Ondelettes orthogonales et biorthogonales

Bernard Delyon

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Ondelettes orthogonales et biorthogonales

Bernard Delyon

N° 1985

Septembre 1993

PROGRAMME 5

Traitement du signal,
automatique
et productique

Rapport de recherche

1993

INRIA RENNES

Ondelettes orthogonales et biorthogonales

Bernard Delyon*

Programme 5 — Traitement du signal, automatique et productique
Projet AS

Rapport de recherche n° 1985 — Septembre 1993 — 24 pages

Résumé : Le but de cette note est de donner un exposé cohérent des propriétés de base des ondelettes orthogonales et biorthogonales en vue des applications.

Mots-clé : Ondelettes

(Abstract: pto)

*delyon@irisa.fr

Unité de recherche INRIA Rennes
IRISA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex (France)
Téléphone : (33) 99 84 71 00 – Télécopie : (33) 99 38 38 32

Orthogonal and biorthogonal wavelets

Abstract: We give a comprehensive introduction to orthogonal and biorthogonal wavelets for applications

Key-words: Wavelets

1 Introduction

Le but de cette note est de rappeler les principales propriétés des ondelettes orthogonales et biorthogonales en vue des applications. Rappelons juste que le but est de fabriquer des bases orthgonales de $L_2(\mathbf{R})$ de la forme $(\psi(2^j x - k))_{j,k}$, c'est-à dire constituées des translatées et dilatées d'une fonction unique, de préférence localisée et régulière.

Le principe de la construction est le suivant : On fabrique une fonction ϕ de $L_2(\mathbf{R})$ telle que

- Les fonctions $\phi(x-k)$ forment une famille orthogonale
- Il existe une suite c_k telle que

$$\phi(x) = \sum c_k \phi(2x-k).$$

et on définit l'ondelette

$$\psi(x) = \sum (-1)^k c_k \phi(2x-k).$$

Alors la famille $(\psi(2^j x - k))$ forme une base orthogonale de $L_2(\mathbf{R})$. Cette dernière remarque est à la base de toute la théorie.

Quelques applications seront données en synthèse de filtre et en estimation.

Notations

- On emploiera la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx$$

  qui n'est pas une isométrie mais satisfait l'identité $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ et donne la formule de Poisson

$$\sum f(j) = \sum \hat{f}(2j\pi).$$

- On notera $\tau_x f(y)$ la fonction $g(y) = f(y-x)$ et $\partial^n f$ la dérivée n-ième de f.
- Les espaces fonctionnels seront notés avec les indices de régularité en haut et les indices d'intégrabilité en bas (cf [2]); les espaces de Sobolev sont définis par $W_p^s = \{f, \|\mathcal{F}((1+|x|^s)\hat{f})\|_p < \infty\}$ (fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans L_p). On garde la même notation pour s non-entier.
- Le signe $\bigoplus$ signifie la somme directe orthogonale des espaces vectoriels.

2 Préambule : Bases de Riesz

Ce paragraphe a pour but d'introduire les propriétés essentielles des bases de Riesz qui vont être utilisées par la suite.

Définition 1 *Une suite (u_k) d'un espace de Hilbert est une base de Riesz s'il existe deux constantes A et B telles que pour toute suite finie $a = (a_k)$, on a*

$$A\|a\|_2 \leq \|\sum a_k u_k\|_2 \leq B\|a\|_2.$$

Définition 2 *Une famille $(u_k, \tilde{u}_k)$ est dite biorthogonale si u_k et $\tilde{u}_k$ sont des bases de Riesz de deux sous epaces V et $\tilde{V}$ d'un espace de Hibert H et si*

$$\langle u_k, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{jk}$$

Théorème 1 *Si $(u_k, \tilde{u}_k)$ est une famille biorthogonale et alors pour toute $f \in V$:*

$$\sum \langle \tilde{u}_j, f \rangle^2 < \infty$$
$$f = \sum \langle f, \tilde{u}_j \rangle u_j$$

et les relations symétriques si $f \in \tilde{V}$.

Si (u_k) est une base de Riesz dans un espace de Hilbert, il existe une famille $(\tilde{u}_k)$ telle que $(u_k, \tilde{u}_k)$ forme un système biorthogonal avec $V = \tilde{V}$.

Pour prouver la première égalité, on commence par la vérifier pour les combinaisons liéaires finies de u_k puis on passe à la limite en remarquant que la propriété de base de Riesz implique que l'application $f \to Tf = (\langle f, \tilde{u}_j \rangle)_j$ est bicontinue de H dans l_2 (car c'est l'adjoint de $a \to \sum a_j \tilde{u}_j$). Si maintenant u_k est une base de Riesz, il suffit de choisir $\tilde{u}_k$ telle que $T\tilde{u}_k = \delta_k$ (i.e. $T^*T\tilde{u}_k = u_k$). ∎

Le théorème suivant donne une caractérisation et un procédé d'orthogonalisation de bases de Riesz dans un cas particulier qui nous intéressera.

Proposition 1 *Soit $g \in L_2(\mathbf{R})$,*

$$\begin{aligned} V &= vect(\tau_k g, k \in \mathbf{Z}), \\ \theta(\omega) &= \sum |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2. \end{aligned}$$

Les conditions
(H1) $A \leq \theta \leq B$
(H2) Pour toute suite finie (a_k), $A \sum a_k^2 \leq \|\sum a_k \tau_k g\|_2^2 \leq B \sum a_k^2$
(i.e. les $\tau_k g$ forment une base de Riesz)
sont équivalentes et en définissant

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{g}(\omega)/\sqrt{\theta(\omega)}$$

alors les $\tau_k \phi$ forment une base orthonormée de V.

Démonstration On ne montrera que (H2)$\Longrightarrow$ (H1) qui est le seul point difficile. Pour toute suite finie a_k, notons

$$f_a = \sum a_k e^{-ik\omega}.$$

Alors

$$\|f_a\|_2^2 = 2\pi \sum a_k^2$$

et on peut réécrire

$$\begin{aligned} 2\pi \| \sum a_k \tau_k g \|^2_{L_2(\mathbf{R})} &= \| \sum a_k e^{-ik\omega} \hat{g}(\omega) \|^2_{L_2(\mathbf{R})} \\ &= \| |f_a|^2 \theta \|_{L_1([0,2\pi])} \end{aligned}$$

et (H2) devient

$$A \|f_a\|_2^2 \leq \| |f_a|^2 \theta \|_1 \leq B \|f_a\|_2^2.$$

θ est donc dans $L_1([0, 2\pi])$ et les f_a formant une partie dense de $C([0, 2\pi])$ (Stone-Weierstrass), on a que

$$A \|f\|_2^2 \leq \| |f|^2 \theta \|_1 \leq B \|f\|_2^2$$

pour toute f continue. Toute fonction de L_∞ étant limite p.s. d'une suite bornée de fonctions continues, l'inégalité s'étend à $f \in L_\infty([0, 2\pi])$. En choisissant $f = 1_{\{\theta > B + \epsilon\}}$ on trouve immédiatement que $\|f\|_1 = 0$,donc $\theta \leq B$, et de même on montre $\theta \geq A$. Pour le second point, il suffit de remarquer que la fonction θ associée à ϕ est égale à 1 et donc, pour ϕ les constantes A et B sont égales. ∎

3 Bases orthogonales

Commençons par la définition d'une analyse multirésolution ([7] 1.1.3)

Définition 3 *Une analyse multirésolution est la donnée d'une fonction ϕ de norme 1 dans $L_2(\mathbf{R})$ et d'une suite (V_j) d'espaces définis par*

$$\begin{aligned} \phi_{jk} &= 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \\ V_j &= vect(\phi_{jk}, k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

avec les propriétés

(AM0)	*La famille $(\phi_{0k})_k$ forme une base de Riesz*
(AM1)	$\cap V_j = \{0\}$
(AM2)	$\overline{\cup V_j} = L_2(\mathbf{R})$
(AM3)	$V_j \subset V_{j+1}$

On considérera également l'hypothèse

(AM4)	$\langle \phi_{jk}, \phi_{jl} \rangle = \delta_{kl}.$

La propriété (AM3) signifie l'existence d'une suite (h_k) de carré intégrable telle que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum h_k \phi(2x - k). \tag{1}$$

Une telle fonction sera appelée fonction d'échelle. L'ingrédient de base pour construire de telles fonctions ϕ est le

Théorème 2 *Soit* $\phi \in L_2(\mathbf{R})$
(i) *(AM0)* $\Rightarrow$ *(AM1); en particulier (AM4)* $\Rightarrow$ *(AM1)*
(ii) *Sous (AM3) : (AM2)* $\Longleftrightarrow$ *p.s.* ω $\exists j \in \mathbf{Z}$ $\quad \hat{\phi}(2^j\omega) \neq 0$
(iii) *Sous (AM0) : (AM3) est satisfaite si et seulement si*

