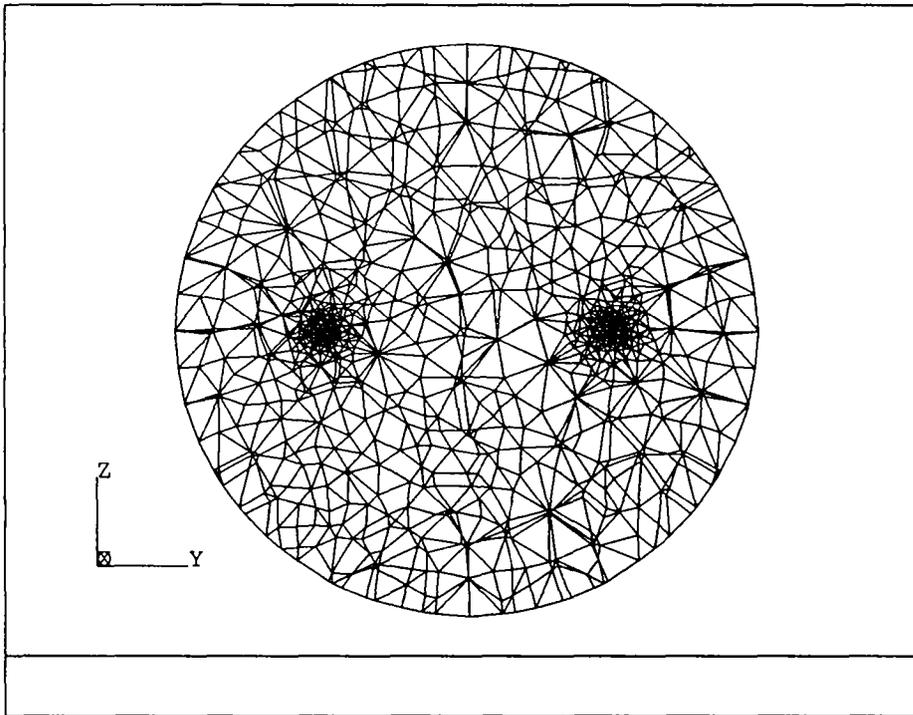


FIG. 22 - Coupe suivant le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) .

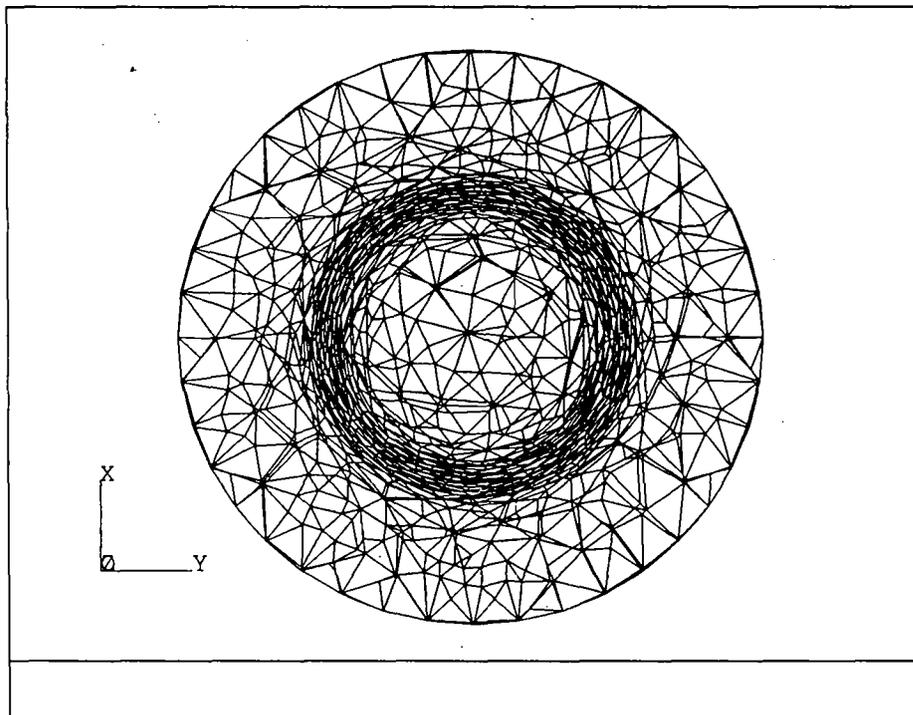


FIG. 23 - Coupe suivant le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5.4.3 3^{ème} métrique

