

Identification des permeabilites relatives et de la pression capillaire dans les experiences de centrifugation

Jian Feng Zhang, Catherine Chardaire-Riviere

► **To cite this version:**

Jian Feng Zhang, Catherine Chardaire-Riviere. Identification des permeabilites relatives et de la pression capillaire dans les experiences de centrifugation. [Rapport de recherche] RR-1954, INRIA. 1993. <inria-00074719>

HAL Id: inria-00074719

<https://hal.inria.fr/inria-00074719>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Identification des
perméabilités relatives et de
la pression capillaire dans les
expériences de centrifugation*

Jian Feng ZHANG
Catherine CHARDAIRE-RIVIÈRE

N° 1954
Juillet 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

Identification des Perméabilités Relatives et de la Pression
Capillaire dans les Expériences de Centrifugation

Identification of Relative Permeabilities and Capillary
Pressure from Centrifuge Experiments

Jian Feng Zhang¹, Catherine Chardaire-Rivière²

¹INRIA domaine de Voluceau, 78153 le Chesnay Cédex

²IFP, B.P.331, 92506 Rueil-Malmaison Cédex

Résumé

On modélise d'abord une expérience de centrifugation réalisée à l'IFP. L'existence d'un état stationnaire du modèle est analysée, la contrainte sur la vitesse angulaire qui permet l'existence de cet état stationnaire et l'expression du profil de saturation d'équilibre sont obtenues. Un code de simulation et d'identification des paramètres en utilisant les mesures expérimentales a été développé. Ce modèle est validé numériquement par plusieurs exemples.

Mots clés : Modélisation, Solution stationnaire, Problème inverse, Optimisation

Abstract

In this paper, a mathematical model for a centrifuge experiment done in IFP is built. We analyze the existence of an equilibrium state and give some constraints on the velocity such that the existence holds. We also obtain the formulation of the equilibrium solution. In order to simulate such a experiment and to estimate the relative permeabilities and the capillary pressure from the experimental data of local saturations, a code written in Fortran is developed and tested by some examples.

Key words : Modelization, Stationary solution, Inverse problem, Optimization

1 Introduction

Récemment, une nouvelle technique de centrifugation a été développée dans les laboratoires de l'IFP pour l'estimation des perméabilités relatives et de la pression capillaire dans un écoulement diphasique dans un milieu poreux. Ce genre d'expérience possède des avantages par rapport aux autres expériences telles que le drainage forcé. Un dispositif à ultra-sons est utilisé pour obtenir des informations, mesures locales des profils de saturation, ce qui est nouveau. Par ailleurs l'existence d'un état stationnaire pour une vitesse constante nous permet d'analyser théoriquement certains caractères de nos résultats numériques. Ainsi on peut calculer directement la valeur de la saturation d'équilibre sur la face d'entrée, ou estimer la vitesse angulaire maximale qui assurera l'existence d'une solution stationnaire (voir la section 3).

Ces deux aspects, expérimental et numérique, nous ont amené à développer un code ACEX pour la simulation de telles expériences et l'identification de paramètres à partir des mesures, notamment de saturation locale.

Pour simuler ce type d'expérience, la méthode d'éléments finis et un schéma de Godunov sont appliqués. On a introduit la technique des moindres carrés pour l'identification des paramètres, et en ce qui concerne le gradient de la fonction coût, un calcul exact est utilisé en résolvant le système d'état adjoint.

Dans la section suivante, nous allons d'abord introduire le modèle mathématique, puis dans les section 3 et 4 nous étudierons la possibilité de l'existence d'une solution stationnaire et les conditions aux limites convenables. Enfin, nous présenterons les méthodes numériques utilisées et les résultats numériques.

2 Modélisation de l'expérience

2.1 Modèle physique

Le modèle physique est représenté simplement sur la figure 1.

L'échantillon est saturé d'eau initialement, entouré d'huile et placé horizontalement dans la centrifugeuse. Il tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire $\omega(t)$. Durant l'expérience on mesure à la sortie la quantité d'eau déplacée par l'huile $Q_w(t)$, et

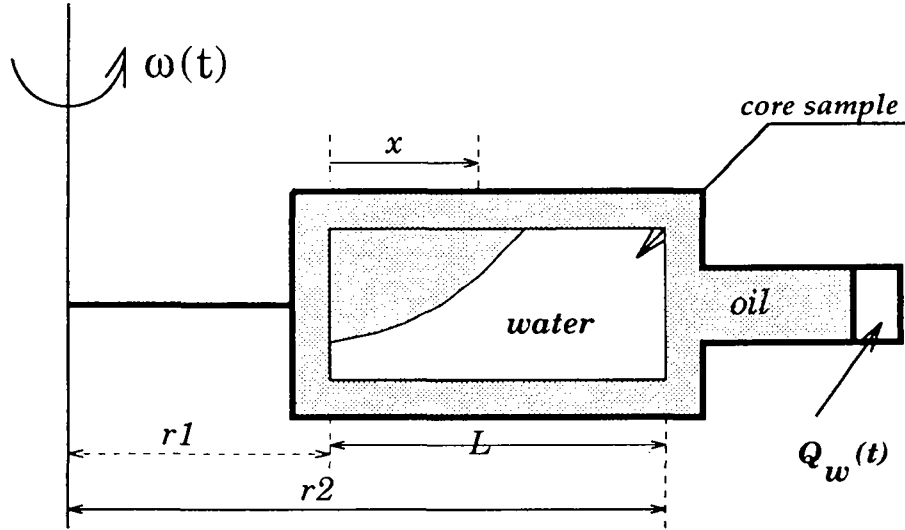


Figure 1: modèle physique

à l'aide d'un dispositif à ultra-sons on peut mesurer aussi les saturations de l'eau pour plusieurs positions dans l'échantillon. A partir de ces mesures nous allons estimer les perméabilités relatives et la pression capillaire de l'échantillon. Pour ce faire nous allons tout d'abord décrire la modélisation de ce genre d'expérience.

Les fluides dans le barreau sont considérés diphasiques incompressibles et immiscibles, la vitesse angulaire $\omega(t)$ sera en pratique soit constante, soit constante par morceaux ou soit linéaire par morceaux.

2.2 Modèle mathématique

D'après le modèle physique, l'écoulement du fluide dans le barreau est unidimensionnel diphasique et incompressible. Pour modéliser ce système, la loi de Darcy est utilisée pour les deux phases du fluide dans l'échantillon. On note désormais les fluides mouillant et non-mouillant avec les indices w , nw respectivement, et la saturation du fluide mouillant avec S_w (ou S), on peut écrire les équation suivantes:

$$q_{nw} = -kk_{nw} \left(\frac{\partial P_{nw}}{\partial x} - \rho_{nw} \omega^2 (r_1 + x) \right) \quad (1)$$

$$q_w = -kk_w \left(\frac{\partial P_w}{\partial x} - \rho_w \omega^2 (r_1 + x) \right) \quad (2)$$

où $k_{nw} = k_{rnw}/\mu_{nw}$ et $k_w = k_{rw}/\mu_w$ sont les mobilités relatives des deux fluides, q_w et q_{nw} représentent les débits du fluide, et P la pression du fluide.