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{2}$$

pour une fonction m_0 2π*-périodique de* $L_2([0, 2\pi])$*; et alors*

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_k e^{-ik\omega}$$

(iv) *(AM0)* $\Longleftrightarrow 0 < A < \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 < B < \infty,$ *p.s.*
(AM4) $\Longleftrightarrow \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1,$ *p.s.*

Note : Pour le deuxième point, en pratique, $\hat{\phi}$ sera continue et non nulle en 0.
Démonstration (iv) est une conséquence de la proposition 1. **(iii)** est la réécriture de l'équation (1) dans le domaine de Fourier (sous l'hypothèse de base de Riesz, l'existence de $(h_k) \in L_2$ est une conséquence du théorème 1). La démonstration de **(i)** se trouve dans [7] 5.3.2., ainsi que celle **(ii)** sous des hypothèses plus restrictives. Nous redémontrons donc ici simplement le deuxième point : Soit f une fonction de $(\cup V_j)^\perp$; une telle fonction satisfait pour tous j, k :

$$\int f(x)\phi(2^j x - k)dx = 0$$

donc pour tous j_0, k_0, k et $j \geq j_0$ on a :

$$\int f(x + 2^{-j_0}k_0)\phi(2^j x - k)dx = 0.$$

Cette relation d'orthogonalité reste vraie pour tout j (puisque $V_j \subset V_{j+1}$). Fixons $k = 0$ et j, et faisons tendre $2^{-j_0}k_0$ vers un réel x_0; alors $f(x + 2^{-j_0}k_0)$ tend dans L_2 vers $f(x + x_0)$ (en effet cette propriété, vraie pour les fonctions continues à support compact, s'étend par densité à tout L_2). On a donc pour tout j et presque tout x_0 :

$$\begin{aligned} \int f(x + x_0)\phi(2^j x)dx &= 0 \\ \int \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x_0}\hat{\phi}(2^{-j}\omega)d\omega &= 0, \end{aligned}$$

puisque la transformée de Fourier est une isométrie (à une constante près), et donc $\hat{f}(\omega)\hat{\phi}(2^{-j}\omega) = 0$ p.s. L'hypothèse faite sur $\hat{\phi}$ entraine que $\hat{f} = 0$. ∎

Rappelons que la proposition 1 permet de passer de (AM3) à (AM4) quitte à modifier ϕ. Sous (AM4), à partir de ϕ, on peut alors construire une base orthogonale :

Théorème 3 *Sous (AM1-4) on définit*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum g_k \phi(2x - k)\ , \quad g_k = (-1)^{k+1}\bar{h}_{1-k} && (3) \\ \psi_{jk} &= 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \\ W_j &= vect(\psi_{jk}, k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

alors $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$ *et les* ψ_{jk} *forment une base orthogonale de* $L_2(\mathbf{R})$. *On a les relations*

$$\sqrt{2}\phi(2x-m) = \sum_k \bar{g}_{m-2k}\psi(x-k) + \bar{h}_{m-2k}\phi(x-k) \tag{4}$$

$$m_0(\omega) = \hat{\phi}(2\omega)/\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum h_k e^{-ik\omega}$$

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega}\bar{m}_0(\omega+\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum g_k e^{-ik\omega}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{5}$$

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1 \tag{6}$$

$$m_0(\omega)\bar{m}_1(\omega) + m_0(\omega+\pi)\bar{m}_1(\omega+\pi) = 0 \tag{7}$$

$$\sum h_l \bar{h}_{l+2k} = \delta_{k0} \tag{8}$$

La démonstration de ce théorème ne pose pas de difficulté; en voici les étapes :

- L'équation (5) est la réécriture de (3) dans le domaine de Fourier.
- (7) est une conséquence de la définition de la suite (g_k).
- $\psi \in L_2$ puisque $(g_k)_k \in l_2$ et son orthogonalité aux $\tau_k\phi$ vient de l'équation (7).
- L'équation (6) découle aisément des points **(iii)** et **(iv)** du théorème 2
- L'équation (4) se vérifie dans le domaine de Fourier; c'est une conséquence facile de (6) et (7).
- (8) est la réécriture de (6).

∎

Notes :

- On aurait pu prendre $m_1(\omega) = \theta(\omega)e^{-i\omega}\bar{m}_0(\omega+\pi)$ pour n'importe quelle fonction θ π-périodique de module 1.
- Les ψ_{jk} sont de moyenne nulle; cette base ne donne donc pas des séries convergentes dans L_1. On préfère généralement utiliser la décomposition en (ϕ,ψ) (basses fréquences/hautes fréquences) associée à $L_2(\mathbf{R}) = V_0 \bigoplus W_0 \bigoplus W_1 \ldots$ (sur la convergence des ces séries, voir [11]).
- En dehors des cas pathologiques, on aura $\phi \in L_1$ et $\int \phi = 1$, et donc en intégrant la relation (1) on obtient

  $$\sum h_k = \sqrt{2}$$

  $(m_0(0) = 1)$. Les équations (6), (7) impliquent alors que $\sum g_k = 0$.

3.1 Construction partant d'une base de Riesz

Une première méthode consiste à partir d'une fonction g satisfaisant l'équation (1) mais dont les translatées ne sont pas orthogonales; on utilise alors la proposition 1 pour réaliser l'orthogonalisation, en remarquant que si g est une fonction d'échelle, alors la fonction ϕ également. Cette méthode est utilisée dans le cas des ondelettes de Battle-Lemarié (voir plus bas). Il faut noter que si la suite h_k associée à g est finie, ce ne sera généralement pas le cas pour la suite associée à ϕ.

3.2 Construction partant de m_0

Une autre option consiste à partir de m_0 et à construire ϕ ensuite. Soit m_0 une fonction 2π-périodique, on considère les hypothèses :

(M1) $m_0(0) = 1$, m_0 est continue, et le module de continuité en 0 $u(h) = \sup_{|\omega|\leq h} |m_0(\omega) - 1|$ satisfait $\sum u(2^{-j}) < \infty$.

(M2) Il existe un compact K congru à $[-\pi, \pi]$ tel que pour tout ω de K on ait; $m_0(2^{-j}\omega) \neq 0,\ j \geq 1$.

(M3) Il existe une fonction 2π-périodique $\mu \geq 0$, $\mu(0) > 0$, continue en 0, $\mu \in L_\infty$ telle que

$$\mu(2\omega) = |m_0(\omega)|^2\mu(\omega) + |m_0(\omega+\pi)|^2\mu(\omega+\pi). \tag{9}$$

(M4) $\mu = 1$ convient :

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1.$$

On considère également les fonctions

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \tag{10}$$

$$\theta(\omega) = \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2. \tag{11}$$

On a alors le résultat clé

Théorème 4
(i) *Sous (M1), le produit converge pour tout ω, et est continu.*
(ii) *Sous (M1,M3)* $\hat{\phi} \in L_2(\mathbf{R})$.
(iii) *Sous (M1,M3) : (M2) $\Leftrightarrow$ les fonctions $\phi(x-k)$ forment une base Riesz. Dans ce cas $\theta = \mu$.*
(iv) *Sous (M1,M2,M4) les $\phi(x-k)$ sont orthonormées et (AM1-4) sont vérifiées.*
(v) *Sous (M1,M2) et si $\hat{\phi} \in L_p$ $(p \geq 1)$ on a*

$$\hat{\phi} = \lim_{l\to\infty} f_l \quad \text{p.s. et dans } L_p$$

avec

$$f_l(\omega) = 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega) \prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega).$$

Notes :

- La condition (M2) est réalisée si $m_0 \neq 0$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$; c'est en pratique toujours le cas (à propos de (M2), voir aussi [7] 6.3).
- Le théorème 6, plus bas, arrive aux mêmes conclusions en remplaçant (M2) par une hypothèse différente.
- Rappelons que pour $(h_k) \in l_2$: (M4) $\Leftrightarrow$ (8).
- La dernière propriété est techniquement très importante; c'est elle qui permet de montrer les propriétés d'orthogonalité des $\phi(x-k)$ sous (M4) (et d'autres propriétés plus tard dans le cas des bases biorthogonales).
- Si les $\tau_k\phi$ forment une base de Riesz, alors $\mu = \theta$ est solution de l'équation (9); l'hypothèse (M3) est donc nécessaire; et donc (M2) aussi.

