Sur l'evolution de courbes simples du plan projectif reel

Olivier Faugeras

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

2004 route des Lucioles
B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
France

Rapports de Recherche

N°1998

Programme 4

Robotique, Image et Vision

SUR L'ÉVOLUTION DE COURBES SIMPLES DU PLAN PROJECTIF RÉEL

Olivier FAUGERAS

Juillet 1993

Abstract

Nous abordons dans cette note l'étude d'une équation d'évolution de type équation de la chaleur intrinsèque pour des courbes planes simples du plan projectif réel. Cette équation est motivée par des travaux antérieurs traitant des cas euclidiens [6, 7, 8] et affines [10, 9, 1, 2] ainsi que par des applications en perception des formes bidimensionnelles. Nous établissons les équations d'évolution de l'abscisse curviligne projective, de la courbure projective, de l'abscisse curviligne affine et de la courbure affine. Nous montrons que l'évolution de la courbure projective est régie par une équation de réaction diffusion de laquelle nous déduisons immédiatement l'existence et l'unicité de solutions locales lisses et bornées.

On the evolution of simple curves of the real projective plane

Abstract

In this note we begin to explore the evolution of simple closed curves of the real projective plane according to an intrinsic heat equation. This equation is motivated by previous work for the euclidean [6, 7, 8] and the affine case [10, 9, 1, 2] as well as by applications in the perception of two-dimensional shapes. We establish the projective arclength evolution, the projective arclength evolution, the affine arclength evolution, and the affine curvature evolution. We show that the projective curvature evolution is a reaction-diffusion equation from which we conclude immediatly the short-term existence of smooth and bounded solutions.

1 Abridged english version

Let $\mathbf{B}(p,t)\ :\ \mathcal{S}^1 \times R \rightarrow \mathcal{P}^2$ be a family of smooth curves embedded in the real projective plane $\mathcal{P}^2$. t represents the time or the scale and p parametrizes the curve. Using standard results of projective differential geometry [4], we change $\mathbf{B}(p,t)$ by a scale factor $\lambda(p,t)$ and reparametrize the curves with their projective arclength $\sigma(p,t)$ in such a way that the vectors $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$, considered as functions of σ now satisfy the projective Frenet equations (1). Note that the vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ represent the same projective point.

We then consider the evolution equation (3)

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{\sigma\sigma}$$

which, as suggested by Sapiro and Tannenbaum [11], is the exact analog of the equation they studied in the affine case [10, 9] or in the euclidean case by Gage and Hamilton [6] and Grayson [7].

The main results of this note are the establishment of the evolution equation for the projective arc-length σ, projective curvature k, affine arc-length and affine curvature of a curve evolving according to (3). These results are obtained in propositions 1, 2, 3, and 4, respectively.

In particular, we show that the projective curvature evolves according to the reaction-diffusion equation (13)

$$k_t = \frac{4}{3}(k_{\sigma^2} + 2k^2)$$

Results from the theory of such equations [12] show immediatly the short-term existence and unicity of smooth bounded solutions to (13).

This equation also shows that the solution will explode in finite time as in the affine case described in [10, 9]. It remains to study this phenomenon in the projective case and to see if it is possible, as in the euclidean and affine cases, to define a projective scale-space.

2 Introduction

Soit $\mathbf{B}(p,t)\ :\ \mathcal{S}^1 \times R \rightarrow \mathcal{P}^2$ une famille de courbes plongées dans le plan projectif $\mathcal{P}^2$. t représente le temps ou l'échelle et p paramétrise la courbe. Nous supposons $\mathbf{B}$ suffisamment dérivable. Des résultats classiques de géométrie différentielle projective [4] permettent d'affirmer qu'il existe (1) une fonction $\lambda(p,t)$, (2) une reparamétrisation $\sigma(p,t)$, telles que les vecteurs $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ considérés comme des fonctions de σ satisfassent les équations de Frenet projectives