En additionnant les équations (1) et (2), on obtient le débit total q_T :

$$q_T = -k(k_{nw} \frac{\partial P_{nw}}{\partial x} + k_w \frac{\partial P_w}{\partial x} - (k_{nw}\rho_{nw} + k_w\rho_w)\omega^2(r_1 + x)). \quad (3)$$

Ici, on introduit la notion de pression globale(notée P)(voir [4]), définie par

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{k_{nw} \frac{\partial P_{nw}}{\partial x} + k_w \frac{\partial P_w}{\partial x}}{k_w + k_{nw}}. \quad (4)$$

Si on note

$$d(S) = k_w(S) + k_{nw}(S),$$

et

$$\rho(S) = \frac{k_w(S)\rho_w + k_{nw}(S)\rho_{nw}}{d(S)},$$

on a alors:

$$q_T = -kd(S)(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(S)\omega^2(r_1 + x)). \quad (5)$$

Puisque l'écoulement est incompressible q_T est indépendant de la variable d'espace x .

On suppose que la pression capillaire P_c qui est une fonction de S_w est telle que sur la figure 2:

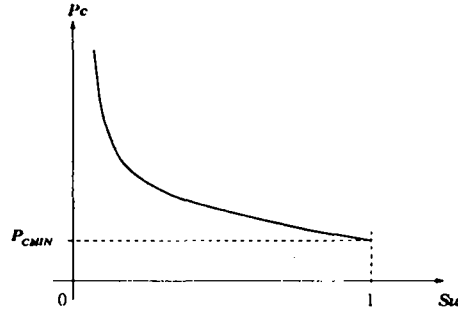


Figure 2: la forme de P_c

$$P_c = P_{nw} - P_w \quad , \quad P_c \geq 0 \quad , \quad P_c \text{ décroissante.} \quad (6)$$

De (3) et (6) on déduit

$$\frac{\partial P_{nw}}{\partial x} = -\frac{q_T}{kd(S)} + \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \rho(S)\omega^2(t)(r_1 + x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_w}{\partial x} = -\frac{q_T}{kd(S)} - \frac{k_{nw}}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \rho(S)\omega^2(t)(r_1 + x). \quad (8)$$

La loi de conservation pour le fluide mouillant s'écrit

$$\phi(x) \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial q_w}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

d'où l'équation d'état du système à résoudre:

$$\phi(x) \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \frac{k_w}{d(S)} q_T + \frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \Delta \rho \omega^2(t)(r_1 + x) \right) = 0. \quad (10)$$

où $\Delta \rho = \rho_w - \rho_{nw}$, et où q_T est lié à la pression globale P par (5).

On remarque que la production cumulée de l'eau déplacée par l'huile est

$$Q^c(t) = \int_0^t q_w dt. \quad (11)$$

2.3 Calcul du débit total

Dans la formule (10), q_T étant une inconnue, la donnée est la chute de pression entre les deux faces que l'on note habituellement ΔP . Nous allons calculer q_T en fonction de ΔP , avec $\Delta P = P_{nw}^{ext}(L) - P_{nw}^{ext}(0)$ où l'indice *ext* symbolise l'extérieur de l'échantillon. Pour ce faire on commence par intégrer la relation (5) sur l'intervalle $[0, L]$, ce qui donne

$$q_T = \frac{P(0) - P(L) + \int_0^L \rho(S)\omega^2(t)(r_1 + x) dx}{\int_0^L \frac{1}{kd(S)} dx}. \quad (12)$$

En intégrant l'équation (4) sur $[0, L]$, on obtient

$$P(L) - P(0) = P_{nw}(L) - P_{nw}(0) - \int_0^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx. \quad (13)$$

Dans cette équation $P_{nw}(L)$, $P_{nw}(0)$ représentent les pressions du fluide non mouillant à l'intérieur du barreau à chacune de ses extrémités. On connaît déjà la chute de pression créée à l'extérieur du barreau par la force centrifuge:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_{nw}^{ext}(L) - P_{nw}^{ext}(0) \\ &= \frac{1}{2} \rho_{nw} \omega^2(t)(r_2^2 - r_1^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Remarquons que

1. à l'entrée($x = 0$) , seule l'huile entre dans le barreau. La continuité de la pression de l'huile implique donc que

$$P_{nw}^{ext}(0) = P_{nw}^{int}(0);$$

2. à la sortie($x = L$), on observe un débit d'eau. La continuité de la pression de l'eau dans le barreau implique

$$\begin{aligned} P_{nw}^{ext}(L) &= P_w^{ext}(L) = P_w^{int}(L) \\ &= P_w^{int}(L) - P_{nw}^{int}(L) + P_{nw}^{int}(L) \\ &= -P_c(S_w(L)) + P_{nw}^{int}(L). \end{aligned}$$

On en déduit alors:

$$P(L) - P(0) = P_c(S_w(L)) - \int_0^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \rho_{nw} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2).$$

d'où l'expression du débit total:

$$q_T = \frac{-P_c(S_w(L)) - \frac{1}{2} \rho_{nw} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) + \int_0^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx + \int_0^L \rho(S) \omega^2 (r_1 + x) dx}{\int_0^L \frac{1}{kd(S)} dx}. \quad (15)$$

Les équations (10) et (15) constituent le système d'équations non linéaires qu'on peut résoudre numériquement en ajoutant des conditions aux limites.

3 Recherche d'une solution stationnaire

Dans les laboratoires, lors d'une expérience de centrifugation où la vitesse angulaire $\omega(t)$ est constante(noté ω), le système finit par atteindre un état stationnaire. Nous allons donc analyser la possibilité de l'existence d'une solution stationnaire pour le modèle mathématique décrit précédemment, puis introduire les conditions aux limites adéquates à son existence et établir certaines propriétés de cette solution lorsque l'état stationnaire est atteint.

3.1 Les équations vérifiées par une solution d'équilibre

On cherche une solution qui vérifie $S(x, t) = S(x)$, $q_w(x, t) = 0$, $q_{nw}(x, t) = 0$ et $q_T(t) = 0$ pour t infiniment grand, ce qui implique

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = 0.$$

D'après l'équation (9), on obtient:

$$q_w(x) = \text{constante} \quad \forall x \in [0, L].$$

D'une part, grâce à l'équation (10) et $q_T = 0$, on a

$$\frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \Delta \rho \omega^2 (r_1 + x) = \text{constante} = q_w(x = 0).$$

Puisque l'échantillon est entouré par le fluide non mouillant (l'huile), on a à l'entrée

$$q_w(x = 0) = 0. \quad (16)$$

c'est à dire qu'il n'y a pas d'entrée de fluide mouillant. En utilisant cette condition à la limite, on obtient donc

$$\frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \frac{kk_w k_{nw}}{d(S)} \Delta \rho \omega^2 (r_1 + x) = 0, \quad x \in]0, L[. \quad (17)$$

D'autre part, à partir de l'équation de débit total (15), on a aussi:

$$-P_c(S_w(L)) - \frac{1}{2} \rho_{nw} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) + \int_0^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx + \int_0^L \rho(S) \omega^2 (r_1 + x) dx = 0. \quad (18)$$

Donc, sous la condition (16) s'il existe une solution d'équilibre, cette solution vérifie les deux équations (17),(18).