Démonstration
(i) Si (M1) est vérifiée, le produit est uniformément convergent sur tout compact.
(ii) Si maintenant (M3) est vérifiée, m_0 et f_l sont bornées et on a pour tout k et $l > 0$

$$\begin{aligned}
\int e^{-ik\omega}|f_l(\omega)|^2\mu(2^{-l}\omega)d\omega &= \int_{-2^l\pi}^{2^l\pi} e^{-ik\omega}\prod_{j=1}^{l}|m_0(2^{-j}\omega)|^2\mu(2^{-l}\omega)d\omega \\
&= 2^l\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=0}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(\omega)d\omega \quad = \quad I_l \\
&= 2^l\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2(|m_0(\omega)|^2\mu(\omega))d\omega \\
&= 2^l2^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2(|m_0(\omega)|^2\mu(\omega)+|m_0(\omega+\pi)|^2\mu(\omega+\pi))d\omega \\
&= 2^l2^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(2\omega)d\omega \\
&= 2^{l-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^{l-1}k\omega}\prod_{j=0}^{l-2}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(\omega)d\omega \quad = \quad I_{l-1} \quad = \quad I_0 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\omega}\mu(\omega)d\omega
\end{aligned} \tag{12}$$

Cette égalité, utilisée avec $k = 0$ entraine, en utilisant le lemme de Fatou, que $\hat{\phi} \in L_2$.
(v) Supposons que (M2) est vérifiée; à cause de (M1), on peut également supposer que 0 est un point intérieur de K. Commençons par montrer que si

$$g_l(\omega) = 1_K(2^{-l}\omega)\prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega)$$

alors

$$\hat{\phi} = \lim_{l\to\infty} g_l \quad \text{dans } L_p$$

Il s'agit de pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée puisque la convergence presque sûre est réalisée; pour tout $\omega \in K$, $|\hat{\phi}(\omega)|$ est plus grand qu'une constante $\delta > 0$ (grâce à (M1,M2)) et on a

$$|g_l(\omega)| = |\hat{\phi}(\omega)|/|\hat{\phi}(2^{-l}\omega)| \leq |\hat{\phi}(\omega)|/\delta$$

Les fonctions $|\hat{\phi} - g_l|^p$ sont donc plus petites que $|\hat{\phi}(\omega)|^p(1+1/\delta)^p$ et on peut appliquer le théorème de Lebesgue. Montrons maintenant la convergence des f_l (cf [6] lemme 4.5.); soit $V = [-\pi, \pi] \cap K$, V est un voisinage fermé de 0 et

$$\begin{aligned} \|f_l - \hat{\phi}\|_p &\leq \|f_l 1_V(2^{-l}\omega) - \hat{\phi}\|_p + \|f_l(1 - 1_V(2^{-l}\omega))\|_p \\ &= \|g_l 1_V(2^{-l}\omega) - \hat{\phi}\|_p + \|g_l(1 - 1_V(2^{-l}\omega))\|_p \end{aligned}$$

la substitution de f_l par g_l dans le dernier terme vient de la périodicité de m_0 et de la structure particulière de K. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue dans ces deux termes et la limite est 0.

(iii) Sous (M1,M2,M3), on a, en passant à la limite dans l'équation (12)

$$\int_0^{2\pi} \theta(\omega)e^{-ik\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-ik\omega}d\omega = \mu(0)^{-1}\int_0^{2\pi} \mu(\omega)e^{-ik\omega}d\omega$$

donc $\theta(\omega) = \mu(\omega)/\mu(0)$ est bornée supérieurement; θ est également supérieure à la constante δ^2 définie plus haut, et donc les $\tau_k\phi$ forment une base de Riesz (cf proposition 1).

Réciproquement, si les $\tau_k\phi$ forment une base de Riesz, $\theta > A > 0$ et donc (M2) est vérifiée.

(iv) Sous (M1,M2,M4), $\theta = \mu = 1$ et donc les $\tau_k\phi$ sont orthogonales (cf proposition 1); c'est aussi une conséquence de l'équation (12). ∎

3.3 Propriétés d'une fonction ϕ construite à partir de m_0

Dans ce paragraphe, on essaye d'obtenir des propriétés sur ϕ à partir de propriétés sur m_0; la fonction ϕ est construite à partir de l'équation (10); il va sans dire que des propriétés de ψ peuvent être déduites à l'aide de la relation $\hat{\psi}(2\omega) = \hat{\phi}(\omega)m_1(\omega)$. Pour ménager le futur, on minimisera les hypothèses sur m_0.

Théorème 5 *On suppose (M1) satisfaite.*

(i) *On suppose que m_0 est un polynome trigonométrique satisfaisant (M2) pouvant se factoriser sous la forme*

$$m_0(\omega) = ((1+e^{-i\omega})/2)^M \tilde{m}_0(\omega) \qquad \tilde{m}_0(\pi) \neq 0.$$

Posons $\tilde{m}_0(\omega) = 1/\sqrt{2}\sum_p^P u_k e^{-ik\omega}$ et $L = P-p-1$. On considère alors la matrice $(2L+1)\times(2L+1)$ de terme général $A_{ij} = \sum_n u_n \bar{u}_{n+j-2i}$, $-L \leq i,j \leq L$. Soit ρ le rayon spectral de A, on a

$$\phi \in W_2^s(\mathbf{R}) \Longleftrightarrow s < M - \frac{1}{2}\log_2(\rho).$$

(ii) *Si m_0 est un polynome trigonométrique à coefficients nuls à l'extérieur de $[N_0, N_1]$, alors ϕ a son support dans $[N_0, N_1]$.*
(iii) *Si les h_k sont ≥ 0, alors ϕ aussi.*
(iv) *On suppose (M1-3). Si $m_0^{(p)} \in L_\infty([0, 2\pi])$ alors $\int |\phi(x)|^2 |x|^{2p} dx < \infty$.*
(v) *On suppose (M1-3) et $m_0^{(p+1)} \in L_\infty([0, 2\pi])$.*

- *Si $m_0^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, ..p$ alors $\int \phi(x) x^l dx = 0$, $l = 1, ..p$.*
- *Soit ψ définie par l'équation (5) avec une fonction m_1 de $L_2([0, 2\pi])$, $m_1^{(p+1)} \in L_\infty([0, 2\pi])$; si $m_1^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, ..p$ alors $\int x^l \psi(x) dx = 0$, $\quad l = 0...p$.*

(vi) *On suppose (M1-M3) et m_0 est un polynome trigonométrique. Si $m_0^{(l)}(\pi) = 0$, $l = 0, ..p$, alors, pour $l = 0, ..p$, $\sum_j j^l \phi(x - j)$ est un polynome de degré l en x. Si de plus $m_0^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, ..p$ alors $\sum_j j^l \phi(x - j) = x^l$.*
(vii) *On suppose (M1-3) et $\hat{\phi} \in L_1$. Alors*

$$\phi(k) = \delta_{0k}, k \in \mathbf{Z} \Longleftrightarrow h_{2k} = \delta_{0k}/\sqrt{2}, k \in \mathbf{Z}$$

(i.e. ϕ est interpolante ssi h est un filtre à trous).

Notes :

- Remarquons que la transformation $m_0 \to \cos(\omega/2) m_0$ se traduit par $\phi \to primitive(\phi(x + 1/2) - \phi(x - 1/2))$.
- La condition $m_0^{(l)}(0) = 0$ se traduit $\sum h_k k^l = 0$.
- La condition de moments nuls pour ψ dans **(v)** traduit le fait que, en un certain sens, ψ est la dérivée p-ième d'une fonction régulière.
- Notons également le corollaire 5.5.1. de [7] qui dit essentiellement que si $\psi \in C^m(\mathbf{R})$ engendre une base orthogonale et possède m+2 moments finis, alors les m premiers moments sont nuls (dans **(i)** comme dans **(v)**, c'est l'ordre d'annulation de m_0 en π qui intervient). Dans le cas des bases biorthogonales, la régularité de ψ sera associée à des moments nuls pour $\tilde{\psi}$ (et réciproquement).