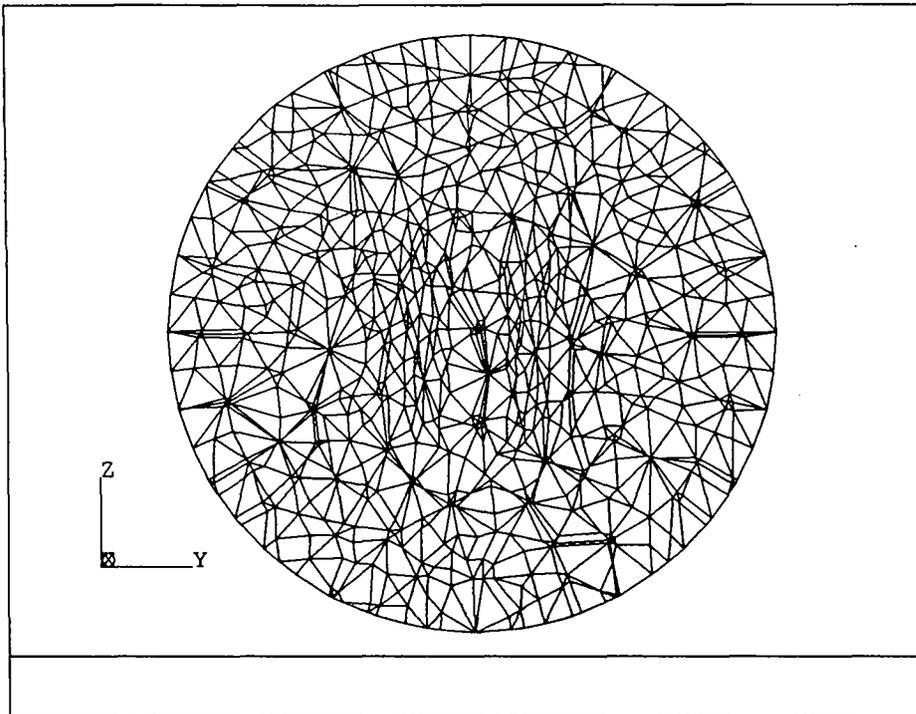


FIG. 24 - Coupe suivant le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) .