3.2 Une solution d'équilibre vérifiant les conditions à l'intérieur du barreau: première condition sur la vitesse angulaire ω

Dans ce paragraphe, nous allons exhiber une solution d'équilibre (croissante continue) $S_w^{sol}(x)$, et vérifier que les deux équations (17) et (18) sont satisfaites par cette solution.

On définit d'abord une fonction $\pi(x)$ sur un intervalle $[0, x_s]$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x}(x) = -\omega^2 \Delta \rho (r_1 + x) & , \quad x \in [0, x_s], \\ \pi(x_s) = P_{cMIN}. \end{cases}$$

où $x_s (\leq L)$ est défini par

$$P_{cMIN} = \frac{1}{2} \omega^2 \Delta \rho (r_2^2 - r_s^2) \quad , \quad r_s = r_1 + x_s. \quad (19)$$

Cette construction n'est possible que si r_s donné par (19) est supérieur à r_1 . c'est à dire si

$$P_{cMIN} \leq \frac{1}{2} \omega^2 \Delta \rho (r_2^2 - r_1^2). \quad (20)$$

La vitesse angulaire ω doit donc vérifier

$$\omega \geq \omega_{MIN} = \sqrt{\frac{2P_{cMIN}}{\Delta \rho (r_2^2 - r_1^2)}}. \quad (21)$$

Cette première condition sur ω assure q_T positif au début de l'expérience. ce qui permet le déroulement normal de l'expérience. En effet à l'instant initial $S_w \equiv 1$. et on a

$$q_T = \frac{\frac{1}{2} \rho_{nw} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) - P_{cMIN}}{\int_0^L \frac{1}{k} dx} \geq 0.$$

On définit alors la solution stationnaire par

$$\begin{cases} S_w^{sol} = P_c^{-1}(\pi(x)) & , \quad x \in [0, x_s], \\ S_w^{sol} = 1 & , \quad x \in]x_s, L]. \end{cases}$$

Voir figure 3.

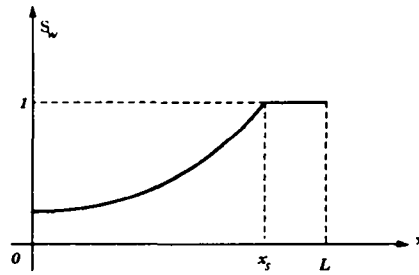


Figure 3: la solution d'équilibre S_w^{sol}

On remarque que

$$\frac{\partial P_c}{\partial x}(S_w^{sol}) = \frac{d\pi}{dx} = -\omega^2 \Delta \rho (r_1 + x). \quad x \in [0, x_s].$$

- Donc cette fonction vérifie l'équation(17) sur l'intervalle $[0, x_s[$ où $k_w k_{nw} \neq 0$, et sur l'intervalle $[x_s, L]$ on a

$$k_{nw}(S_w^{sol}(x)) = k_{nw}(1) = 0.$$

- Elle vérifie aussi l'équation (18), puisque

$$\begin{aligned}
& -P_c(S_w^{sol}(L)) - \frac{1}{2}\rho_{nw}\omega^2(r_2^2 - r_1^2) + \int_0^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx + \int_0^L \rho(S)\omega^2(r_1 + x)dx \\
= & -P_c(1) - \frac{1}{2}\rho_{nw}\omega^2(r_2^2 - r_1^2) + \int_0^{x_s} \frac{k_w}{d(S)} (-\Delta\rho\omega^2(r_1 + x))dx \\
& + \int_{x_s}^L \frac{k_w}{d(S)} \frac{\partial P_c}{\partial x} dx + \int_0^{x_s} \rho(S)\omega^2(r_1 + x)dx + \int_{x_s}^L \rho(S)\omega^2(r_1 + x)dx \\
= & -P_{cMIN} - \frac{1}{2}\rho_{nw}\omega^2(r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{2}\omega^2\rho_{nw}(r_s^2 - r_1^2) + \frac{1}{2}\rho_w(r_2^2 - r_s^2) \\
= & -P_{cMIN} + \frac{1}{2}\omega^2\Delta\rho(r_2^2 - r_s^2) = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

3.3 Conditions aux limites compatibles avec la solution d'équilibre

Comme on l'a déjà vu au paragraphe 3.1(équation(16)), les conditions expérimentales imposent sur la face d'entrée un débit d'eau nul $q_w(x = 0) = 0$, condition qui est bien compatible avec la solution d'équilibre par construction de cette dernière.

Nous allons maintenant proposer deux types de conditions aux limites sur la face de sortie, et nous allons vérifier que ces deux conditions sont compatibles avec la solution d'équilibre S_w^{sol} qu'on a trouvé précédemment:

1. soit $q_{nc}(L, t) = 0$ (pas de production de fluide non mouillant).
2. soit $S_w(L, t) = 1$ (saturation maximale en fluide mouillant).

La condition de débit imposé $q_{nc}(L, t) = 0$ est évidemment compatible avec la solution d'équilibre qui vérifie l'équation (17), et qui donne donc un débit total nul.

Quant à la condition de saturation imposée $S_w(L, t) = 1$, puisque P_c est connue comme une fonction positive de S_w , d'après (19) on a $r_s \leq r_2$, donc $x_s \leq L$. Cela veut dire que la condition à la limite en saturation $S_w(L, t) = 1$ est aussi convenable. On remarque ici que $x_s = L$ si et seulement si $P_c(S_w(L, t)) = 0$, i.e $P_{cMIN} = P_c(S_w(L, t) = 1) = 0$.

3.4 Détermination de la saturation d'équilibre S_e à l'entrée: deuxième condition sur la vitesse angulaire ω

Afin de déterminer la valeur S_e en $x = 0$ de la solution d'équilibre S_w^{sol} trouvée précédemment, on intègre l'équation(17) sur $[0, x_s]$

$$P_c(S_w^{sol}(0)) = P_c(S_w^{sol}(x_s)) + \frac{1}{2}\omega^2 \Delta\rho(r_2^2 - r_1^2).$$

Par ailleurs, puisque $S_w^{sol}(x) \equiv 1$ sur $[x_s, L]$, on a

$$P_c(S_w^{sol}(x_s)) = P_c(S_w^{sol}(L)) = P_{cMIN}.$$

En considérant l'équation(19), nous en déduisons que

$$P_c(S_w^{sol}(0)) = \frac{1}{2}\omega^2 \Delta\rho(r_2^2 - r_1^2). \quad (23)$$

A partir de cette équation, nous constatons que:

- L'équation (23) n'a de solution en $S_w^{sol}(0)$ que si:

$$\frac{1}{2}\omega^2 \Delta\rho(r_2^2 - r_1^2) \in [P_{cMIN}, P_{cMAX}],$$

c'est à dire si:

$$\sqrt{\frac{2P_{cMIN}}{\Delta\rho(r_2^2 - r_1^2)}} = \omega_{MIN} \leq \omega \leq \omega_{MAX} = \sqrt{\frac{2P_{cMAX}}{\Delta\rho(r_2^2 - r_1^2)}}. \quad (24)$$

C'est la condition pour que notre modèle mathématique possède une solution d'équilibre (l'inégalité de gauche était déjà apparue nécessaire au paragraphe 3.2 pour définir S_w^{sol}). P_{cMAX} est le maximum de la courbe P_c qui peut être infiniment grand.