Démonstration
(i) est démontré dans [21].
(ii) m_0 s'écrit

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N_0}^{N_1} h_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}(\sum_{k=N_0}^{N_1} h_k \delta_k)$$

si bien que $m_0(2^{-j}\omega)$ est la transformée de Fourier d'une distribution à support sur $[2^{-j}N_0, 2^{-j}N_1]$ et donc les fonctions $\hat{\phi}_l(x) = \hat{\phi}(\omega)/\hat{\phi}(2^{-l}\omega)$ satisfont, pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$ à support à l'extérieur de $[N_0, N_1]$, la relation

$$\langle \hat{g}, \hat{\phi}_l \rangle = 0.$$

Comme $\hat{\phi}_l$ est majorée (uniformément en l) par une puissance de $|\omega|$ (car m_0 est bornée) on peut passer à la limite et la relation ci-dessus reste valide pour $\hat{\phi}$. Donc ϕ est à support dans $[N_0, N_1]$.
(iii) Même méthode ($g \geq 0 \Rightarrow \langle \hat{g}, \hat{\phi} \rangle \geq 0$).
(iv) Supposons $p = 1$. m_0' est bornée et on peut dériver le produit terme à terme

$$\hat{\phi}'(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \prod_{j=1}^{l-1} m_0(2^{-j}\omega) m_0'(2^{-l}\omega) \hat{\phi}(2^{-l}\omega)$$

On va voir que cette série converge dans L_2. Estimons le carré de la norme de son l-ième terme, en s'aidant de la démonstration du théorème 4 (ii) pour le calcul de I_l ($k = 0$):

$$\begin{aligned}
2^{-2l} \int \prod_{j=1}^{l-1} |m_0(2^{-j}\omega)|^2 |m_0'(2^{-l}\omega)|^2 |\hat{\phi}(2^{-l}\omega)|^2 d\omega &\leq C 2^{-2l} \int \prod_{j=1}^{l-1} |m_0(2^{-j}\omega)|^2 |\hat{\phi}(2^{-l}\omega)|^2 d\omega \\
&= C 2^{-l} \int \prod_{j=1}^{l-1} |m_0(2^j\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\
&= C 2^{-l} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{l-1} |m_0(2^j\omega)|^2 \theta(\omega) d\omega \\
&\leq C C' 2^{-l} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{l-1} |m_0(2^j\omega)|^2 \theta(2\omega) d\omega \\
&= C C' 2^{-l} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=0}^{l-2} |m_0(2^j\omega)|^2 \mu(\omega) d\omega \qquad \text{car} \quad \mu = \theta \\
&= C C' 2^{-2l+1} I_{l-1} = C C' 2^{-2l+1} \|\hat{\phi}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $p > 1$ le calcul est le même sauf que C' sortira p fois et que les multiples trous dans le produit obligerons à calculer effectivement les intégrales en recourant à la même astuce que dans la démonstration de l'équation (12).
(v) La convergence des intégrales est garantie par **(iv)**. Leur valeur, qui est $\partial^l \hat{\phi}(0)$ (ou $\partial^l \hat{\psi}(0)$), est asurée par $m_0^{(l)}(0) = 0$ (ou $m_1^{(l)}(0) = 0$) (dériver l fois les équations (2) et (5).)
(vi) On applique la formule de Poisson

$$\sum f(j) = \sum \hat{f}(2j\pi)$$

à la fonction $f(t) = t^l \phi(x - t)$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum j^l \phi(x - j) &= \sum i^l \partial^l (e^{-i\omega x} \hat{\phi}(-\omega))_{\omega = 2j\pi} \\
&= i^l \partial^l (e^{-i\omega x} \hat{\phi}(-\omega))_{\omega = 0} \\
&= \sum_{k \leq l} C_l^k i^{k-l} x^k \partial^{l-k} \hat{\phi}(0)
\end{aligned}$$

(vii) Le sens direct est immédiat en utilisant l'équation 1. Pour le sens retour, notons que comme h est un filtre à trous, on a $m_0(\omega) + m_0(\omega + \pi) = 1$; considérons la fonction ϕ_l telle que $\hat{\phi}_l = f_l$;

en vertu du théorème 4 les fonctions f_l convergent vers $\hat{\phi}$ dans L_1 et donc les ϕ_l convergent vers ϕ uniformément. De plus, pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned}
2\pi\phi_l(k) &= \int e^{ik\omega} f_l(\omega)d\omega \\
&= 2^l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=0}^{l-1} m_0(2^j\omega)d\omega \quad = \quad I_l \\
&= 2^l 2^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=1}^{l-1} m_0(2^j\omega)(m_0(\omega) + m_0(\omega+\pi))d\omega \\
&= 2^{l-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=1}^{l-1} m_0(2^j\omega)d\omega \\
&= 2^{l-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^{l-1} k\omega} \prod_{j=0}^{l-2} m_0(2^j\omega)d\omega \quad = \quad I_{l-1} \quad = \quad I_0 = 2\pi\delta_{0k}
\end{aligned}$$

∎

Considérons l'hypothèse

(MP) m_0 est un polynome trigonométrique de la forme $m_0(\omega) = 1/\sqrt{2}\sum_p^P h_k e^{-ik\omega}$, $m_0(0) = 1$, et la matrice de terme général $(\sum_n h_n \bar{h}_{n+j-2i})_{-L \le i,j \le L}$ $(L = P - p - 1)$ admet 1 comme valeur propre simple et le vecteur propre associé peut s'écrire comme la suite des coefficients de Fourier d'une fonction μ strictement positive.

On peut montrer maintenant le

Théorème 6 *Sous (MP), les hypothèses (M1-3) sont satisfaites.*

Démonstration En effet la fonction μ satisfait (M3) car A est la matrice de l'application

$$\mu(\omega) \longrightarrow |m_0(\omega/2)|^2\mu(\omega/2) + |m_0(\omega/2+\pi)|^2\mu(\omega/2+\pi)$$

sur l'espace des polynomes de la forme $\sum_{-L}^{L} c_k e^{-ik\omega}$. Donc $\phi \in L_2$. Les coefficients de Fourier de θ sont les $\hat{\theta}_l = \int \phi(x)\phi(x-l)dx$ (vérification immédiate) qui sont nuls pour $|l| > L$ (car ϕ a son support sur $[p, P]$); la relation (1) implique qu'ils forment un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1; donc $\theta = \mu > 0$ et (M2) est satisfaite. ∎

3.4 Considérations algorithmiques; filtres en quadrature

Calcul de la transformée de f : algorithme FWT Les équations 1 et 3 impliquent que les quantités

$$S_k^j = \langle f, \phi_{jk}\rangle, \quad D_k^j = \langle f, \psi_{jk}\rangle$$

satisfont

$$\begin{aligned} S_k^j &= \sum \bar{h}_{l-2k} S_l^{j+1} \\ D_k^j &= \sum \bar{g}_{l-2k} S_l^{j+1}. \end{aligned}$$

On peut donc calculer les S_k^N à l'échelle la plus fine N puis filtrer avec les relations ci-dessus; les propriétés énoncées dans le théorème 3 entrainent que ces filtres, caractérisés par m_0 et m_1 sont des filtres miroirs en quadrature; m_0 est typiquement un filtre passe-bas ($m_0(0) = 1$, $m_0(\pi) = 0$) et m_1 un passe-haut. Notons que le facteur 2 (dans $2k$) signifie qu'il s'agit en fait d'un filtrage suivi d'une décimation et donc la suite S^N contient le même nombre d'éléments que les suites $D^{N-1}, ..., D^1, D^0, S^0$ réunies (aux effets de bord près). L'équation 4 permet d'obtenir le filtre de synthèse :

$$S_k^j = \sum h_{k-2l} S_l^{j-1} + g_{k-2l} D_l^{j-1}.$$

Le facteur 2 a ici le rôle d'une extrapolation par des zeros.

Calcul de ϕ en cascade On peut appliquer la formule ci-dessus avec $f = \phi$ et alors $D_k^j = 0$ et $S_k^j = \langle \phi, \phi_{jk} \rangle$ se calcule avec

$$S_k^j = \sum h_{k-2l} S_l^{j-1} \qquad S_k^0 = \delta_{0k}.$$

ce qui permet d'obtenir ϕ puisque $S_k^j = \langle \phi, \phi_{jk} \rangle$ est une bonne approximation (si j est grand) de $\phi(k2^{-j})$; la convergence est facile à étudier à partir de la régularité de ϕ (cf [7] section 6.5). Les termes de la suite S_k^j correspondent également aux valeurs prises par la fonction ϕ_j solution de

$$\phi_{j+1} = \sqrt{2} \sum h_k \phi_j(2x - k), \qquad \phi_0 = 1_{[-1/2,1/2]}.$$

3.5 Exemples

Ondelettes régulières de Meyer On choisit m_0 régulière tel que

$$\begin{aligned} |m_0| &> 0 \quad sur \ [-\pi/2, \pi/2] \\ |m_0| &= 1 \quad sur \ [-\pi/3, \pi/3] \\ |m_0| &= 0 \quad sur \ [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{aligned}$$

Alors les conditions du théorème 4 sont satisfaites et on vérifie aisément que $\hat{\phi}(\omega)$ est égal à $m_0(\omega/2)$ sur $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ et nul ailleurs. ϕ est donc C^∞.