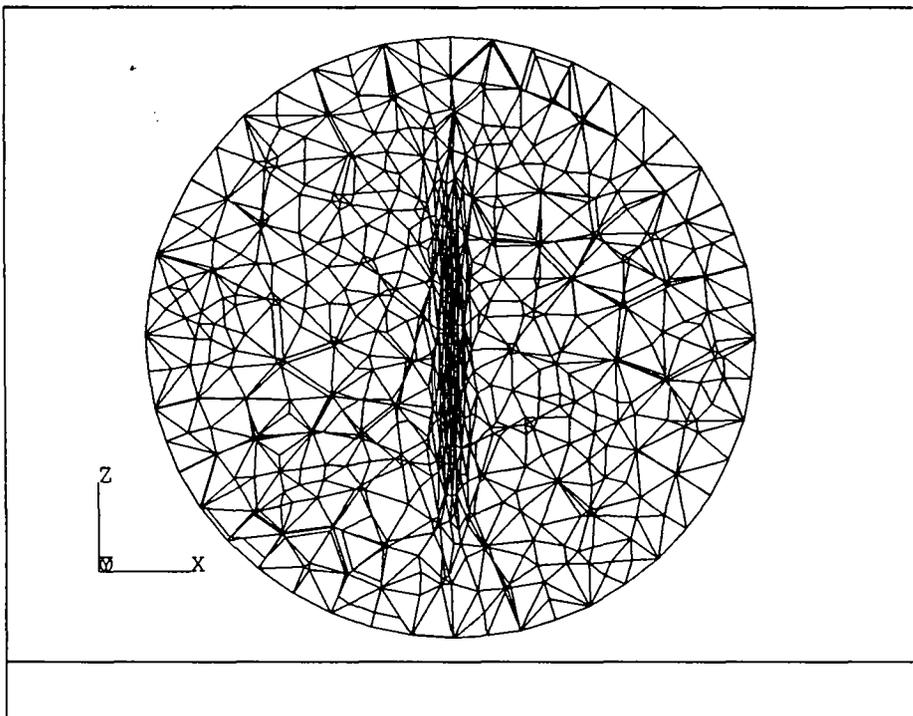


FIG. 25 - Coupe suivant le plan (O, \vec{i}, \vec{k}) .

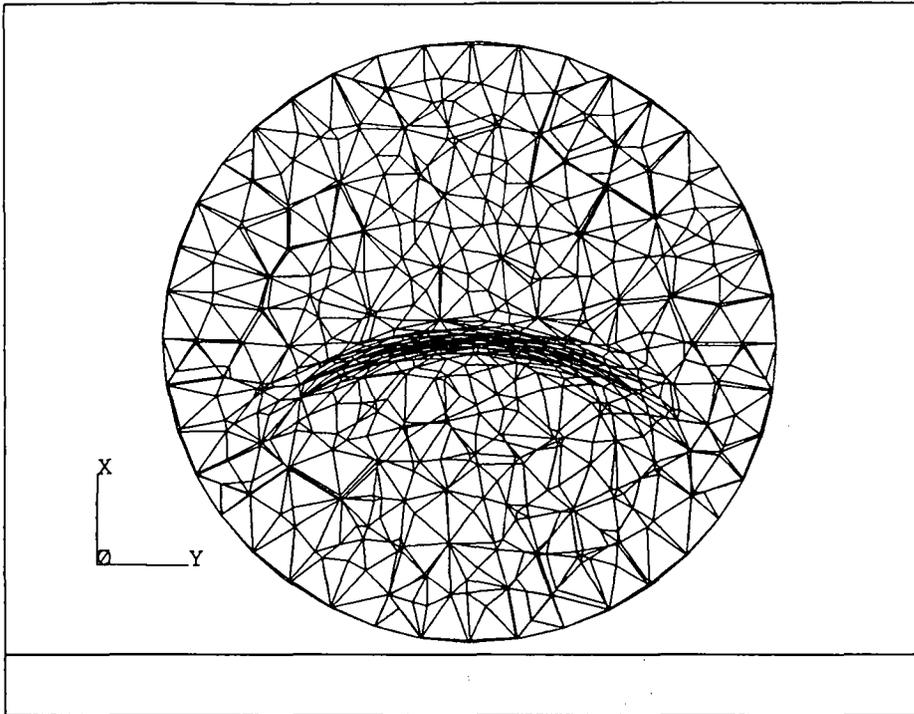


FIG. 26 - Coupe suivant le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5.4.4 Résultats numériques

Nous donnons pour les différents exemples traités avant et après optimisation :

- " $1/Q_h$ " l'inverse de la qualité en taille de la plus mauvaise arête interne,
- "T14" la proportion des arêtes internes de qualité jugée correcte ($Q_h \in [1/\sqrt{2}, 1]$),
- " $1/Q_e$ " l'inverse de la qualité en forme du plus mauvais tétraèdre,
- "H12" la proportion des tétraèdres de qualité dans l'intervalle $]1/2, 1]$,
- "H23" la proportion des tétraèdres de qualité dans l'intervalle $]1/3, 1/2]$,
- "ne" le nombre d'éléments dans le maillage (ici de tétraèdres),
- "np" le nombre de sommets dans le maillage.