$$\begin{array}{rcccc} \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} & = & & \mathbf{A}^{(1)} & \\ \frac{d\mathbf{A}^{(1)}}{d\sigma} & = & -k\mathbf{A} & & +\mathbf{A}^{(2)} \\ \frac{d\mathbf{A}^{(2)}}{d\sigma} & = & -\mathbf{A} & -k\mathbf{A}^{(1)} & \end{array} \tag{1}$$

dans lesquelles σ est l'abscisse curviligne projective et k est la courbure projective. Le point $A^{(1)}$ est sur la tangente à la courbe au point A, la droite $\langle A, A^{(2)}\rangle$ est la normale projective. Les fonctions k et σ sont invariantes sous l'action de $PLG(2)$ et caractérisent la courbe à une transformation projective près. De plus, les trois vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}$ satisfont la condition

$$\mid \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)} \mid = 1 \tag{2}$$

Etant donnée une courbe simple $B_0(p)$ L'objet de cette note est d'étudier l'équation d'évolution

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{\sigma\sigma} \tag{3}$$

avec la condition initiale $A(p,0) = B_0(p)$ dans laquelle la dérivée partielle par rapport au temps est prise à p constant. Nous nous proposons d'étudier dans quelle mesure l'équation (3) admet des solutions. Puisque chacune des courbes est définie à une transformation projective près par σ et k, il est naturel d'étudier l'évolution temporelle de ces grandeurs.

3 Evolution temporelle de l'abscisse curviligne projective et de la courbure projective

Soit $g = \frac{\partial\sigma}{\partial p}$. Pour étudier l'évolution temporelle de g et de k nous remarquons d'abord que le crochet $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\sigma}]$ est égal à

$$[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial\sigma}] = \frac{\partial^2}{\partial t\partial\sigma} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial t} = -\frac{g_t}{g}\frac{\partial}{\partial\sigma} \tag{4}$$

Nous en déduisons, par application successive de cette formule, les expressions

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} = -[\frac{g_t}{g}]_\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - 2\frac{g_t}{g}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{\partial}{\partial t} \tag{5}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^3}{\partial\sigma^3} = -[\frac{g_t}{g}]_{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\sigma} - 3[\frac{g_t}{g}]_\sigma\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - 3\frac{g_t}{g}\frac{\partial^3}{\partial\sigma^3} + \frac{\partial^3}{\partial\sigma^3}\frac{\partial}{\partial t} \tag{6}$$

dont nous aurons besoin par la suite.

Par application successive des formules de Frenet (1), nous obtenons des équations qui nous seront également nécessaires

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\sigma^3} &= -2k\mathbf{A}_\sigma - (1+k_\sigma)\mathbf{A} && (7)\\
\mathbf{A}_{\sigma^4} &= (-k_{\sigma^2} + 2k^2)\mathbf{A} - (1+3k_\sigma)\mathbf{A}^{(1)} - 2k\mathbf{A}^{(2)} && (8)\\
\mathbf{A}_{\sigma^5} &= (-k_{\sigma^3} + 7kk_\sigma + 3k)\mathbf{A} + 4(k^2 - k_{\sigma^2})\mathbf{A}^{(1)} - (1+5k_\sigma)\mathbf{A}^{(2)} && (9)
\end{aligned}$$

3.1 Evolution de l'abscisse curviligne projective

Nous utilisons l'équation (2). En prenant la dérivée partielle des deux membres par rapport au temps t à p constant nous obtiendrons l'équation cherchée.

Proposition 1 *L'évolution temporelle de l'abscisse curviligne projective est régie par*

$$g_t = -\frac{4}{3}kg \tag{10}$$

Preuve : En effet,

$$| \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)} |_t = | \mathbf{A}_t\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)} | + | \mathbf{A}\mathbf{A}_t^{(1)}\mathbf{A}^{(2)} | + | \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}_t^{(2)} | \tag{11}$$