Ondelettes à support compact de Daubechies On cherche m_0 satisfaisant (M4) de la forme

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega)$$

où $\mathcal{L}$ est un polynome trigonométrique le plus court possible; le but étant d'avoir à la fois un petit support et de la régularité pour ϕ (cf. théorème 5). L'équation (6), se réécrit

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1 \ , \qquad y = \sin(\omega/2)^2 \ , \qquad P(y) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$$

et les solutions sont de la forme ([7], chapitre 6):

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^{k} y^k + y^N R(1/2 - y).$$

où R est un polynome impair tel que $P(y) \geq 0$, $y \in [0,1]$; la somme correspond au debut du developpement de $(1-y)^{-N}$; on obtient donc $\mathcal{L}$ sous la forme de la racine carrée (à extraire) du polynome P en $\sin(\omega/2)^2$. Pour obtenir (h_k), il faut exprimer m_0 comme polynome en $e^{i\omega}$. Les ondelettes de Daubechies correspondent au choix $R = 0$. Les fonctions ϕ_N et ψ_N obtenues sont à support sur [0,2N-1], et les ψ sont orthogonales à x^p, $p = 0, ...N-1$. Les valeurs des coefficients sont données dans [7]. On peut vérifier que $|m_0(\omega)|^2 = c\int_\omega^\pi \sin^{2N-1}(x)dx = c(-1)^{N+1}2^{-2N}\sum C_{2N-1}^{p+N}(e^{(2p+1)i\omega}+1)/(2p+1)(-1)^p$.

Ondelettes de Battle-Lemarié C'est un cas d'utilisation de la proposition 1 où g est une fonction spline. Rappelons que la fonction spline d'ordre n est une fonction C^{n-1} polynomiale d'ordre n par morceaux qui est la convolée $n+1$ fois de $1_{[0,1]}$ avec elle-même. Voir [7] 5.4.

Coifflettes On désire, pour des raisons techniques, avoir les relations

$$\int x^l \psi(x)dx = 0, \quad \int x^l \phi(x)dx = 0, \quad l = 1, ..L-1.$$

On se met dans le cadre des ondelettes à support compact; ces integrales étant des dérivées successives de $\hat{\psi}$ et $\hat{\phi}$ en 0, ces conditions une fois traduites en termes du polynome m_0 (cf théorème 5), conduisent à la forme:

$$m_0(\omega) = (1+e^{i\omega})^L \mathcal{L}_1(\omega) = 1 + (1-e^{i\omega})^L \mathcal{L}_2(\omega).$$

Nouveau problème d'algèbre. Les détails sont dans [7] 8.2.

4 Ondelettes et espaces fonctionnels

Tout ce paragraphe est emprunté à [17]. Les théorèmes suivants permettent de ramener, sur certains points, l'étude et l'estimation de fonctions à l'étude et l'estimation des suites (coefficients d'ondelettes). Dans tout ce paragraphe d désigne la dimension de l'espace euclidien. On aura besoin d'utiliser des ondelettes suffisament régulières:

Définition 4 *Une analyse multirésolution est dite r-régulière si*

$$|\partial^p \phi(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m}, \quad p = 0, ..r, \quad m \in \mathbf{N}.$$

4.1 Espaces de Besov

Pour $0 < s \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, on considère les semi-normes

$$\begin{aligned} N_{spq}(f) &= \left(\int_{h>0} \left(\frac{\|\tau_h f - f\|_p}{h^s}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{1/q} \qquad si \quad 0 < s < 1 \\ N_{1pq}(f) &= \left(\int_{h>0} \left(\frac{\|\tau_h f + \tau_h f - 2f\|_p}{h}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{1/q} \end{aligned}$$

(si $d \geq 1$ remplacer $\|\tau_h f - f\|_p$ par $\sup_{|y|\leq h} \|\tau_y f - f\|_p$) puis les normes, pour $s = r + n$, $0 < r \leq 1$, $n \in \mathbf{Z}$

$$\|f\|_{spq} = \|f\|_p + N_{rpq}(f^{(n)}).$$

Les espaces de Besov sont définis par

$$B^s_{pq} = \{f, \|f\|_{spq} < \infty\} \qquad 0 < s, \;\; 1 \leq p, q \leq \infty$$

(cf [2] théorème 6.2.5). Ils sont définis plus bas dans le cas $s = 0$. On peut montrer (cf [2]), pour $0 \leq s$, $1 \leq p, q \leq \infty$:

- $B^s_{\infty\infty} = C^s = \{f, \sup_{x,h} |h|^{-s}|f(x+h) - f(x)| < \infty, \;\; et \;\; \|f\|_\infty < \infty\}$
- $B^s_{pp} \subset W^s_p \subset B^s_{p2}$ pour $p \leq 2$
- $B^s_{p2} \subset W^s_p \subset B^s_{pp}$ pour $p \geq 2$
- $B^s_{pq} \subset B^{s'}_{p'q'} \qquad si \;\; p' \geq p \;,\quad s' \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p'} \;,\quad q' \geq q.$

En fait, il suffit d'avoir cette relation sur la fonction g de la proposition 1 (cf [17] chapitre II, définitions 1 et 2 et théorème 2) On a le résultat suivant ([17]) :

Théorème 7 *Soit une analyse multirésolution r-régulière avec $r \geq s > 0$, alors en notant pour toute fonction f*

$$\alpha_k = \langle f, \phi_{0k}\rangle \;, \qquad \beta_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$$

la norme $\|f\|_{spq}$ est équivalente à la norme

$$\nu_{spq}(f) = \|\alpha\|_p + \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jq(s+d/2-d/p)}\|\beta_{j.}\|_p^q\right)^{1/q}.$$

On définit l'espace $B^0_{p,q}$ par $B^0_{p,q} = \{f, \nu_{0pq}(f) < \infty\}$.

4.2 L'algèbre des bosses

L'algèbre B des bosses est l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini pouvant s'écrire comme somme infinie de densités gaussiennes

$$f = \sum \lambda_i g_i(x), \qquad \sum |\lambda_i| < \infty.$$

Pour toute f de B on définit $\|f\|_B$ comme étant le minimum de $\|\lambda\|_1$ pour toutes les décompositions possibles; alors $\|f\|_B \simeq \sum_{j,k} 2^{jd/2}|\beta_{jk}|$; donc $B = B^1_{11}$.

4.3 Espaces L_p et espaces de Sobolev généralisés W_p^s

Rappelons que W_p^s est l'ensemble des fonctions telles que $\|f\|_{s,p} = \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\omega|^2)^{s/2}\hat{f}(\omega)]\|_p < \infty$ ([20]). Notons

$$\chi_{jk}(x) = 1_{\{2^j x - k \in [0,1[\}}$$

(c'est l'indicatrice du « support » de ψ_{jk}) alors on a, si $r \geq |s|$, et $1 < p < \infty$

$$\|f\|_{s,p} \simeq \|\alpha\|_p + \|\sum_{j\geq 0}\sum_k |\beta_{jk}|^2 2^{2j(d/2+s)}\chi_{jk}(x)\|_{p/2}^{1/2}.$$

Contrairement aux espaces de Besov, on a d'abord une intégration sur les différentes échelles (à x fixé, la somme sur k ne contient qu'un terme), puis une intégration en espace.

4.4 Espaces de Hölder

Les espaces $C_{x_0}^s$ sont utilisés pour décrire les fonctions dont la régularité est s au point x_0 :

Définition 5 *On dit que $f \in C_{x_0}^s$ s'il existe un polynome P de degré égal à $[s]$ tel que*

$$f(x) = P(x - x_0) + O(|x - x_0|^s)$$

On a alors le

Théorème 8 *Si $f \in C_{x_0}^s$,*

$$|\beta_{jk}| \leq C 2^{-(d/2+s)j}(1 + |2^j x_0 - k|^s)$$

La démonstration ainsi qu'une semi-réciproque se trouve dans [12].

5 Applications

5.1 Estimation

Les vertus de localisation des ondelettes en font un instrument de choix pour certains problèmes d'estimation, et leur permet de réussir là où Fourier échoue.