- La saturation d'équilibre à l'entrée $S_e = S_w^{sol}(x = 0)$ est alors donnée par

$$S_e = P_c^{-1}\left(\frac{1}{2}\omega^2 \Delta\rho(r_2^2 - r_1^2)\right). \quad (25)$$

Donc pour une vitesse angulaire constante, la saturation d'équilibre S_e à l'entrée du barreau est déterminée par l'équation (25), qu'on peut calculer à la main.

4 Conditions aux limites

On complète donc les équations (10) et (15) à l'intérieur du barreau par un jeu de conditions aux limites choisies en fonction des conditions expérimentales, et permettant l'établissement, lorsque $\omega_{MIN} \leq \omega \leq \omega_{MAX}$ avec ω constant, d'un profil de saturation d'équilibre. Au vu de l'analyse faite au paragraphe précédent, on choisit les conditions aux limites suivantes:

$$q_w(x = 0) = 0 \quad , \quad S_w(x = L) = 1.$$

5 Position du problème inverse et méthodes numériques

5.1 Paramétrisation

Les formes des perméabilités relatives et pression capillaire sont a priori des fonctions monotones de S_w . Pour prendre en compte cette propriété physique, dans la paramétrisation de ces fonctions, il suffit de remplacer chaque courbe $p(S_w)$ ($p(S_w) = k_r(S_w)$ ou $P_c(S_w)$) par sa dérivée et un point sur cette courbe

$$\tilde{p} = \frac{dp}{dS}(S_w).$$

Des contraintes de positivité(ou négativité) sur \tilde{p} utilisées dans la procédure d'optimisation rendent les fonctions $p(S_w)$ monotones.

5.2 Estimation des paramètres

Expérimentalement on peut mesurer certaines quantités, par exemple la production cumulée d'eau durant le temps de l'expérience et les profils de saturation à différents instants. A partir de ces données expérimentales, en utilisant notre modèle numérique, nous allons estimer les perméabilités relatives et la pression capillaire. Une technique des moindres carrés est réalisée qui consiste à minimiser la fonction coût suivante

$$J(kr_w, kr_{nw}, P_c) = \sum_k W_q^k |Q_k^c - Q_k^m|^2 + \sum_k \sum_i W_s^{k,i} |S_{k,i}^c - S_{k,i}^m|^2. \quad (26)$$

où $S_{k,i}^c$ sont les profils de saturations calculés en résolvant notre modèle numérique et Q_k^c sont les productions cumulées d'eau calculées par l'équation (11). $S_{k,i}^m$ et Q_k^m sont les

mesures expérimentales correspondantes, W_s^k et $W_q^{k,i}$ sont les pondérations correspondantes, k et i sont respectivement les indices de temps et d'espace.

Le problème d'identification revient à la détermination des perméabilités relatives et de la pression capillaire qui minimisent cette fonction J .

5.3 Méthode d'optimisation

En réalité les perméabilités relatives sont toujours moins grandes que 1. Avec la paramétrisation, il faut tenir compte de cette contrainte naturelle. Pour ce faire une méthode de pénalisation extérieure est utilisée. un terme de pénalisation $\mu \sum_i \text{Max}(0; k_i - 1)^2$, $i = w, nw$ a été ajouté dans la fonction coût (26), le coefficient de pénalité μ sera choisit selon des essais d'optimisation.

Pour la minimisation de la fonction coût J , il est nécessaire de calculer son gradient. Dans [8] O. Vignes a utilisé la méthode directe en calculant la matrice de sensibilité. Dans notre code on a introduit l'équation d'état adjointe discrète, qui permet le calcul du gradient exact de la fonction coût. Une fois connue la fonction coût et son gradient, il suffit d'utiliser un programme standard d'optimisation (Le programme M2QN1 de Lemaréchal ou la bibliothèque IMSL) pour l'obtention des paramètres optimaux qui minimisent J .

Une technique d'optimisation multi-échelle est utilisée afin d'améliorer l'efficacité de la procédure d'optimisation ([6]).

5.4 Méthodes numériques

On a utilisé un schéma explicite en temps pour approximer le terme de convection et un θ -schéma pour le terme de diffusion non linéaire. A chaque pas de temps, la saturation est approchée par une fonction linéaire sur chaque maille et discontinue d'une maille à l'autre, qui est représentée par sa valeur moyenne et sa pente sur chaque maille. La méthode de Godunov est utilisée pour calculer les flux numériques et une limitation de pente stabilise le schéma. Pour plus de détails on renvoie à [1], [2] et [4]. La méthode itérative de Newton est programmée pour la résolution de l'équation non linéaire associée au θ -schéma.

6 Résultats numériques

En utilisant notre modèle mathématique et les méthodes numériques décrites précédemment, un code Fortran de simulation et d'identification de paramètres nommé AC'EX a été développé. Dans ce code, les programmes de simulation, de calcul de la fonction coût et de son gradient, ont été générés automatiquement à l'aide d'un logiciel Gradpack, écrit dans le système formel MACSYMA ([7] et [6]). Au paragraphe suivant on utilise ce code pour simuler quelques expériences de centrifugation. Ensuite, la méthode d'identification est validée à partir des données d'observations générées par les simulations précédentes: profils de saturation aux différents instants, évolution en fonction de temps de la production d'eau à l'extrémité du barreau.

Pour mieux comparer notre modèle avec celui construit par des autres auteurs, nous prenons l'expérience décrite dans le rapport [3]. Les données de l'expérience sont dans le tableau (1).

Longueur du barreau	4.54cm
Porosité	0.189
Perméabilité	60md
Densité de la phase mouillant	1.024g/cm ³
Densité de la phase non mouillant	0.001g/cm ³
Viscosité de la phase mouillant	0.95cP
Viscosité de la phase non mouillant	0.05cP
Distance du milieu du barreau à l'axe de rotation	7.11cm

Tableau 1: données d'expérience

6.1 Simulations

Les perméabilités relatives sont prises comme des fonctions analytiques:

$$kr_w(S_w) = a_1 S_w^{a_2},$$

$$kr_{nw}(S_w) = b_1 (1 - S_w)^{b_2}.$$

La pression capillaire est entrée en discrétisant:

$$P_c(S_w) = \frac{P_c}{S_w^d}.$$

c'est-à dire que $P_c(S)$ est approché par une fonction linéaire par morceaux en joignant les points suivants

$$P_c(S_i) = \frac{P_c}{S_i^d} : a \begin{cases} S_i = i/10, i = 1, 10 & \text{si } \omega = 2000\text{RPM.} \\ S_0 = 0.05 \text{ et } S_i = i/10, i = 1, 10 & \text{si } \omega \text{ n'est pas constant.} \end{cases}$$

et la valeur $P_{cMIN} = P_c(S_{10} = 1) = P_c$. Pour P_{cMAX} on prend:

$$P_{cMAX} = \begin{cases} 0.2(P_c(0.1) - P_c(0.2))/(0.2 - 0.1) + P_c(0.2) & \text{si } \omega \text{ constant.} \\ 0.1(P_c(0.05) - P_c(0.1))/(0.1 - 0.05) + P_c(0.1) & \text{si } \omega \text{ n'est pas constant.} \end{cases}$$

Numériquement pour ω constante on a choisit un maillage avec $\Delta x = 4.52/30\text{cm}$, et avec un pas de temps $\Delta t = 600/1000\text{secondes}$; Pour ω non constante, on a choisit $\Delta x = 4.52/30\text{cm}$, $\Delta t = 4000/3000\text{secondes}$.