D'après (3) et les équations de Frenet, le premier déterminant du membre de droite est égal à $-k$. D'après (4), (7) et les équations de Frenet

$$\mathbf{A}_t^{(1)} = \mathbf{A}_{t\sigma} = -\frac{g_t}{g}\mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}_{\sigma^3} = -(\frac{g_t}{g} + 2k)\mathbf{A}^{(1)} - (1 + k_\sigma)\mathbf{A}$$

et donc le second déterminant du membre de droite est égal à $-(\frac{g_t}{g} + 2k)$. De manière similaire, la deuxième équation de Frenet permet d'écrire que

$$\mathbf{A}_t^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t}(k\mathbf{A} + \mathbf{A}_{\sigma\sigma}) = k_t\mathbf{A} + k\mathbf{A}_{\sigma\sigma} + \mathbf{A}_{t\sigma\sigma}$$

En utilisant (5) et (8), nous calculons le coefficient du terme $\mathbf{A}^{(2)}$ dans cette expression ce qui nous donne comme valeur du troisième déterminant du membre de droite de (11) $-(2\frac{g_t}{g} + k)$. En additionnant ces trois valeurs et en écrivant que leur somme est nulle on obtient le résultat annoncé. $\square$

3.2 Evolution de la courbure projective

Ecrivons l'équation (7) sous la forme

$$\mathbf{A}_{\sigma^3} + 2k\mathbf{A}_\sigma = -(1 + k_\sigma)\mathbf{A}$$

Les deux membres de cette équation représentent le même point projectif, c'est-à-dire A. Le point projectif représenté par le membre de gauche suit donc la même courbe, à p constant, que le point A. Ceci implique l'égalité des tangentes et donc le parallélisme des deux vecteurs $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_t$ et $\mathbf{A} \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_{\sigma^3} + 2k\mathbf{A}_\sigma)$. D'après (3) et les équations de Frenet il est facile de montrer que

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_t = \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{(2)} \tag{12}$$

Nous sommes alors en mesure de démontrer la

Proposition 2 *L'évolution temporelle de la courbure projective est régie par l'équation*

$$k_t = \frac{4}{3}(k_{\sigma^2} + 2k^2) \tag{13}$$

Preuve : Pour calculer $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_{\sigma^3} + 2k\mathbf{A}_\sigma)$ nous utilisons (4), (6) et (9). On obtient alors

$$\mathbf{A} \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_{\sigma^3} + 2k\mathbf{A}_\sigma) = (2k_t - 4k_{\sigma^2} + 4k\frac{g_t}{g} - [\frac{g_t}{g}]_{\sigma^2})\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{(1)} - (1 + 5k_\sigma + 3[\frac{g_t}{g}]_\sigma)\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{(2)} \tag{14}$$

La condition sur le parallélisme des deux vecteurs est donc équivalente aux deux équations

$$\begin{gathered} 2k_t - 4k_{\sigma^2} + 4k\frac{g_t}{g} - [\frac{g_t}{g}]_{\sigma^2} = 0 \\ 1 + 5k_\sigma + 3[\frac{g_t}{g}]_\sigma = \alpha \end{gathered}$$

où α est une fonction que l'équation (10) nous dit être égale à $1 + k_\sigma$. En reportant dans la première équation la valeur de $\frac{g_t}{g}$ et de sa dérivée seconde par rapport à σ calculée à partir de la seconde équation on obtient le résultat annoncé. $\square$

Cette équation est une équation de réaction-diffusion. Si nous nous donnons des conditions initiales sous la forme d'une fonction lisse et bornée $k_0(p) = k(0, p)$, la théorie de ce type d'équations [12] garantit l'existence et l'unicité d'une solution locale lisse et bornée de (13).

4 Evolution temporelle de l'abscisse curviligne affine et de la courbure affine

Nous rattachons maintenant les résultats précédents à la géométrie affine, ceci pour deux raisons. La première est que l'équation (3) a déjà été étudiée dans le cas affine [10, 9, 1, 2] et qu'il est donc intéressant de comparer les évolutions dans les deux cas, la seconde est que dans une certaine mesure les résultats affines apportent un éclairage complémentaire aux résultats projectifs.