L'estimation d'une fonction ou d'une densité sera remplacée par l'estimation de ses coefficients d'ondelettes à une certaine échelle; par exemple, si $(X_i)_{i=1,..n}$ sont des variables aléatoires indépendantes de densité commune f, on peut construire l'estimée

$$f^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_k \phi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1}\sum_k \check{\beta}_{jk}\psi_{jk}(x)$$

où

$$\begin{aligned}
2^{j_0} &= n^{1/(1+2s)} \qquad 2^{j_1} = \frac{n}{\log(n)} \\
\hat{\alpha}_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \phi_{j_0 k}(X_i) \\
\hat{\beta}_{jk} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi_{jk}(X_i) \\
\check{\beta}_{jk} &= \hat{\beta}_{jk} 1_{|\hat{\beta}_{jk}| > C\sqrt{(j-j_0)/n}}
\end{aligned}$$

On peut montrer alors que si f est à support compact et $f \in B^s_{pq}$, $1/p < s \leq r$, alors

$$E_f[\|f^* - f\|_{p'}^{p'}]^{1/p'} \leq C\frac{\log(n)^{\gamma'/2}}{n^{\gamma/2}} \qquad \begin{aligned} \gamma &= 1 - \max((1+2s)^{-1}, (1-2/p')(1+2s-2/p)^{-1}) \\ \gamma' &= \gamma 1_{(1+2s)^{-1} < (1-2/p')(1+2s-2/p)^{-1}} \end{aligned}$$

pour tout $p' \geq \max(2, p)$ (voir [15],[13],[9]). Si l'on ne connait pas s prendre $2^{j_0} = n^{1/(1+2r)}$ (les performances sont légèrement altérées). Dans le cas de l'estimation d'une fonction f observée de manière bruitée sur les points X_i d'une grille régulière ($Y_i = f(X_i) + w_i$), les coefficients estimés seront (cf [10])

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \phi_{0k}(X_i) \\ \hat{\beta}_{jk} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \psi_{jk}(X_i) \\ \check{\beta}_{jk} &= \hat{\beta}_{jk} 1_{|\hat{\beta}_{jk}| > l_n} \\ l_n^2 &\simeq 2\log(n) E[w^2]/n \end{aligned}$$

Ces algorithmes font concurrence à ceux connus jusqu'à présent, aussi bien du point de vue de l'efficacité que de la facilité de mise en oeuvre.

5.2 Codage

Le principe est de filtrer le signal (identifié à la suite $(S_k^N)_{k\in\mathbf{Z}}$ du paragraphe 3.4 ou 6.3) avec (h_k) et (g_k) et de coder les résidus (S_k^0) et $(D_k^j)_{j=0,N}$. Si le filtre m_0 coupe assez bien en $\pi/2$, alors les décimations successives se font sans phénomène d'« aliasing » et les suites S et D représenteront bien le signal dans les bandes de fréquence attendues. Il semblerait que les filtres en quadrature qui sont associés à une analyse multirésolution (c'est-à-dire que non seulement (M4) est satisfaite mais également (M2)) ont un meilleur comportement (voir [7]).

Citons par exemple [1], [8].

5.3 Analyse numérique

De nombreux points restent à éclaircir à propos de l'intéret des ondelettes en analyse numérique; un exposé intéressant est donné dans [12].Une courte note sur les liens avec les algorithmes multigrilles est donnée dans [5] (voir aussi [19] et [3]).

5.4 Fonctions interpolantes

Il s'agit de mettre à profit le point **(vi)** du théorème 5. La condition (M4) signifie que le filtre associé à $|m_0|^2$ est un filtre à trous et donc la fonction $\Phi(x) = \phi(.) * \phi(-.)$ est interpolante. On a ainsi un moyen de fabriquer des fonctions d'échelle interpolantes. Toute fonction f combinaison linéaire finie des $\tau_k\Phi$ satisfait

$$f(x) = \sum_k f(k)\Phi(x-k)$$

car cette égalité est satisfaite pour Φ.

Ces fonctions peuvent être considérées « biorthogonales » aux masses de Dirac sur les entiers.

6 Ondelettes biorthogonales

On ne développera le sujet que dans le cadre des bases de Riesz; une étude dans le cadre des « frames » (cas où chaque élément de la « base » n'est pas nécessairement indépendant des autres) est poussée dans [7].

Définition 6 *Une analyse multirésolution biorthogonale est la donnée de deux fonctions* $\phi, \tilde{\phi}$ *de norme 1 dans* $L_2(\mathbf{R})$ *et des espaces*

$$\begin{aligned} V_j &= vect(\phi_{jk}, k \in \mathbf{Z}) \qquad \phi_{jk} = 2^{j/2}\phi(2^j - k) \\ \tilde{V}_j &= vect(\tilde{\phi}_{jk}, k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

avec les propriétés

(AMB1) $\cap V_j = \{0\}$ *et* $\cap \tilde{V}_j = \{0\}$,

(AMB2) $\overline{\cup V}_j = L_2(\mathbf{R})$ *et* $\overline{\cup \tilde{V}}_j = L_2(\mathbf{R})$,

(AMB3) $V_j \subset V_{j+1}$ *et* $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$,

(AMB4) *pour tout j le système* $(\phi_{jk}, \tilde{\phi}_{jk})$ *est biorthogonal.*

Sous ces hypothèses, on peut définir deux suites de carré intégrable (h_k) et $(\tilde{h}_k)$ par

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2}\sum h_k \phi(2x-k) \\ \tilde{\phi}(x) &= \sqrt{2}\sum \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2x-k) \end{aligned}$$

puis construire une base biorthogonale de $L_2(\mathbf{R})$:

Théorème 9 *Sous (AMB1-4) on définit* $\psi, \tilde{\psi}, W_j, \tilde{W}_j$ *avec*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2}\sum g_k \phi(2x-k)\ , \quad g_k = (-1)^{k+1}\bar{\tilde{h}}_{1-k} \\ \tilde{\psi}(x) &= \sqrt{2}\sum \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2x-k)\ , \quad \tilde{g}_k = (-1)^{k+1}\bar{h}_{1-k} \\ W_j &= vect(\psi_{jk}, k \in \mathbf{Z}), \quad \tilde{W}_j = vect(\tilde{\psi}_{jk}, k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Alors le système $(\psi_{jk}, \tilde{\psi}_{jk})$ *est une base biorthgonale de* $L_2(\mathbf{R})$ *et*

$$\begin{aligned} & V_{j+1} = V_j + W_j, \quad \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j \\ & V_j \perp \tilde{W}_j, \quad \tilde{V}_j \perp W_j, \quad W_j \perp \tilde{W}_k,\ k \neq j. \end{aligned}$$

En définissant m_0, $\tilde{m}_0$, m_1, $\tilde{m}_1$, *comme précédemment à l'aide de leur transformée de Fourier (à* $\sqrt{2}$ *près)* (h_k), $(\tilde{h}_k)$, (g_k), $(\tilde{g}_k)$, *on a les relations*

$$\sqrt{2}\phi(2x-m) = \sum_k \bar{\tilde{g}}_{m-2k}\psi(x-k) + \bar{\tilde{h}}_{m-2k}\phi(x-k) \tag{13}$$

$$m_1(\omega) = 2^{-1/2}\sum g_k e^{-ik\omega} = e^{-i\omega}\bar{\tilde{m}}_0(\omega+\pi)$$

$$\psi(\omega) = m_1(\omega/2)\phi(\omega/2) \tag{14}$$

$$\bar{m}_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_0(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi) = 1 \tag{15}$$

$$\bar{m}_1(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_1(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi) = 0 \tag{16}$$

$$\sum \bar{h}_l \tilde{h}_{l+2k} = \delta_{k0}$$

et les relations symétriques.

Démonstration La démonstration ne présente pas de difficulté; les étapes sont les suivantes :

- La relation $\langle \tau_k\phi, \tilde{\phi}\rangle = \delta_{0k}$ équivaut à

$$\sum \bar{\hat{\phi}}(\omega + 2k\pi)\hat{\tilde{\phi}}(\omega + 2k\pi) = 1 \qquad p.s. \tag{17}$$

  (calculer $\langle \widehat{\tau_k\phi}, \hat{\tilde{\phi}}\rangle$).

- La relation ci-dessus implique sans peine la validité de l'équation (15)
- ψ est dans L_2 puisque $(g_k) \in l_2$ et son orthogonalité à $\tilde{\phi}$ vient de l'équation (16)
- On vérifie ensuite dans le domaine de Fourier l'équation (13) en utilisant (15) et (16). ∎

6.1 Construction partant de ϕ

Cette fois-ci, au lieu d'orthogonaliser les translatées de ϕ, on va chercher une base biorthogonale qui soit aussi associée à une fonction d'échelle

Théorème 10 *Soit $\phi \in L_2$, telle que les $\tau_k\phi$ forment une base de Riesz et*

$$\theta(\omega) \;=\; \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2.$$

La fonction $\tilde{\phi}$ définie par

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \hat{\phi}(\omega)/\theta(\omega)$$

est telle que $(\phi, \tilde{\phi})$ est un système biorthogonal. Si ϕ est une fonction d'échelle, alors $\tilde{\phi}$ aussi.

La démonstration est directe. Noter qu'ici $\tilde{m}_0(\omega) = m_0(\omega)\theta(\omega)/\theta(2\omega)$ et $\theta\tilde{\theta} = 1$.