D'autre part nous donnons les temps CPU nécessaire à l'optimisation, la proportion des tétraèdres jugés corrects (c'est-à-dire quant $Q_e \in [1/3, 1]$) et le nombre d'itérations (partie 4 de l'algorithme).

- 1^{ère} métrique :

Résultats de l'application de la première métrique sur le maillage (cf. figures 20 et 21) :

	avant	après
$1/Q_h$	9.88	1.81
T14	91.0%	98.8%
$1/Q_e$	22.7	2.51
H12	91%	99%
H23	5%	0%
ne	12340	11875
np	2322	2361

Pour ce maillage, nous avons :

- fait 9 itérations d'optimisation plus 2 avec que des swappings,
- utilisé 7 minutes de temps CPU,
- obtenu 98.8% des arêtes internes jugée bonnes,
- obtenu tous les tétraèdres jugés corrects.

- **2^{ème} métrique :**

Résultats de l'application de la deuxième métrique sur le maillage (cf. figures 22 et 23) :

	avant	après
$1/Q_h$	14.3	1.75
T14	82.3%	98.4%
$1/Q_e$	29.1	2.88
H12	87%	97%
H23	7%	2%
ne	12340	23246
np	2322	4294

Pour ce maillage, nous avons :

- fait 12 itérations d'optimisation plus 3 avec que des swappings,
- utilisé 24 minutes de temps CPU,
- obtenu 98.4% des arêtes internes jugée bonnes,
- obtenu tous les tétraèdres jugés corrects.

Les résultats sont ici encore bons pour ce maillage relativement à la contrainte en taille.

- **3^{ème} métrique :**

Résultats de l'application de la troisième métrique sur le maillage (cf. figures 24, 25 et 26) :

	avant	après
$1/Q_h$	15.8	1.67
T14	86.0%	99.0%
$1/Q_e$	37.1	2.43
H12	86%	99%
H23	7%	0%
ne	12340	13224
np	2322	2584

Pour ce maillage, nous avons :

- fait 11 itérations d'optimisation plus 1 avec que des swappings,
- utilisé 10 minutes de temps CPU,
- obtenu 99.0% des arêtes internes jugée bonnes,
- obtenu tous les tétraèdres jugés corrects.

L'optimisation a été plus rapide qu'avec la deuxième métrique, car cette dernière nécessitait plus d'éléments. En effet la densité pour la deuxième métrique est plus forte (i.e. : la longueur des arêtes diminue fortement) suivant deux directions, alors que pour la troisième c'est selon une seule direction : la normale à la surface (qui n'est autre qu'une partie du cylindre).

6 Conclusions

Le but de ce travail était de proposer trois méthodes permettant d'améliorer la (ou les) qualité(s) d'un maillage tridimensionnel de l'un des trois types : isotrope, isotrope avec contrainte ou anisotrope. Le but de ces optimisations de maillage était, d'une part, d'améliorer la (ou les) qualité(s) (en valeur brute) et, d'autre part, de créer des tétraèdres (et des arêtes dans les cas avec contrainte) de qualité telle que l'histogramme reflétant la distribution de ces qualités soit "tassé" vers la valeur 1.

La méthode a été testée sur de nombreux exemples. Elle est entièrement automatique. Les différents exemples traités nous ont permis de constater que :

- la répartition des éléments suivant leur qualité s'améliore nettement (i.e. les éléments sont de plus en plus nombreux, en proportion, à être "proche" du tétraèdre équilatéral) ,
- pour les cas avec contrainte (section 3 et 4), la répartition des arêtes suivant leur qualité en taille (Q_h) s'améliore elle aussi très nettement (i.e. les arêtes sont presque toutes de qualité meilleure que $1/\sqrt{2}$) ,
- la qualité du plus mauvais tétraèdre du maillage final est de l'ordre de la qualité visée⁷, mais dans les cas où il y a une contrainte en taille (ce qui est également le cas pour les maillages anisotropes), les qualités sont limitées par les irrégularités de la taille imposée aux arêtes,
- la difficulté de l'optimisation, et donc aussi le temps nécessaire à cette optimisation, dépendent de la qualité du maillage initial, de la contrainte en taille s'il y a lieu et de la qualité visée. Le temps nécessaire à l'optimisation d'un maillage de quelques dizaines de milliers d'éléments est de l'ordre de quelques minutes.