Soient $E_i, i = 1, \cdots, 4$ la base projective standard de $\mathcal{P}^2$ dont des représentants sont la base standard de R^3 et le vecteur de coordonnées $[1, 1, 1]^T$. L'ensemble $\mathcal{P}^2 \backslash \langle E_1, E_2 \rangle$ c'est-à-dire le plan projectif privé de la "droite à l'infini " est isomorphe au plan affine $\mathcal{A}^2$. Cette identification permet de définir à partir de la famille de courbes plongées dans $\mathcal{P}^2$ une famille de courbes plongées dans $\mathcal{A}^2$.

Soient donc X, Y et Z les composantes du vecteur $\mathbf{A}$ représentant le point projectif A appartenant à l'une des courbes de la famille. Puisque nous nous intéressons à la composante de cette courbe incluse dans $\mathcal{A}^2$, nous pouvons supposer $Z \neq 0$. Soit $\mathbf{a} = \frac{1}{Z}\mathbf{A}$ le représentant du point A dans $\mathcal{A}^2$. A chaque instant t nous pouvons supposer que ce point est paramétré par l'abscisse curviligne projective σ. Il est connu que l'on peut définir une abscisse curviligne affine [4, 3, 10, 9] par

$$\frac{ds}{d\sigma} = \mid \mathbf{E}_3, \mathbf{a}_\sigma, \mathbf{a}_{\sigma\sigma} \mid^{\frac{1}{3}}$$

en dehors des points d'inflexion où $\mathbf{a}_\sigma \wedge \mathbf{a}_{\sigma\sigma} = \mathbf{0}$. Nous supposerons connues les équations de Frenet affines

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{ds} &= \mathbf{t} \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \mu\mathbf{t} \end{aligned} \tag{15}$$

équations dans lesquelles le vecteur $\mathbf{t}$ est tangent à la courbe, le vecteur $\mathbf{n}$ est la direction de la normale affine, et μ est la courbure affine. Nous considérons ces vecteurs comme des vecteurs de R^3 dont la dernière composante est nulle pour garder la compatibilité avec notre étude de $\mathcal{P}^2$. Les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ sont liés par la relation

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E}_3 \tag{16}$$

qui traduit le fait que les équations de Frenet affines sont valables pour le groupe spécial affine.

Il est alors facile de montrer la relation suivante entre les abscisses curvilignes affines et projectives [5]

$$\frac{d\sigma}{ds} = (\frac{\mu_s}{2})^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

Etablissons maintenant les relations entre les repères de Frenet projectifs et affines grâce au

Lemme 1 *Les repères de Frenet affines et projectifs sont reliés par les équations*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= Z_\sigma \mathbf{a} + Z\frac{ds}{d\sigma}\mathbf{t} \\ \mathbf{A}^{(2)} &= (Z_{\sigma\sigma} + Zk)\mathbf{a} + (2Z_\sigma \frac{ds}{d\sigma} + Z\frac{d^2s}{d\sigma^2})\mathbf{t} + Z(\frac{ds}{d\sigma})^2\mathbf{n} \end{aligned} \tag{18}$$

Et l'on a

$$Z = \frac{d\sigma}{ds} \tag{19}$$

Preuve : Les équations (18) s'obtiennent directement à partir de la relation $\mathbf{A} = Z\mathbf{a}$ en appliquant les équations de Frenet affines (15) et projectives (1). L'équation (19) s'obtient en remplaçant dans (2) le vecteur $\mathbf{A}$ par $Z\mathbf{a}$, les vecteurs $\mathbf{A}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(2)}$ par leurs valeurs tirées de (18), et en utilisant (16). □

Pour des raisons qui deviendront bientôt apparentes, il est commode de considérer la quantité

$$\Lambda = \frac{\mu_s}{2} \tag{20}$$

On a doncf $Z = \Lambda^{\frac{1}{3}}$ et on voit que

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} = \frac{d^2s}{d\sigma^2}\frac{\partial}{\partial s} + (\frac{ds}{d\sigma})^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} \tag{21}$$

et que

$$\frac{d^2s}{d\sigma^2} = \frac{d(\frac{ds}{d\sigma})}{ds}\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\Lambda_s}{3}\Lambda^{-\frac{5}{3}} \tag{22}$$