6.2 Construction partant de m_0 et $\tilde{m}_0$

Théorème 11 *Soient m_0 et $\tilde{m}_0$ deux fonctions satisfaisant chacune les hypothèses (M1-3) ou (MP) et telles que*

$$\bar{m}_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_0(\omega + \pi)\tilde{m}_0(\omega + \pi) = 1. \tag{18}$$

Alors, la paire $(\phi, \tilde{\phi})$ définie par

$$\hat{\phi}(\omega) \;=\; \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega)$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) \;=\; \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\omega)$$

produit une analyse multirésolution biorthogonale.

Note : Si m_0 et $\tilde{m}_0$ sont des polynomes trigonométriques, l'équation (18) peut être vue comme une identité de Bezout. Dans ce cas, si l'on part de m_0, le $\tilde{\phi}$ qu'on obtient alors ne correspond généralement pas à celui obtenu au paragraphe précédent (car dans le théorème 10, on a $\theta\tilde{\theta} = 1$, ce qui est en contradiction avec le fait que ces deux fonctions soient des polynomes trigonométriques (cf théorème 6).

Démonstration

Il s'agit de montrer la propriété de base de Riesz et $\langle \tau_k \phi, \tilde{\phi} \rangle = \delta_{0k}$. On utilise pour cela que l'équation (18) implique que les fonctions

$$f_l(\omega) = 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega) \prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega)$$

$$\tilde{f}_l(\omega) = 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega) \prod_{j=1}^{l} \tilde{m}_0(2^{-j}\omega)$$

satisfont $\langle \tau_k \hat{f}_l, \hat{\tilde{f}}_l \rangle = \delta_{0k}$ (faire la même manipulation d'intégrales que dans la démonstration du théorème 4); le théorème 4 (sous (M1-3)) ou 6 (sous (MP)) permet de passer à la limite sur cette égalité et d'obtenir ainsi le résultat cherché.

6.3 Considérations algorithmiques; retour aux filtres en quadrature

Tout ce passe comme plus haut (3.4); on obtient pour

$$S_k^j = \langle f, \phi_{jk} \rangle, \quad D_k^j = \langle f, \psi_{jk} \rangle$$

les équations d'analyse et de reconstruction

$$\begin{aligned} S_k^j &= \sum \bar{h}_{l-2k} S_l^{j+1} \\ D_k^j &= \sum \bar{g}_{l-2k} S_l^{j+1} \\ S_k^j &= \sum \tilde{h}_{k-2l} S_l^{j-1} + \tilde{g}_{k-2l} D_l^{j-1}. \end{aligned}$$

6.4 Exemples

Divers exemples sont donnés dans [7] chapitre 8.3. Notons avant tout que la formule de reconstruction

$$f = \sum \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}$$

peut utiliser différentes propriétés de ψ et $\tilde{\psi}$; typiquement, si f est régulière on voudra $\tilde{\psi}$ régulière et ψ avec beaucoup de moments nuls (cf théorème 5 (iv)) car ainsi, les $\langle f, \psi_{jk} \rangle$ seront rapidement négligeables (une fonction régulière est localement un polynome).

Splines L'idée la plus naturelle est de partir des fonctions spline

$$\mathcal{F}\tilde{\phi}(\omega) = (2\sin(\omega/2)/\omega)^{\tilde{n}}$$

auquel cas $n + \tilde{n}$ doit être pair et on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0(\omega) &= (\cos(\omega/2))^{\tilde{n}} \\ m_0(\omega) &= (\cos(\omega/2))^{n} \sum_{k=0}^{N-1} C^k_{N-1+k} (\sin(\omega/2))^{2k} \qquad N = (n+\tilde{n})/2\end{aligned}$$

($m_0(\omega)$ et $\tilde{m}_0(\omega)$ doivent être multipliées par $e^{-i\omega/2}$ si n est impair). La biorthogonalité se déduit de l'orthogonalité des ondelettes orthogonales de Daubechies (car les polynomes en jeu sont les mêmes). Pour obtenir (h_k), il faut exprimer m_0 comme polynome en $e^{i\omega}$ ($\cos(\omega/2) = e^{i\omega/2}(1 + e^{-i\omega})/2$...). Notons que ces polynomes sont symétriques, ce qui est impossible dans le cas des ondelettes orthogonales à support compact (cf [7] théorème 8.1.4.). Il est utile d'avoir l'expression de la somme en fonction de $z = e^{i\omega}$:

$$P_N(z) = \sum_l \sum_{k=0}^{N-1} C^k_{N-1+k} C^{l+k}_{2k} 4^{-k} (-z)^l.$$

Ondelettes dérivées Partant d'une famille biorthogonale $(\psi_{jk}, \tilde{\psi}_{jk})$, on peut, si ψ est régulière et $\tilde{\psi}$ possède des moments nuls, considérer la famille biorthogonale de dérivées et intégrées $(\psi^{(l)}_{jk}, \tilde{\psi}^{(-l)}_{jk})$. On voit que la première fonction a plus de moments nuls, et la seconde est plus régulière. Cette transformation revient à multiplier m_0 et diviser $\tilde{m}_0$ par $\cos(\omega/2)^l$ (cf théorème 5 et la note qui suit).

Estimation L'idée est d'utiliser à l'analyse une ondelette $\tilde{\phi}$ extrêmement rustique (Haar) avec beaucoup de moments nuls pour $\tilde{\psi}$ et à l'analyse une ondelette biorthogonale régulière associée (i.e. spline avec $\tilde{n} = 1$ et n grand).

7 Ondelettes sur l'intervalle

On va voir comment il est possible de fabriquer une analyse multi-résolution de $L_2([0,1])$ à partir de celle précédemment construite. On verra aussi que cette construction n'est pas toujours nécessaire puisqu'on pourra directement calculer la projection $P_j u$ d'une fonction de $u \in L_2([0,1])$ sur V_j^* (espace des restrictions des fonctions de V_j à l'intervalle) comme combinaison linéaire des ϕ_{jk}; cette fonction est naturellement définie sur tout $\mathbf{R}$; ayant fait cette opération pour j grand, on est alors ramené à l'analyse habituelle.

7.1 Fabrication des bases orthonormées

Dans tout ce paragraphe on suppose que ϕ et ψ ont pour support l'intervalle $[0, 2N-1]$. On se placera à des échelles assez grandes ($2^j > 2N-1$) de sorte que les effets de bord se séparerons. On note

$$\begin{aligned}\phi^*_{jk} &= \phi_{jk} 1_{0<x<1} \\ \psi^*_{jk} &= \psi_{jk} 1_{0<x<1} \\ V^*_j &= vect\{\phi^*_{jk}, k \in \mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

Si k est pris en dehors de $[2-2N, 2^j-1]$, les fonctions définies ci-dessus sont nulles; si $k \in [0, 2^j - 2N+1]$ les fonctions sont inchangées. On a donc $2^j - 2N + 2$ fonctions intactes (et orthogonales) et $2(2N-2)$ fonctions amputées. On a alors (cf [18], [12]) le

Théorème 12
(i) *La famille* $\{\phi^*_{jk}, k = -2N+2, ...2^j-1\}$ *forme une base (non-orthogonale) de* V^*_j.
(ii) $\psi^*_{jk} \in V^*_j$ *si* $k \notin [1-N, 2^j-N]$.
(iii) *La famille* $\{\phi^*_{jk}, k = -2N+2, ...2^j-1\} \cup \{\psi^*_{jk}, k = -N+1, ...2^j-N\}$ *forme une base de* V^*_{j+1}.

Le troisième point indique que sur les $2^j + 2N - 2$ ψ^*_{jk} non-nulles, seules 2^j sont utiles à passer de V^*_j à V^*_{j+1}. Celles qui restent sont celles qui sont issues de fonctions ψ_{jk} dont le support empiète davantage à l'extérieur de $[0,1]$.

On définit alors l'espace W^*_j comme le complément orthogonal de V^*_j dans V^*_{j+1}. On obtient alors une base orthogonale $\phi^{\#}_{jk}$ de V^*_j en orthogonalisant les fonctions ϕ^*_{jk} (il n'y a que $2(2N-2)$ fonctions à orthogonaliser), puis une base orthogonale $\psi^{\#}_{jk}$ de W^*_j en orthogonalisant d'abord les ψ^*_{jk} à V^*_j puis ensuite les ψ^*_{jk} entre elles (cela ne concerne que $2(N-1)$ fonctions).