ANNEXE TECHNIQUE

Structures de données

Les données du maillage sont lues dans un fichier de type "NOPO" ou de type "no-boite", et sont sauvegardées dans un nouveau fichier de même type, mais dont le préfixe a été rallongé de "_new". (Exemple: toto.nopo → toto_new.nopo)

.1 La structure de données NOPO

La structure de données *NOPO* est l'organisation choisie dans le code *Modulef* pour stocker les informations relatives à un maillage. Elle correspond à une description élément par élément des maillages et par suite elle donne un accès séquentiel aux informations. Elle est très générale, car ne tient pas compte du fait que nous n'utilisons ici que des tétraèdres. Cette organisation est commode lors des calculs effectués pendant les étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, de plus la taille nécessaire est relativement faible. (format de *Modulef*, cf. [2]).

.2 La structure de données NOBOITE

Le maillage comprend les fichiers "POINTS", "FACES" et "NOBOITE". Le maillage géométrique est construit à partir des fichiers "FACES" et "NOBOITE", mais la résolution

⁷La qualité atteinte est limitée par celle du maillage initial, c'est-à-dire celle du maillage de sa peau.

du problème physique nécessite l'utilisation des 3 fichiers. Nous donnons la description complète de chacun des fichiers:

- Un fichier "*.POINTS" qui comprend:
 - NPT : nombre de points du fichier,
Boucle I de 1 à NPT
 - coordonnée du point (triplet de réels),
 - référence du point.
 - Fin de boucle
- Un fichier "*.FACES" qui comprend:
 - NEF : nombre d'éléments du fichier,
Boucle I de 1 à NEF
 - nombre NS de sommets de l'élément,
 - indices des NS sommets,
 - si $NS = 3$, la référence de la face, puis celle des 3 arêtes,
 - si $NS = 2$, la référence de l'arête (la face I est en fait une arête spécifiée).
 - Fin de boucle
- Un fichier "*.NOBOITE" qui comprend:
 - NE : nombre d'éléments,
 - NP : nombre de points,
 - NPT : nombre de points initiaux (non-libres),
 - tableau $SIMP$: de type entier, il contient les numéros des 4 sommets de chacun des NE tétraèdres,
 - tableau $COOR$: de type réel, il contient les coordonnées des NP sommets.

La lecture d'autres types de fichiers pour les maillages initiaux peut s'étendre facilement en modifiant les procédures de lecture et d'écriture du programme, la seule restriction étant que l'on attend un maillage juste.

Références

- [1] T. J. BAKER, Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained Delaunay triangulation, *Engineering with Computers*, 1989.
- [2] Modulef et Al., Description des Structures de Données, Rapport Modulef n° 2, INRIA, 1989.
- [3] P.L. GEORGE, Automatic mesh generation. Application to Finite Element Methods, *Wiley*, 1991.
- [4] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, Partie 2: le cas tridimensionnel, *RR INRIA* n° 1664, INRIA, 1992.
- [5] E. RANK, M. SCHWEINGRUBER AND M. SOMMER, Adaptive mesh generation and transformation of triangular to quadrilateral meshes, *Com. numer. methods eng.*, Vol. 9, 121-129, 1993.
- [6] J.Y. TALON, Algorithmes d'amélioration de maillages tétraédriques en 3 dimensions, Rapport Technique no. 25, Artemis-Imag, 1987.
- [7] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs. Thèse de 3e cycle, Paris 6, 1992.



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