On a tracé respectivement les profils de saturation et les productions d'eau pour les différentes valeurs de a_1, a_2, b_1, b_2, P_c et $\omega(t)$:

Figure 4 et 5: $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2 = 2, d = 3, P_c = 1\text{Psi}, \omega = 2000\text{RPM}$;

Figure 6 et 7: $a_1 = b_1 = 1, a_2 = 2, b_2 = 4, d = 3, P_c = 1\text{Psi}, \omega = 2000\text{RPM}$;

Figure 8 et 9: $a_1 = b_1 = 1, a_2 = 4, b_2 = 4, d = 3, P_c = 1\text{Psi}, \omega = 2000\text{RPM}$;

Figure 10 et 11: $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2 = 2, d = 1, P_c = 0.58\text{Psi}(= 0.04\text{Bar})$ et la vitesse angulaire

$$\begin{aligned} \omega(t) &= 380\text{RPM} & \text{si } t \in [0, 1000] \text{ (en secondes),} \\ &500\text{RPM} & \text{si } t \in]1000, 2000], \\ &700\text{RPM} & \text{si } t \in]2000, 3000], \\ &1500\text{RPM} & \text{si } t \in]3000, 4000]. \end{aligned} \quad (27)$$

Dans le cas de la vitesse angulaire constante, les données $d = 3, P_c = 1\text{Psi}, \omega = 2000\text{RPM}$ (figures 4 à 9) déterminent le profil de saturation d'équilibre d'après un simple calcul, en particulier la saturation d'équilibre à l'entrée S_e selon l'équation (25): $S_e \approx$

0.37. Les vitesses angulaires maximum et minimum correspondantes sont aussi calculées à partir de (24): $\omega_{MAX} \approx 18900\text{RPM}$ et $\omega_{MIN} \approx 436\text{RPM}$ car P_{cMAX} et P_{cMIN} sont respectivement 1874Psi et 1Psi. Quand ω est non constante, on obtient $\omega_{MAX} \approx 1820\text{RPM}$ et $\omega_{MIN} \approx 332\text{RPM}$ car $P_{cMAX} = 1.2\text{Bar}$ et $P_{cMIN} = 0.04\text{Bar}$ respectivement. Dans ce cas pour chaque palier de vitesse on a calculé analytiquement un profil de saturation stationnaire, ainsi la saturation S_ϵ pour $\omega = 1500\text{RPM}$: $S_\epsilon \approx 0.048$. Il est clair que les conditions sur la vitesse angulaire (24) sont satisfaites dans les deux cas, et on observe que les profils de saturation stationnaires analytiques coincident bien avec les résultats numériques simulés par notre code (voir les figures des profils de saturations où les pointillés reliant les points ronds présentent les profils de saturation stationnaires analytiques).

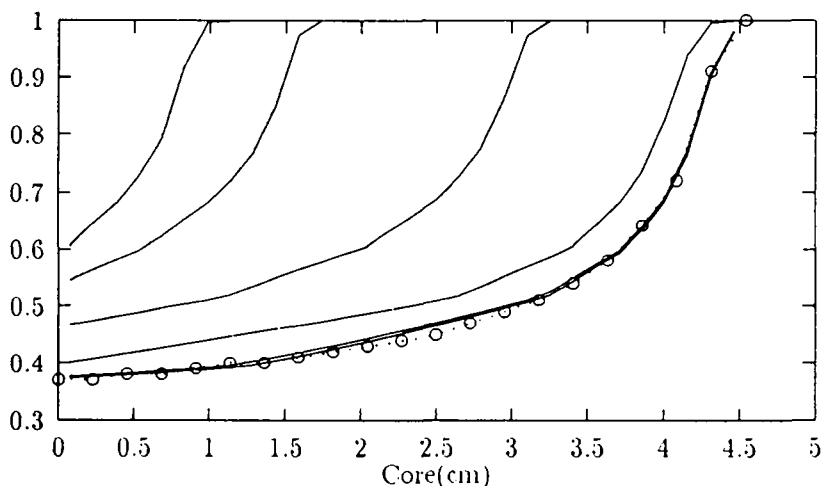


Figure 4: Profils de saturation S_u .