Etudions quelles sont les matrices qui interviennent dans ce procédé d'orthogonalisation. On a, en notant $\Phi_j = (\phi^*_{j,2-2N}, ...\phi^*_{j,2^j-1})$ et $\Psi_j = (\psi^*_{j,1-N}, ...\psi^*_{j,2^j-N})$

$$\begin{aligned} \Phi^{\#}_j &= P_0 \Phi_j \\ \Psi^{\#}_j &= Q_0(\Psi_j - R_0 \Phi^{\#}_j) \end{aligned}$$

et ces matrices sont de la forme

$$P_0 = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} \qquad Q_0 = \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \qquad R_0 = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$$

où P est $(2N-2)\times(2N-2)$, Q est $(N-1)\times(N-1)$, R est $(N-1)\times(2N-2)$. Si l'on applique le procédé de Schmidt, P et Q sont triangulaires inférieures. Cherchons les conditions qui vont garantir l'orthogonalité; on peut traiter séparément le bord gauche et le bord droit. Considérons les matrices F, G, H (indépendantes de j) dont les coefficients sont :

$$\begin{aligned} f_{kl} &= \langle \phi^*_{j,1-2N+k}, \phi^*_{j,1-2N+l} \rangle \\ &= \int_0^\infty \phi(x+2N-1-k)\phi(x+2N-1-l)dx \qquad k,l = 1,..2N-2 \\ g_{kl} &= \langle \psi^*_{j,-N+k}, \psi^*_{j,-N+l} \rangle \\ &= \int_0^\infty \psi(x+N-k)\psi(x+N-l)dx \qquad k,l = 1,..N-1 \\ h_{kl} &= \langle \phi^*_{j,1-2N+k}, \psi^*_{j,-N+l} \rangle \\ &= \int_0^\infty \phi(x+2N-1-k)\psi(x+N-l)dx \qquad k = 1,..2N-2, l = 1,..N-1 \end{aligned}$$

alors on vérifie aisément que l'orthogonalité des fonctions diésées se traduit par les équations

$$P^T P = F^{-1}, \quad R = H^T P^T, \quad Q^T Q = (G - RR^T)^{-1}$$

(Le théorème précédent garantit l'inversibilité de ces matrices). On retrouve les trois étapes d'orthogonalisation décrites plus haut. Pour le bord droit, on vérifie aisément que les matrices associées satisfont $\tilde{F} = I - F$, $\tilde{G} = I - G$, et $\tilde{H} = -H$ et donc

$$\tilde{P}^T \tilde{P} = (I - F)^{-1}, \quad \tilde{R} = -H^T \tilde{P}^T, \quad \tilde{Q}^T \tilde{Q} = (I - G - \tilde{R}\tilde{R}^T)^{-1}.$$

Ces matrices une fois fixées indépendamment de j, les ondelettes diésées modifiées au bord s'obtiennent d'une échelle à l'autre par une simple dilatation (et une translation pour le bord de droite).

7.2 Projection sur V_j^*

On considère maintenant le problème suivant : que vaut la projection $P_j u$ de $u \in L_2([0,1])$ sur l'espace V_j^*? En notant

$$\begin{aligned}
&\alpha_{jk}^{\#} = \langle u, \phi_{jk}^{\#} \rangle, \quad \alpha_{jk}^{*} = \langle u, \phi_{jk}^{*} \rangle, \quad p_{jk}^{0} = (P_0)_{jk}, \quad f_{jk}^{-1} = (F^{-1})_{jk}, \\
&k' = k + 2N - 1, \quad k'' = k - 2^j + 2N - 1,
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
P_j u &= \sum_k \langle u, \phi_{jk}^{\#} \rangle \phi_{jk}^{\#} = \sum \alpha_{jk}^{\#} \phi_{jk}^{\#} = \sum \alpha_{jk}^{\#} p_{kl}^{0} \phi_{jl}^{*} = \sum \alpha_{jm}^{*} p_{km}^{0} p_{kl}^{0} \phi_{jl}^{*} \\
&= \sum_{k=-2N+2}^{-1} \alpha_{jk}^{*} f_{k'l}^{-1} \phi_{jl}^{*} + \sum_{k=0}^{2^j-2N+1} \alpha_{jk}^{*} \phi_{jk}^{*} + \sum_{k=2^j-2N+2}^{2^j-1} \alpha_{jk}^{*} \tilde{f}_{k''l}^{-1} \phi_{jl}^{*} \\
&= \sum \alpha_{jk} \phi_{jk} 1_{[0,1]}
\end{aligned}$$

En résumé :

Théorème 13 *Soit $u \in L_2([0,1])$, alors $P_j u$ est la restriction à l'intervalle d'une fonction u_j de V_j avec*

$$u_j = \sum \alpha_{jk} \phi_{jk}$$

Si l'on note $\gamma = (\alpha_{jk})_{k=-2N+2,-1}$, $\mu = (\alpha_{jk})_{k=0,..2^j-2N+1}$, $\delta = (\alpha_{jk})_{k=2^j-2N+2,..2^j-1}$ (gauche, milieu, droite), alors la relation entre les coefficients d'ondelette $(\alpha_{jk}^*)_{k=-2N+2,..2^j-1}$ de la fonction u prolongée par zero, et la suite (α_{jk}) est :

$$\begin{aligned}
&\gamma^* = F\gamma \\
&\mu^* = \mu \\
&\delta^* = (I - F)\delta
\end{aligned}$$

Donnons-nous deux matrices P et $\tilde{P}$ telles que $P^T P = F^{-1}$ et $\tilde{P}^T \tilde{P} = (I - F)^{-1}$ et une base $(\phi_{jk}^{\#})$ de V_j^* associée; alors les coefficients $(\alpha_{jk}^{\#})$ de $P_j u$ cette base satisfont :

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\#} = P\gamma^* \\
&\mu^{\#} = \mu^* \\
&\delta^{\#} = \tilde{P}\delta^*
\end{aligned}$$

8 Autres types d'ondelettes

Contentons-nous de citer trois variantes :

- Dans le cas multidimensionnel, il existe des solutions plus sophistiquées que le simple produit tensoriel d'ondelettes monodimensionnelles ([7]).
- Ondelettes périodisées ([17] (chap. III, 11), [12]).
- Ondelettes avec un facteur de dilatation différent de 2 ([7], chap.10).

References

[1] IEEE IT, vol. 38, No.2, March 1992.

[2] J.Bergh, J.Lofstrom, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag, 1976.

[3] C.de Boor et R.Q.Jia, *Controlled approximation and a characterization of the local approximation order* Proc. Am. Math. Soc., vol 95, No 4, dec 1985.

[4] J.Bretagnolle, C.Huber, *Estimation des densités: risque minimax,* Zeit. fur Wahrsch. 47, ppp119-137, 1979.

[5] W.L.Briggs et V.E.Henson, *Wavelets and Multigrid,* SIAM J. on Scient. Comput., mars 1993

[6] A.Cohen, *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal,* Thèse, Université Paris IX Dauphine, 1990.

[7] I.Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets,* CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

[8] Antonini, Barlaud, Mathieu, Daubechies, *Image Coding Using Wavelet Transform,* IEEE IP, Vol.1, No. 2, April 1992.

[9] B.Delyon, A.Juditsy, *Statitical estimation with wavelets* Rapport interne IRISA à paraitre.

[10] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, *Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage*

[11] L.Hervé, *Méthodes d'opérateurs quasi-compacts...* Thèse, Université de Rennes I, 1992.

[12] S.Jaffard, P. Laurentçot, *Wavelets and P.D.E.'s* in *Wavelets : A Tutorial ...*, C.K.Chui editeur, Academic Press.

[13] I.Johnstone, G.Kerkyacharian, D.Picard, *Estimation d'une densité de probabilité par méthode d'ondelettes* C.R.A.S., 1993.

[14] G.Kerkyacharian, D.Picard, *Introduction aux ondelettes et estimation de densité,* Cours, Universités Nancy 1, Paris 6, Paris 7.

[15] G.Kerkyacharian, D.Picard, *Density Estimation in Besov Spaces,* Statistics & Probability Letters 13 (1992).

[16] P.G.Lemarié, *Fonction à support compact dans les analyses multi-resolutions* Revista Matematica Iberoamericana

[17] Y.Meyer, *Ondelettes et opérateurs,* Hermann, 1990

[18] Y.Meyer, *Ondelettes sur l'intervalle,* Revista Matemática Ibero-Americana 7 (2), 115-133.

[19] G.Strang et G.Fix, *A Fourier analysis of the finite element variational method*, Constructive aspects of functional analysis, Geymonat ed., C.I.M.E., 1978, pp 793-840.

[20] H.Triebel *Theory of Function Spaces,* Birkhauser 1983.

[21] L.F.Villemoes *Energy Moments in Time and...,* SIAM J. Math. Anal. Vol 23, No. 6, Nov 1992.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technôpole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, IRISA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399