4.1 Evolution de l'abscisse curviligne affine

Soit $h = \frac{\partial s}{\partial p}$. On montre la proposition suivante,

Proposition 3 *L'évolution temporelle de l'abscisse curviligne affine est régie par l'équation*

$$h_t = -\frac{h}{3}(4k + \Lambda^{-\frac{2}{3}}(\frac{\Lambda_{ss}}{\Lambda} - (\frac{\Lambda_s}{\Lambda})^2) \tag{23}$$

Preuve : On remarque que $h = \frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial \sigma}{\partial p}\frac{ds}{d\sigma} = \frac{g}{Z}$. On en déduit que $h_t = \frac{g_t}{Z} - \frac{Z_t}{Z^2}g$. L'équation (10) donne $g_t = -\frac{4}{3}kg$ et nous savons que $Z_t = Z_{\sigma\sigma}$ d'après (3). En utilisant (19), (21), (22) et (17) on en déduit (23). □

4.2 Evolution de la courbure affine

Nous allons caractériser l'évolution temporelle de Λ qui est particulièrement simple. En effet on a la

Proposition 4 *La fonction Λ évolue selon l'équation*

$$\Lambda_t = \Lambda^{\frac{1}{3}}[\frac{\Lambda_{ss}}{\Lambda} - (\frac{\Lambda_s}{\Lambda})^2] = \Lambda^{\frac{1}{3}}[\log \mid \Lambda \mid]_{ss} \tag{24}$$

De plus, si l'on fait le changement de variable $V = \frac{1}{3}\log \Lambda^2$, V évolue selon l'équation

$$V_t = e^{-V} V_{ss} \tag{25}$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $Z = \Lambda^{\frac{1}{3}}$, $Z_t = Z_{\sigma\sigma}$, et d'appliquer (21), (22). On en déduit que

$$[\Lambda^{\frac{1}{3}}]_{\sigma\sigma} = \frac{\Lambda^{-\frac{1}{3}}}{3}[\frac{\Lambda_{ss}}{\Lambda} - (\frac{\Lambda_s}{\Lambda})^2]$$

et par suite (24). L'équation (25) s'obtient facilement en effectuant le changement de variable proposé.
□

5 Conclusion

Ce travail est la base qui va nous permettre d'étudier en détail les solutions de (3). L'équation (13) montre que l'on va rencontrer des phénomènes d'explosion en temps fini, comme dans le cas affine traité dans [10, 9]. Il reste à étudier ce phénomène dans le cas projectif et voir si l'on peut définir, comme dans les cas euclidiens et affines, un espace d'échelle projectif.

References

[1] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axiomatisation et nouveaux opérateurs de la morphologie mathématique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 265–268, 1992. t. 315, Série I.

[2] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. Technical Report 9231, CEREMADE, 1992.

[3] Wilhelm Blaschke. *Differential Geometrie.* Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1967. Reprinted from 1923 and 1930 editions.

[4] Elie Cartan. *La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Différentielle traitée par la Méthode du Repère Mobile.* Jacques Gabay, 1992. Original edition, Gauthiers-Villars, 1937.

[5] Faugeras, Olivier. Euclidean, Affine and Projective Planar Differential Geometry for Scale-Space Analysis. Technical report, INRIA, 1993.

[6] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. of Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.

[7] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. of Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.

[8] Benjamin B. Kimia, Allen Tannenbaum, and Steven W. Zucker. On the Evolution of Curves via a Function of Curvature. I. The Classical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 163(2):438–458, 1992.

[9] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine shortening of Non-Convex Plane Curve. Technical Report EE PUB 845, Technion Israel Institute of Technology-Haifa, August 1992.

[10] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On Affine Plane Curve Evolution. Technical Report EE PUB 821, Technion Israel Institute of Technology-Haifa, February 1992.

[11] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On Invariant Curve Evolution and Image Analysis. *Indiana University Journal of Mathematics*, 1993. To appear.

[12] Joel Smoller. *Shock Waves and Reaction-diffusion Equations.* Springer-Verlag, New-York, 1983.