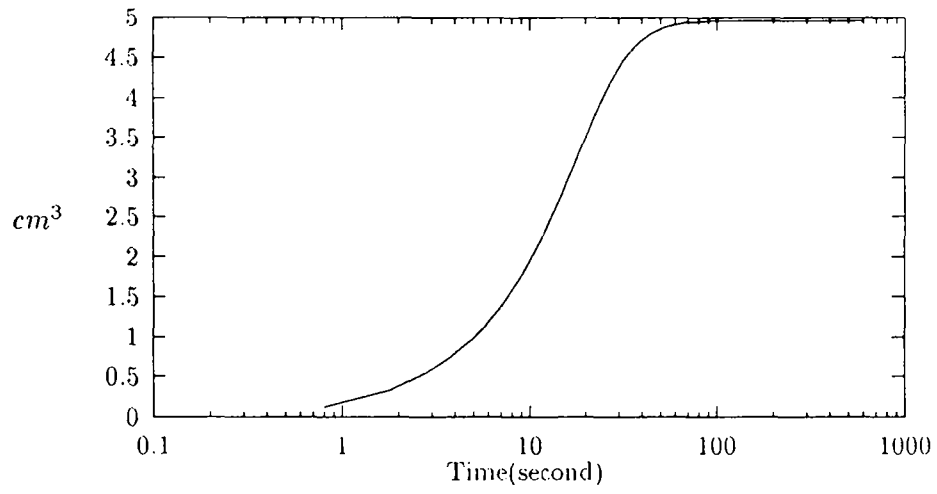


Figure 5: Production du fluide déplacé $Q_w(t)$

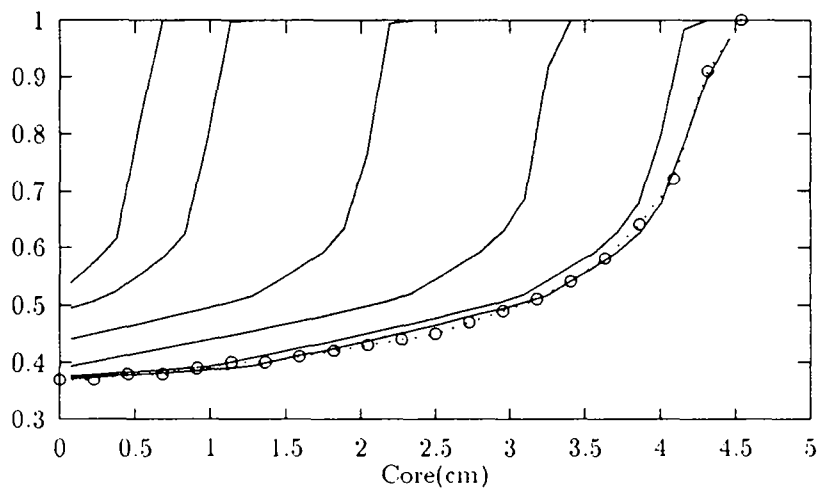


Figure 6: Profils de saturation S_w

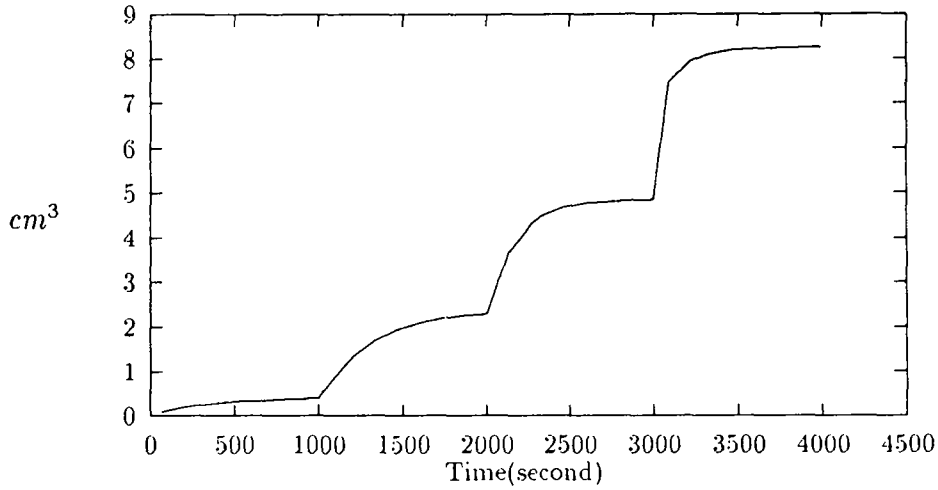


Figure 11: Production du fluide déplacé $Q_w(t)$

6.2 Identification des paramètres

Trois exemples sont traités afin de valider la procédure d'identification du code. Dans ces exemples, les résultats tracés dans les figures 4 à 11 sont prises comme données d'observations pour identifier les perméabilités et la pression capillaire, donc normalement on doit retrouver les paramètres utilisés dans les simulations.

Le premier cas avec $\omega(t) = 2000\text{RPM}$: à partir des données des figures (4) et (5) on identifie les k_r sous forme analytique et P_c sous forme discrète avec 10 valeurs, les résultats d'identification sont décrits dans le tableau 2 et dans les figures 12 à 14. Dans ce cas le critère diminue de 1.04 jusqu'à $3.12E - 11$ en 70 iterations.

Le deuxième cas: la vitesse angulaire est considérée constante par morceau, comme dans l'équation (27). A partir des données des figures 10 et 11 on identifie seulement les k_r sous forme analytique, et on trouve rapidement les résultats (voir le tableau 3 et les figures 15, 16) en 30 itérations. Le critère diminue de 0.44 à $2.14E - 13$.

Le troisième cas: la vitesse angulaire est considérée constante par morceau, comme dans l'équation (27). A partir des données des figures 10(i.e seulement les profils de saturations), on identifie en même temps les k_r et P_c sous formes discrètes. Les résultats sont tracés

dans les figures 17 à 19. Le critère diminue de 60.80 à $2.70E - 8$ en 159 itérations.

Dans ces trois cas, on voit bien que les kr représentés en forme exponentielle sont identifiés de façon unique, et que les kr et P_c représentés en forme discrète sont aussi bien déterminés si on a assez d'observations. On observe que sur le domaine où on manque d'observations ($S_w \leq 0.35$ pour le premier cas et S_w tout près de zéro pour les deux derniers cas), les kr et P_c sont moins bien identifiés.

	valeurs initiales	valeurs identifiées	valeurs exactes
a_1	2.	1.	1.
b_1	0.5	1.0001	1.
a_2	1.	2.	2.
b_2	4.	2.0001	2.

Tableau 2: kr identifiés en 70 itérations

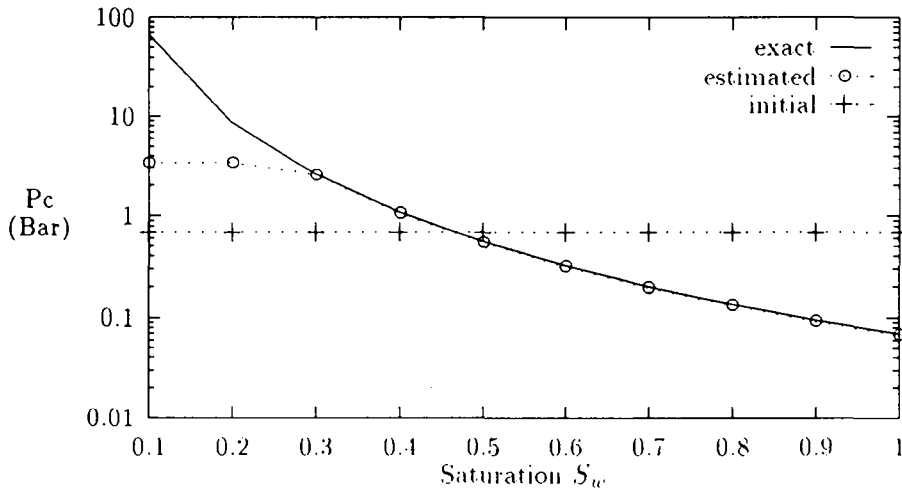


Figure 12: P_c identifiés en 70 itérations

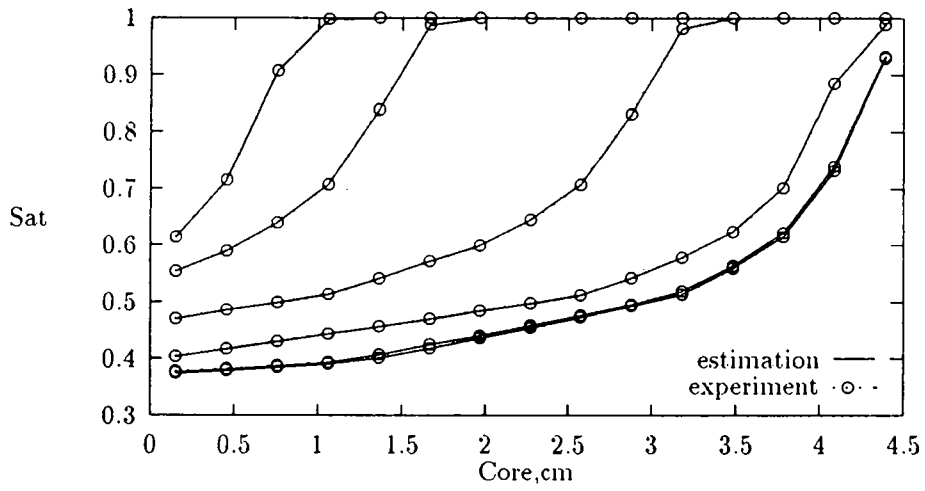


Figure 13: Profils de saturation S_w

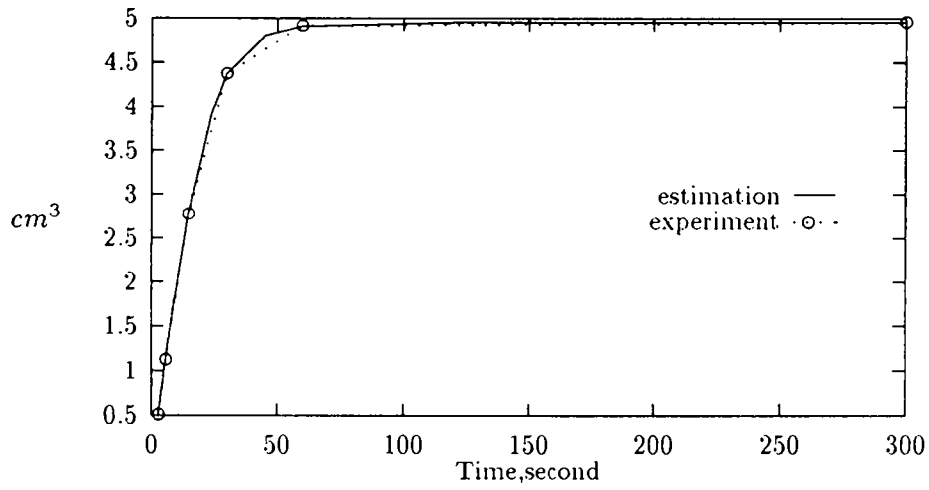


Figure 14: Productions du fluide déplacé $Q_w(t)$

	valeurs initiales	valeurs identifiées	valeurs exactes
a_1	0.2	1.0	1.
b_1	2.0	0.99999	1.
a_2	1.0	2.	2.
b_2	4.0	2.	2.

Tableau 3: kr identifiés en 30 itérations

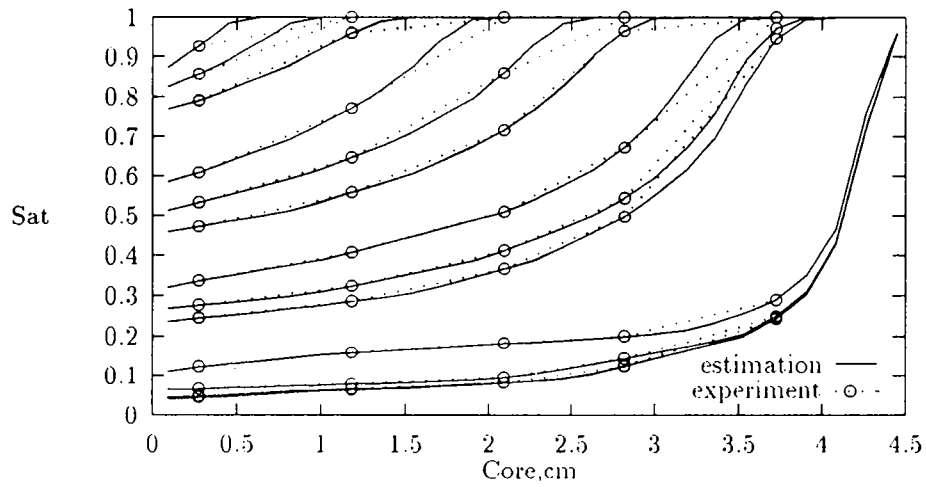


Figure 15: Profils de saturation S_w

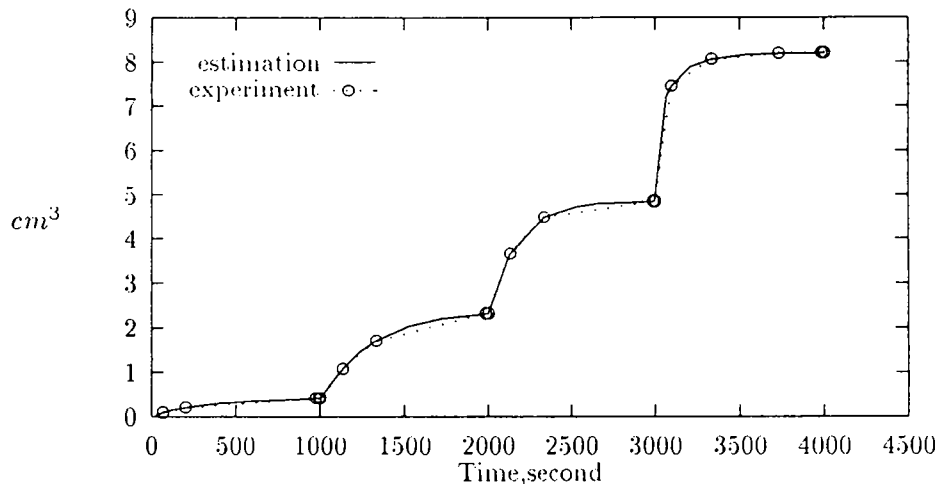


Figure 16: Productions du fluide déplacé $Q_w(t)$

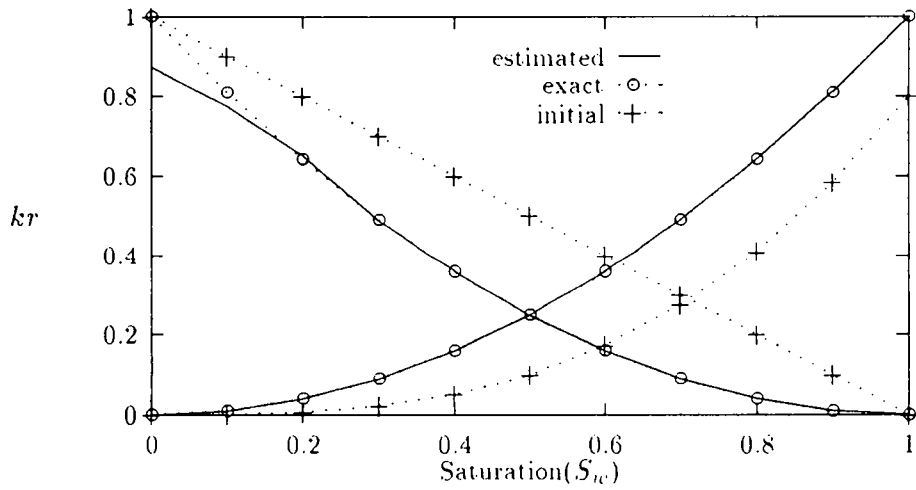


Figure 17: kr identifiés en 159 itérations

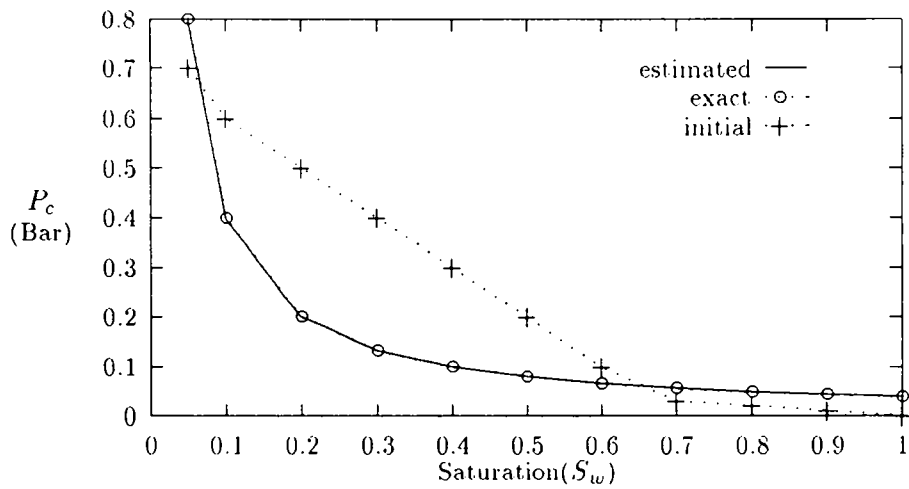


Figure 18: Profils de saturation

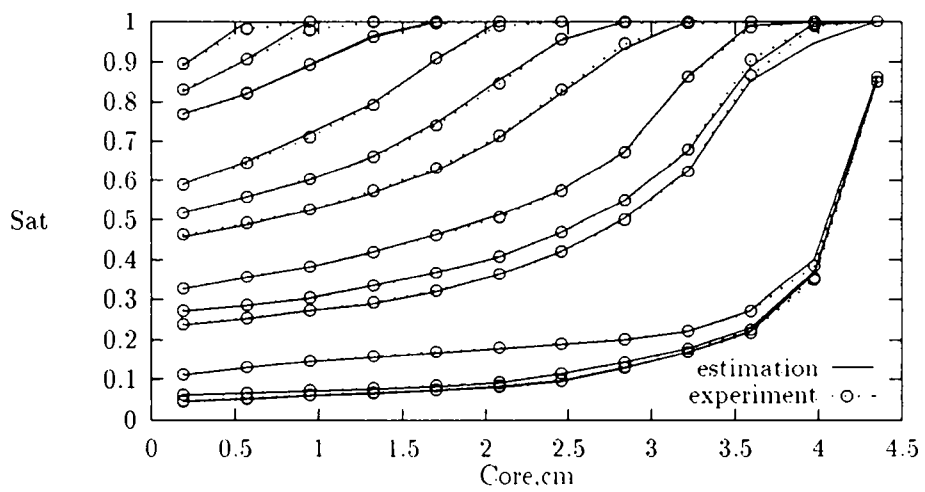


Figure 19: Profils de saturation S_w

Un exemple d'utilisation du modèle à partir des données expérimentales réalisées sur un échantillon de grès des Vosges est présenté dans la référence [5].

7 Conclusion

L'objet de ce travail est l'étude mathématique et numérique d'une expérience de centrifugation développée récemment dans les laboratoires de l'IFP. Dans un premier temps nous avons analysé l'existence éventuelle d'un état stationnaire qu'on observe souvent durant les expériences. Et on a précisé sous quelles hypothèses un état stationnaire pouvait exister. En étudiant cet état stationnaire, nous avons obtenu des conditions bornant la vitesse angulaire. Nous avons obtenu également l'expression analytique de la saturation d'équilibre à la face d'entrée. Deux types de conditions aux limites convenables sont proposées, et elles coïncident bien avec les résultats expérimentaux.

Dans un deuxième temps, on a comparé notre modèle numérique avec celui présenté par J.E. Nordtvedt, V. Nilsen et K. Kolltveit dans leur rapport [3]. La comparaison des résultats de simulation nous montre que notre simulateur donne des résultats très proches de ceux qui sont décrits dans [3]. Et on a aussi comparé les profils de saturation d'équilibre simulés par notre code avec la solution analytique.

Pour le problème inverse, dans les laboratoires de l'IFP on peut mesurer les profils de saturation à l'aide d'un dispositif à ultra-sons et éventuellement les quantités cumulées d'eau déplacée par l'huile. A partir de ces observations nous avons estimé les perméabilités relatives et la pression capillaire de l'échantillon, en utilisant la technique des moindres carrés: on minimise l'écart (décrit par une fonction coût) entre les données mesurées et les valeurs correspondantes calculées par notre simulateur, et on obtient ainsi les paramètres optimaux. La minimisation de la fonction coût a été effectuée en utilisant un programme d'optimisation standard (M2QN1 ou dans IMSL). Le gradient de la fonction coût a été calculé en introduisant les équations adjointes, la deuxième partie du code consiste donc dans le calcul du gradient de la fonction coût.

Pour tester l'algorithme d'identification, nous avons utilisé les données synthétiques obtenues lors de la validation des simulation numériques. Dans tous les cas testés, nous avons retrouvé, comme résultat de l'optimisation, les courbes de perméabilités relatives et de pression capillaire ayant servi à générer les données. Ceci valide bien notre procédure d'identification, montre que les informations collectées à l'IFP lors d'une expérience de

centrifugation déterminent bien de façon unique les courbes de perméabilités relatives et de pression capillaire, et que ces dernières peuvent être effectivement déterminées par le code ACEX.

On a donc modélisé l'expérience de centrifugation, et écrit un programme qui simule l'expérience et identifie les perméabilités relatives et la pression capillaire. Les résultats numériques obtenus montrent la faisabilité du modèle et des méthodes numériques utilisées.

Remerciements:

Cette étude a été financée partiellement et effectuée dans le cadre du consortium ACEX rassemblant l'IFP et les autres compagnies, Nous remercions également G. Chavent et J. Jaffré qui nous ont beaucoup aidé dans ce travail.

Références

- [1] **C. Chardaire-Rivière, G. Chavent, J. Jaffré, J. Liu, B. Bourbiaux:** "Simultaneous Estimation of Relative Permeabilities and Capillary Pressure", paper SPE 19680 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, U.S.A., 1989
- [2] **C. Chardaire-Rivière, G. Chavent, J. Jaffré, J. Liu:** "Relative Permeabilities and Capillary Pressure Estimation Through Least Square Fitting", paper presented at the IMA Conference on The Mathematics of Oil Recovery. Cambridge University, U.K., 1989
- [3] **J.E. Nordtvedt, V. Nilsen, K. Kolltveit:** "Simulation of Primary Drainage Experiment in a Centrifuge . Part 1: Mathematical Modelling and Numerical Implementation", Report of University of Bergen, Bergen, Norway. 1988
- [4] **G. Chavent, J. Jaffré:** "Mathematic Models and Mixed Finite Elements for Reservoir Simulation", North-Holland. 1986
- [5] **C. Chardaire-Riviere, P. Forbe, J.F. Zhang, G. Chavent, and R. Lenormand:** "Improving the Centrifuge Technique by Measuring Local Saturations", paper SPE 24882 presented at the 67th Annual Technical Conference and Exhibition, Washington, DC, U.S.A. October, 1992
- [6] **C. Chardaire-Rivière, G. Chavent, J. Jaffré, J. Liu:** "Multiscale Representation for Simultaneous Estimation of Relatives Permeabilities and Capillary Pressure", paper SPE 20501 presented at the 65th Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, U.S.A. September 1990
- [7] **J. Liu:** "Calcul formel rt problem inverse", PhD thesis. University of Paris-Dauphine. 1989
- [8] **O. VIGNES:** "Application of Optimization Methods in Oil Recovery Problems" , PhD thesis. the Norwigan Institute of Technology. 1993



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

